FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

LA TRIGONOMETRÍA EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO: UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE EN LA ETAPA ESCOLAR.

Memoria para optar al Título Profesional de Profesor de Matemáticas
Mención en Didáctica.

Presentada por:

Javiera Arinda Carrasco Carrasco

Francisca Nicole Moraga Molina

Profesor Guía: Doctora (c) Romina Menares Espinoza

Valparaíso 2014

Agradecemos en primer lugar a Romina, a quien dedicamos este trabajo, por no juzgarnos y confiar ciegamente en nosotras sin antes conocernos, por guiarnos y mostrarnos todos los caminos posibles, entregándonos los mejores consejos que pudimos recibir, nos mostró lo que valemos y lo que somos capaz de realizar. Por su gran esfuerzo y su inmensa dedicación para que este trabajo fuera el mejor y por su constante motivación en esos momentos donde nada se veía claro. Su inteligencia y profesionalismo hicieron que nuestro esfuerzo diera el mejor de los frutos.

A nuestras familias por su apoyo incondicional y comprensión durante toda la carrera. Por darnos la fuerza para no flaquear en los momentos difíciles y brindarnos las herramientas necesarias para terminar esta etapa de nuestras vidas.

A Gerardo, un gran profesional, por su incondicionalidad ante nuestras peticiones, por su eficacia y entrega, por su enorme paciencia y su disponibilidad desde nuestros inicios en la carrera.

Finalmente, agradecemos a todos aquellos amigos y conocidos que de alguna manera participaron de este proceso, brindándonos apoyo y compañía en cada momento.

Resumen

La presente investigación busca conocer y analizar el trabajo que realizan estudiantes en torno a situaciones que involucran a la trigonometría. En Chile se han encontrado dificultades de los estudiantes cuando resuelven estos problemas en pruebas estandarizadas, y otras investigaciones, a nivel mundial, han constatado la dificultad que existe al intentar unir dos mundos: las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas.

Mediante el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se presentan respuestas a preguntas relacionadas con el trabajo matemático de estudiantes frente a tareas que requieren de una articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas. La metodología utilizada fue de carácter cualitativo y se enfoca en dos tipos de estudios distintos que llamamos *Experiencia 1* y *Experiencia 2*. Estas fueron confeccionadas para conocer el espacio de trabajo, *e*n la primera, de estudiantes universitarios, y en la segunda, de estudiantes egresados de enseñanza media, cuando se enfrentan a las tareas mencionadas anteriormente.

Además, se analizó el trabajo matemático de estudiantes frente a estas tareas que potencian las distintas *génesis* que componen y articulan el Espacio de Trabajo Matemático y se confeccionó una propuesta de enseñanza y aprendizaje. Dentro de las conclusiones más importantes podemos decir que las tareas propuestas permitieron un tránsito por las distintas génesis que componen el ETM logrando conexión entre los "dos mundos": el de las razones trigonométricas y el de las funciones trigonométricas.

Abstract

The goal of this investigation is to know and analyze the work that students do around trigonometric situations. Students in Chile have been found to have difficulties solving these problems in standardized test. Other research, worldwide, has proven these difficulties trying to join two worlds: trigonometric ratios at the right triangle and trigonometric functions.

Using the “Espacio de Trabajo Matemático” (ETM, mathematic work space, for the initials in Spanish), answers to questions related to the mathematical work of students in front of tasks that require coordination between the trigonometric ratios in right triangle and trigonometric functions, are presented. The methodology used was qualitative and was focused on two different types of studies that we call Experiencia 1 y Experiencia 2 (experience 1 and 2). They were made to know the work space of university students (Experience 1) and high school graduate students (Experience 2); and how these groups work when facing these tasks.

In addition, this investigation analyzed the mathematical work of students facing these tasks that enhance the different genesis that composes and articulates the ETM, Creating a teaching and learning proposal in this area. As a major conclusion, we can say that the proposed tasks allow a connection through the different genesis that composes ETM, making up the connection between the two worlds: trigonometric ratios and trigonometric functions.

ÍNDICE

Introducción

La trigonometría es uno de los campos de las matemáticas que han sido explorados en diversas disciplinas, debido a que su aplicación se adapta a distintos tipos de problemáticas. Ha sido pilar fundamental en muchas investigaciones, dando respuestas a muchas interrogantes durante siglos. Diversas culturas centraron sus investigaciones en la aplicación de la trigonometría dejando en evidencia la importancia que significa este contenido en la enseñanza de la matemática. Su estudio tiene sus primeras apariciones en el año 1700 a.C. con los egipcios, quienes ante la necesidad de construir pirámides con todas sus caras iguales, utilizan el primer acercamiento a la definición de cotangente en el triángulo rectángulo para sus cálculos. Siglos más tarde se incorpora el estudio del triángulo rectángulo en el círculo, mediante la observación de los movimientos de los cuerpos celestes y los cambios de día a noche entre otros, abriendo paso a un sinfín de descubrimientos que nacen mediante la aplicación de la trigonometría(Montiel, 2005).

A raíz de la historia de la matemática, la Trigonometría es pilar fundamental para la enseñanza de la matemática, pero su tratamiento a nivel escolar y muchas veces a nivel universitario, son poco significativos y en algunos casos casi nulos, por lo que es un tema importante de estudio y a pesar de que la enseñanza de la Trigonometría forma parte de los planes y programa de estudio de nuestro país, se ha evidenciado dificultades al llevar este contenido a las aulas, antela poca comprensión que muestran los participantes del sistema escolar al enfrentarse con problemas en los que está ligada la trigonometría y sus conceptos relevantes.

La dificultad que acontece ante la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría nos hizo preguntarnos cuál es el trabajo matemático de los estudiantes que han cursado algún curso de trigonometría y bajo qué condiciones es posible articular el trabajo entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario. Mediante esta investigación pondremos en juego estas dificultades y mostraremos una propuesta que conecte y articule los contenidos ligados a la trigonometría.

Así el objetivo principal de esta tesis es analizar el trabajo matemático, respecto al contenido de trigonometría, de estudiantes que han cursado asignaturas que involucren este contenido, frente a problemas que requieren de la articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario.

Para lograr este objetivo y como se mencionó antes, se diseñaron dos experiencias que permiten identificar y describir el trabajo matemático de estudiantes, una para nivel universitario y la otra para estudiantes egresados de enseñanza media cuando se enfrentan a los problemas mencionados anteriormente. Los análisis realizados fueron sustentados en la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesta por Kuzniak (2011).

En el primer capítulo se plantea nuestro problema de investigación y se mencionan algunos antecedentes que tienen relación con nuestra problemática. Además se dan a conocer nuestros objetivos generales y específicos de investigación así como las principales interrogantes que nos planteamos para cumplir estos.

En el segundo capítulo se muestran algunas aproximaciones epistemológicas de la trigonometría, su evolución en el triángulo rectángulo, el círculo unitario y las funciones trigonométricas. Además se presenta el Espacio de Trabajo Matemático como la teoría que da sustento a nuestra investigación.

En el tercer capítulo se describe la metodología utilizada en la investigación, de carácter cualitativo y enfocado en dos estudios: uno exploratorio y otro descriptivo. En este capítulo se dan a conocer además, los instrumentos utilizados para estos estudios. En el primero se propone un cuestionario aplicado a estudiantes universitarios y en el segundo se confeccionan dos cuestionarios aplicados a estudiantes egresados de enseñanza media, lo que nos lleva a realizar una propuesta de enseñanza y aprendizaje.

En el cuarto y quinto capítulo se muestra un análisis a priori de los cuestionarios a aplicar y posteriormente se procede a describir lo ocurrido en la fase experimental. Luego se presenta un análisis de los resultados, para finalizar con las conclusiones donde se confrontan los análisis realizados con los resultados obtenidos, dando respuesta a las preguntas planteadas en la investigación.

Capítulo 1.

Problema de Investigación

1.1. Antecedentes y Justificación del Problema

La trigonometría ha constituido un tema de estudio durante siglos. Muchos matemáticos del siglo II a.C., han utilizado elementos trigonométricos para explicar fenómenos físicos y astronómicos y su evolución ha constituido hitos importantes en la evolución de la matemática (Montiel, 2005).

En el sistema de enseñanza se han evidenciado dificultades a la hora de tratar temas relacionados con trigonometría a nivel de secundaria, e incluso a nivel universitario. Méndez (2008) citado por Meneses (2010) menciona que podemos localizar algunas rupturas asociadas a los conceptos articuladores en trigonometría, al no considerarlos como objeto de estudio, como por ejemplo el tránsito de radianes a números reales como argumento de las funciones trigonométricas. Por esto consideramos esencial el proceso de articular estos conceptos para así comprender la relación que existe entre cada uno.

Maldonado (2005) citado por Meneses (2010), menciona que para el estudio de las funciones trigonométricas se hacen presentes conceptos tales como: ángulos, triángulo rectángulo, sistema de ejes de coordenadas y círculo trigonométrico. También menciona que antes de tratar la función trigonométrica como una función real de variable real, se define primero como razón trigonométrica entre los lados de un triángulo rectángulo. En los Programas de Estudios del Ministerio (MINEDUC, 2005), se propone enseñar la trigonometría de la manera antes mencionada, sin embargo no se articula el tránsito entre cada uno de estos conceptos, ubicando el primer momento de la trigonometría (razones trigonométricas) en tercero medio plan común y el segundo momento (funciones trigonométricas) en un curso diferenciado. Cabe mencionar que esta ruptura entre la articulación de los contenidos se vuelve más evidente luego que en el nuevo ajuste de los Programas de Estudio (MINEDUC, 2009), se decide eliminar el primer momento de la trigonometría, por lo que la trigonometría solo se enseñara a partir de su segundo momento.

En el trabajo de Montiel (2005), se propone "reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos son herramientas en la construcción de modelos geométricos (estáticos), donde surja la cantidad trascendente trigonométrica" (Ibíd., p.116). De Kee et al., (1996) en Montiel (2005) menciona que si se considera la función en el círculo como un medio didáctico que vuelve más visual la construcción de las funciones trigonométricas, esta constatación constituye más bien un obstáculo didáctico, pues se concretiza la definición de funciones trigonométricas al precio de complicarlas aún más. Por otro lado Montiel (2005), señala que "el círculo trigonométrico como estrategia de enseñanza obstaculiza la construcción de la función trigonométrica en un contexto analítico, sin embargo es un recurso gráfico que logra un vínculo coherente entre las nociones y unidades de medida en la trigonometría y en la función trigonométrica" (Ibíd. p.117).

Montiel (2005) también menciona que "no se ha encontrado un texto o un programa de estudios, o una exposición de aula que abandone el recurso usual de emplear el círculo trigonométrico como medio de introducción a las funciones trigonométricas" (Ibíd. p. 114) y agrega que este es el elemento con que la trigonometría pierde su carácter geométrico y adquiere su carácter funcional, por lo que se hace necesario clarificar el dominio de la función en todos los reales, el significado de un ángulo negativo, la periodicidad, el acotamiento de la función, la conversión de la unidad de medida: grados $\leftrightarrow$ radianes y la equivalencia entre radianes y reales. Este último debido a que el discurso matemático escolar no ha dejado claro, en el estudiante, por qué la conveniencia y/o necesidad de usar los radianes sobre los grados para la variable independiente (Ibíd. p. 116). Por otro lado Meneses (2010) identifica como fenómeno en su problemática de investigación la ausencia de argumentos, entre estudiantes y profesores del área de nivel medio superior y superior, diferentes a lo memorístico (como "leyes"), para establecer por qué en matemáticas superiores la medida más conveniente para un ángulo es el radián.

En nuestro trabajo, pretendemos estudiar lo que sucede en las aulas, donde sabemos que la trigonometría constituye un valor significante en la matemática de los estudiantes ya sea a nivel secundaria, ya que es un contenido evaluado en la prueba nacional PSU[1], donde los resultados alcanzan niveles deficientes, o a nivel universitario, donde mediante entrevistas realizadas a alumnos de primer año de la carrera de Matemática de una universidad estatal de la región de Valparaíso, evidenciamos que la gran mayoría tiene dificultades con los conceptos involucrados en la trigonometría, principalmente en lo referente a las funciones trigonométricas y sus respectivas gráficas, que perjudica su rendimiento en los primeros cursos de la carrera, ya que su malla curricular incluye este contenido como conocimiento previo y además profundiza sobre este en un primer curso de cálculo.

Nuestra investigación se enfocará principalmente en cómo evitar la ruptura de los conceptos claves de la trigonometría aportando algunas condiciones para que exista esta articulación de contenidos, más aún, se han tomado en cuenta las herramientas y perfiles que poseen los estudiantes de nuestro sistema educativo.

[1] PSU, Prueba de Selección Universitaria. Marca registrada por el H. Consejo de Rectores de Chile (http://demre.cl/psu.htm)

1.2. Planteamiento del problema

Para comenzar este estudio acerca de la enseñanza de la Trigonometría en enseñanza media, hemos analizado el Marco Curricular chileno antes y después del ajuste presentado el año 2009 por el Ministerio de Educación, el cual ha sido implementado de manera gradual a partir de esa fecha. En el antiguo Programa de Estudio (MINEDUC, 2005) la Trigonometría se presenta en dos momentos; el primero es su aparición en tercero medio plan común, donde se trabajan las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un segundo momento es en cuarto medio plan diferenciado donde se señala la importancia de enseñar; las distintas funciones trigonométricas y sus diferentes gráficas desde el círculo unitario, la medición de ángulos llegando a construir el concepto de radián; periodicidad, entre otros. Con el ajuste curricular y el actual marco aplicado sólo al plan común, el objeto de estudio desaparece de tercer año medio, por lo que hoy la trigonometría se aborda sólo en cuarto medio diferenciado quedando fuera de los programas el tratamiento de las razones encontradas en el triángulo rectángulo. Así, las funciones trigonométricas aparecen de manera artificial y abrupta en el círculo unitario.

En un estudio epistemológico realizado por Montiel (2005), se señala que históricamente se estudia la trigonometría a partir del análisis en el triángulo. Esto se remonta a la época de los egipcios en el año 1.700 a.C., cuando surge la necesidad de construir sus pirámides de manera uniforme. Con el paso del tiempo se logra ampliar la trigonometría construyéndose las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, para luego dar paso al estudio de las funciones trigonométricas de manera analítica en el círculo.

Algunos autores han identificado dificultades en la mayoría de estos contenidos mayormente en la medición de ángulos, el paso de estos a radián y en la comprensión del significado de las funciones trigonométricas, señalando una debilidad en este proceso. Martínez (2012), menciona que se han evidenciado rupturas asociadas al concepto de radián a través del análisis de la estructura de la matemática escolar en el nivel medio superior, mediante el análisis de texto y las concepciones de profesores y estudiantes.

Centraremos nuestro estudio en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. En particular nuestra preocupación reposa en la articulación y relación entre: las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y su conexión con el círculo unitario, además de las funciones trigonométricas cuyas gráficas se desprenden de éste. Creemos que es necesario articular estos tres elementos para que exista una continuidad en la enseñanza de la trigonometría a nivel secundario y mencionar la necesidad que existe de abordar este contenido desde el triángulo rectángulo.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivos generales

Nos planteamos como objetivo principal en nuestra investigación: Analizar el trabajo matemático, respecto al contenido de trigonometría, de estudiantes que han cursado asignaturas que involucren a dicho contenido, para así confeccionar una propuesta de enseñanza y aprendizaje que involucren problemas que requieran de la articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario.

1.3.2. Objetivos específicos

1) Diseñar tareas que apunten al trabajo en trigonometría desde el círculo unitario, que permitan visualizar las funciones trigonométricas y las razones en el triángulo rectángulo.

2) Analizar el trabajo matemático, respecto al contenido de trigonometría, de estudiantes que han cursado asignaturas que involucran a dicho contenido a nivel universitario, e identificar las dificultades con las que se encuentran cuando intentan resolver aquellos problemas que necesitan una articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario.

3) Diseñar, a partir del análisis de tareas propuestas por el ministerio de educación, nuevas tareas que permitan enriquecer el trabajo matemático en trigonometría de estudiantes de enseñanza media, en el sentido de provocar el uso de distintas técnicas, la utilización de propiedades y potenciar el discurso matemático, con el fin de lograr la articulación de la trigonometría en el triángulo rectángulo, con el círculo unitario.

4) Analizar el trabajo matemático de estudiantes egresados de enseñanza media que han recibido formación diferenciada en la asignatura de matemática, en cuanto a las técnicas que ocupan, las propiedades o teoremas que ponen en juego y las distintas formas de visualizar el problema.

5) Diseñar una propuesta de enseñanza y aprendizaje a partir del refinamiento de las tareas planteadas y analizadas.

1.4. Preguntas de Investigación

Las preguntas que dan las directrices a nuestra investigación son las siguientes:

1) ¿Cómo es el trabajo matemático de los estudiantes que han cursado asignaturas de trigonometría a nivel universitario? y ¿Cuáles son las dificultades con las que se encuentran cuando intentan resolver aquellos problemas que necesitan una articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario?

2) ¿Cómo es el trabajo matemático que realizan estudiantes egresados de enseñanza media, que han recibido formación diferenciada de la asignatura de matemática?, ¿Qué técnicas ocupan?, ¿Qué propiedades o teoremas ponen en juego? y ¿Cómo visualizan los problemas?

3) ¿Bajo qué condiciones es posible articular el trabajo entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario?

4) ¿Cómo es el trabajo matemático que realizan estudiantes egresados de enseñanza media que han recibido formación diferenciada en la asignatura de matemática, frente a un diseño de tareas, que eventualmente pueden formar parte de una propuesta, que busca articular el trabajo de las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario?, ¿Qué técnicas ocupan?, ¿Qué propiedades o teoremas ponen en juego? y ¿Cómo visualizan los problemas?

Capítulo 2.

Marco Teórico

2.1. Aproximaciones epistemológicas

El concepto de trigonometría, cuya definición etimológica es la medición de triángulos, tiene sus orígenes en la medición y en la astronomía. Montiel (2005) en su estudio epistemológico señala que por muchos siglos, distintas culturas centraron su preocupación en la medición de triángulos, aunque no logran desarrollarlo teóricamente, si no más a nivel empírico motivados por fenómenos naturales; el cambio de día a noche, los movimientos de cuerpos celestes, entre otros fenómenos. Sin embargo, una de las mayores preocupaciones estaba en las distintas posiciones de las estrellas, la luna y el sol. Siglos antes, alrededor del año 1700 a.C. las culturas egipcias ya habían tenido un pequeño acercamiento a los sistemas de medición y al concepto de cotangente, cuando necesariamente debían construir las pirámides con todas sus caras igual y de la misma inclinación. Junto con acercase al concepto de trigonometría, también se producía un acercamiento al concepto de periodicidad, ya que las primeras predicciones astronómicas se establecían en base a la regularidad con que sucedían ciertos fenómenos. Los dos famosos que más se interesaron y realizaron estudios sobre este tema fueron los astrónomos griegos Hiparco de Nicea (Siglo II a.C.) y Claudio Ptolomeo (Siglo II d.C.). En el caso de Nicea, desarrolla las tablas trigonométricas que relacionaban los lados y ángulos de todo triángulo plano y que más tarde fueron usadas para realizar cálculos.

El desarrollo de la trigonometría desemboca en analizar propiedades provenientes del círculo unitario, pasando al estudio de las funciones trigonométricas y sus propiedades analíticas.

Vance (1965), define trigonometría como la rama de matemática que estudia las propiedades y las aplicaciones de las funciones circulares o trigonométricas, cuyo dominio o recorrido son conjuntos de números reales.

Es importante antes de continuar la investigación, detenernos en conceptos claves para el entendimiento de la Trigonometría.

2.1.1. El triángulo rectángulo

Para dar una definición de las razones trigonométricas definidas sobre un triángulo rectángulo, debemos considerar algunos puntos relevantes respecto a cualquier triángulo.

- **Proporcionalidad entre segmentos**

  Dados dos pares de segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{CD}$, $\overline{C'D'}$, diremos que son pares de segmentos proporcionales si sus longitudes son proporcionales, es decir, si

$$\boxed{\frac{d(A,B)}{d(A',B')} = \frac{d(C,D)}{d(C',D')}}$$

Consideraremos $d(A,B) = m(\overline{AB})$, donde $m(\overline{AB})$ corresponde a la medida del segmento $\overline{AB}$.

- **Semejanza de triángulos**

Notemos que, cuando tenemos un par de triángulos (T y T') que cumplen que cada uno de los ángulos interiores del primero es congruente a cada uno de los ángulos interiores del segundo (congruentes uno a uno), entonces los respectivos pares de lados correspondientes a ángulos congruentes, son pares de segmentos proporcionales. Lo anterior se desprende del Teorema de Tales, y lo enunciaremos en la siguiente proposición.

➢ **Proposición:** Si tenemos $T = \Delta ABC$ y $T' = \Delta A'B'C'$ triángulos, con ángulos interiores congruentes uno a uno (el ángulo en A es congruente al ángulo en A', el ángulo en B es congruente al ángulo en B' y el ángulo en C es congruente al ángulo en C') entonces los pares de lados (correspondientes a los ángulos congruentes) son pares de segmentos proporcionales.

Si consideramos la figura 2.1:

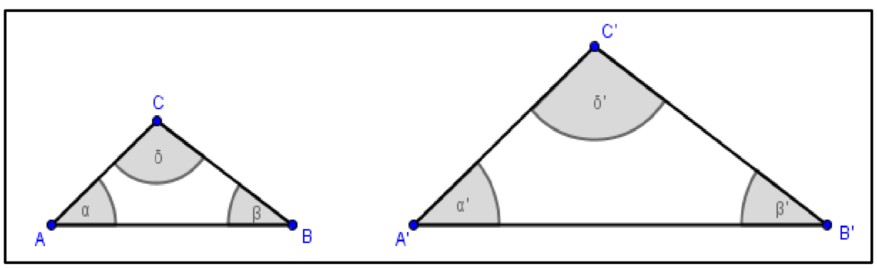


Figura 2.1

Se tiene, $\angle\alpha \cong \angle\alpha'$, $\angle\beta \cong \angle\beta'$ y $\angle\delta \cong \angle\delta'$ entonces se dice que, los pares de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$; $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$; $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ y $\overline{C'A'}$, $\overline{A'B'}$ son pares de segmentos proporcionales. También se puede establecer de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{C'A'}}} \quad ; \quad \boxed{\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{A'B'}}}$$

Demostración:

De manera conveniente, trasladamos los dos triángulos como en la figura 2.2:

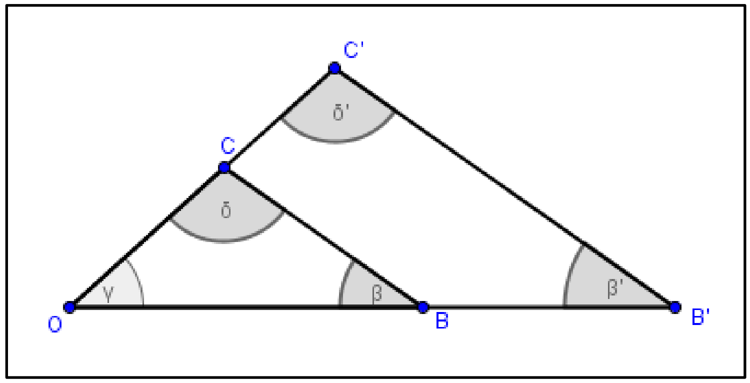


Figura 2.2

Notemos que los triángulos ΔOBC y $\Delta OB'C'$ tienen ángulos interiores congruentes uno a uno respectivamente, por lo que cumplen la hipótesis. Demostraremos que sus lados son proporcionales.

Si consideraremos la figura 2.3

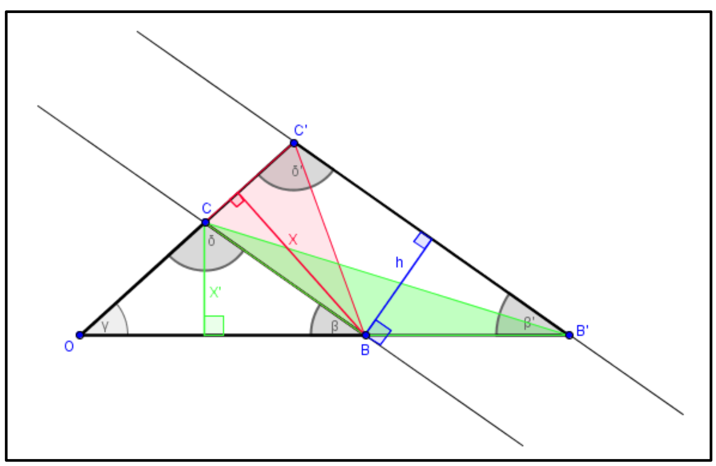


Figura 2.3

Se tiene que,

- Área $\Delta BCC' = \dfrac{CC' \cdot x}{2}$
- Área $\Delta BCB' = \dfrac{BB' \cdot x'}{2}$

Por otro lado se puede observar que los triángulos $\Delta BCC'$ y $\Delta BCB'$ comparten la base $\overline{BC}$ y su altura correspondiente h, por lo que tienen igual área, cumpliéndose lo siguiente:

$$\boxed{\frac{CC' \cdot x}{2} = \frac{BB' \cdot x'}{2}}$$

En consecuencia,

$$\boxed{\frac{x}{x'} = \frac{BB'}{CC'} \quad (1)}$$

Ahora bien, si expresamos el área de ΔOBC tomando como base $\overline{OB}$, obtenemos:

$$\boxed{\frac{\overline{OB} \cdot x}{2}}$$

Y si tomamos como base $\overline{OC}$, el área será;

$$\boxed{\frac{\overline{OC} \cdot x'}{2}}$$

Igualando obtenemos,

$$\boxed{\frac{\overline{OB} \cdot x}{2} = \frac{\overline{OC} \cdot x'}{2}}$$

Finalmente se tiene que;

$$\boxed{\frac{x}{x'} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \quad (2)}$$

Al igualar (1) y (2) podemos concluir que,

$$\boxed{\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \quad (3)}$$

Por las propiedades de proporciones podemos decir que,

$$\boxed{\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CC'} + \overline{OC}}{\overline{BB'} + \overline{OB}}}$$

Si observamos la figura 2.3 podemos ver que se cumple,

$$\boxed{\overline{CC'} + \overline{OC} = \overline{OC'} \quad y \quad \overline{BB'} + \overline{OB} = \overline{OB'}}$$

Por lo que se tiene,

$$\boxed{\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}} \quad (4)}$$

Por (3) y (4) obtenemos,

$$\boxed{\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BB'}}{CC'} \quad (5)}$$

Ahora si trazamos un recta (L) paralela al lado $\overline{OB'}$ que pase por el punto C, como muestra la figura 2.4.

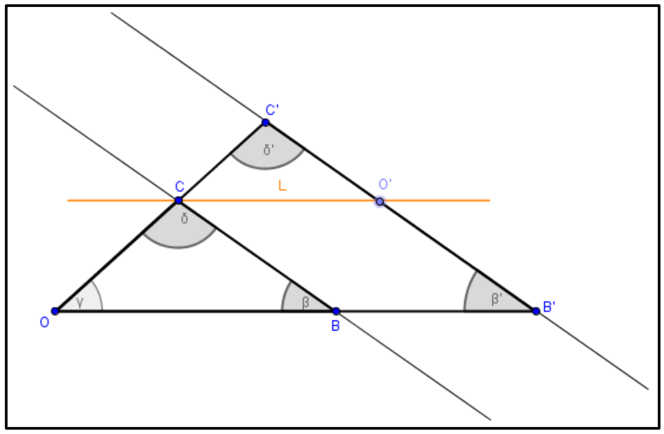


Figura 2.4

Y aplicamos (5) , tomando como vértice C' en lugar de O , obtenemos:

$$\boxed{\frac{\overline{OC'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{B'O'}}}$$

Pero, como se observa en la *figura 2.4* $\overline{CB} = \overline{B'C'}$. Por lo que,

$$\boxed{\frac{\overline{OC'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \quad (6)}$$

Mediante las proporciones encontradas (4) y (6), podemos concluir que,

$$\boxed{\frac{\overline{OB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{B'C'}}}$$

Finalmente, tenemos:

$$\boxed{\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OB'}} \quad ; \quad \frac{\overline{OC'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \quad ; \quad \frac{\overline{OB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{B'C'}}}$$

Que es justamente lo que queríamos demostrar, por lo que cuando tenemos un par de triángulos que cumplen que cada uno de los ángulos interiores del primero es congruente a cada uno de los ángulos interiores del segundo (congruentes uno a uno), entonces los respectivos pares de lados correspondientes a ángulos congruentes, son pares de segmentos proporcionales.

- **Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo**

Para conocer las razones trigonométricas del triángulo rectángulo es necesario conocer sus elementos, para ello se presenta la *figura 2.5*, en la que los ángulos α y β son ángulos agudos y el ángulo γ es de 90°.

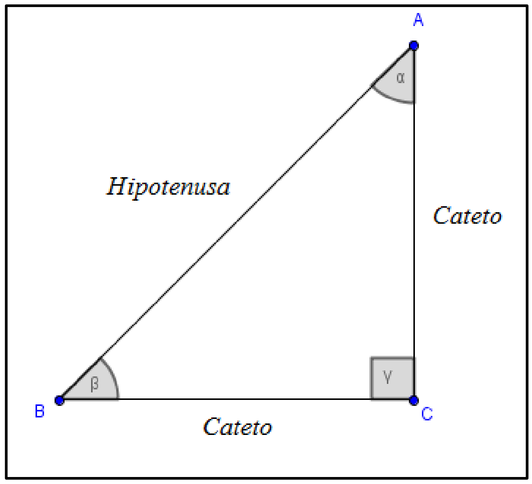


Figura 2.5

De acuerdo con la semejanza de triángulos demostrado en el punto anterior, todos los triángulos rectángulos que tienen ángulos interiores congruentes entre ellos, cumplen con la proporción entre sus lados (*Figura 2.6).* Así, si tenemos un triángulo ΔABC con ángulos interiores α , β y 90° respectivamente, la razón entre cualquier par de lados es independiente de la longitud de los lados, solo depende del ángulo. Es decir, si se conoce uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo, la razón de dos de sus lados es constante.

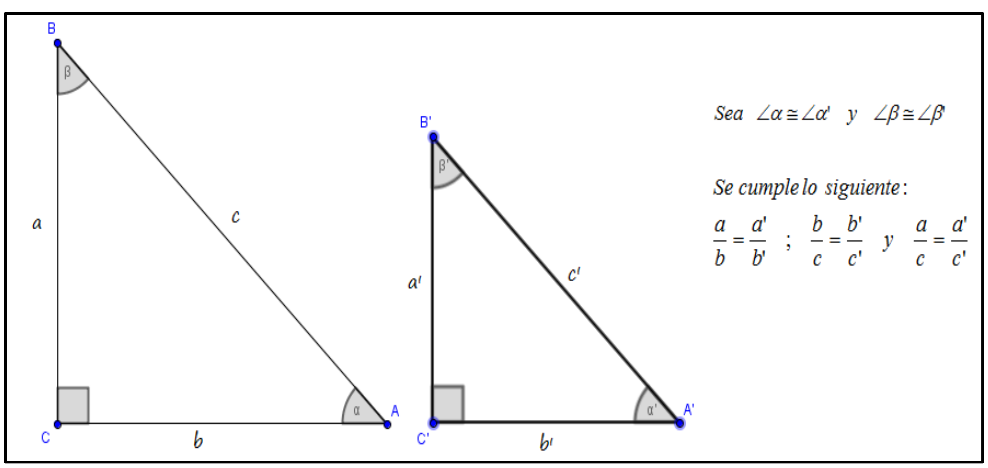


Figura 2.6

Debido a que la razón entre sus lados es constante y depende exclusivamente de uno de sus ángulos agudos, se establecieron todas las razones posibles entre dos de los lados de un triángulo rectángulo. Estas razones se denominan *razones trigonométricas en el triángulo rectángulo* y se definen de la siguiente forma (tomando como referencia el ángulo α):

Razón Trigonométrica	***Definición***	***En la figura 2.6***
$sen(\alpha)$	$\frac{\textit{cateto opuesto a } \alpha}{\textit{hipotenusa}}$	$\frac{a}{c}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\textit{cateto adyacente a } \alpha}{\textit{hipotenusa}}$	$\frac{a}{c}$
$tg(\alpha)$	$\frac{\textit{cateto opuesto a } \alpha}{\textit{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{a}{c}$
$ctg(\alpha)$	$\frac{\textit{cateto adyacente a } \alpha}{\textit{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{a}{c}$
$\sec(\alpha)$	$\frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{a}{c}$
$\cos ec(\alpha)$	$\frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{a}{c}$

Si bien la construcción de estas razones trigonométricas nace de la problemática de construir un modelo teórico a escala de las primeras nociones que sentaron las culturas babilónicas, egipcias y griega, sobre las proporciones encontradas en un triángulo rectángulo, es válido preguntarse, ¿Cómo evolucionan estás razones trigonométricas en el triángulo en el estudio de las funciones trigonométricas a través de la circunferencia?

En sus orígenes la trigonometría no trata directa y exclusivamente con la similitud de dos triángulos rectángulos, la medición, la construcción y la astronomía son algunas de las actividades donde surgen las nociones trigonométricas.

Uno de las primeras aportaciones de investigación del estudio de un triángulo inscrito en una circunferencia, lo realiza Aristarco (310 – 230 a.C.) cuando le surge la necesidad de saber lo que ocurre con los movimientos de la luna y el sol con respecto a la tierra, para tener intervalos de tiempo y de forma natural el primer referente fue el cambio noche – día, estudió entonces las posiciones de la luna. Aristarco, suponía que la órbita de la luna era un círculo en cuyo centro está la Tierra y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad, tomando en cuenta referentes como, lo que ocurre cuando los rayos del sol llegaban a la tierra chocando o no con la Luna. Encontró que el ángulo que se forma con los rayos del sol la luna y la tierra, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la media Luna, esta razón encontrada es la que hoy conocemos como $tg(\alpha)$. El llamado "cálculo de sombras" es considerado precursor de las nociones trigonométricas. El problema que se planteaban los griegos considera todo triángulo inscrito en un círculo, con lo que cada uno de sus lados se convertía en una cuerda, para realizar los cálculos se debía encontrar la longitud de la cuerda como función del ángulo central. Siendo la primera noción del $\cos(\alpha)$.

2.1.2. El círculo unitario

En las definiciones de los elementos de Euclides, Libro I "*Los fundamentos de la Geometría Teoría de los triángulos, paralelas y el área", encontramos que "*un *círculo* es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

Las primeras nociones de ángulo las podemos obtener de las definiciones de Euclides, él menciona que un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta. De manera más intuitiva se dice que un ángulo se forma uniendo dos *semirrectas* por su respectivo punto inicial; el punto inicial se llama *vértice* del ángulo, y las semirrectas se denominan *lados del ángulo.*

Si hacemos centro en el vértice del ángulo y trazamos diversos arcos de circunferencia que corten a los lados del ángulo según los distintos radios, tendremos una situación análoga a la de la semejanza de triángulos, como lo muestra la figura 2.7, puede verse fácilmente la proporción entre las distintas magnitudes, sólo que esta vez un *lado del triángulo* esta reemplazado con un *arco de circunferencia.*

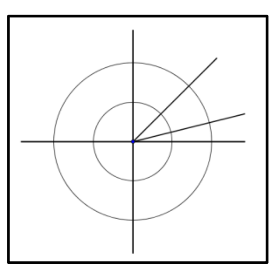


Figura 2.7

Al fijar esta circunferencia de radio cualquiera, podemos definir que este ángulo se llama *ángulo central* de la circunferencia y el arco corresponde al *arco subtendido* por el ángulo.

Ahora bien, llamaremos *circunferencia unitaria* a la circunferencia C de centro en el origen de coordenadas y radio 1. (Véase la *Figura 2.8*)

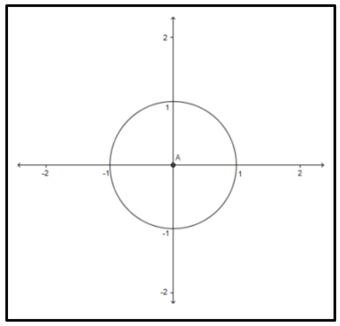


Figura 2.8

Existe una razón entre el perímetro de la circunferencia y su radio, esta razón se cumple para cualquier circunferencia y es 2π. A partir de esto se define radián como la razón entre la medida de un arco y el radio de la circunferencia. En el círculo unitario, el radián coincide con la longitud del arco.

2.1.3. La función trigonométrica

La definición de estas funciones se puede realizar a partir de la circunferencia unitaria con centro en el origen definida por $x^2 + y^2 = 1$ de un sistema rectangular de coordenadas.

Consideraremos un punto inicial en la circunferencia que recorre cierta longitud llegando a un punto final definiéndose así:

$$\boxed{P : \theta \to P(\theta)}$$

Donde P es la función que describe el movimiento del punto sobre la circunferencia, θ es la longitud del arco descrito por el punto inicial y el punto final y $P(\theta)$ es el punto final.

Al considerar que un punto en la circunferencia se desplaza $|\theta|$ unidades alrededor de esta, es posible determinar su posición final exacta para cualquier valor de θ, tomando en cuenta que este recorrido describe la longitud de un arco de circunferencia unitaria, a cada valor de θ le corresponde un único punto final llamado *punto terminal*. Por lo tanto la función descrita está bien definida.

Es posible entonces definir las funciones:

$\cos : \theta \to x$; Donde x es la abscisa de $P(\theta)$

$sen : \theta \to y$; Donde y es la ordenada de $P(\theta)$

Funciones que tienen como dominio el conjunto de los números reales positivos, pudiendo extender su definición a todos los números reales.

Así se tiene que si el punto terminal $P(\theta)$ tiene las coordenadas rectangular x e y,

$$\boxed{\cos\theta = x \text{ y } sen\,\theta = y}$$

Al relacionar estos dos componentes podemos definir una nueva función circular, la *función tangente:*

$$\boxed{\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)}$$

Nos apoyaremos de estas aproximaciones epistemológicas para responder a los objetivos planteados en el primer capítulo.

2.2. Espacio de Trabajo Matemático

La principal teoría que da sustento a nuestra investigación es iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006), llamada Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), que más tarde ha sido ampliada por Kuzniak (2011) a la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Para nuestro estudio, es necesario considerar la ampliación del ETG al ETM, pues existen elementos en el trabajo trigonométrico no abordados en un espacio puramente geométrico, tal es el caso de las funciones trigonométricas, que las ubicamos en un espacio más bien analítico. Comenzaremos por profundizar en la primera teoría del ETG para luego referirnos a la ampliación a otros dominios de las matemáticas, en particular, al Espacio de Trabajo Matemático en el dominio del Análisis (ETM_{An}).

2.2.1. Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico

Kuzniak y Houdement (1996, 1999, 2006) conciben el espacio de trabajo geométrico como un ambiente organizado por y para el geómetra[2], mediante la articulación de tres componentes: el espacio local y real, los artefactos y el modelo teórico. Cada una de estas componentes esta en relación con el conocimiento del espacio del geómetra. En este espacio de trabajo, se distinguen, en un comienzo, tres tipos de geometrías que coexisten en la enseñanza de ésta y tienen como función permitir que el alumno construya su propio espacio de trabajo geométrico guiado por el docente. En él la interpretación y validez de los problemas geométricos dependen del paradigma geométrico y la institución elegida. La distinción entre geometrías ha sido inspirada por tres ideas; la primera corresponde a los modos de pensamiento de Gonseth (carácter cognitivo), la segunda a la conceptualización de paradigma en el sentido de Kuhn (carácter filosófico) y la tercera proviene de la evolución misma de la geometría (carácter epistemológico). Estos tres ejes vistos de manera conjunta permiten

[2] En el ETG el geómetra es cualquier individuo que realiza una tarea en geometría, ya sea este un estudiante, profesor o matemático.

aproximarnos a los paradigmas geométricos y al espacio de trabajo geométrico.

Paradigmas Geométricos

En un sentido amplio se entiende paradigma geométrico a la forma de utilizar el conocimiento de la geometría en la comunidad escolar. Para la enseñanza de la geometría, es necesario definir el paradigma apropiado, puesto que es muy distinto referirse a una comunidad de matemáticos que a una comunidad escolar. Los primeros tienen sus propios axiomas que regulan teoremas y prácticas, mientras que los segundos comparten verdades y técnicas de acuerdo a su percepción de la realidad, la cual evoluciona con los conocimientos alcanzados en un sistema formal y/o informal.

Para Kuzniak y Houdement (1996, 1999 y 2006) la noción de paradigma geométrico es la siguiente:

Un paradigma geométrico es la caracterización de los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes para que aprendan a reconocer, aislar y distinguir las diferentes entidades constitutivas de la geometría puesta en juego *(p. 2)*

En cuanto a las componentes cognitivas de un espacio de trabajo geométrico, se adopta la idea de Gonseth y su teoría de los modos de pensamiento (1945 - 1955) (intuición, experiencia y razonamiento deductivo) los cuales forman la base del individuo para enfrentar una tarea en geometría y el profesor debe tenerlos presentes para permitir que el estudiante evolucione en el conocimiento de la geometría.

Al enseñar geometría, se deja a un lado las dificultades que ha tenido el desarrollo y la evolución de esta. En esta evolución la humanidad se ha visto enfrentada a diversas rupturas epistemológicas que aparentemente se han dejado de lado.

La concepción de paradigma geométrico acoge las tres componentes antes mencionadas (carácter epistemológico, carácter filosófico y carácter cognitivo), estas permiten identificar tres paradigmas geométricos coexistentes en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

A continuación se explican los tres paradigmas geométricos a través de los modos de pensamiento (componente cognitiva), elementos de validación (componente filosófica) y el modelo geométrico(componente epistemológica).

Geometría Natural (GI)

En este paradigma se establece la existencia de una relación con la realidad, donde los objetos están definidos por el modelo geométrico, pero en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo. La experimentación y la deducción actúan sobre la representación de los objetos geométricos mediados por los artefactos y la percepción. El ir y volver entre objetos y realidad es permanente y está permitido como razonamiento de validación y no exige ni exhibe los axiomas de la Geometría Euclidiana; trabaja de forma local. La intuición es a menudo asimilada a la percepción inmediata. Los medios de prueba son de tipo material y se utilizan artefactos para la representación de objetos.

Geometría axiomática natural (GII)

En este paradigma ya no se habla de dibujos para la representación de los objetos, sino de figuras geométricas, en este sentido, una figura geométrica es el objeto geométrico descrito por una propiedad. El razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático puesto en juego (propiedades, definiciones etc.) El uso de artefactos como medio de prueba no está permitido y solo son usados para las construcciones geométricas mediante los instrumentos geométricos. Esta geometría se dice que es edificada sobre un modelo próximo de la realidad y de la intuición espacial, pero al momento de validar se deben hacer dentro del sistema axiomático.

Geometría axiomática formalista (GIII)

Los objetos geométricos en esta geometría provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo. El razonamiento de validación es exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente. El uso de artefactos no es permitido y deja de ser una cara visible, se habla de instrumentos teóricos; por lo que esta geometría no está relacionada con la realidad.

Espacio de trabajo geométrico

Las tres geometrías antes mencionadas coexisten en un Espacio de Trabajo Geométrico, definido por dos planos: uno epistemológico y otro cognitivo. En el plano epistemológico habitan tres componentes: el *espacio local y real*, los *artefactos* y el modelo teórico, o *referencial teórico*. Así, existen espacios de trabajo asociados a cada paradigma geométrico, estos variarán dependiendo del paradigma dominante (ETG de GI, ETG de GII y ETG de GIII).

Componentes epistemológicas del ETG

El *Espacio local y real* es la concepción por el individuo del modelo geométrico y tiene dos aspectos, el *local* que se refiere a que el individuo trabaja con una parte del modelo, y el *real* que se refiere a que los objetos son el resultante de la abstracción del modelo a partir de la realidad.

Los *Artefactos* corresponden a todo lo que le permite al geómetra manipular los objetos geométricos con el objetivo de abordar un problema, en concordancia con el modelo geométrico.

El *Referencial Teórico* corresponde al conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas que finalmente determinan el modelo geométrico.

Componentes cognitivas del ETG

Desde el punto de vista cognitivo, hay ciertos procesos que están asociados al ETG, como lo son: *visualización, construcción y prueba*.

I. Un proceso de visualización en relación con la representación del espacio y el soporte material.
II. Un proceso de construcción determinado por los instrumentos utilizados (regla, compás, etc.) y las configuraciones geométricas.
III. Un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.

El proceso cognitivo de visualización aporta en el proceso de construcción y viceversa, a la vez, el proceso cognitivo de construcción aporta en el proceso de prueba y viceversa, pero el proceso de visualización aporta en el sentido que se relacionan, que se emplea uno cuando se hace el otro, en la prueba, pero no podemos asegurar que la prueba aporta en el proceso cognitivo de la visualización. Estos procesos cognitivos están ligados a las componentes del ETG y se articulan conformando un *espacio de trabajo dinámico y cognitivo*, donde el geómetra los manipulará dependiendo de su paradigma dominante.

El siguiente esquema organiza las componentes del ETG en un plano cognitivo y en un plano epistemológico y la relación que existe entre cada una de ellas.

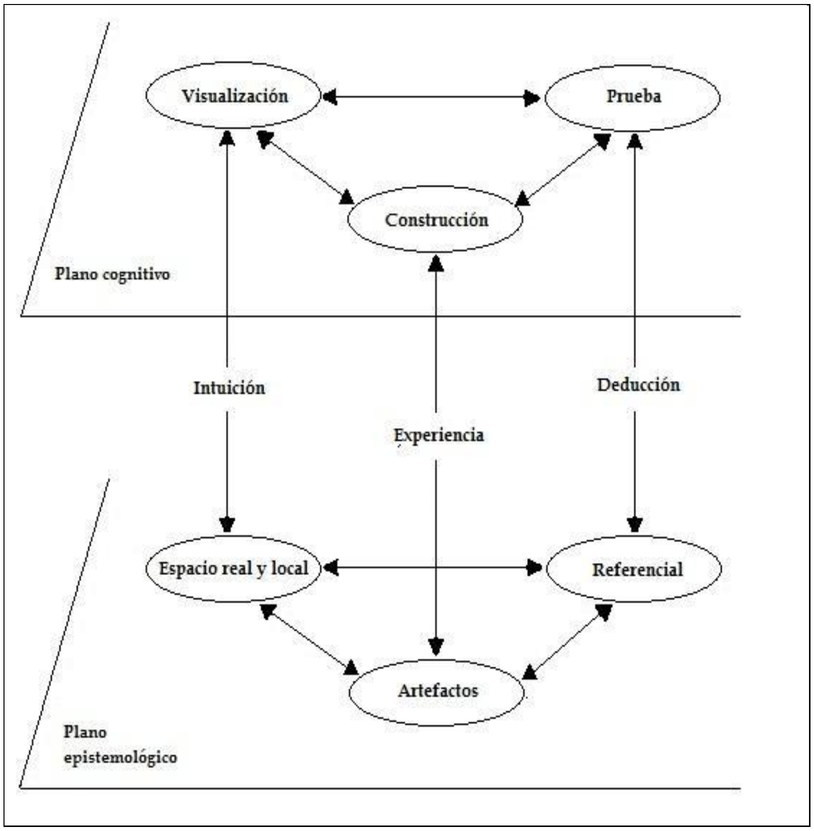


Figura 2.9: Espacio de Trabajo geométrico (ETG)

Los diferentes tipos de ETG

Las adaptaciones operadas por los individuos que efectúan un trabajo en geometría, y las funciones que cumplen las reflexiones del geómetra cuando se enfrenta a un problema geométrico, conducen a considerar diferentes tipos de ETG, definidos según la relación con el saber, el cómo enseñar, o según cómo es enfrentado el problema por el geómetra. A continuación describimos los tres tipos de ETG definidos en esta teoría.

ETG de referencia: se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Se dice que el utilizador es un experto epistémico y se puede considerar como el ETG institucional de la comunidad de los matemáticos.

ETG idóneo: se refiere al espacio definido en términos didácticos, en este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo. Un utilizador natural de este ETG es el profesor.

ETG personal: se refiere al espacio definido por un utilizador particular por el fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el geómetra, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas.

El ETG depende de cada geómetra. Un utilizador natural de este ETG es el alumno, sin por ellos desconocer a los otros geómetras como lo son el profesor e investigador.

El trabajo matemático en un marco escolar puede ser descrito gracias a tres niveles de los ETG. La geometría que la institución tiene en mente está descrita en los ETG de referencia. Estos deben ser acondicionados en ETG idóneo para permitir un arreglo en las clases donde cada alumno trabaja en su ETG personal.

Las diferentes génesis del espacio de trabajo geométrico personal

La génesis global del ETG supone un conjunto de génesis que no son independientes y que están en relación con las componentes del espacio de trabajo geométrico o ciertos procesos cognitivos indispensables a su funcionamiento.

Génesis figural

En la geometría que se enseña en la escuela, las figuras generalmente son los soportes visuales privilegiados del trabajo geométrico, lo que conduce restrictivamente, a introducir la génesis figural en el marco de los ETG para describir el proceso semiótico que está asociada al pensamiento visual y que se opera en geometría. Las herramientas informáticas y los videos, han permitido que la noción de prueba se articule rápidamente a la visualización, incluso enfoques didácticos insisten en la puesta en práctica de tipos de prueba basadas en elementos visuales sin ningún comentario.

Génesis instrumental

En el ETG, la génesis que permite articular las componentes construcción y artefactos corresponde a la génesis instrumental. La llegada de las herramientas informáticas dio nuevos bríos a la cuestión del lugar de los instrumentos en la actividad matemática, al facilitar su empleo y al ofrecer la posibilidad de realizar pruebas dinámicas. Este aspecto está ligado a la cuestión de la prueba evocada en el párrafo anterior, aunque se añade una dimensión procedimental que aumenta aún más la fuerza de la prueba mediante imágenes animadas cuando el único recurso a la percepción estática es insuficiente para convencer.

Génesis discursiva del razonamiento

La génesis discursiva será la que articule la componente cognitiva *Prueba*, con la epistemológica *Referencial Teórico*. La articulación entre visualización y razonamiento supone la creación de espacios de trabajo geométrico en donde el razonamiento se apoya de manera explícita en diagramas, en una especie de razonamiento diagramático en el que imagen y discurso de apoyan uno en el otro. Inevitablemente, la naturaleza y la importancia de las formulaciones escritas difieren de un paradigma a otro y, en los enfoques más axiomáticos, es posible afirmar que un objeto matemático no existe más que en y mediante su definición.

Existirán distintos modos de enfoque del trabajo geométrico, en función de las génesis privilegiadas y podrán inducir síntesis geométricas diferentes en relación con los paradigmas geométricos, pero también con las elecciones didácticas de los profesores y las competencias de los alumnos. La figura 2.10 resume la concepción evolutiva y genética del ETG.

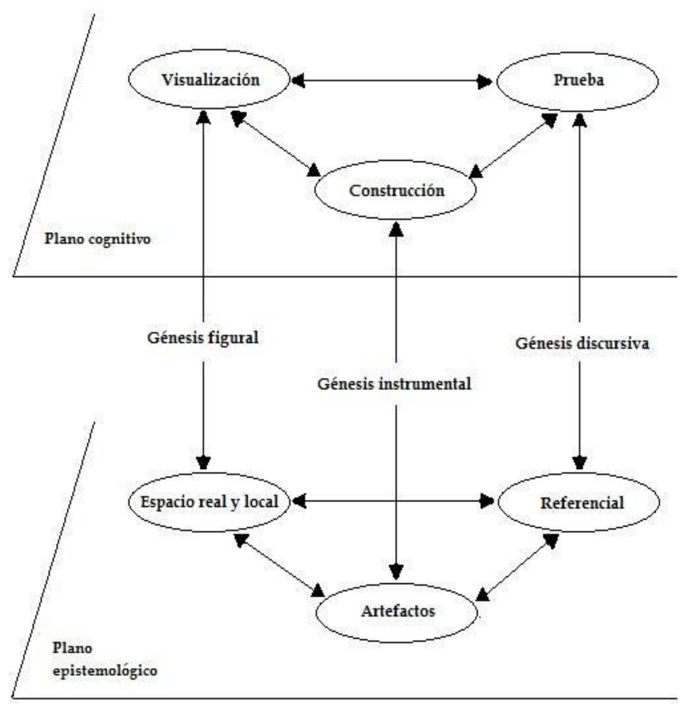


Figura 2.10: Un enfoque genético del ETG

Hemos descrito hasta ahora el ETG y sus componentes, y como ya hemos señalado, necesitaremos también de la ampliación de esta teoría al ETM pues el estudio de las funciones trigonométrica supone también aspectos analíticos. A continuación describiremos la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011).

2.2.2. Espacio de Trabajo Matemático y sus génesis

Las investigaciones iniciadas en otros campos matemáticos incitan a una reflexión sobre lo que podría ser un Espacio de Trabajo Matemático (ETM). A continuación se introducirán elementos sobre la transposición, en el trabajo matemático general, de la estructura particular utilizada para los ETG.

La definición de los ETG se asocia directamente a las particularidades de la geometría. Algunos elementos que forman parte del ETG y que tienen relación con el espacio y la figura parecen no poder generalizarse en campos como las probabilidades o el análisis, pues tienen relación con el azar o la decisión, la variación, la continuidad entre otros. Todo estudio didáctico supone la descripción de un Espacio de Trabajo para el campo abordado, por lo que el marco del ETM surge como una envoltura metodológica sobre la cual será posible apoyarse para desarrollar nuevos Espacios de Trabajo específicos.

Del estudio del ETG se conserva la idea de articular dos niveles en el espacio de trabajo: uno de naturaleza epistemológica en estrecha relación con los contenidos matemáticos del campo estudiado, y otro de naturaleza cognitiva. El trabajo matemático es el resultado de un proceso progresivo de génesis que permitirá una articulación interna con los niveles epistemológicos y cognitivo, así como la articulación de estos dos niveles.

Componente semiótica

Los artefactos y el elemento referencial teórico quedan como dos componentes de base de todo plano epistemológico asociado a un campo matemático particular, sin embargo, la componente ligada al espacio y a las configuraciones geométricas debe ser modificada. Esta componente se asocia a la forma visible y concreta de los objetos propios de la geometría. Para extenderla a otros campos matemáticos, y considerando la concepción de las matemáticas fundadas sobre representaciones semióticas, se introduce la noción de *signo* o *representamen* en el sentido de Peirce (1978). Los signos pueden adquirir significaciones diferentes en función del nivel de su utilizador como en el caso de las fórmulas algebraicas que sintetizan las relaciones entre objetos y toman un sentido icónico para el utilizador experto. Estos diferentes niveles de relaciones con el objeto remiten las distinciones entre los paradigmas utilizados.

Un punto de vista genético sobre el trabajo matemático

Para describir el nivel cognitivo del ETM, aceptaremos un proceso cognitivo en relación con la importancia que concedemos a los signos y a las representaciones en la constitución del trabajo matemático. Se conserva las nociones de prueba y de construcción, sin embargo, el proceso de visualización necesita una reinterpretación fundamental para encontrar su lugar en el ETM, que estará asociado a esquemas y operaciones de uso sobre los signos. La figura 2.11 describe la concepción del ETM donde se ha introducido la idea de una génesis semiótica, asociada a las representaciones de los objetos matemáticos, y donde se conserva el término de visualización, considerando que deberá estar estrechamente asociado a la intuición y a los esquemas operatorios sobre los signos y las representaciones.

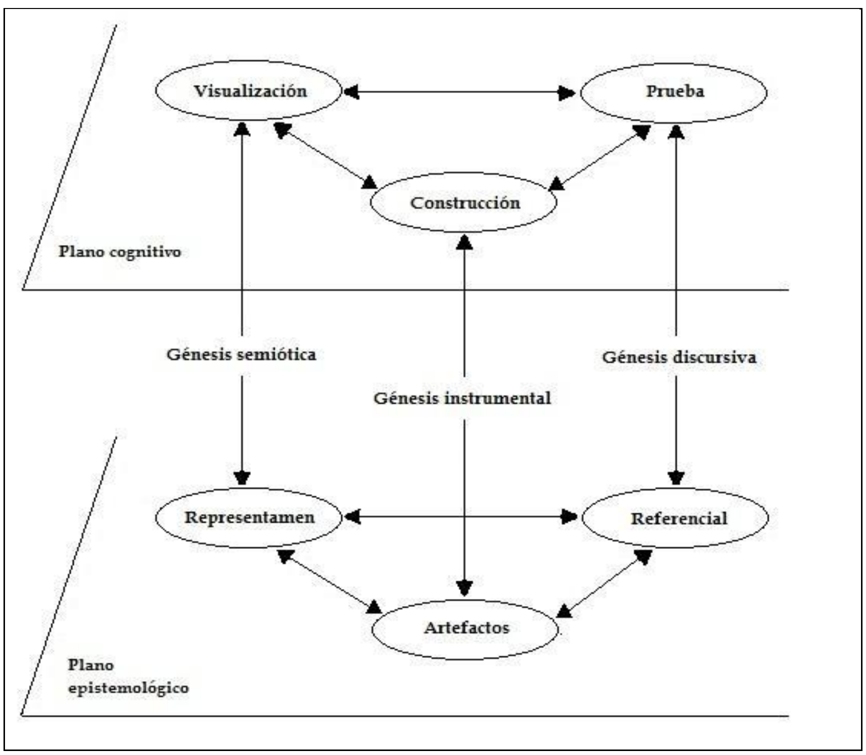


Figura 2.11: Espacio de Trabajo Matemático

En el esquema podemos observar que las componentes cognitivas del ETG se conservan en la ampliación al ETM, al igual que las componentes epistemológicas de los artefactos y el referencial teórico. Kuzniak (2011) introduce la noción de un representamen o signo en el sentido de Peirce (1978) considerando así otros dominios de la matemática. Para articular el plano cognitivo con el epistemológico se introducen tres génesis fundamentales y estrechamente ligadas al Espacio de Trabajo Matemático

a. Una génesis instrumental que permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo.

b. Una génesis semiótica basada en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETM su estatus de objeto matemáticos operatorios.

c. Una génesis discursiva de la prueba que dará sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

2.2.3. Otras aproximaciones teóricas

La teoría de Espacio de Trabajo Matemático, está definida bajo la articulación de otras teorías, cognitivas y epistemológicas. Es necesario para nosotros, ahondar brevemente en algunas de ellas, que nos permiten dar mayor sustento a nuestra investigación.

Utilizaremos la idea de *Representaciones Semióticas* en el sentido de Duval (1995) quien menciona la existencia de actividades cognitivas que requieren de la utilización de sistemas de expresión y representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes. El autor sostiene que para un mejor aprendizaje matemático es esencial que en el desarrollo de las actividades cognitivas exista la utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión. Junto con esto menciona lo esencial que es "no confundir jamás los objetos matemáticos con sus representaciones, pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes" (Ibíd. p.14). Además se basa en la existencia de representaciones mentales, que las concibe como "todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado"(Ibíd. p.14). Además, agrega que todo individuo necesita exteriorizar de alguna manera las representaciones mentales, y la forma de hacerlas visibles a los otros, se llamará representaciones semióticas. Estas representaciones semióticas, dependen de las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación. Se llama semiosis a la producción de una representación semiótica, y noesis a los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia. Dada la necesidad de las representaciones semióticas para algunas actividades cognitivas y la implicación recíproca de las representaciones mentales y representaciones semióticas parece legítimo avanzar en la hipótesis: no hay *noesis* sin *semiosis*; es la *semiosis* la que determina las condiciones de posibilidad de ejercicio de la *noesis*. (Ibíd. p. 14).

Para Duval (1995), existen distintos registros de una representación, estos pueden ser en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica entre otros y "se diferencian no sólo por la naturaleza de sus significantes, sino también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación" (Ibíd. p. 35).

En nuestro estudio hablamos de *génesis semiótica* basándonos en los registros de representaciones semióticas de Duval (1995) y es esta génesis la que articula la componente *visualización* y la componente *representamen*.

Para la génesis semiótica, consideraremos el concepto de *visualización* según Duval (2005), quien concibe la visualización matemática como "el derribo dimensional de las formas" (Ibíd. p. 7) y distingue dos niveles de operaciones puestos en juego en el acto de "ver", diferentes e independientes el uno del otro, estos son: el reconocimiento discriminativo de formas y la identificación de los objetos correspondientes a las formas reconocidas. En nuestro mundo real es posible ver estos dos niveles como indisociables y simultáneos, el objeto y la forma que se percibe y que permite distinguirlo. Sin embargo en las matemáticas no hay ninguna relación intrínseca entre las formas reconocidas y el objeto que se quiere representar, y el paso de uno a otro se efectúa necesariamente mediante una semejanza entre la forma visualmente discriminada y la forma típica del objeto representado. Esta semejanza constituye la imagen y es el medio que usa Peirce (1978) para caracterizar todas las representaciones icónicas, en oposición a los símbolos e índices.

Naturalmente, este mecanismo cognitivo de iconicidad no es siempre suficiente; hay que recurrir a veces a una enunciación implícita o explícita. En otros términos, "hace falta a veces una aportación verbal de informaciones, integrada en la imagen como la leyenda o como codificación de un elemento figurativo, para poder identificar lo que las formas discriminadas representan” (Duval, 2005, p. 14).

Distinguimos así, dos mecanismos de visualización: la visualización icónica y la visualización no icónica.

VISUALISATION ICONIQUE : *ÇA RESSEMBLE AU* profil d’un objet réel, ou à un ensemble d’itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon). *La figure reste un objet indépendant des opérations que l’on effectue sur elle*		**VISUALISATION NON ICONIQUE** : C’est une *SEQUENCE* d’*OPERATIONS* qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par l’impossibilité d’obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues. *La figure est une configuration contextuellement détachée d’un réseau ou d’une organisation plus complexes*	
BOTANISTE	ARPENTEUR-géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR-bricoleur

Figura 2.12: Dos mecanismos de identificación de objetos, a partir de formas visibles.

La visualización icónica, como se mencionó anteriormente, es la que “reposa en la semejanza que existe entre la forma reconocida en un trazado y la forma característica del objeto que hay que identificar” y supone una caracterización para cada objeto geométrico (Ibíd. p. 15). La visualización no icónica se da a partir de un proceso de descomposición de figuras de salida a partir de, o bien, una figura dada a partir de un enunciado de un problema o construible a partir de este enunciado, o la introducción de trazos suplementarios. En resumen, lo que diferencia a la visualización icónica de la no icónica es que la primera es más bien un mecanismo que aparece a través de una primera entrada perceptiva, y la segunda requiere de un proceso de salida donde la figura sufre una construcción o deconstrucción.

Duval distingue dentro de esta clasificación de mecanismos de visualización, cuatro entradas clásicas a la geometría: Las dos primeras, *botánico* y *topógrafo*, ligadas a la visualización icónica, y las otras dos: *constructor* e *inventor*, ligadas a la visualización no icónica, como se muestra en la figura 2.13, cuya descripción y explicación se presenta a continuación de la tabla.

	BOTANISTE	ARPENTEUR-géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR-bricoleur
1. Type d'opération sur les **FORMES VISUELLES**, requis par l'activité proposée	**Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour** : UNE forme *particulière* est privilégiée comme TYPIQUE	**Mesurer les bords d'une surface :** sur un TERRAIN ou sur un DESSIN (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure)	**Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument** Il faut (souvent) passer par des TRACÉS AUXILAIRES qui n'appartiennent pas à la figure " finale".	**Transformer des formes les unes dans les autres.** Il faut ajouter des TRACÉS REORGANISA-TEURS dans la figure finale pour initialiser ces transformations
2. Comment les **PROPRIETES GEOME-TRIQUES** sont mobilisées **par rapport à ce type d'opération**	Pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible)	Les propriétés **sont des critères de choix** pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à *une formule permettant un calcul*	Comme **contraintes d'un ordre de construction** . Certaines propriétés sont obtenues par **une seule opération de traçage**, les autres exigent plusieurs opérations.	Implicitement par renvoi à un réseau plus complexe (une trame de droites pour la géométrie plane ou une trame d'intersections de plans...) que la figure de départ

Figura 2.13: Cuatro entradas clásicas a la geometría

A continuación, describiremos cada una de las cuatro entradas mencionadas:

Botánico: Reconoce las formas a partir de cualidades visuales de un contorno y no hay relación entre las distintas propiedades geométricas.

Topógrafo: Mide los bordes de una superficie: sobre un terreno o un diseño. Las propiedades son criterios de elección para las medidas necesarias. No son útiles si se relacionan a una fórmula que permite un cálculo.

Constructor: Descompone una forma en trazados construibles con la ayuda de un instrumento. Es necesario muchas veces pasar por la etapa de trazados auxiliares que no pertenecen a la figura final. Ciertas propiedades son obtenidas por una sola operación de trazado, otros exigen varias operaciones.

Inventor: Transforma formas unas dentro de otras. Hay que añadir diseños reorganizadores en la figura final para iniciar las transformaciones.

El enfoque botánico se caracteriza por observar, el topógrafo por medir, el constructor por descomponer y construir y el inventor por transformar. Estos enfoques se verán activados dependiendo del tipo de operación sobre las formas dadas y la manera en que las propiedades geométricas son movilizadas en relación a ese tipo de operación.

Para la génesis instrumental, es necesario describir qué es lo que consideramos por artefacto, y ampliar este concepto al considerar también artefactos simbólicos. Con tal fin, tomamos la teoría de artefactos de Rabardel (1995), donde el autor se refiere a artefactos como herramientas inertes susceptibles de ser utilizadas por un individuo o *utilizador*. Una vez que este utiliza el artefacto, pasa a llamarse instrumento, es decir, el instrumento es el artefacto vía la acción del individuo, por lo que, un mismo artefacto podría definir dos instrumentos distintos, bajo dos acciones distintas. Por ejemplo, una regla, que es un artefacto, asociada a la acción "medir" corresponde a un instrumento distinto que la misma regla asociada a la acción "trazar un segmento". El proceso de articulación entre el artefacto y el instrumento se denomina instrumentalización. En la teoría del ETM, hablamos de *génesis instrumental*.

Para Rabardel (1995), existen instrumentos materiales clásicos, como regla y compás, y no clásicos, como los softwares computacionales. Además, Rabardel se refiere a artefactos simbólicos, como aquellos compuestos por símbolos matemáticos, que actúan como artefactos cuando van a ser utilizados por un individuo. Para nosotros, en la teoría del ETM, un artefacto simbólico es un algoritmo, es decir, una expresión, o proceso, que puede ser eventualmente computarizada.

En la *génesis discursiva* consideraremos la componente *Prueba* según Balacheff (1999), donde distingue un esquema de trabajo intelectual que se entiende por *proceso de prueba* y está compuesto por las pruebas pragmáticas, las pruebas intelectuales y su respectiva tipología. Las pruebas pragmáticas corresponden a "aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y supone la posibilidad de tener acceso a realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos" (p. 2). Las prueba intelectuales en cambio son "las que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión" (p, 2).

A continuación se mencionan las tipologías de prueba para las dos pruebas mencionadas en el párrafo anterior. En las pruebas pragmáticas se encuentran:

- Empirisme naïf: (o Empirismo ingenuo) La persona que valida una afirmación lo hace después de verificarla para algunos casos particulares.
- Experimento crucial: La persona que valida la afirmación toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante el uso

de un caso particular que reconoce como “no especial”.

- Ejemplo genérico: La persona que valida justifica la afirmación considerando al objeto concreto como un representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación.

Las pruebas intelectuales son:

- Demostración: El razonamiento que utiliza la persona tiene la función de verificar y explicar en lenguaje reconocido por la comunidad matemática, cuyas reglas de debate se fundan sobre la lógica formal y en la deducción de teoremas y/o axiomas.
- Cálculo sobre el enunciado: No hay uso de ejemplo ni de dibujos, sino que se utiliza un razonamiento (cálculo) a partir de propiedades (enunciadas) que por lo general, no son del todo ciertas (o seudo-teoremas) y que son tan usuales de encontrar tanto a nivel numérico como en el geométrico.

Finalmente para nuestra metodología utilizaremos el concepto de Tipo de tareas y tareas según Chevallard (1999). En su estudio menciona lo siguiente:

Cuando una tarea t forma parte de un tipo de tarea T, se escribirá $t \in T$. En su mayoría, una tarea se expresa por un verbo: *desarrollar* la expresión literal dada, *dividir* un entero entre otro, *limpiar* la habitación, entre otros. La noción de tarea es más amplia que la del lenguaje corriente, por ejemplo: rascarse la mejilla, ir del sofá al armario, e incluso sonreír a alguien, son también tareas. Mientras que *Subir una escalera* o *calcular el valor de una función en un punto* son tipos de tareas, pero *subir* o *calcular* son solo un *género de tareas*, que pide un determinativo (p. 222).

Capítulo 3.

Metodología

A continuación describiremos los métodos utilizados en nuestro trabajo de investigación. En términos generales, este estudio utiliza una metodología de carácter cualitativo, enfocándonos en dos tipos de estudios distintos.

Comenzamos la investigación con un estudio exploratorio (llamado Experiencia 1), con el fin de dar respuesta a la pregunta que apunta a conocer cuál es el trabajo matemático de los estudiantes que han cursado asignaturas de trigonometría a nivel universitario, y cuáles son las dificultades con las que se encuentran cuando intentan resolver aquellos problemas que necesitan una articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario.

El segundo estudio realizado (llamado Experiencia 2) es de tipo descriptivo, enfocado en un estudio de casos, el cual se realizó mediante un par de cuestionarios realizados a cuatro estudiantes (dos binomios), recién egresados de la enseñanza media. Esto, con el fin de dar respuesta a la interrogante sobre cuál es el trabajo matemático que realizan los estudiantes frente a una tarea que frecuentemente se plantea en los programas de estudio del ministerio, en cuanto a las técnicas que ocupan, las propiedades o teoremas que ponen en juego, o las distintas formas de visualizar el problema, en contraste con un diseño de tareas realizado por nosotros, que observa las mismas variables, donde se busca articular el trabajo de las razones trigonométricas en el triángulo, con las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario.

3.1. Etapas del Estudio

A continuación presentamos las distintas fases que nos llevan a realizar la investigación, en cuanto a la metodología señalada:

Fase 1: Elección de tareas y tipos de tareas de los programas de estudio. Análisis a priori de la tarea seleccionada. Confección y análisis a priori de cuestionario para estudiantes de primer año de universidad.

Fase 2: Aplicación de tarea seleccionada de los programas a 2 binomios de enseñanza media. Aplicación del cuestionario a estudiantes de primer año de universidad.

Fase 3: Análisis a posteriori de los resultados de ambas aplicaciones

Fase 4: Confección de cuestionario que involucra 2 ítems: la tarea del programa del ministerio, seleccionada en la fase 1, y tareas diseñadas para eventualmente formar parte de la propuesta de enseñanza y aprendizaje.

Fase 5: Análisis a priori de las tareas diseñadas en la fase 4.

Fase 6: Aplicación del diseño de tareas a los mismos binomios de la fase 2.

Fase 7: Análisis de resultado del diseño de tareas propuestas.

Fase 8: Confección de una propuesta de enseñanza y aprendizaje refinada a partir de los resultados.

3.2. Contexto de Aplicación

3.2.1. Experiencia 1

El primer estudio realizado como mencionamos anteriormente, tiene un carácter exploratorio y para dar respuesta a nuestros objetivos se consideraron estudiantes que han cursado al menos un curso donde se enseñe trigonometría, ya sea a nivel secundario o a nivel universitario. Para esto escogimos a diez estudiantes de segundo año de la carrera de Matemática de una universidad de la región de Valparaíso, ya que en esta carrera se imparte el curso de Introducción al Cálculo durante el primer semestre de la carrera, el cual muestra en su programa el contenido deseado.

Es importante que la muestra escogida represente el trabajo realizado por los distintos estudiantes de la carrera de Matemática, por lo que hemos clasificado de manera conveniente, en base a la cantidad de veces cursadas la asignatura, a dichos estudiantes. De los diez estudiantes escogidos, tres han cursado una vez el ramo de Introducción al Cálculo, cinco de ellos aprobaron el curso luego de haberlo cursado por segunda vez y dos de los estudiantes escogidos tomaron por tercera vez el ramo, logrando aprobarlo en esta última instancia. En resumen, los estudiantes seleccionados se pueden clasificar como lo muestra la siguiente tabla:

Tabla de especificación

	Curso de Introducción al Cálculo		
Veces cursadas / Total Estudiantes	**1 vez**	**2 veces**	**3 veces**
10	3	5	2

Cabe mencionar que estos 10 estudiantes son elegidos de una matrícula de 23 estudiantes. A continuación se procede a describir el contexto de aplicación para la Experiencia 2

3.2.2. Experiencia 2

Esta segunda experiencia se compone de dos situaciones, confeccionadas para estudiantes egresados recientemente de la enseñanza media escolar. Escogimos cuatro estudiantes que recibieron formación diferenciada en la asignatura de Matemática por lo que se les entregaron los contenidos de trigonometría, y con el objetivo de provocar la interacción de estos estudiantes y favorecer el carácter dinámico de las tareas, para así analizar el Espacio de Trabajo Matemático, la aplicación de estos cuestionarios fue organizada en binomios. El primer binomio, son estudiantes provenientes de un liceo particular pagado que se caracteriza por entregar una educación de calidad y de exigir buenos resultados de parte de los estudiantes, por lo que consideramos a estudiantes como "*aventajados*". Esta característica nos ayuda a favorecer el análisis de nuestro estudio ya que serán capaces de pasar por todas las etapas de nuestro experimento, sin quedar atrapados en las exigencias establecidas, y avanzar sin mayores dificultades para poder describir todo el Espacio de Trabajo Matemático posible. El segundo binomio, es escogido con el fin de conocer el Espacio de Trabajo Matemático en alumnos que trabajan a partir de lo establecido por el Ministerio, por lo que son estudiantes que cumplieron su enseñanza media en un liceo municipal, que se rige por las bases y programas de estudios brindada para toda la educación chilena. Consideramos este perfil para describir todo tipo de estudiantes y saber si son capaces de articular los conocimientos adquiridos durante su escolaridad.

3.3. Instrumentos Metodológicos

Como mencionamos anteriormente, hemos realizado nuestra investigación a través de dos tipos estudios: uno de carácter exploratorio y el otro de carácter descriptivo. Para la Experiencia 1, confeccionamos un Cuestionario a universitarios, de dos preguntas, la primera subdividida en tres tareas (Chevallard, 1999), donde cada una de ellas apunta a distintos objetivos en el aprendizaje de la trigonometría, con el fin de analizar el Espacio de Trabajo Matemático-personal de estudiantes universitarios que han recibido formación diferenciada en la asignatura de matemática en la enseñanza media y/o algún curso universitario de trigonometría, y evidenciar las dificultades que presentan cuando se enfrentan a problemas donde sea necesario articular las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, con las gráficas de las funciones trigonométricas definidas por el círculo (ver Anexo A).

Para la Experiencia 2 confeccionamos un Cuestionarios para enseñanza media que consta de dos ítems, el primero corresponde a la Tarea seleccionada como propuesta ministerial, y el segundo corresponde a Tareas diseñadas para ser analizadas con el fin de formar parte de la Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje. Para el primer ítem se analizó el currículum y los programas de estudio en los problemas que se plantean relacionados con la trigonometría, con el fin de evidenciar y analizar el Espacio de Trabajo Matemático-personal, como también medir las competencias y las herramientas utilizadas por los estudiantes de enseñanza media al enfrentarse a problemas trigonométricos que deben ser trabajados por todos los establecimientos municipales del país, convirtiéndose en un actividad deseable para los profesores de secundaria. El segundo ítem es una adaptación del primero y como se mencionó anteriormente es un diseño de tareas que eventualmente formarán parte de nuestra Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje, éstas se confeccionaron con el fin de potenciar el tránsito entre las distintas génesis que componen el Espacio de Trabajo Matemático-personal de los estudiantes, y articular las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo con las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo (ver Anexo B).

A continuación describiremos el objetivo de cada tarea propuesta en nuestro instrumento de investigación

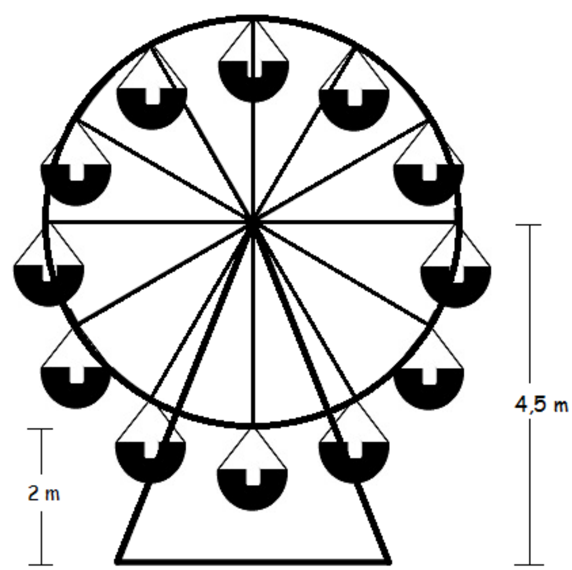
3.3.1. Experiencia 1: Cuestionario a universitarios

El Cuestionario a universitarios, como hemos mencionado anteriormente, consta de dos preguntas, la primera de ellas subdividida en tres tareas. Todas confeccionadas para identificar las dificultades con las que se encuentran los estudiantes universitarios, que cursaron alguna asignatura donde se enseñe trigonometría, cuando intentan resolver aquellos problemas que necesitan una articulación entre las razones trigonométricas del triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo, y así lograr analizar el Espacio de Trabajo Matemático de los estudiantes en las distintas génesis.

A continuación se presentan las tareas mencionadas describiendo cada uno de sus objetivos de implementación. Cabe mencionar que las primeras tres tareas están ligadas a una misma situación.

Pregunta 1.

Observe la siguiente figura y conteste:



Tarea A.

Las personas van subiendo una a una al carro contiguo. Si hay 4 personas haciendo fila para subir a esta rueda y sólo se permite una persona por carro, luego de subir las 4 personas ¿Cuál es la longitud de la trayectoria realizada por el primer carro desde que la rueda empezó a girar?

La primera tarea tiene como objetivo principal vincular el ángulo central de la circunferencia descrita por la rueda con el arco que lo subtiende. Se requiere que el estudiante sea capaz de encontrar los ángulos formados por los rayos que sostienen los carros de la rueda y analizar la proporción dada por estos, con el perímetro de la circunferencia descrita por la rueda de la fortuna.

Tarea B.

Determine la distancia que hay desde el primer carro ocupado al suelo, en el instante en que suben las cuatro personas.

Esta tarea apunta a evidenciar que el estudiante comprende el concepto de las razones trigonométricas y cómo este conocimiento lo ayuda a encontrar la coordenada "y" (ordenada) que describe el carro (punto) en la rueda (circunferencia).

Tarea C.

Si la rueda se mueve indefinidamente, construya un gráfico, cuyo eje de las ordenadas (eje Y) corresponde a la distancia que hay de cualquier carro al suelo y el eje de las abscisas (eje X) puede elegirlo convenientemente. Que puedes concluir después de realizar el gráfico.

El objetivo de esta tarea es que el estudiante sea capaz de construir un gráfico a través del cambio de posición de una variable (carro). Y además que logre vincular la curva descrita por el movimiento con la función seno.

Pregunta 2.

¿Qué es para ti un radián?

Esta pregunta fue confeccionada para conocer la noción que adquirieron los estudiantes acerca de este elemento, después de haber cursado alguna asignatura donde se enseña la trigonometría.

Para identificar las posibles dificultades que surgen a partir del intento de articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas en el círculo y las herramientas utilizadas en los procedimientos por los estudiantes, y además el tránsito que puede existir entre las distintas génesis del ETM-personal, se construyó un protocolo de análisis (Ver Anexo E) que mostraremos a continuación, cuyos resultados describiremos en el siguiente capítulo.

		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudian-tes	Pregun-ta	Génesis semiótica	Génesis Instrumen-tal	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis Instrumen-tal	Génesis discursiva
Estudiante 10	A						
	B						
	C						

3.3.2. Experiencia 2: Cuestionario para enseñanza media

Como señalamos anteriormente, la segunda experiencia realizada es de tipo descriptivo, confeccionada para analizar y articular el trabajo en el ETM-personal de estudiantes recién egresados de cuarto año de enseñanza media, que cursaron específicamente el plan diferenciado de la asignatura de matemática. Para esto se decidió enfrentar a cuatro estudiantes (dos binomios), a un Cuestionario compuesto de dos ítems. En el primer ítem se presenta una tarea que frecuentemente propone el Ministerio, que por tanto, es tratada a nivel de liceo en la mayoría de las instituciones del país. En el tipo de tarea elegido se necesita de la construcción del triángulo rectángulo para llegar al resultado, por lo tanto, hemos tomado el tipo de tarea "*Encontrar un cateto de un triángulo rectángulo, dada la hipotenusa y un ángulo en un problema contextualizado*". El segundo ítem, se compone de dos situaciones distintas. La primera surge como una adaptación del primer ítem, donde se agregan cinco nuevas tareas que dan movimiento a un problema estático para así convertirlo en un problema dinámico. Las tareas confeccionadas permiten intensionar el tránsito por las distintas *génesis* que componen el ETM de manera que sea posible articular las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo con el círculo. En la segunda situación se plantean siete tareas dinámicas que igualmente potencien la articulación entre las razones trigonométricas del triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario, sin embargo esta situación intenciona principalmente el tránsito por las distintas *génesis* para articular el círculo con las funciones trigonométricas y en definitiva las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo con las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario.

Si bien, este diseño de tareas responde a nuestro tercer objetivo específico, es importante especificar los objetivos de cada tarea planteada en el cuestionario propuesto. A continuación mostraremos cada tarea y su objetivo principal.

Ítem I

Propuesta ministerial

La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Esta pregunta fue confeccionada con el fin de conocer si los estudiantes comprenden una situación dada y construyen, en este caso, un triángulo rectángulo que la represente, además de reconocer la razón trigonométrica que relaciona la hipotenusa de un triángulo rectángulo con el cateto opuesto a un ángulo dado para encontrar la medida de este cateto.

Ítem II

<u>Diseño de tareas</u>

Primera situación:

La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°

Diseño: Tarea 1

¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Cabe mencionar que el objetivo de esta tarea apunta a lo señalado en el Ítem I, ya que corresponde a la misma tarea. Sin embargo en este ítem se agregan otras que dan movimiento a la situación.

Diseño: Tarea 2

¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?:¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

El principal objetivo para esta tarea es lograr que los estudiantes evidencien que la razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto opuesto a un ángulo dado se mantiene aunque varíe la longitud de sus lados (seno de un ángulo).

Diseño: Tarea 3

¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza? Justifica tu respuesta.

Esta tarea tiene como objetivo que el estudiante reconozca que la trayectoria que sigue el volantín desde que se lanza, corresponde a un arco de circunferencia. Así, es posible que el estudiante relacione el triángulo construido anteriormente con el círculo.

Diseño: Tarea 4

¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

Esta tarea apunta en una primera instancia a relacionar la altura máxima alcanzada por el volantín con el ángulo de 90° que forma respecto al suelo y posteriormente con el perímetro de un cuarto de circunferencia.

Diseño: Tarea 5

¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

En esta tarea el estudiante debe construir el triángulo rectángulo, que representa la situación, dentro de la circunferencia descrita por la trayectoria que recorre el volantín.

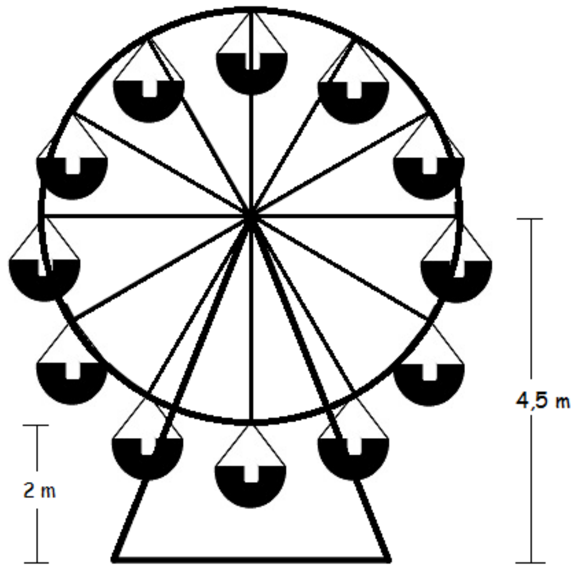
Diseño: Tarea 6

¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

En esta última tarea el estudiante debe identificar la mitad de la altura máxima y asociarlo al punto correspondiente en el contorno de circunferencia para luego unir este punto con el centro de circunferencia.

Segunda situación

Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

Diseño: Tarea 7

¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

Esta primera pregunta de la segunda situación planteada apunta a que el estudiante utilice la definición de perímetro o calcule cuántas veces cabe un radio en el contorno de circunferencia.

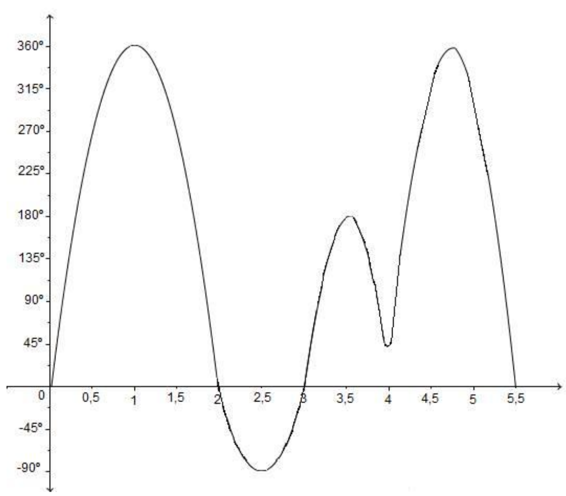
Diseño: Tarea 8

¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

Esta pregunta apunta a que el estudiante, a partir del resultado obtenido, relacione éste con el ángulo del centro que subtiende al arco y más aún, lo asocie al concepto de radián.

Diseño: Tarea 9

El siguiente gráfico (tiempo v/s ángulo) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



La tarea 9 tiene como objetivo que el estudiante relacione los ángulos con el movimiento de la rueda y los cambios de pendiente en la gráfica con el cambio de sentido en esta.

Diseño: Tarea 10

Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

Esta tarea apunta principalmente a que el estudiante identifique la proporcionalidad directa involucrada en las variables ángulo y cantidad de barras y al igual que la tarea 2 lo asocie a la proporcionalidad directa que existe entre ángulos y radianes.

Diseño: Tarea 11

Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?

Esta tarea fue diseñada con el fin de que el estudiante reconozca que lo solicitado corresponde a la gráfica de una función seno, o en su defecto que construya la gráfica solicitada y la reconozca.

Diseño: Tarea 12

Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

Esta tarea tiene el mismo propósito que la tarea 12. Esto, para que el estudiante pueda cumplir el objetivo a mencionar en la tarea 13.

Diseño: Tarea 13

Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

El objetivo para esta tarea es reconocer que la semejanza que existe de las gráficas obtenidas en las tarea 11 y 12 se debe a la proporcionalidad directa en que se relacionan las variables ángulo y cantidad de barras utilizadas en la rueda entre un carro y otro.

Capítulo 4.

Experimentación y Análisis de datos

4.1. Análisis a priori del ETM de las tareas propuestas

A continuación se presenta el tipo de tarea privilegiado por el Programa de Estudios y cada tarea (Chevallard, 1999), descrita anteriormente, con su respectivo análisis previo a la fase experimental.

Ítem I

Propuesta ministerial

La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Esta tarea activa inicialmente la *génesis semiótica* (Kuzniak, 2011), donde se trabaja con una visualización icónica en un registro figural (Duval, 1995), en el cual el alumno actuará bajo un enfoque botánico (Duval, 2005) ya que solo reconocerá los elementos involucrados en la figura del problema. Posteriormente se utilizará como referencial teórico la definición de seno, pero no es suficiente para activar la *génesis discursiva* (Kuzniak, 2011) porque la definición se utiliza más bien como un algoritmo, por lo que aparece como un artefacto simbólico, activando la *génesis instrumental*. Según nuestro análisis a priori, las génesis privilegiadas en esta y las otras tareas propuestas por el ministerio (que pertenecen al mismo tipo de tarea), solo activan y articulan las *génesis semiótica* y la *instrumental*, quedando debilitada la *génesis discursiva.*

Ítem II

Diseño de tareas

Primera situación

La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

Preguntas:

1. *¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?*
2. *¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?*
3. *¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde*

que se lanza? Justifica tu respuesta.

4. *¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.*

5. *¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?*

6. *¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?*

Este ítem consta de seis tareas relacionadas a un mismo encabezado, la primera de ellas es la tarea 1 mencionada anteriormente, que activa sólo las *génesis semiótica e instrumental* dejando debilitada la *génesis discursiva* (Kuzniak, 2011). Se agregan cinco actividades que permitirán que la primera situación transite por las distintas génesis.

En la segunda tarea se ven activadas las tres génesis; en una primera instancia el alumno visualizará el problema con registro natural, por lo que trabajará como un botánico que posteriormente se convertirá en topógrafo, utilizando la medición (Duval, 2005), reforzando la componente visualización y activándose la *génesis semiótica*. El uso de artefactos como regla, compás, escuadra, transportador, entre otros, activará la *génesis instrumental*. Finalmente utilizará la definición de razón y comprobará lo realizado activando la génesis discursiva.

En la tercera tarea el alumno se verá enfrentado a distintos escenarios. Una posibilidad es que recurra solo al lenguaje natural (*génesis semiótica*) para llegar a la respuesta, utilizando frases como "*El volantín describirá una trayectoria circular*, *como dibujando una semicircunferencia*", o simplemente de manera gestual dibujará una semicircunferencia con su mano, sin embargo es posible que justifique utilizando un artefacto como el compás, donde el radio (que no cambia) representará el hilo del volantín, que en todo punto es el mismo, por lo que transitará por la *génesis instrumental* (Kuzniak, 2011). Incluso puede recurrir a la definición de circunferencia como referencial teórico y comprobará que su hipótesis inicial era correcta (*génesis discursiva*).

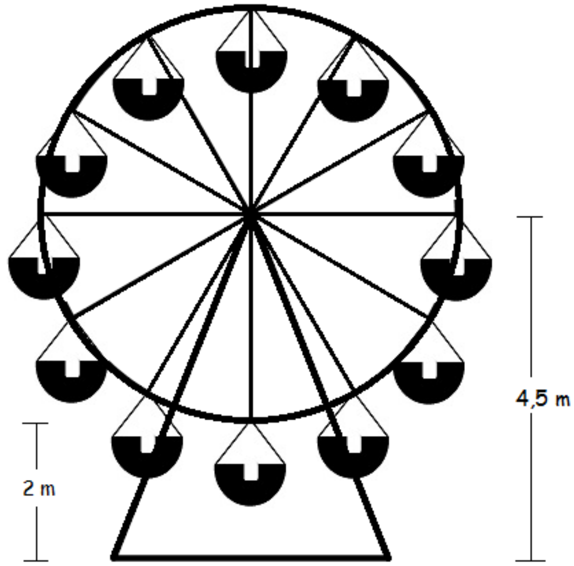
La cuarta tarea tiene dos posibles caminos. Por una parte se puede activar la *génesis instrumental* (Kuzniak, 2011) ya que el alumno recurrirá directamente a una fórmula conocida que tenga relación con el ángulo que describe la trayectoria del volantín, utilizando así sólo un artefacto simbólico. Por otro lado el alumno observará que se trata de un cuarto de circunferencia activando la *génesis semiótica* (Kuzniak, 2011) como botánico y recurrirá a la definición de perímetro para concluir la respuesta transitando así por la *génesis discursiva* (Kuzniak. 2011).

La siguiente tarea permite nuevamente que se activen las tres génesis. El alumno actuará como constructor al trazar la altura solicitada utilizando un registro figural (*génesis semiótica*) y recurrirá a un referencial teórico como es la definición seno que posteriormente bajo algoritmos llevará al alumno a encontrar lo solicitado (*génesis discursiva* e *instrumental).*

En la última tarea el alumno trabajará activando las tres génesis del mismo modo que en actividad anterior. En un primer momento actuará como un constructor trazando medidas para dar una mejor comprensión a la figura (*génesis semiótica*). Posteriormente el alumno recurrirá a las definiciones de seno y proporción (referencial teórico) donde utilizará algoritmos para llegar a la respuesta (*génesis discursiva* e *instrumental*).

Segunda situación

Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.

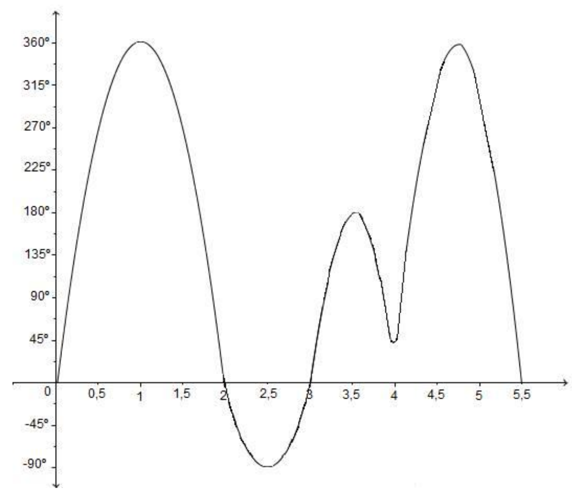


Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

1. *¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?*

2. *¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?*

3. *El siguiente gráfico (tiempo v/s ángulo) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?*



4. *Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?*

5. *Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?*

6. *Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?*

7. *Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?*

La segunda situación del Ítem II consta de siete tareas relacionadas a un mismo encabezado. En la primera de ellas se pueden identificar dos caminos. Uno de ellos es utilizando la definición del perímetro de circunferencia, donde se activará la *génesis discursiva* y posteriormente la *génesis instrumental* con la utilización de algoritmos para determinar la solución.

En la tarea siete en una primera instancia el estudiante visualizará que la imagen entregada representa una circunferencia cuyo radio puede conocer a partir de los datos que muestra la figura, con esto se ve activada inicialmente la *génesis semiótica* donde el estudiante trabaja bajo un perfil botánico. Posterior a esto se identifican dos posibles procedimiento a realizar por el estudiante. Uno de ellos es mediante definición de perímetro de circunferencia, donde se ve activada principalmente la *génesis discursiva* al considerar esta definición y posteriormente bajo algoritmos (artefacto simbólico) dar respuesta a la tarea, quedando debilitada la *génesis instrumental*. Otro procedimiento es que los estudiantes continúen la tarea de manera experimental. El estudiante activará la *génesis instrumental* con la utilización de artefactos como: lana, cartón, compás, entre otros para simular la situación de la rueda y medir como topógrafo lo solicitado, activando la *génesis semiótica*.

Para desarrollar la tarea ocho el estudiante tendrá que visualizar que la imagen entregada se asemeja a una circunferencia para calcular el ángulo del trazo a analizar, por lo que en un comienzo se activa la *génesis semiótica* y su trabajo será bajo un perfil botánico. Este argumento dará paso a transitar hacia la *génesis discursiva* utilizando como referencial teórico la definición de circunferencia, perímetro de una circunferencia y proporción. Sin embargo, estas definiciones serán un apoyo para realizar cálculos algorítmicos que lo llevará a la respuesta, activando finalmente la *génesis instrumental*, donde el instrumento ocupado es un artefacto simbólico.

En la tarea nueve el estudiante se ve enfrentado a un análisis e interpretación de una determinada curva para esto necesita trabajar en un registro gráfico (*génesis semiótica).* Sin embargo, debe relacionar las variables del eje de las ordenadas con el concepto de grados en la circunferencia y así entender que a medida que estos aumentan o disminuyen, tomando de referencia un carro de esta, se describirá el movimiento particular de la rueda ya sea en sentido horario o en sentido anti-horario. Por lo que se ve fuertemente potenciada la *génesis discursiva.* Posteriormente el estudiante se apoyara de artefactos para representar su respuesta activando así la *génesis instrumental*. Finalmente el estudiante el estudiante concluye utilizando un registro figural o natural activando la génesis semiótica.

Para la tarea diez es posible identificar dos procedimientos en la resolución por parte de los estudiantes, el primero tiene relación con la visualización, pues si éste observa como botánico que a medida que un carro específico avanza aumentará la cantidad de barras que describe la trayectoria, activará la *génesis semiótica* y posterior a esto la *génesis discursiva* al relacionar lo observado con el concepto de proporcionalidad directa como referencial teórico. Al hacer esto último representará bajo un registro gráfico lo concluido respecto de la gráfica solicitada. En el segundo procedimiento el estudiante representara lo solicitado en un registro gráfico, ubicando en los ejes coordenados las variables mencionadas en la tarea y en definitiva determinando la curva solicitada quedando activada nuevamente la *génesis semiótica*.

Para las tareas once y doce el trabajo solicitado es el mismo, por lo que el siguiente análisis se realiza para ambas tareas.

En las tareas once y doce se activa inicialmente la *génesis semiótica* donde el estudiante trabaja en un registro gráfico. Debe construir la curva dándose valores y realizando distintos algoritmos logra encontrar los puntos que describen la curva. Se ve fortalecida la *génesis semiótica* pero se complementa el trabajo con los instrumentos de la *génesis instrumental.* Para concluir la pregunta, el estudiante debe interpretar la curva construida logrando relacionarla con los conocimientos adquiridos en cursos anteriores (función seno), logrando activar la *génesis discursiva.*

En la tarea trece se solicita comparar los resultados de las tareas once y doce, los estudiantes recurren a un referencial teórico al relacionar los conocimientos que poseen del concepto de ángulos y radián, lo que se concluye en un registro natural, quedando activadas las *génesis semiótica y discursiva.*

4.2. Descripción de la fase experimental

La fase experimental tiene dos partes (*Experiencia 1* y *Experiencia 2*), que apuntan a objetivos distintos. Para el segundo objetivo específico: *Analizar el trabajo matemático, respecto al contenido de trigonometría, de estudiantes que han cursado asignaturas que involucran a dicho contenido a nivel universitario, e identificar las dificultades con las que se encuentran cuando intentan resolver aquellos problemas que necesitan una articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario* realizamos un cuestionario a estudiantes de la carrera de matemática en una universidad estatal del país. Participaron en este cuestionario un total de 10estudiantes, que cursan distintos años de la carrera. Todos ellos han pasado por cursos donde se trabajan contenidos relacionados con las funciones trigonométricas, definidas por el círculo unitario. Esto constituye nuestra *experiencia 1*.

La segunda parte de la fase experimental, o *experiencia 2*, apunta al cuarto objetivo específico: *Analizar el trabajo matemático de estudiantes egresados de enseñanza media que han recibido formación diferenciada en la asignatura de matemática, en cuanto a las técnicas que ocupan, las propiedades o teoremas que ponen en juego y las distintas formas de visualizar el problema*. Esta se realizó con dos binomios, que fueron enfrentados a un Cuestionario que consta de dos ítems: El primero busca describir el ETM frente a un tipo de tarea propuesta por el ministerio de educación en sus planes y programas; y el segundo ítem se compone de dos situaciones distintas, en la primera se adapta el Ítem I agregando cinco tareas para el enunciado inicial y en la segunda se plantean siete tareas que se vinculan a una segunda situación, con el fin de describir un espacio de trabajo diseñado para articular el trabajo trigonométrico donde se utiliza el triángulo rectángulo, con el trabajo manipulando funciones trigonométricas definidas por el círculo unitario.

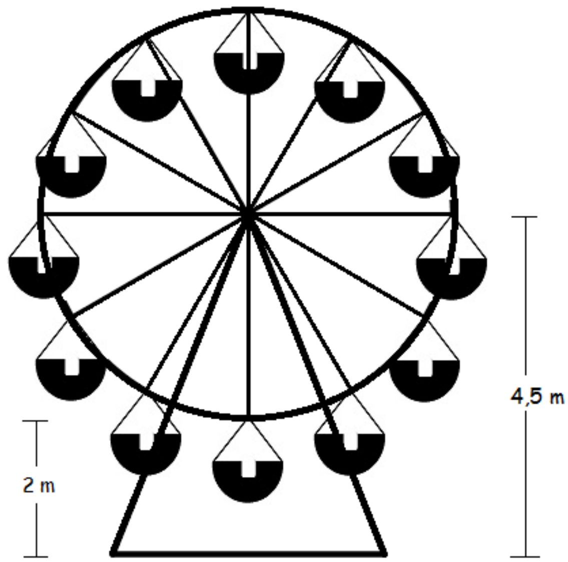
A continuación describiremos lo sucedido para los dos experimentos.

4.2.1. Experiencia 1: Cuestionario a universitarios

En términos generales la gran mayoría de los estudiantes encuestados respondió incorrectamente las tareas. Los errores cometidos tienen relación principalmente con la comprensión del contexto de la situación dada. De acuerdo a estos, los estudiantes ocupaban datos erróneos en procedimientos correctos.

Pregunta 1:

Observe la siguiente figura y conteste:



A. Las personas van subiendo una a una al carro contiguo. Si hay 4 personas haciendo fila para subir a esta rueda y sólo se permite una persona por carro, luego de subir las 4 personas ¿Cuál es la longitud de la trayectoria realizada por el primer carro desde que la rueda empezó a girar?
B. Determine la distancia que hay desde el primer carro ocupado al suelo, en el instante en que suben las cuatro personas.
C. Si la rueda se mueve indefinidamente, construya un gráfico, cuyo eje de las ordenadas (eje Y) corresponde a la distancia que hay de cualquier carro al suelo y el eje de las abscisas (eje X) puede elegirlo convenientemente. ¿Qué puedes concluir después de realizar el gráfico?

Para la tarea A, de los diez estudiantes encuestados, ninguno respondió correctamente. Sin embargo seis de los estudiantes, comprendían lo solicitado, sin embargo no contextualizaban la situación. Solo tres estudiantes realizaron procedimientos incorrectos, como utilizar Pitágoras para calcular la trayectoria que realiza un carro de la rueda de la fortuna. Esto, por considerar la trayectoria solicitada como recta. Solo uno estudiante no respondió la pregunta.

En la tarea B, no hubo respuestas correctas, y las respuestas variaron en dos procedimientos distintos. Uno privilegiado por cinco estudiantes que utilizaron como procedimiento el cálculo del valor de una hipotenusa a través de Pitágoras, y otro, donde cuatro estudiantes dieron como respuesta el valor dado en la imagen. El estudiante restante realizó un procedimiento erróneo donde evaluó la constante π en 180, como número real.

Para la tarea C hubo solo una respuesta correcta, donde el estudiante, sin realizar mayores cálculos, graficó la función seno para representar las distintas alturas que alcanza un carro específico cuando la rueda de la fortuna está en movimiento. De los estudiantes restantes, cuatro privilegiaron la gráfica de una circunferencia, cuatro estudiantes más graficaron una curva que, si bien era incorrecta, se acercaron bastante a la solicitada. El estudiante restante logró dibujar las alturas solicitadas, en la rueda de la fortuna, sin embargo no logró llevar a cabo esto a un gráfico.

4.2.2. Experiencia 2: Cuestionario a estudiantes de enseñanza media

Como hemos dicho, este experimento se realizó con cuatro estudiantes, repartidos en dos binomios. Los estudiantes se enfrentaron a dos situaciones, de donde identificamos en cada una, tres momentos distintos. Al primer momento lo llamamos *Momento inicial*, y es el primer acercamiento a la tarea; al segundo momento lo llamamos *Momento de discusión*, que tiene relación con las interacciones entre los estudiantes durante la resolución de cada tarea; al tercer y último momento lo llamamos *Momento de resultados* e indica el instante en que los estudiantes llegan a un acuerdo y entregan una respuesta a la tarea. Cada binomio dispuso del tiempo que estimó conveniente para responder los cuestionarios. Además contaron con calculadora científica, lana, tijera, compás, cartón, transportador y el software: GeoGebra. Se les proporcionó cualquier tipo de explicación que tuviera relación con la comprensión de las tareas.

Experiencia 2: Binomio 1

Al binomio 1 lo llamaremos B_1 y corresponde a una pareja de estudiantes (e_{11} y e_{12}) recién egresados de enseñanza media de un liceo privado, cuyas características han sido descritas en el capítulo 3. A continuación se describen los tres momentos para cada tarea a la que se enfrentaron los estudiantes.

Primera situación

- **Tarea 1: propuesta ministerial**

Dentro de las tareas propuestas por el ministerio, escogimos la tarea:

Resolver el siguiente problema: La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Describiremos a continuación, los tres momentos presentes en el desarrollo de esta tarea por B_1.

***Momento inicial**:*

Cuando la pareja de estudiantes se ve enfrentada a la tarea de la propuesta ministerial, comienzan realizándola cada uno de manera independiente. Por un lado el estudiante e_{11} representa al niño y al hilo, y le resulta el dibujo del triángulo con el ángulo de 30° dado. Concluye que, como es un triángulo rectángulo, el otro ángulo mide 60°. Utiliza la razón del seno de 30° y resuelve mediante una tabla de tres.

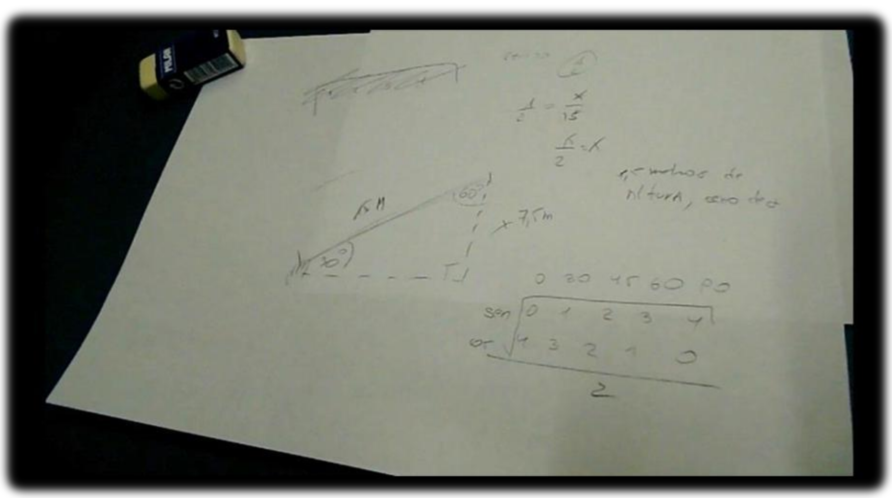


***Figura 4.1: Resolución del estudiante** e_{11}*

Por su parte e_{12} dibuja el triángulo con los ángulos de 30° y 60°.

Momento de discusión:

En esta fase, los estudiantes discuten acerca de sus procedimientos. El estudiante e_{11}, muestra su respuesta al estudiante e_{12}. Este último aún no ha llegado a un resultado y escucha lo propuesto por e_{11}. Finalmente e_{12} señala que tomará otro camino, pues *"no lo hace con seno y coseno"*, y decide utilizar relaciones entre el triángulo dado y un triángulo equilátero que el mismo e_{12} construye.

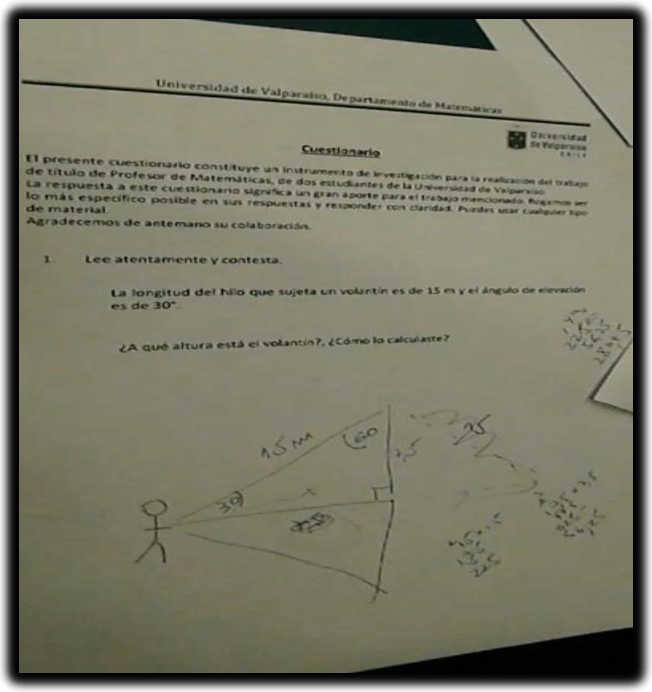


Figura 4.2: Resolución del estudiante e_{12}

Momento de resultados

Los estudiantes llegan al acuerdo de que su respuesta es la misma, a pesar de que utilizaron distintos caminos para su resolución. Cada uno describió su proceso.

- **Diseño: Tarea 2**

¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

En esta tarea podemos identificar cuatro preguntas, que las llamaremos:

Pregunta inicial: *¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?*; pregunta (a): *¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala;* pregunta (b): *¿cómo cambia la altura?;* y pregunta (c): *¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?*

Momento inicial:

Cuando los estudiantes se ven enfrentados a la tarea 2 la leen cada uno de manera independiente y posteriormente comienzan a expresar sus primeras impresiones.

Para la pregunta inicial, e_{11} menciona que al recoger hilo, manteniendo el ángulo de elevación se tendrá un vector, a lo que e_{12} asiente. El estudiante e_{12} se enfoca directamente en la pregunta (a) y dibuja un triángulo que representa la situación, donde la hipotenusa posee flechas en dirección a la posición de la persona que sostiene el volantín.

Para la pregunta (b) e_{11} menciona que existe una función en función del hilo del volantín, donde "la altura sería un medio de equis". Finalmente para la última pregunta (pregunta (c)), en relación a la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín, el estudiante e_{11} reconoce de manera inmediata que la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín se mantiene.

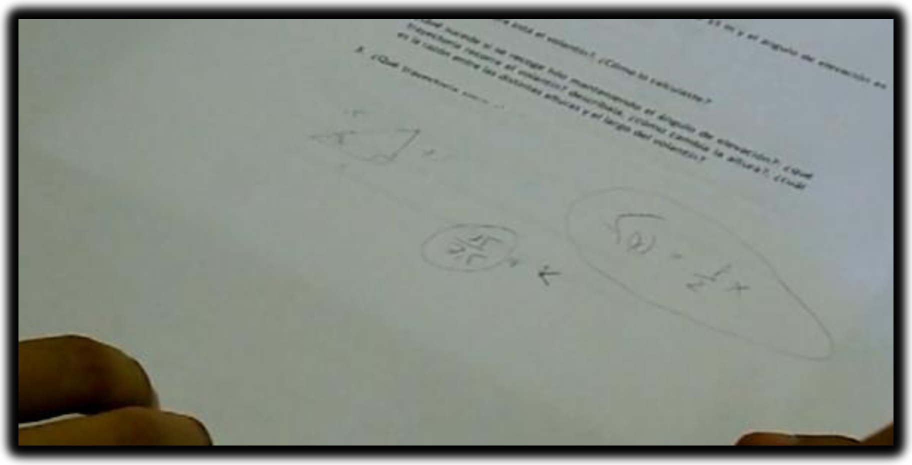


Figura 4.3: Resolución del estudiante e_{11}

Momento de discusión:

El estudiante e_{11} afirma que si se recoge hilo, la altura disminuirá, y que la razón entre las distintas alturas y el largo del hilo se va a mantener siempre que se mantenga el ángulo de elevación. Esta afirmación es compartida por e_{12} quien asiente.

Momento de resultados:

Para concluir con la tarea 2, los estudiantes afirman las impresiones mencionadas inicialmente y explican cada una de las preguntas involucradas.

- **Diseño: Tarea 3**

¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza? Justifica tu respuesta.

Momento inicial:

En esta primera fase, el estudiante e_{11} lee en voz alta la pregunta y e_{12} expresó no entender lo que se estaba preguntando. El investigador interviene y explica a los estudiantes a lo que apunta la pregunta. Se les pide que imaginen a una persona lanzando un volantín a otro y describan la trayectoria que sigue el volantín. A esto el estudiante e_{11} pregunta cuánto es el máximo de hilo a lo que el investigador responde que corresponden a los quince metros de hilo. El estudiante e_{11} realiza un dibujo para representar la situación dada y considerando el ángulo de elevación mencionado en la pregunta inicial, esto es, un ángulo de 30° donde los rayos que lo componen corresponden al largo del hilo del volantín.

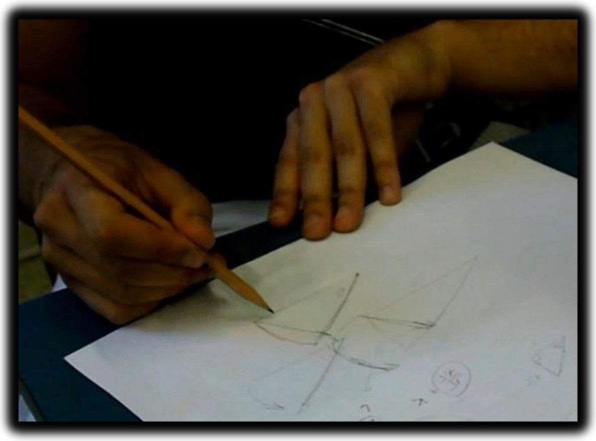


Figura 4.4: Resolución estudiante e_{11}

Momento de discusión:

En esta fase los estudiantes discuten acerca de la trayectoria que realiza el volantín desde que se lanza. Mientras el estudiante e_{11} afirma de manera gestual que el volantín realiza un movimiento circular, el estudiante e_{12} sostiene que realiza una trayectoria más bien recta. Luego de discutir esto por un momento el estudiante e_{11} reconoce el largo del hilo del volantín como un radio de circunferencia, lo que da pie para dar la respuesta a la tarea.

Momento de resultados:

En la última fase de la tarea el estudiante e_{11} logra convencer al estudiante e_{12} que la trayectoria que sigue el volantín desde que se lanza es de forma circular justificando mediante la definición de circunferencia.

- **Diseño: Tarea 4**

¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

Momento inicial:

El estudiante e_{11} relaciona la altura máxima que puede alcanzar el volantín con los 30° mencionados en la pregunta inicial. Por lo que el investigador interviene preguntando nuevamente cuál sería la altura máxima que puede alcanzar realmente el volantín, e_{11} reflexiona y logra comprender la tarea. Ante esto, muestra mediante gestos que la altura máxima del volantín se alcanza cuando el hilo forma un ángulo de 90° con respecto al suelo. Posteriormente, e_{12} reflexiona que la representación de la situación corresponde a un cuarto de circunferencia.

Momento de discusión:

En esta fase los estudiantes a pesar de que en un comienzo no comprenden lo solicitado, logran luego de la intervención del investigador, percibir la tarea de igual manera y concuerdan en la estrategia para llegar al resultado es calcular un cuarto del perímetro de una circunferencia.

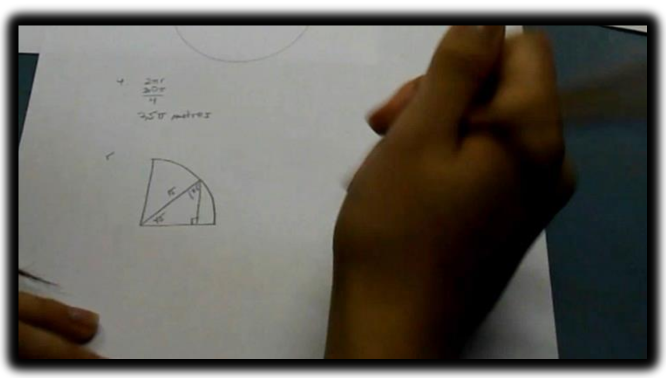


Figura 4.5: Resolución estudiante e_{12}

Momento de resultados:

En esta última fase los estudiantes realizan el cálculo del perímetro de circunferencia y lo dividen en cuatro para obtener el recorrido del volantín cuando alcanza su altura máxima. Esto se ve reflejado en el siguiente extracto de conversación.

- **Diseño: Tarea 5**

¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

Momento inicial:

Inicialmente ambos estudiantes comprenden de manera inmediata la tarea y dibujan un cuarto de circunferencia con el ángulo de 45° que representa la mitad de la trayectoria solicitada en la tarea anterior.

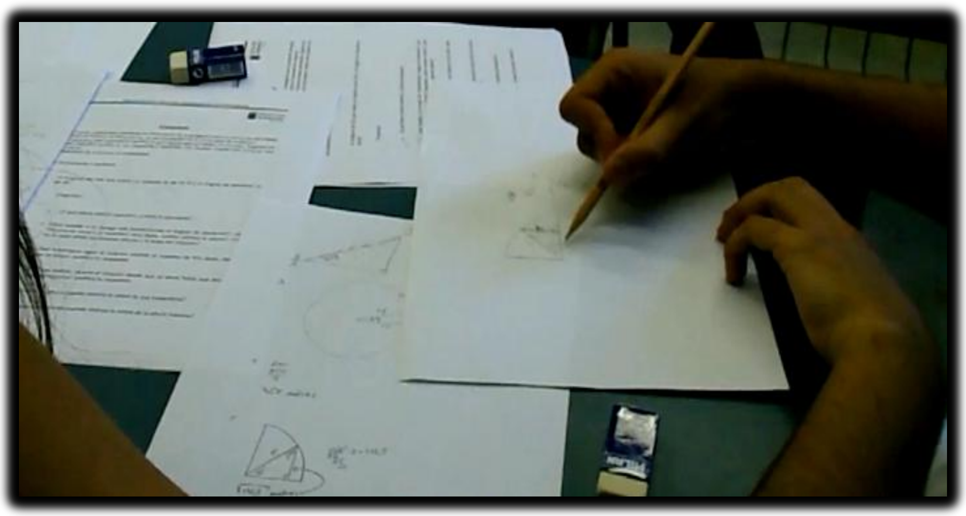


Figura 4.6: Resolución de los estudiantes e_{11} ***y*** e_{12}

Momento de discusión:

El estudiante e_{12} propone realizar el ejercicio con Pitágoras pero e_{11} realiza cálculos considerando el triángulo como la mitad de un cuadrado, ya que es isósceles y plantea una ecuación en relación con la diagonal de un cuadrado y la hipotenusa.

Momento de resultados:

Como los catetos del triángulo rectángulo, construido por los estudiantes, tienen igual medida e_{12} concluye que debe elevar al cuadrado la hipotenusa y luego dividir por dos, y al resultado aplicarle raíz. El estudiante e_{11} en cambio resuelve la ecuación planteada y obtiene el valor que coincide con el valor encontrado por e_{12} después de comprobar con la calculadora.

- **Diseño: Tarea 6**

¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Momento inicial:

En la primera fase de la tarea 6 ambos estudiantes mencionan que la mitad de la altura máxima es 7,5 metros y que la respuesta apunta a la mitad de lo recorrido en la tarea 4 donde el volantín forma un ángulo de 45° respecto del suelo. El estudiante e_{11} luego de concluir la respuesta junto a e_{12}, retoma la tarea nuevamente y se pregunta cuál es la mitad de la altura máxima alcanzada por el volantín, e_{12} le indica la respuesta y deciden volver a construir el problema ya que dudaron de la primera respuesta dada.

Momento de discusión:

El estudiante e_{12} propone un nuevo dato para la representación de la tarea luego de visualizar la mitad de la altura máxima alcanzada por el volantín pero e_{11} no está completamente seguro, y no lo toma en cuenta hasta que e_{12} le argumenta lo mencionado. Posteriormente e_{11} reflexiona y observa que el ángulo de elevación del volantín no corresponde a los 45° mencionados anteriormente, sino que a 30° ya que el cateto que representa la mitad de la altura máxima es también la mitad de la hipotenusa. Por lo tanto decide calcular la trayectoria del volantín cuando alcanza los 30°.

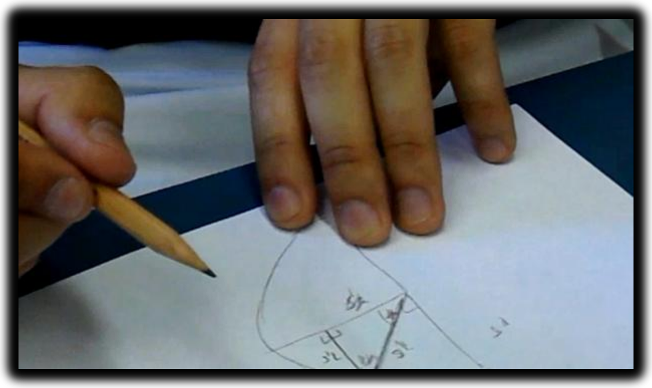


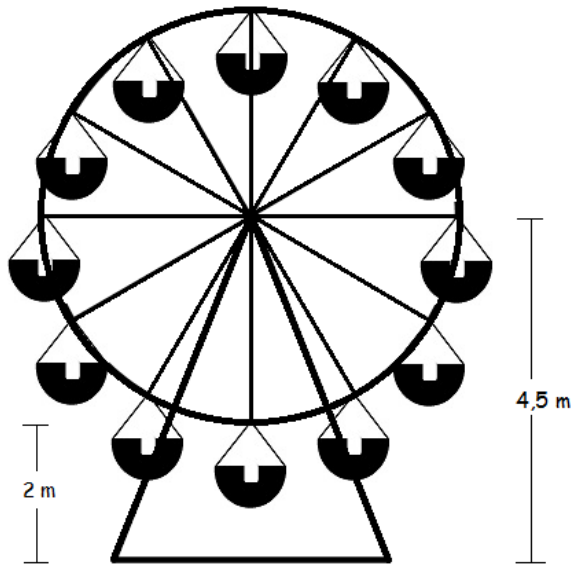
Figura 4.7: Resolución estudiante e_{11}

Momento de resultados:

Antes de concluir la respuesta el estudiante e_{11} decide mencionar nuevamente lo discutido "*Bueno esta es la mitad que es siete coma cinco entonces como este cateto es la mitad de la hipotenusa se asume que el ángulo de elevación es de treinta grados, entonces con treinta grados sabemos qué parte de la circunferencia completa es este cachito*" posterior a esto calcula utilizando la razón que se establece entre los 30° y los 360° que corresponden a la circunferencia completa, luego concluye que la trayectoria del volantín corresponde a la doceava parte del perímetro de circunferencia y lo calcula.

Segunda situación

Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

- **Diseño: Tarea 7**

¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

Momento inicial:

En esta segunda situación los estudiantes comienzan la primera tarea leyendo atentamente y en silencio de manera individual. El estudiante e_{12} en su primera impresión asegura que se debe calcular el perímetro de circunferencia después de haber inferido que el radio de esta corresponde a 2,5 metros. Inmediatamente después e_{11} responde a esto entregando el perímetro correspondiente a 5 π.

Momento de discusión:

En esta fase de la tarea 7 el estudiante e_{11} deduce que si desea saber cuántas barras de acero de 2,5 metros necesita para cubrir el contorno de la rueda, debe dividir el valor del perímetro de circunferencia en 2,5. El estudiante e_{12} concuerda con esto y se disponen a calcular el valor solicitado.

Momento de resultados:

Finalmente, luego de realizar el cálculo mencionado en el momento anterior el estudiante e_{11} afirma que la respuesta es 6,28. Luego de reflexionar rectifica su respuesta reemplazándola por dos π.

- **Diseño: Tarea 8**

¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

Momento inicial:

En un primer momento los estudiantes mencionan que para calcular lo solicitado deben dividir el perímetro calculado en la pregunta anterior por doce, ya que son doce carros en la rueda. Luego el estudiante e_{11} agrega que este valor lo dividirán en 2,5 para saber la cantidad de barras que se deben utilizar entre un carro y otro.

Momento de discusión:

El estudiante e_{12} en esta fase duda y solicita a e_{11} que explique su procedimiento, este accede y posteriormente realizan cálculos por separado.

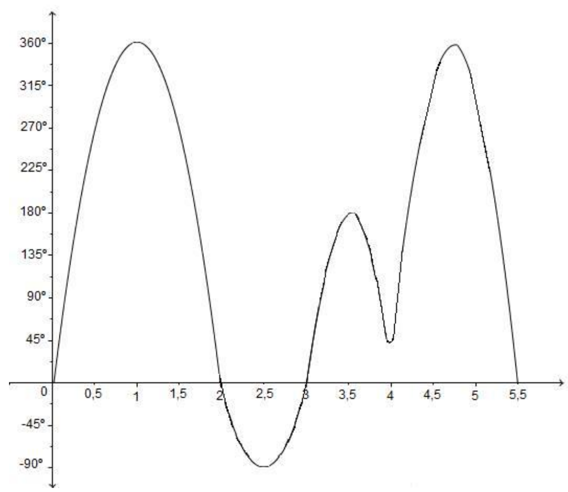
Momento de resultados:

En la última fase de esta tarea, el estudiante e_{11} inmediatamente después de decidir el procedimiento a utilizar realiza los cálculos correspondientes y obtiene como respuesta que "sería un sexto de π", mientras que e_{12} tiene problemas para realizar la operación y solicita a e_{11} su colaboración.

Finalmente acuerdan que el valor solicitado efectivamente corresponde a un sexto de π y se disponen a leer la tarea 9

- **Diseño: Tarea 9**

El siguiente gráfico (tiempo v/s ángulo) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



Momento inicial:

En esta primera fase el estudiante e_{12} decide tomar la iniciativa, una vez leída la pregunta y observando el gráfico, dibuja una circunferencia con su respectivo diámetro para describir la situación. Posterior a esto, dibuja flechas en sentido anti horario sobre el contorno de circunferencia abarcando 180° de esta. Hasta ese instante el estudiante e_{11} solo se ha limitado a asentir lo mencionado por e_{12}.

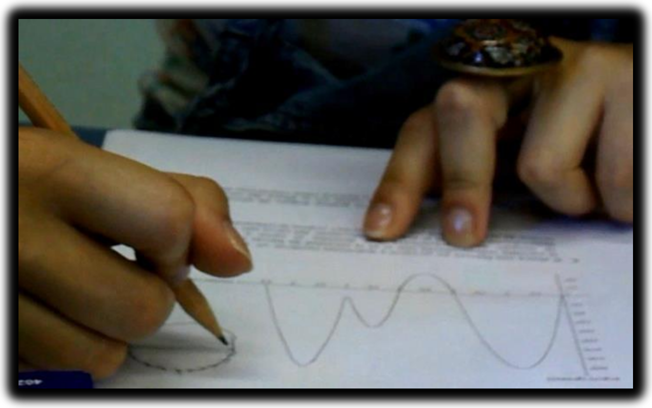


Figura 4.8: Resolución estudiante e_{12}

Momento de discusión:

Durante el momento de la discusión, el estudiante e_{11} afirma que los 180° que indicó e_{12} en el dibujo, corresponden en realidad a 360°, ya que al primer minuto el gráfico alcanza a marcar 360°, lo que e_{11} interpreta como una vuelta completa. Ante esto e_{12} sostiene su lápiz de manera que represente el diámetro de circunferencia y gestualmente indica la vuelta completa que ha solicitado e_{11} . Comprendido esto el estudiante e_{11} interpreta el segundo minuto como una vuelta completa, pero esta vez en dirección opuesta a la mencionada inicialmente, lo que es compartido por e_{11} . Con esto los estudiantes en conjunto comienzan a indicar el movimiento particular que describe la rueda en el gráfico.

Figura 4.9: Representación gestual de los estudiantes e_{11} *y* e_{12}

Momento de resultados:

En la última fase el estudiante e_{12} decide organizar lo antes mencionado y escribe paso a paso el movimiento realizado.

- **Diseño: Tarea 10**

Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

Momento inicial:

Los estudiantes luego de concluir el movimiento particular de la rueda de la tarea anterior, se disponen a leer en silencio la nueva tarea. El estudiante e_{12} comienza a construir los ejes del gráfico solicitado y en el instante que se dispone escribir las variables de este, pregunta a viva voz si la pregunta se refiere a una vuelta completa de la rueda, mientras que e_{11} continua leyendo la pregunta sin emitir ningún comentario, ni representar la situación. El investigador interviene mencionando que en esta pregunta el movimiento de la rueda es el normal, ya que el estudiante e_{12} cree que se utiliza la trayectoria particular seguida por la rueda en la tarea 9.

Momento de discusión:

Luego de aclarar sus dudas el estudiante e_{12} visualiza inmediatamente la curva que describe el carro observado e intenta explicarla al estudiante e_{11} lo que es interrumpido por éste, el estudiante e_{11} menciona en voz alta que al completar una vuelta se utiliza todo el perímetro de la rueda utilizando entonces dos π barras, e_{12} está de acuerdo con esta afirmación y agrega que la curva solicitada es una recta, dibuja la recta $x = y$ argumentando que a medida que aumentan los grados aumenta la cantidad de barras utilizadas.

El estudiante e_{11} no comprende el razonamiento de e_{12} por lo que pone en duda los argumentos de e_{12} y propone una situación distinta sin embargo, e_{12} se encuentra segura de lo que cree y defiende su posición con nuevos argumentos, a continuación se aprecia la discusión en el siguiente extracto de conversación.

El estudiante e_{11} no se encuentra seguro de la respuesta de e_{12} ya que en la tarea se solicita describir una "curva" y lo que e_{12} describe es una "recta", esta confusión lo lleva a poner en duda constantemente el razonamiento de e_{12}, y afirma que lo solicitado es una curva no lo que e_{12} construyó. Sin embargo, los argumentos de e_{12} finalmente convencen a e_{11} y se disponen a calcular las barras utilizadas para los distintos grados.

Momento de resultados:

El estudiante e_{12} construye el gráfico con las variables solicitadas, en primer lugar copia los ángulos descritos en el gráfico entregado en la tarea 9, y describe la curva solo completando lo que sucede con los dos π barras utilizadas para completar el contorno de la rueda ya que menciona que no sabe cuántas barras se utilizan en los demás ángulos de elevación. Por lo que e_{11} propone calcular con la mitad de las barras y la mitad de la mitad, logrando encontrar tres puntos lo que le es necesario para argumentar su curva.

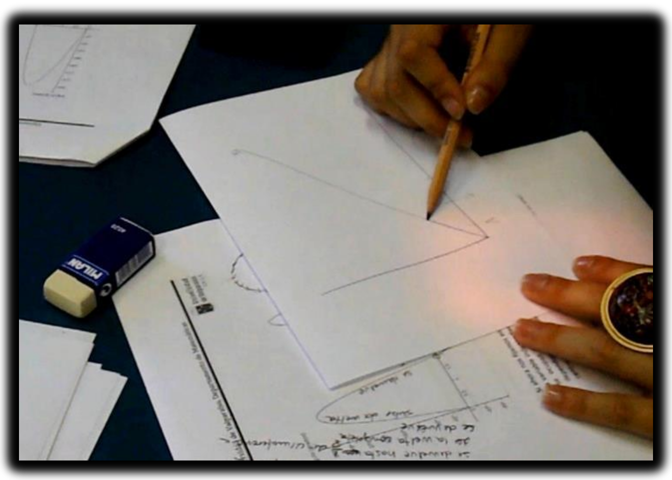


Figura 4.10: Resolución estudiante e_{12}

- **Diseño: Tarea 11**

Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?

Momento inicial:

Los estudiantes en esta tarea se ven muy familiarizados con la construcción del gráfico solicitado, por lo que después de leer la pregunta comienzan a decidir que carro observar. El estudiante e_{12} propone comenzar desde el primer carro y el estudiante e_{11} acepta la petición, se disponen juntos a analizar cada movimiento del carro.

Momento de discusión:

En esta fase de la tarea 11 el estudiante e_{12} dibuja una circunferencia para representar la situación y menciona que en el carro elegido no hay altura, e_{11} argumenta que si existe altura y esta es 2 metros, indicando el dibujo de la tarea. El estudiante e_{12} se percata de su error y se dispone a seguir analizando las alturas de los distintos carros. Los siguientes minutos de discusión los estudiantes solo comparten sus cálculos realizados.

Momento de resultados:

Finalmente el estudiante e_{11} comienza a graficar con ayuda de e_{12} calculando la altura del carro con respecto al suelo, en: 0°, 90°, 180°, 270° y 360°, puntos que para los estudiantes son suficientes para graficar lo solicitado.

Figura 4.11: Resolución estudiantes e_{11} *y* e_{12}

- **Diseño: Tarea 12**

Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

Momento inicial:

En esta fase ambos estudiantes después de leer de manera individual la tarea 12 se disponen a dibujar los ejes del gráfico que deben construir, donde el estudiante e_{11} sugiere ubicar en el eje de las abscisas la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y en el eje de las ordenadas la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. El estudiante e_{12} comparte lo sugerido.

Momento de discusión:

El estudiante e_{11} menciona que en total se ocupan dos π barras a lo que e_{12} asiente. Posterior a esto e_{12} utiliza como referencia el eje de las abscisas utilizado en el gráfico de la tarea 10 dándose nuevamente solo cuatro valores para el eje "x" que los estudiantes consideran suficiente para graficar. Estos procedimientos son discutidos por ambos estudiantes y en consecuencia se disponen a graficar definitivamente lo solicitado

Momento de resultados:

El estudiante e_{12} grafica lo solicitado después de discutir los valores a utilizar en los ejes del gráfico y mientras lo hace, el estudiante e_{11} comienza a dar sus primeras impresiones de la tarea 13.

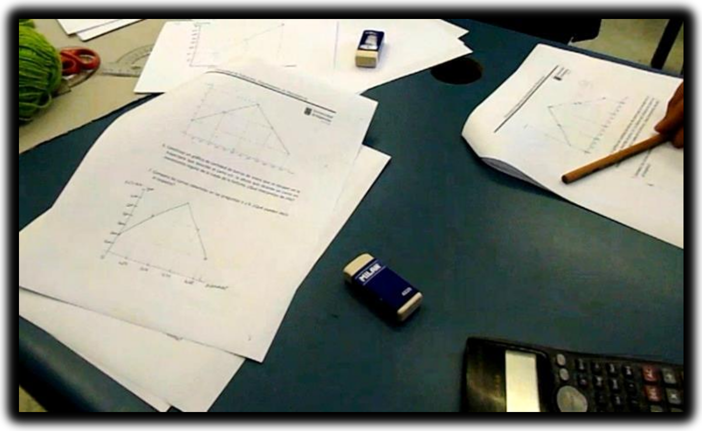


Figura 4.12: Resolución estudiantes e_{11} ***y*** e_{12}

- **Diseño: Tarea 13**

Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

Momento inicial:

En la última tarea el estudiante e_{11} se pregunta *"¿Qué tiene que ver la cantidad de barras, con la cantidad de grados?"* pregunta que da pie para la comparación solicitada en la nueva tarea.

Momento de discusión:

En esta fase el estudiante e_{12} afirma que las gráficas obtenidas en las tareas 5 y 6 son iguales, mientras que el estudiante e_{11} enfoca su atención en los 360° del gráfico de la tarea 5 y en las 6,28 barras del gráfico de la tarea 6 mencionando que uno es *"Dos π radianes"* y el otro *"Dos π metros"*. El estudiante e_{12} comenta a e_{11} que no comprende las afirmaciones que éste realiza por lo que la respuesta final debe expresarla él.

Momento de resultados:

Finalmente, el estudiante e_{11} concluye la tarea 13, afirmando que la cantidad de metros y radianes tienen relación, y que la cantidad de barras es directamente proporcional a los grados que alcanza el carro con respecto al origen de la rueda, a medida que va subiendo.

Experiencia 2: Binomio 2

Al binomio 2 lo llamaremos B_2 y corresponde a una pareja de estudiantes (e_{21} y e_{22}) recién egresados de enseñanza media de un liceo, cuyas características han sido descritas en el capítulo 3. A continuación se describen los tres momentos para cada tarea a la que se enfrentaron los estudiantes.

Primera situación

- **Tarea 1 : propuesta por el ministerio**

Resolver el siguiente problema: La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Describiremos a continuación, los tres momentos presentes en el desarrollo de esta tarea por B_2 .

***Momento inicial**:*

En un primer momento los estudiantes leen en silencio y de manera individual la tarea 1 y a continuación e_{21} dibuja el triángulo rectángulo que representa la situación planteada colaborado por e_{22} quien anota los ángulos establecido en el dibujo. El estudiante e_{21} escribe la razón trigonométrica del seno de 30° para resolver la tarea.

Momento de discusión:

Antes de realizar el cálculo correspondiente para llegar a la respuesta, e_{21} dibuja otro triángulo rectángulo con 30°, 60° y 90°, donde la hipotenusa es "2a", el cateto opuesto a 30° es "a" y el cateto opuesto a 60° es "a por raíz de 3", y deciden resolver el ejercicio usando este modelo de triángulo y no toman en cuenta la razón trigonométrica expresada inicialmente.

Momento de resultados

El estudiante e_{22} solicita a e_{21} que para el triángulo dibujado inicialmente escriba en el cateto opuesto a 30°, "7,5" y posteriormente explican su procedimiento. El estudiante e_{21} menciona que inicialmente realizarían la tarea utilizando la definición del seno, pero después recordaron una "*técnica PSU"* que les permitió determinar que el valor solicitado correspondía a la mitad de la hipotenusa.

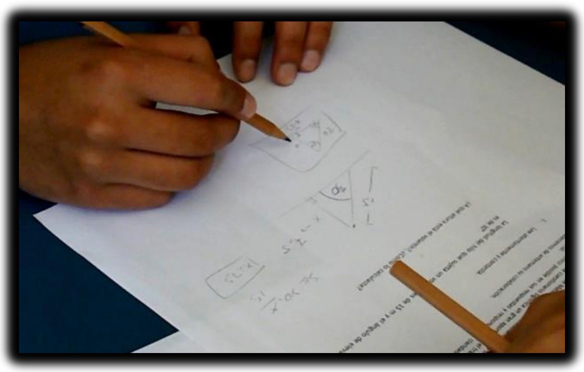


Figura 4.13: Resolución estudiantes e_{21} y e_{22}

- **Diseño: Tarea 2**

¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

En esta tarea podemos identificar 4 preguntas, que las llamaremos:

Pregunta inicial: *¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?*

Pregunta (a): *¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala;* pregunta (b): *¿cómo cambia la altura?;* y pregunta (c): *¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?*

Momento inicial:

Cuando los estudiantes se ven enfrentados a la pregunta inicial de esta tarea, luego de leer en silencio y de manera individual el estudiante e_{22} dibuja los dos triángulos rectángulos dibujados en la situación descrita en la primera tarea y agregan además los valores obtenidos en esta. Inmediatamente después el estudiante e_{21} se enfoca en la última pregunta y menciona acompañándose de una igualdad que la razón entre la altura y el largo del volantín siempre será 1 es a 2. Posterior a eso afirman que si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación el volantín bajará de manera recta. Para la pregunta (a) el estudiante expresa en voz alta que la trayectoria del volantín será "*en recta*" afirmación que es reafirmada por e_{22}. Para (b) el estudiante e_{21} sostiene que siempre se va a mantener el mismo triángulo lo que e_{22} comparte.

Momento de discusión:

En esta fase el estudiante e_{21} parece no estar seguro de lo afirmado en la pregunta inicial y en (a), por lo que decide comprobar esto utilizando un trozo de lana y solicitando a e_{22} que sostenga el extremo inferior de esta y tire de él simulando la situación planteada. En lo relacionado con la altura ambos estudiantes comparten la idea de que el triángulo que se forma será siempre el mismo y e_{21} decide escribir la respuesta.

***Figura 4.14: Experimentación estudiante** e_{21} **y** e_{22}*

Momento de resultados:

Finalmente el estudiante e_{21} comprueba que sus conclusiones están en lo correcto y menciona para la pregunta inicial que el volantín "*Baja en dirección del mismo ángulo de elevación*". Para la pregunta (a) menciona que la trayectoria del volantín siempre será en línea recta y que la altura solicitada en (b) será proporcional al largo del hilo del volantín. Por último el estudiante e_{21} solo se limita a indicar la igualdad escrita al inicio de la tarea 2 que representa la razón solicitada.

- **Diseño: Tarea 3**

¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza? Justifica tu respuesta.

Momento inicial:

En el primer momento de la tarea 3 ambos estudiantes tienen como primera impresión que la trayectoria del volantín será la misma que la solicitada en la tarea anterior, pero bajo intervención del investigador, quien aclara que lo solicitado es la trayectoria del volantín desde que se lanza gesticulando que esto parte desde el nivel del suelo, el estudiante e_{21} logra comprender que esta errado y entrega la nueva respuesta.

Momento de discusión:

Los estudiante no generan mayor discusión respecto de lo solicitado pues, una vez comprendida la tarea, e_{21} entregan inmediatamente la respuesta.

Momento de resultados:

El estudiante e_{21} inmediatamente después de la intervención del investigador responde que la trayectoria que sigue el volantín es una semicircunferencia, afirmación que comparte e_{22}. Luego e_{21} justifica que la persona que sostiene el volantín estará en un punto fijo, y a medida que el volantín se va elevando siempre estará a la misma distancia del punto fijo y el radio será el hilo del volantín que se mantendrá, entonces "*tiene que ser parte de una circunferencia*".

- **Diseño: Tarea 4**

¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

Momento inicial:

En esta primera fase de la tarea 4 los estudiantes leen atentamente y e_{21} comenta que se refiere al momento en que el volantín se lanza y llega hasta arriba y decide dibujar un cuarto de circunferencia para representar la situación. Además agrega que lo solicitado sería el contorno del cuarto de circunferencia dibujada.

Momento de discusión:

El estudiante e_{21} una vez comprendida la tarea le solicita a e_{22} que realice los cálculos correspondientes para llegar a la respuesta, indicando que deben calcular un cuarto de perímetro de circunferencia. Una vez que e_{22} obtiene el valor del perímetro de la circunferencia completa le comenta a e_{21} que deben calcular un cuarto de lo obtenido, éste afirma lo expresado por e_{22} y agrega el resultado.

Momento de resultados:

En esta última fase de la tarea el estudiante e_{21} entrega el resultado que es 7,5 π metros y e_{22} procede a explicar el procedimiento. Menciona que deben calcular el perímetro de un cuarto de circunferencia porque ahí el volantín alcanza los 90°, y este es el ángulo de elevación del volantín cuando alcanza su altura máxima.

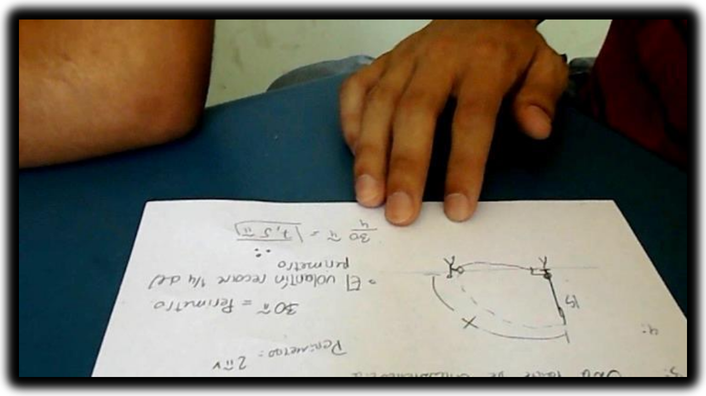


Figura 4.15: Resolución estudiante e_{22}

- **Diseño: Tareas 5 y 6**

Cabe mencionar que para las tareas 5 y 6 del Experimento 2, los estudiantes e_{21} y e_{22} se basaron en un mismo argumento erróneo para concluir sus respuestas. Esto queda reflejado en la siguiente imagen extraída del procedimientos realizado por los estudiantes.

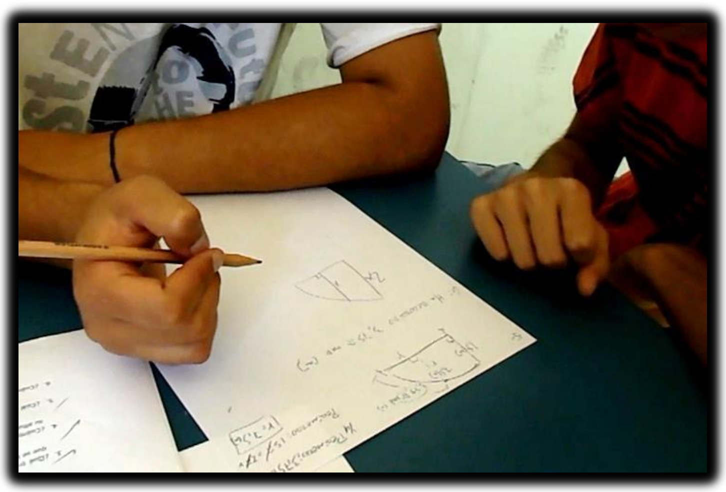


Figura 4.16 Resolución errónea de los estudiantes $e_{21} y\, e_{22}$

Se puede observar que utilizaron la definición de semejanza entre figuras geométricas y asumieron que la nueva representación, tomando en cuenta la nueva altura, es una circunferencia semejante a la descrita inicialmente, siendo proporcionales. Pues, afirmaron que en un cuarto de circunferencia al trazar la altura desde la mitad del arco, esa altura es la mitad del radio vertical y cae perpendicularmente dividiendo el radio horizontal en dos partes iguales.

Mediante la intervención del investigador, los estudiantes deciden comprobar con valores reales, y evidencian que para su caso particular esa afirmación es falsa. Lo que los lleva a intentar llegar a la respuesta con un nuevo método, ante esto los estudiantes deciden comenzar por la tarea 6 ya que argumentan que les resulta "*más fácil*". A continuación, se describen los nuevos procedimientos con sus respectivos momentos.

- **Diseño: Tarea 6**

¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Momento inicial:

En una primera instancia y como se mencionó anteriormente los estudiantes logran evidenciar que realizaban un procedimiento erróneo al construir una circunferencia y posteriormente medir su radio que en este caso fue de 3 cm. Luego, deciden encontrar el punto del contorno de la circunferencia donde la altura a trazar fuera de exactamente 1,5 cm. A continuación hacen uso de un transportador y calculan que para ese caso particular el arco mide 30° y concluyen que corresponde a la tercera parte del cuarto de perímetro de circunferencia. Pero no conformes con este procedimiento surge la necesidad de hacerlo "*con matemática, sin dibujitos*".

Momento de discusión:

Los estudiantes en conjunto deciden realizar una circunferencia para representar la tarea 6, sin embargo, ninguno de ellos logra realizar la tarea con otro procedimiento, y vuelven a realizar el utilizado en el caso particular mencionado anteriormente donde nuevamente concluyen que el recorrido solicitado corresponde a la tercera parte del cuarto de perímetro de circunferencia.

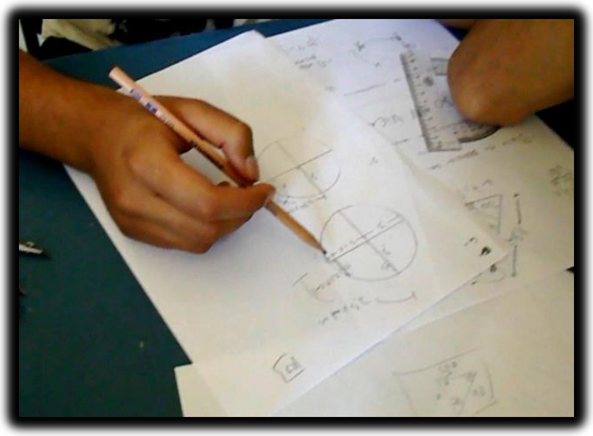


Figura 4.17: Momento de discusión estudiantes e_{21} ***y*** e_{22}

Momento de resultados:

Finalmente, después de concluir que el recorrido solicitado corresponde a la tercera parte del cuarto de perímetro de circunferencia, el estudiante e_{21} realiza un cálculo utilizando la calculadora y obtiene que el resultado es 2,5 π metros.

- **Diseño: Tarea 5**

¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

Momento inicial:

En esta tarea el estudiante e_{21} en colaboración con e_{22} trazan circunferencia ayudados con un compás y se disponen a resolver la tarea.

Momento de discusión:

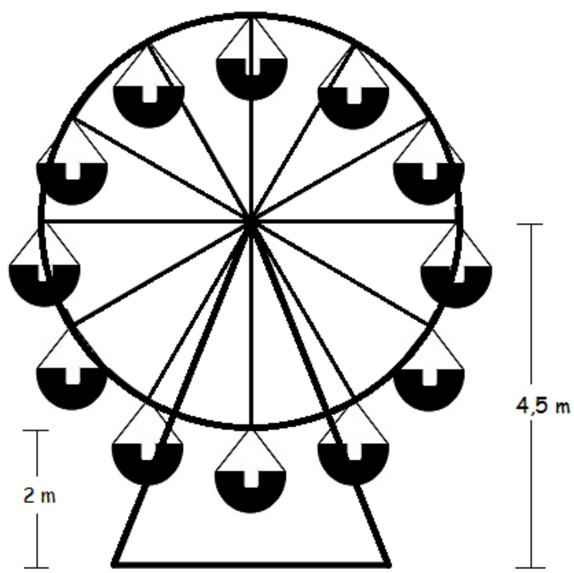
El estudiante e_{21} menciona que solo lo puede resolver con dibujos o midiendo, procedimiento que el estudiante no considera como válido. Ante esto el investigador realiza preguntas como *¿Qué ángulos conoces en tu dibujo? ¿Puedes establecer alguna relación con las tareas anteriores?* Los estudiantes deciden utilizar otro procedimiento para encontrar la respuesta, realizando trazos en base a distintas propiedades que conocen. Luego de tener una gran cantidad de longitudes de distintos trazos logra aparecer uno de gran utilidad para ellos.

Momento de resultados:

El estudiante e_{21} comienza a justificar todos los trazos dibujados en la circunferencia y menciona que para encontrar el valor de la altura solicitada utilizó el radio de la circunferencia que forma 45° como la diagonal de un cuadrado donde el triángulo formado corresponde a la mitad de un cuadrado y por lo tanto concluye que el lado, que en este caso corresponde a la altura tiene un valor de 7,5 raíz de 2 metros.

Segunda situación

Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

- **Diseño: Tarea 7**

¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

Momento inicial:

En un primer momento el estudiante e_{22} menciona como primera impresión que deben calcular el perímetro de la circunferencia, a esto, el estudiante e_{21} le menciona que el radio es 2,5 y comienza inmediatamente el momento de discusión.

Momento de discusión:

En esta fase el estudiante e_{21} menciona que el radio alcanza π, luego rectifica diciendo que eso era para el diámetro y posteriormente lo relaciona con el perímetro. El estudiante e_{22} decide realizar el desarrollo y e_{21} le solicita que calcule el perímetro y eso dividirlo por la cantidad de barras.

Momento de resultados:

Finalmente el estudiante e_{22} realiza los cálculos correspondientes y obtiene como resultado 2π lo que e_{21} interpreta afirmando que se necesitan 6 barras y un cuarto aproximadamente.

- **Diseño: Tarea 8**

¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

Momento inicial:

En la primera fase de esta tarea los estudiantes comienzan contando la cantidad de carros presentes en la rueda de la fortuna y e_{21} menciona que "*sería el perímetro dividido en 12*".

Momento de discusión:

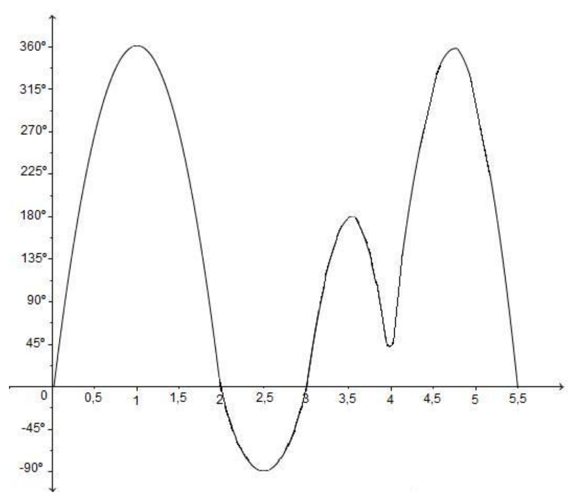
A continuación el estudiante e_{21} afirma que también es posible dividir en 12 los 6,25 indicados en la tarea anterior y e_{22} corrige diciendo que son 6,28, pero e_{21} argumenta que utilicen 6,25 porque en la tarea anterior mencionaron que era la cantidad de barras que se necesitaba aproximadamente.

Momento de resultados:

Por último e_{21} por medio de una calculadora obtiene que se necesitarían un poco más de media barra.

- **Diseño: Tarea 9**

El siguiente gráfico (tiempo v/s ángulo) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



Momento inicial:

En un primer momento el estudiante e_{22} afirma que en los primeros dos minutos la rueda se da una vuelta y completa y posteriormente otra vuelta completa pero en sentido contrario, pero e_{21} comienza con dudas frente al trabajo al relacionar conceptos de Física para la resolución, dando paso al segundo momento.

Momento de discusión:

En este momento, los estudiantes comienzan a discutir qué significa que al primer minuto sea para arriba y al segundo minuto para abajo. Mencionan afirmaciones que tienen relación con el sentido de la rueda, con el cambio de velocidad que alcanza la rueda al completar la primera vuelta entre otras. Luego de discutir acerca de esto e_{22} vuelve a afirmar lo mencionado inicialmente y e_{21} tras reflexionar asiente a lo expresado por e_{22} y dibuja círculos en un sentido y otro uno sobre el otro para representar la situación y continúa de acuerdo a la gráfica.

Momento de resultados:

Finalmente concluye su tarea anotando en cada curva del gráfico presentado el movimiento que realiza la rueda, con expresiones como "una vuelta a la izquierda", "una vuelta a la derecha", "un cuarto de vuelta a la izquierda", entre otras.

- **Diseño: Tarea 10**

Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

Momento inicial:

En el momento inicial de esta tarea el estudiante e_{21} dibuja los ejes coordenados para construir la curva y se dispone a completar con los ángulos correspondientes en el eje de las ordenadas. Menciona que ocupará 6,28 barras en una vuelta completa y dibuja el punto que relaciona los 360° con 6,28 barras

Momento de discusión:

El estudiante e_{22} le solicita a e_{21} que agregue los 45°, pero éste se niega, mencionando que como los carros van de treinta en treinta es más conveniente anotarlo así. Posteriormente el estudiante e_{21} le menciona a e_{22} que "*se supone que sería una recta, ¿o no?, porque es proporcional*", lo que e_{22} asiente.

Momento de resultados:

Finalmente el estudiante e_{21} concluye que la curva solicitada corresponde a una recta y justifica que los grados con la cantidad de barras crecen de manera proporcional.

- **Diseño: Tarea 11**

Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?

Momento inicial:

Inicialmente para esta pregunta e_{21} relaciona lo solicitado con la situación inicial de cuestionario en relación al volantín y afirma a e_{22} que se realizará un trabajo similar al tener que encontrar las distintas alturas que alcanza el carro en un movimiento regular de la rueda. El estudiante e_{22} agrega que "*bastaría sacar cuatro distancias nomás*" mientras e_{21} se dispone a dibujar los ejes coordenados para graficar.

Momento de discusión:

En este momento los estudiantes discuten acerca de las alturas que deben calcular, ya que hay algunas que se conocen. Mencionan que en la situación del volantín concluyeron que el volantín alcanza la mitad de la altura máxima cuando se eleva 30°, por lo tanto el carro que forma 30° con respecto al centro de la rueda debe estar a la mitad de la altura máxima que en este caso es 2,5 metros. Continúan dividiendo el eje de las abscisas en doce partes iguales y anotan los grados de elevación de treinta en treinta. El estudiante e_{22} menciona que como los ángulos son con respecto al centro de la rueda el eje para las alturas esta en 0 al centro de esta, por lo tanto tendrán algunas altura negativas. Comienzan a obtener los puntos de las distintas alturas y en conjunto las dibujan con una línea recta que termina en el eje x. Al finalizar este procedimiento, el investigador solita que unan los puntos obtenidos para conocer la curva que se describe. Antes de unir los puntos, reconocen que no lo deben hacer con líneas rectas, por lo que unen los puntos de manera curva.

Momento de resultados:

Después de unir los puntos y obtener la curva solicitada e_{21} menciona "*es una función seno, o algo así*" y agrega que es una función periódica y que si se agregan grados se repetirá la curva.

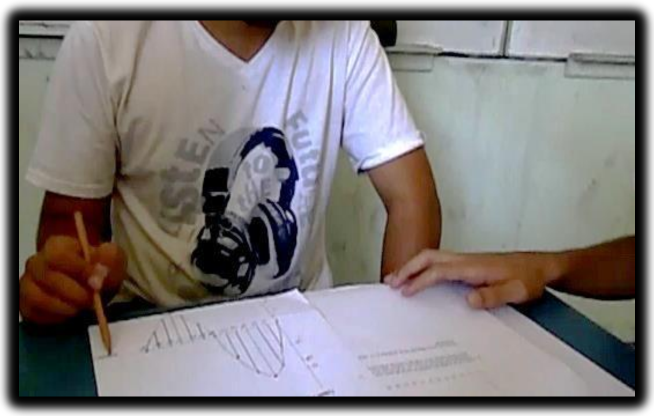


Figura 4.18: Gráfica función seno de los estudiantes e_{21} *y* e_{22}

- **Diseño: Tarea 12**

Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

Momento inicial:

Para el momento inicial de la tarea 12 el estudiante e_{21}, después de leerla, comienza a dibujar los ejes coordenado similar a la tarea anterior, pero en lugar de anotar el ángulo de elevación para las distintas alturas, lo hace anotando la cantidad de barras utilizadas entre un carro y otro, calculado en la tarea 8 y lo expresa en notación decimal.

Momento de discusión:

Los estudiantes comienzan a obtener los valores mencionados anteriormente, e inmediatamente proceden a dar respuesta a la tarea.

Momento de resultados:

Los estudiantes concluyen que será el mismo gráfico de la tarea anterior ya que cada 30° se ocupa la misma cantidad de barras, entonces va aumentando igual que en la tarea anterior.

- **Diseño: Tarea 13**

Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

Momento inicial:

En un principio los estudiantes bajo sugerencia del investigador deciden expresar los números decimales utilizados en el eje de las abscisas de la tarea 12 con el valor del número π expresado. Inmediatamente después los estudiantes proceden a dar respuesta a la tarea 13.

Momento de resultados:

El estudiante e_{21} menciona que para ambas tareas se cumple lo mismo y que las gráficas son iguales ya que se cumple la misma proporción entre ángulos y cantidades de barras con respecto a la altura.

Capítulo 5.

Análisis de resultados

A modo de dar respuesta a las interrogantes planteadas inicialmente se analizarán los resultados obtenidos en el capítulo anterior, enfocados en los trabajos que utilizan estudiantes que han cursado alguna asignatura de trigonometría, en relación a la articulación entre razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario. A continuación, presentamos dichos análisis para cada experiencia descrita anteriormente.

5.1. Análisis de resultados Experiencia 1

Para la Experiencia 1, se confeccionó un instrumento de carácter exploratorio con el fin de identificar el trabajo matemático de estudiantes que han cursado asignaturas de trigonometría a nivel superior, en cuanto a las dificultades con que se encuentran al resolver problemas que necesitan una articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo. Los resultados esperados se basan en primer lugar en el cálculo de perímetro, mediante la proporción que existe entre el ángulo formado por los rayos que sostienen los carros y el arco que lo subtiende. Por otro lado es importante que los estudiantes logren a partir de lo visualizado, construir el triángulo rectángulo descrito en la circunferencia para así utilizar las razones trigonométricas en el cálculo del valor desconocido y finalmente, articular de alguna manera el círculo unitario con la función seno (específicamente su gráfica).

Luego de observar los resultados de los estudiantes universitarios, en un primer lugar pudimos evidenciar que no se tiene una idea clara de la definición de radián, pues las respuestas de estos, al consultarles lo que significa para ellos un radián, son variadas. Seis de los estudiantes universitarios entrevistados concibe un radián como una unidad de medida, tres de los restantes lo asocian a un número real y uno lo asocia directamente al radio de una circunferencia, mientras que el restante lo define como "la forma de racionalizar un ángulo". Llama la atención que entre las respuestas entregadas, un estudiante menciona que el radián es "una unidad de medida que generalmente consta de la variable pi", lo que deja ver que para él, lo relevante del número es que involucre al número pi, más que el significado de la cantidad. Además, y lo que identificamos como un error, el estudiante considera el número pi como una variable, siendo que este elemento se trabaja desde la enseñanza básica.

Por otro lado podemos mencionar que en esta primera experiencia los estudiantes no logran entender la tarea planteada, por lo que las herramientas utilizadas no son las que responden a la interrogante, sin embargo, sus procedimientos (algoritmos) son correctos. Luego de analizar los resultados obtenidos a través del protocolo de análisis (ver Anexo D), es posible observar que la mayoría de los estudiantes respondió de manera incorrecta. En términos teóricos, observamos que el error se debe principalmente a que su visualización icónica no fue suficiente, o no es utilizada de manera adecuada, para modelar el problema, por lo que no le dan un correcto movimiento a la rueda quedándose con lo primero que se percibe. Los estudiantes, aunque en su gran mayoría respondieron incorrectamente, en su espacio de trabajo matemático privilegian la génesis semiótica, sin embargo para llegar a la respuesta utilizan como apoyo un referencial teórico, que en muchos casos es el equivocado.

Consideramos que las principales dificultades que tienen los estudiantes para responder correctamente las tareas planteadas, tienen relación con la visualización icónica que emplean. Nos planteamos como pregunta, considerando la respuesta de los estudiantes universitarios, que pudiese existir algún tipo de ambigüedad en la redacción de la situación en la tarea planteada que explicaría el masivo error.

A continuación se describen los Espacios de Trabajo Matemático observados para cada Experimento, las génesis privilegiadas por estudiantes de nivel superior y de nivel secundario y el tránsito por estas.

5.1.1 Espacios de Trabajo Matemáticos de la Experiencia 1

En la Experiencia 1 mediante el protocolo de análisis, se pudo observar que los estudiantes en su gran mayoría no responden correctamente lo solicitado y privilegian en su trabajo la *génesis semiótica*. Las *génesis discursiva e instrumental* se vieron complementadas, pero débilmente, al utilizar fórmulas y desarrollar estas bajo algoritmos como artefacto simbólico para concluir las respuestas. Los estudiantes no privilegian en su trabajo el uso de artefactos más que como artefactos simbólicos en la utilización de pequeños algoritmos para concluir sus respuestas. Además, como se mencionó anteriormente, los estudiantes no logran contextualizar la situación planteada, por lo que de acuerdo a esto visualizan sólo de manera icónica. En la primera tarea los estudiantes en su totalidad respondieron de manera errónea, privilegiando la *génesis semiótica* y visualizando icónicamente como botánicos la situación planteada. Luego de esto mediante utilización de definición de perímetro y algoritmos (*génesis discursiva e instrumental)*, concluían su respuesta, otros en cambio utilizaban como referencial teórico el Teorema de Pitágoras. Para la segunda tarea los estudiantes se apoyaron en lo visualizado inicialmente (*génesis semiótica)*, 5 estudiantes realizaron cálculos utilizando como referencial, nuevamente el Teorema de Pitágoras y mediante algoritmos como artefacto simbólico, concluir la respuesta, y la mayoría de los restantes se dejó llevar por lo visualizado inicialmente y respondieron a partir de la figura y los datos que incluía, favoreciendo solo la *génesis semiótica*.

En la tercera pregunta solo un estudiante respondió correctamente activando inicialmente la *génesis discursiva* visualizando no icónicamente, con un perfil constructor y entregando su respuesta bajo un registro gráfico, activando finalmente la *génesis semiótica*. De los estudiantes restantes 4 de ellos fueron capaces de acercarse de alguna manera al problema activando la *génesis semiótica* y relacionando las distintas alturas, observadas en el dibujo entregado con los distintos carros de la rueda. Así podemos afirmar que visualizaron de manera no icónica pues no realizaron trabajos de acuerdo a la primera entrada que proporciona la rueda. Sin embargo obtuvieron gráficas desconocidas, que no aportan ni complementan lo discursivo (función seno). La gran mayoría de los estudiantes restantes activó la *génesis discursiva* visualizando de manera icónica y obteniendo como gráfica una circunferencia que tiene directa relación con la rueda de la fortuna pero, sin embargo, no representaba lo solicitado.

5.2 Análisis de resultados Experiencia 2

Para comenzar nuestro análisis en la Experiencia 2 es importante volver a mencionar que esta experiencia consta de dos ítems, el primero basado principalmente en la tarea que frecuentemente propone el Ministerio de Educación, y el segundo constituye el diseño de tareas que eventualmente pueden formar parte de nuestra Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje. En estas se utilizó un estudio descriptivo aplicado a dos binomios de estudiantes egresados de enseñanza media. El motivo para analizar mediante binomios es poder observar la interacción entre los estudiante y así se hagan visibles todos los posibles trabajos en el Espacio de Trabajo Matemático. Cabe mencionar que ambos binomios tuvieron dificultades en la comprensión de algunas tareas, sin embargo, luego de una intervención explicativa continuaron el desarrollo del Cuestionario sin mayores dificultades. Esto será considerado más tarde, para la confección de la Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje.

El Ítem I se confeccionó como instrumento para identificar el trabajo matemático de estudiantes egresados de enseñanza media que recibieron formación diferenciada de la asignatura de Matemática, ya sea en qué técnicas utilizan, las propiedades o teoremas que ponen en juego y la visualización de los problemas, frente a un tipo de tarea frecuente en relación a las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo que propone el Ministerio. Mediante el desarrollo de la experiencia se observó que los binomios están familiarizados con este tipo de tarea y si bien, sabían perfectamente el procedimiento a seguir, el trabajo se basa principalmente en la construcción y deconstrucción de los triángulos y la información en cuanto a las razones que se pueden desprender.

Si bien es cierto que no se planteó como objetivo diferenciar la experiencia de un binomio y otro, fue posible observar diferencias radicales en sus procedimientos. Cabe mencionar que cada binomio privilegia una o dos génesis distinta (s) en su Espacio de Trabajo Matemático, lo que promueve aún más el tránsito entre estas.

A priori se esperaba que los estudiantes favorecieran las *génesis semiótica e instrumental* y utilizaran como apoyo la *génesis discursiva.* Lo observado fue que, en el binomio 1, se ve favorecida en su espacio de trabajo matemático las *génesis semiótica y discursiva,* mientras que el binomio 2 utiliza una técnica en el que en su Espacio de Trabajo matemático quede favorecida la *génesis instrumental,* sin embargo para esto activaron inicialmente la *génesis semiótica.* Al respecto pudimos evidenciar que la tarea planteada no favorece el tránsito entre las distintas génesis que articulan el Espacio de Trabajo Matemático, quedando siempre debilitada una de las génesis.

El Ítem II, compuesto por dos situaciones distintas, busca responder a la necesidad de conocer cómo es el trabajo que realizan estos estudiantes frente a un diseño de tareas que busca articular el trabajo de las razones trigonométricas con las funciones trigonométricas definidas por el círculo unitario. Para esto se analizó el Espacio de Trabajo Matemático de los binomios a partir de la articulación de las distintas génesis privilegiadas por ellos.

A priori en la primera situación planteada en este ítem, se esperaba que los binomios activaran el tránsito por las distintas génesis, articulando así las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo con el círculo. Por un lado, el trabajo realizado por el binomio 1 se caracterizó por favorecer lo referencial teórico en el análisis de las tareas, activando fuertemente la *génesis discursiva,* análisis que se daba posteriormente a la visualización tanto icónica, al trabajar como botánico, como no icónica, al trabajar como topógrafo. Si bien, el binomio 1 logra articular un triángulo rectángulo con el círculo, no lo hace utilizando las razones trigonométricas que se pueden establecer a partir de ese triángulo rectángulo. Consideramos que esto ocurrió debido a que el ángulo elegido, permite que la resolución de las tareas se pueda efectuar utilizando propiedades donde se privilegian cálculos conocidos que no requieren de un mayor tratamiento, dejando de lado la necesidad de recurrir a las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Por otro lado, el binomio 2 se caracterizó por realizar un trabajo donde se privilegia la *génesis instrumental*, a través de la utilización de artefactos clásicos y simbólicos, después de haber activado inicialmente la *génesis semiótica* mediante un registro figural en el que se privilegió un trabajo de topógrafo. El binomio 2 recurrió a propiedades clásicas de la geometría para llegar a la solución de las tareas planteadas, por lo que, al igual que el binomio 1, no articulan los contenidos de trigonometría antes mencionados.

Creemos que con una buena elección del ángulo (no típico, como 30°, 45°, o 60°) podemos provocar el uso de estas razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, conectándolo así con el círculo. Es importante mencionar que a pesar de que los binomios no lograron articular, completamente, las razones trigonométricas con las funciones trigonométricas definidas por el círculo unitario, el trabajo realizado para activar y articular las distintas génesis del ETM, quedó fuertemente potenciado.

La segunda situación del Ítem II, que pretende conectar el círculo con las funciones trigonométricas, podemos identificar esa articulación mediante el trabajo realizado por los binomios en las distintas tareas propuestas. A priori se esperaba que los estudiantes en cada una de las tareas fortalecieran las distintas génesis, activándolas de modo que el trabajo realizado en cada una de ellas potenciara el paso al trabajo en la siguiente, fortaleciendo la *génesis discursiva* con la utilización de definiciones (perímetro, seno, entre otras), la *génesis instrumental* con la manipulación de artefactos clásicos y no clásicos (regla, compás, transportador, lana, cartón, software: GeoGebra, entre otros), que fueron proporcionados a los estudiantes, además de los simbólicos y la *génesis semiótica* visualizando icónicamente para las primeras tareas y no icónicamente para las últimas, siendo capaces de representar, bajo un registro gráfico lo solicitado.

El binomio 1, en un primer momento, visualizan las taras planteadas, logrando relacionar la figura de la rueda con definiciones (como perímetro de una circunferencia, el número pi y ángulos), activando fuertemente la *génesis semiótica*, que es apoyada de lo referencial teórico, lo que activa la *génesis discursiva.* En un segundo momento, el binomio 1 se enfrentó a tareas donde se involucraron gráficos. En su gran mayoría visualizaban icónicamente, activando la *génesis semiótica*, fortaleciéndola al ser capaces de representar la respuesta a las tareas bajo registros gráficos o naturales. Específicamente en las tres últimas tareas el binomio presentó debilidad en la *génesis discursiva,* por lo que no fue capaz de responder correctamente a estas, pues a partir del registro gráfico que utilizó para responder, no podía concluir, pues provenía de un procedimiento erróneo.

A continuación describiremos los Espacios de Trabajo Matemático-personales de cada estudiante que compone los dos binomios. Estos espacios de trabajo se pueden ver eventualmente influenciados y complementados unos con otros. Hablaremos entonces, del espacio de trabajo de cada binomio estudiado por tarea.

5.2.1 Espacios de Trabajo Matemáticos de la Experiencia 2

Espacio de Trabajo Matemático del Binomio 1

Tarea 1: propuesta ministerial

Resolver el siguiente problema: La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

En esta tarea los estudiantes parten visualizando el problema mediante una figura que representa el triángulo rectángulo involucrado, activando así la *génesis semiótica.* El estudiante e_{11} utiliza la definición del seno para plantear una ecuación que la resuelve mediante un *artefacto simbólico* (algoritmo) y a partir de esto, entrega una respuesta. Por lo tanto en este trabajo existen elementos de las tres génesis, sin embargo, se ve favorecida la *génesis instrumental* pues e_{11} utiliza la definición del seno más como un método, que como un elemento que va a potenciar lo discursivo y en consecuencia el razonamiento matemático.

El estudiante e_{12}, en cambio, a partir de la figura transforma ésta en un triángulo equilátero, actuando como *topógrafo*, por lo que se ve reforzada la *génesis semiótica*. Las propiedades de este triángulo construido son las que sirven al estudiante para sacar conclusiones, como que la altura divide a la base en dos partes congruentes. Activa entonces la *génesis discursiva* y es justamente esta la que se ve favorecida en el trabajo de e_{12}. A continuación se presenta un extracto de conversación de la discusión del binomio.

[e_{12}]: ¿Cuál era la fórmula?

[e_{11}]: (Dibuja tabla).

[e_{12}]: No, yo no lo hago con seno y coseno.

[e_{11}]: ¿No?

[e_{12}]: No.

[e_{11}]: ¿Qué ocupas entonces?

[e_{12}]: Déjame ver.

[e_{11}]: ¡Ah ya! Con el de acá.

[e_{12}]: Si con Pitágoras.

[e_{11}]: Si, pero ¿Por qué tienes ese acá?

[e_{12}]: Porque… Ah no, nada que ver, era para el lado.
(Realizan cálculos)
[Investigador]: ¿Llegaron a lo mismo?

[e_{11}]: Si.

[Investigador]: ¿Nos podrían explicar lo que hicieron?

[e_{12}]: Es que cuándo hay un ángulo de noventa y otro de treinta, los ocupo como si fuera la mitad de un equilátero. Entonces la altura está a la mitad de la que sería la hipotenusa en este caso.
[Investigador]: ¿Y tú?

[e_{11}]: Como la hipotenusa del triángulo es quince y el seno de treinta es un medio, entonces este lado tiene que ser la mitad de la hipotenusa, eso, nada más.

Diseño: Tarea 2

¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

En la tarea 2 el estudiante e_{12} trabaja bajo un registro figural, utilizando un triángulo rectángulo para representar lo que visualiza en relación a la trayectoria que recorre el volantín si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación, activando así la *génesis semiótica*. Por otro lado e_{11} realiza un trabajo discursivo mediante la definición de función para describir lo que sucede con las distintas alturas y la razón entre estas y el largo del hilo del volantín. Los estudiantes comienzan a compartir sus respuestas lo que permite que el ETM-personal de uno se complemente con el otro. En este momento e_{11} activa la *génesis semiótica* visualizando el problema con un *registro de lenguaje natural* (Duval, 1999), que expresa de manera gestual. Sin embargo e_{11} y e_{12} en conjunto llegan a la respuesta utilizando elementos del referencial teórico (concepto de razón), lo que finalmente activa la *génesis discursiva* que en definitiva es la que se ve mayormente potenciada, ya que es a partir de esta que los estudiantes logran concluir.

Diseño: Tarea 3

¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza? Justifica tu respuesta.

En una primera instancia los estudiantes no logran entender la tarea dada. Bajo intervención del investigador, el estudiante e_{11} logra visualizar la situación con un registro figural y posteriormente e_{12} complementa la representación realizada por e_{11} describiendo la trayectoria del volantín. En este instante el ETM del binomio activa completamente la *génesis semiótica* visualizando la trayectoria del volantín. Sin embargo, e_{12} no está convencido totalmente de la conclusión, lo que provoca que e_{11} construya una nueva representación de la situación y lo justifica utilizando la definición de circunferencia transitando de manera exitosa a la *génesis discursiva.* Esto se puede evidenciar en el siguiente extracto de conversación:

> [e_{11}]: Entonces sería… no puede ser línea recta. Va a ser así, quince de radio. ¿Ya?
> [e_{12}]: Ya.
> [e_{11}]: Entonces sube hasta que llega a los treinta grados y esa es la trayectoria. ¿Sí?
> [e_{12}]: Si.
> [Investigador]: entonces ¿Cuál sería su trayectoria?
> [e_{11}]: Así (indica con la mano el contorno de una semicircunferencia).

Diseño: Tarea 4

> *¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.*

Esta tarea activa la *génesis semiótica* luego de la intervención del investigador, ya que los estudiantes no logran visualizar la situación de manera inmediata. El estudiante e_{11} realiza una representación gestual acompañado de un registro figural (Duval, 1999) para mostrarle la situación a e_{12}, a lo que el estudiante e_{12} complementa apoyándose de un referencial teórico como lo es la definición del cuarto de la circunferencia, pasando así a la *génesis discursiva*. Posteriormente mediante algoritmos llegan a la respuesta, activando levemente la *génesis instrumental.* El siguiente extracto de conversación evidencia lo ya mencionado:

> [e_{12}]: Es un cuarto del perímetro.
> [e_{11}]: Si, es un cuarto del perímetro. De aquí hasta acá, cuando los quince

están arriba.

[e_{12}]: Si, entonces treinta π, partido en cuatro.

[e_{11}]: Siete coma cinco π metros. Eso es lo que recorrió.

[e_{12}]: Si.

Diseño: Tarea 5

¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

En esta tarea los estudiantes, luego de leer la pregunta, comprenden inmediatamente lo solicitado, visualizando así la figura que representa la situación. Trabajan como botánico y activan levemente la *génesis semiótica* ya que esta representación lleva inmediatamente a la *génesis discursiva* por un lado, al utilizar Pitágoras, y por otro se utiliza como artefacto simbólico la diagonal de un cuadrado (*génesis instrumental)*.

Diseño: Tarea 6

¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Cada estudiantes, de forma independiente, luego de leer la pregunta entregada observa la representación de la tarea 5 entendiendo que les servirá para concluir en la tarea 6, utilizando inmediatamente un artefacto simbólico para llegar a la respuesta activando en un principio la *génesis instrumental*. El estudiante e_{11} requiere volver a analizar la tarea incentivando a e_{12} a visualizar la pregunta, en este instante el ETM-personal de cada uno de los estudiantes complementa al otro y comienzan a trabajar en un registro figural (*génesis semiótica)*. Logran relacionar su representación con la definición de perímetro, la que usan para plantear la situación por lo que se activa levemente la *génesis discursiva* y mediante cálculos (artefacto simbólico) llegan a la respuesta, activando finalmente la *génesis instrumental*.

Diseño: Tarea 7

¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

Los estudiantes comienzan la tarea observando la rueda de forma individual, lo que es interrumpido por el estudiante e_{12} invitando a estudiante e_{11} a relacionar lo solicitado con el cálculo del perímetro de una circunferencia, trabajando en todo momento como un botánico ya que observa la representación y comprende a partir de la visualización los procedimientos a seguir lo que nos dice que la *génesis semiótica* se activa completamente. Posteriormente, el estudiante e_{11} propone realizar un algoritmo (división) con los datos obtenidos a partir de la visualización inicial de la tarea, lo que les permite llegar al resultado trabajando en la *génesis instrumental*. Los estudiantes logran relacionar su resultado final con la definición del número pi, lo que nos indica que finalmente logran activar de forma leve, pero no menos importante, la *génesis discursiva*. A continuación un extracto de la conversación:

[e_{11}]: Que el perímetro es 5pi.

[e_{12}]: ya…

[e_{11}]: y cada barra mide 2,5 metros

[e_{12}]: Ya…

[e_{11}]: Entonces, ¿Cuántas barras necesito? 5 pi partido en 2,5.

[e_{12}]: Mmm, claro, si, pero ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

[e_{11}]: ¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda? Esa es la primera.

[e_{12}]: Ya, entonces 5 pi partido en 2,5.

[Investigador]: ¿Cuánto les da?

[e_{11}]: 6,28… 2π

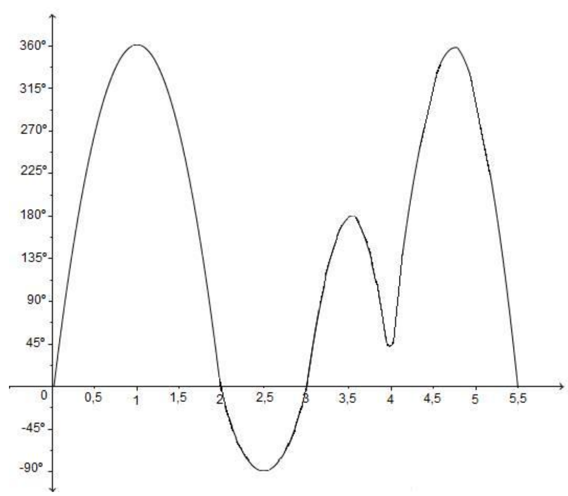
Diseño: Tarea 8

¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

Los estudiantes luego de comprender la nueva tarea, logran visualizar que el resultado final de la tarea 7 les simplifica el trabajo para comenzar a reflexionar acerca de lo solicitado en la nueva pregunta, lo que activa su trabajo como botánico (*génesis semiótica)*, luego de complementar sus distintos ETM-personales con distintas afirmaciones, se disponen a calcular el algoritmo construido a partir de la reflexión inicial, mediante distintos artefactos simbólicos (división, multiplicación y simplificación de fracciones) y así llegar fácilmente al resultado activando la *génesis instrumental*.

Diseño: Tarea 9

El siguiente gráfico (tiempo v/s ángulo) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



Los estudiantes comienzan leyendo la tarea de manera individual y posteriormente analizan la curva que representa un movimiento particular de la rueda, visualizando así bajo un registro gráfico (*génesis semiótica*) e inmediatamente después, el estudiante e_{12} menciona que el carro ”*primero va subiendo y después se devuelve*” y asocia la gráfica a movimientos en un sentido y en otro de la rueda, activando así la *génesis discursiva* al mencionar que los ángulos aumentan y disminuyen. Cada uno de estos movimientos los representan dibujando un círculo (registro figural) y posteriormente se apoyan de un artefacto (lápiz) como instrumento para representar el movimiento de la rueda bajo un registro natural (*génesis instrumental y semiótica*).

Diseño: Tarea 10

Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

En esta tarea el estudiante e_{12} después de leer atentamente la tarea grafica lo solicitado, activando fuertemente la *génesis semiótica*, actuando bajo un perfil botánico en un registro gráfico, y justificando que a medida que se ocupan más barras, aumentará el ángulo de elevación. A pesar de no ser explícito en describir la definición que está utilizando se ve activada la *génesis discursiva* al recurrir como referencial teórico a la definición de proporcionalidad directa implícitamente.

[e_{11}]: Ya, ¿Esto se refiere a una vuelta completa?
[Investigador]: El ángulo cada vez
[e_{12}]: Si, ¿Pero hay que ocupar esa trayectoria?
[Investigador]: No, la normal. Solo era un caso particular.
[e_{12}]: Es así, porque cada vez va dando más vueltas, porque aquí tengo una barra,

entonces mientras más va subiendo voy ocupando más barras.

Diseño: Tarea 11

Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?

En esta tarea se ve activada principalmente la *génesis semiótica*, ya que los estudiantes solo trabajan en un registro gráfico visualizando lo solicitado de manera inmediata, deciden tomar solo tres puntos conocidos para describir la curva, trazando así rápidamente lo que ellos creen es la respuesta correcta. Los estudiantes complementan sus ETM-personal trabajando en conjunto.

Diseño: Tarea 12

Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

Al igual que en la tarea anterior, en un comienzo los estudiantes activan la *génesis semiótica* ya que representan lo solicitado mediante un registro gráfico pasando de éste a uno natural para discutir las estrategias a seguir. El estudiante e_{12} decide volver a tomar solo tres puntos conocidos y se disponen a trazarlos nuevamente bajo un registro gráfico.

Diseño: Tarea 13

Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

El estudiante e_{11} observa como botánico las gráficas obtenidas en las tareas

11 y 12, activando la *génesis semiótica*. Posteriormente se ve activada la *génesis discursiva* cuando el estudiante e_{11} afirma que la cantidad de barras es directamente proporcional a los grados que alcanza el carro con respecto al origen de la rueda.

Espacio de Trabajo Matemático Binomio 2

Tarea 1: propuesta ministerial

Resolver el siguiente problema: La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

En esta primera tarea los estudiantes comienzan leyendo en silencio la pregunta e inmediatamente visualizan el problema, construyendo en conjunto una representación en la hoja. Por lo que parten activando la *génesis semiótica*, trabajando en un registro figural comportándose como botánicos, ya que solo observando la representación logran visualizar elementos que le permitirán desarrollar el problema. En una primera instancia logran asociar el dibujo que formaron con el hilo y el volantín, con el triángulo rectángulo y sus razones trigonométricas, lo que activa la *génesis discursiva* pero queda debilitada ya que luego de plantear esta ecuación utilizando el seno de 30°, logran encontrar un nuevo camino para desarrollar la tarea, prefieren hacer cálculos relacionando el dibujo con lo que ellos llaman "técnica PSU" utilizando un artefacto simbólico (división) lo que finalmente activa completamente la *génesis instrumental*.

Diseño: Tarea 2

¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

En esta tarea podemos identificar 4 preguntas, que las llamaremos:

Pregunta inicial: *¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?*

Pregunta (a): *¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala;* pregunta (b): *¿cómo cambia la altura?;* y pregunta (c): *¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?*

Los estudiantes deciden nuevamente trabajar en conjunto compartiendo sus respuestas y complementando sus argumentos, logran potenciar su ETM-personal con el de su compañero. El primer acercamiento a la respuesta lo hace, luego de leer la pregunta, el estudiante e_{22} representando la situación con un triángulo y completando los posibles datos que le servirán para dar respuesta a la primera pregunta solicitada activando su *génesis semiótica,* mientras que el estudiante e_{21} continúa leyendo la tarea. Este último, visualiza la situación representando sus respuesta en registro natural compartiéndolo a viva voz con el estudiante e_{22}, lo que activa también su *génesis semiótica*, posteriormente comienzan a discutir cada una de las preguntas de la tarea, para complementar sus argumentos el estudiantes e_{21} decide representar la situación con los instrumentos dispuestos por los investigadores, corta un pedazo de lana, la que representa el hilo del volantín y en conjunto con e_{22} comienzan a describir la trayectoria del volantín al ir recogiendo el hilo, lo que nos dice que los estudiantes activan completamente la *génesis instrumental* potenciando cada uno de sus polos mediante los artefactos clásicos utilizados por los estudiantes.

Posteriormente, el estudiante e_{21} con la ayuda de e_{22} se dispone a escribir en el papel sus conclusiones finales, recurren a la definición de proporcionalidad para concluir una de ellas lo que activa finalmente la *génesis discursiva*.

Diseño: Tarea 3

¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se

lanza? Justifica tu respuesta.

Los estudiantes en esta tarea leen juntos la pregunta y la relacionan con la tarea anterior, por lo que se disponen inmediatamente a contestar argumentando que la trayectoria seguida por el volantín será la misma que la del anterior, visualizando así la situación. El estudiante e_{21} la representa de manera gestual.

Cada estudiante se ve reflejado por un botánico ya que su trabajo en esta etapa de la pregunta, es solo observar y argumentar a partir de la visualización (*génesis semiótica)*. El investigador interviene para mencionarles que la pregunta apunta a la trayectoria desde que se lanza el volantín, el estudiante e_{21} se da cuenta de su error y vuelve a visualizar la situación, por lo que su trabajo como botánico se ve favorecido, relacionando inmediatamente la trayectoria del volantín con una semicircunferencia, lo que activa su referencial teórico y se ve potenciado al argumentar que lo ocurrido por el volantín define exactamente lo que es una circunferencia, relacionando que el largo del hilo, que para él es como un radio, siempre estará a la misma distancia de un punto fijo (niño que afirma el hilo) y que el movimiento realizado por el volantín describe entonces, una curva que será parte de una circunferencia, potenciando así su *génesis discursiva* como se muestra en el siguiente extracto de conversación:

[e_{21}]: Ah, ¿eso? Es una semicircunferencia.

[Investigador]: ¿Por qué? ¿Qué habían entendido ustedes?

[e_{21}]: Que elevo el volantín y le doy más hilo para que siga subiendo.

[Investigador]: Ah ya, no en este caso se refiere a otra situación.

[e_{21}]: Ah, y el por qué de esa pregunta era porque el niño que está tirando el volantín siempre va a ser un punto fijo, entonces si se va elevando, como el largo del hilo va a ser igual, siempre va a estar la misma distancia del punto, entonces va a formar una curva que va a ser parte de una circunferencia.

Diseño: Tarea 4

¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

En esta tarea los estudiantes leen la pregunta de forma individual, y es el estudiante e_{21} quien toma la iniciativa de representar la situación en un registro figural (*génesis semiótica*), mientras que el estudiante e_{22} observa el dibujo realizado. El estudiante e_{21} logra visualizar sin ningún inconveniente la situación y la relaciona con la definición de circunferencia, argumentando que la trayectoria del volantín cuando alcanza su altura máxima será el cuarto del perímetro de la circunferencia descrita, activando su *génesis discursiva*. El estudiante e_{22} se dispone a calcular lo concluido mediante algoritmos, utilizando como apoyo la definición de perímetro de una circunferencia, argumentado que la altura que alcanzó el volantín es de 90°, por lo que tendrán que calcular solo el cuarto de ésta. Siendo esto lo que activa finalmente su *génesis discursiva*, sin embargo su procedimiento para llegar a la respuesta lo realiza mediante la *génesis instrumental*. A continuación se presenta un extracto de conversación:

[e_{22}]: Ya, lo resolvimos así porque acá se supone que el niño es un punto fijo y está lanzando a 90°, entonces 90° en una circunferencia es un cuarto.

[Investigador]: ¿Por qué 90°?

[e_{22}]: Porque el volantín queda recto, y sabemos que el perímetro es 30π, o sea que dividido en 4 da $7{,}5\pi$, y eso.

A partir de lo descrito en la fase experimental del Binomio 2 y bajo decisión de los propio binomio, el orden las siguientes dos tareas se ve alterado.

Diseño: Tarea 6

¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Tras leer la pregunta de la nueva tarea varias veces y visualizar el problema, describiendo que la trayectoria cuando el volantín alcanza su altura máxima, es un cuarto de circunferencia activando así la *génesis semiótica* y la *génesis discursiva*, los estudiantes deciden construir una representación particular de la situación, dándose otro valor para el radio de la circunferencia (uno más pequeño) que les facilita el trazado de esta y lograr visualizar lo que ocurre en la situación. La construcción de esta circunferencia la realizan utilizando artefactos clásicos (compás, transportador y regla) que facilitan el trabajo de visualización de los estudiantes, los que comienzan como un botánico y continúan siendo un topógrafo, podemos mencionar que se encuentran en la *génesis semiótica* pero transitan constantemente hacia la *génesis instrumental*, viéndose potenciadas cada una de ellas. Finalmente los estudiantes encuentran una relación entre los arcos de la circunferencia y basándose en estas definiciones concluyen, por lo que finalmente se activa la *génesis discursiva.*

Diseño: Tarea 5

¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

En esta nueva tarea el estudiante e_{21} construye la situación mediante un compás y regla mientras que el estudiante e_{22} mide para darles valores particulares y visualizar a partir de esto la posible respuesta, trabajan en conjunto en la *génesis semiótica* complementando sus ETM-personales. Luego de realizar la representación, los estudiantes se disponen a encontrar un procedimiento adecuado para llegar a lo solicitado, el estudiante e_{21} traza distintas rectas para encontrar algún ángulo que lo lleve a la respuesta, activando la *génesis instrumental*. Finalmente, los estudiantes activan la *génesis discursiva* para concluir, utilizando definiciones como: punto medio, altura, propiedades de la circunferencia, diagonal de un cuadrado, entre otros.

Diseño: Tarea 7

¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

Para esta tarea el estudiante e_{21} lee en voz alta la pregunta, inmediatamente logran visualizar que la rueda tiene características de una circunferencia por lo que ambos estudiantes reconocen el radio y su valor mediante los datos entregados en la imagen de la tarea, activando inmediatamente la *génesis semiótica*, el estudiante e_{22} logra captar que lo primero que hay que saber es el perímetro de esta circunferencia por lo que comienza a activar levemente su *génesis discursiva* recurriendo a la definición de perímetro, el estudiante e_{21} comienza a relacionar el radio encontrado con la definición del número pi, mencionando que la respuesta es conocida ya que el radio alcanza dos pi veces en el perímetro de una circunferencia activando así la *génesis discursiva*. Juntos deciden los pasos a seguir para llegar a la respuesta, es e_{22} quien se dispone a realizar los cálculos (algoritmos) para concluir la tarea intervenido en todo momento por e_{21} (*génesis instrumental*).

Diseño: Tarea 8

¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

Nuevamente el estudiante e_{21} lee la pregunta y juntos comienzan a visualizar lo que les están pidiendo, cabe mencionar que la representación utilizada en esta tarea proviene de la tarea anterior por lo que en esta ocasión la *génesis semiótica* ya estaba activada, lo que genera que con esta secuencia se potencie su trabajo.

El estudiante e_{21} completa la representación con nuevos datos para ir complementando su respuesta, utilizando la definición de circunferencia, sus ángulos inscritos y perímetro sin embargo, estás definiciones solo les permite plantear una ecuación que luego será resuelta mediante algoritmos, utilizando entonces instrumentos que viven en la *génesis instrumental* y que ocasiona que los estudiantes transiten de esta génesis a la *génesis discursiva.* A continuación un extracto de conversación:

[e_{21}]:12.

[e_{22}]: ¿Son 12?

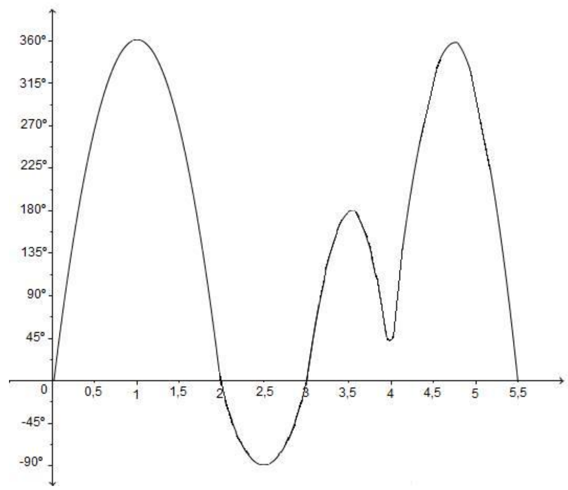
[e_{21}]: Sí, entonces sería el perímetro dividido en 12. O lo otro sería dividir esto (indica con el lápiz en la hoja) en 12 para saber cuántas barras se ocuparían, entonces 6,25…

[e_{22}]: Es 6,28.

[e_{21}]: No, 6,25 si dijimos app. Entonces ocuparía un poco más de media barra.

Diseño: Tarea 9

El siguiente gráfico (tiempo v/s ángulo) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



En un primer momento los estudiantes leen la pregunta en voz alta e inmediatamente visualizan lo que está ocurriendo con la rueda, relacionando los grados descritos en la curva dada con el movimiento que realiza la rueda, utilizando el concepto de grados en la circunferencia e interpretando a partir de este referencial teórico, lo solicitado en la tarea. Utilizando para esto un registro natural, por lo que ve activada la *génesis semiótica* y la *génesis discursiva,* una favoreciendo el trabajo de la otra.

Diseño: Tarea 10

Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

En esta tarea el estudiante e_{21} comienza leyendo en voz alta la pregunta, y al terminar, interpreta que uno de los ejes se refiere a la definición de perímetro, por lo que inmediatamente comienza a activar la *génesis discursiva*, comienza a trazar los ejes del gráfico a construir trabajando entonces en un registro gráfico (*génesis semiótica*), comienza a darse posibles valores y visualiza cómo será la posible curva. Argumentando finalmente que la curva descrita será una línea recta, ya que los valores son proporcionales, lo que potencia la *génesis instrumental*. A continuación un extracto de conversación que evidencia lo mencionado:

[e_{21}]: Entonces sería el perímetro, porque es la trayectoria. [e_{22}]: Sí. [e_{21}]: Y la variable independiente "y"… oh, esa la preguntaron en la PSU (Vuelve a leer y comienza a dibujar el gráfico). Ya, se supone que a los 30° hay media barra [e_{22}]: ¿Cuánto? [e_{21}]: Media barra ¿? Es un poco más de media barra ¿? Entonces se supone que a 360° es 6,28. [e_{22}]: Sí. [e_{21}]: ¿Y cuál es la pregunta? [e_{22}]: ¿Qué curva se describe? [e_{21}]: Una recta (Traza línea recta en la gráfica). Están todos a la misma distancia y si avanza el doble, es el doble del arco.

Diseño: Tarea 11

Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?

En la tarea once los estudiantes luego de leer la pregunta analizan lo solicitado. El estudiante e_{21} inmediatamente relaciona los datos pedidos en la pregunta con las conclusiones de la tarea seis del cuestionario uno, y comienzan a visualizar los datos con los que deben trabajar, posteriormente comienzan a trazar los puntos. En esta instancia se ve activada la *génesis semiótica,* donde los estudiantes trabajan bajo un perfil botánico en un registro gráfico. Esta génesis se ve complementada con instrumentos que viven en la *génesis instrumental;* al momento de construir el gráfico utilizan artefactos clásicos. Los estudiantes luego de trazar la curva, relacionan que se parece a la gráfica del seno, argumentando que tiene característica de periodicidad, lo que activa finalmente la génesis discursiva. A continuación un extracto de la conversación

[e_{21}]: Ya (comienza a unir los puntos), entonces sería una función seno, algo así, pero de distinta manera pero como la misma idea.

[Investigador]: Ya, a ver explícame todo lo que se te venga a la mente sobre esa función y lo que hiciste en el ejercicio, la curva que describe, etc.

[e_{21}]: Eh, ¿lo de la función periódica?

[Investigador]: Sí, por ejemplo ¿qué dijiste sobre eso?

[e_{21}]: Que siempre se cumple lo mismo, o sea es constante, nunca va a cambiar siempre va a tener en cada ángulo la misma distancia.

[Investigador]: Ya, entonces ¿si yo aumento los grados acá?

[e_{21}]: Se sigue cumpliendo, es como copiar y pegar.

Diseño: Tarea 12

Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la *trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?*

Utilizando las mismas técnicas de tarea anterior, los estudiantes realizan el gráfico sin inconvenientes, solo visualizando y dándose valores para los posibles puntos que satisfacen la curva, trabajando de botánico pasando del registro natural al registro gráfico (*génesis semiótica*). Logran darse cuenta que esta nueva gráfica es la misma que la de la tarea once, por lo que concluyen en un registro natural.

Diseño: Tarea 13

Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

En esta tarea los estudiantes se expresan mediante un registro natural tratando de interpretar los gráficos mediante la visualización (*génesis semiótica*), lo que los lleva finalmente a que relacionen ambas gráficas con la definición de proporción, activando la *génesis discursiva.*

5.3. Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje

A partir de los análisis realizados de las tareas propuestas por el ministerio y las tareas diseñadas con el fin de enriquecer el trabajo matemático de los estudiantes, se han refinado los problemas y se ha confeccionado la Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje (ver Anexo C). Las tareas siguen un orden lógico. En la primera situación las tareas se confeccionaron para lograr articular las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo con el círculo, mientras que en la segunda situación las tareas confeccionadas apuntan principalmente a la articulación entre el círculo y la función trigonométrica. A continuación se presentan las tareas que forman parte de nuestra Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje y los refinamientos que se realizaron.

Primera situación

Lee atentamente y contesta:

I. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 22°. Suponiendo que las condiciones son ideales responde:

Para el enunciado de esta primera situación se realiza un cambio en el ángulo de elevación del volantín, ya que se observó que con un ángulo de elevación de 30° la tarea 1 puede ser resuelta sin la necesidad de recurrir a las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Además se especifica las condiciones en que se eleva el volantín, ya que ambos binomios antes de resolver las tareas consultaron si se encontraban ante una situación ideal, por lo que esto fue agregado al enunciado.

Propuesta: Tarea 1

¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Se mantiene la tarea 1 que inicialmente se confeccionó con el fin de conocer si los estudiantes comprenden una situación dada y construyen, en este caso, un triángulo rectángulo que la represente, además de reconocer la razón trigonométrica que relaciona la hipotenusa de un triángulo rectángulo con el cateto opuesto a un ángulo dado para encontrar la medida de este cateto. Si bien la tarea no fue refinada, si lo fue su enunciado, pues como se mencionó, el ángulo de elevación (un ángulo notable de 30°) influyó en el procedimiento que se esperaba de los binomios y al modificar éste con un ángulo no tradicional como 22°, la tarea se resuelve con razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Propuesta: Tarea 2

¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

Esta tarea no fue modificada ya que se esperaba que los binomios evidenciaran que la razón entre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el cateto opuesto a un ángulo dado se mantiene aunque varíe la longitud de sus lados y este objetivo fue logrado en ambos binomios.

Propuesta: Tarea 3

Imagina que el volantín cae al suelo y debes volver a elevarlo, para esto, utilizas la ayuda de un amigo que te ayudará a lanzarlo Si usan el máximo de hilo dado y suponiendo que las condiciones son ideales ¿Qué trayectoria sigue el volantín desde que tu amigo lo lanza? Justifica tu respuesta.

Los cambios realizados en esta tarea apuntan principalmente a que ambos binomios tuvieron problemas en la comprensión de ésta. Si bien se esperaba que los binomios reconocieran que la trayectoria que sigue el volantín desde que se lanza, corresponde a un arco de circunferencia y así relacionar el triángulo construido anteriormente con el círculo, se presentaron dificultades en la representación de esta situación y específicamente en relación a la altura del volantín cuando es lanzado, que de manera ideal es desde el suelo.

Propuesta: Tarea 4

¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

Esta tarea cumple con el objetivo planteado que es en una primera instancia relacionar la altura máxima alcanzada por el volantín con el ángulo de 90° que forma respecto al suelo y posteriormente con el perímetro de un cuarto de circunferencia, por lo tanto, no fue modificada.

Propuesta: Tarea 5

¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

Al igual que la tarea anterior la tarea 5 cumple con el objetivo planteado que es construir el triángulo rectángulo que representa la situación, dentro de la circunferencia descrita por la trayectoria que recorre el volantín, por lo tanto no fue modificada.

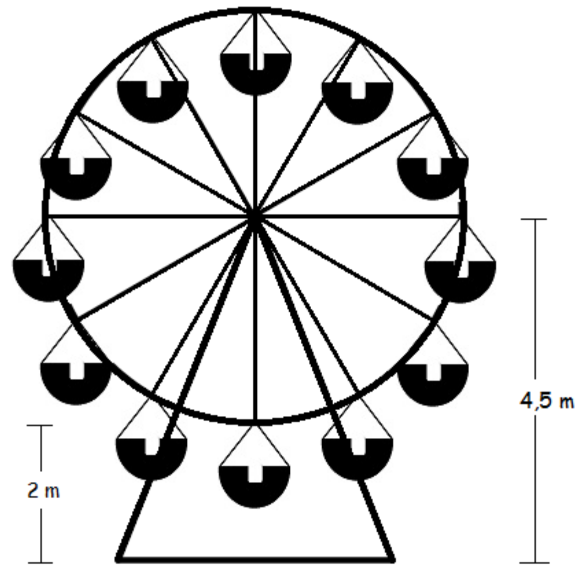
Propuesta: Tarea 6

¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

La última tarea de la primera situación cumple con el objetivo que es identificar la mitad de la altura máxima y asociarlo al punto correspondiente en el contorno de circunferencia para luego unir este punto con el centro de circunferencia, por lo tanto no fue modificada.

Segunda situación

I. Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda y que la cantidad de barras que se requieran puede tomar un valor racional o irracional responde:

En esta segunda situación se cuestionó el uso de la palabra "cantidad" para referirnos a las barras, por lo que se especificó que la cantidad de barras puede tomar valores racionales como irracionales.

Propuesta: Tarea 7

¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

La tarea 7 no fue modificada ya que cumple con el objetivo planteado que es utilizar la definición de perímetro o calcular cuántas veces cabe un radio en el contorno de circunferencia.

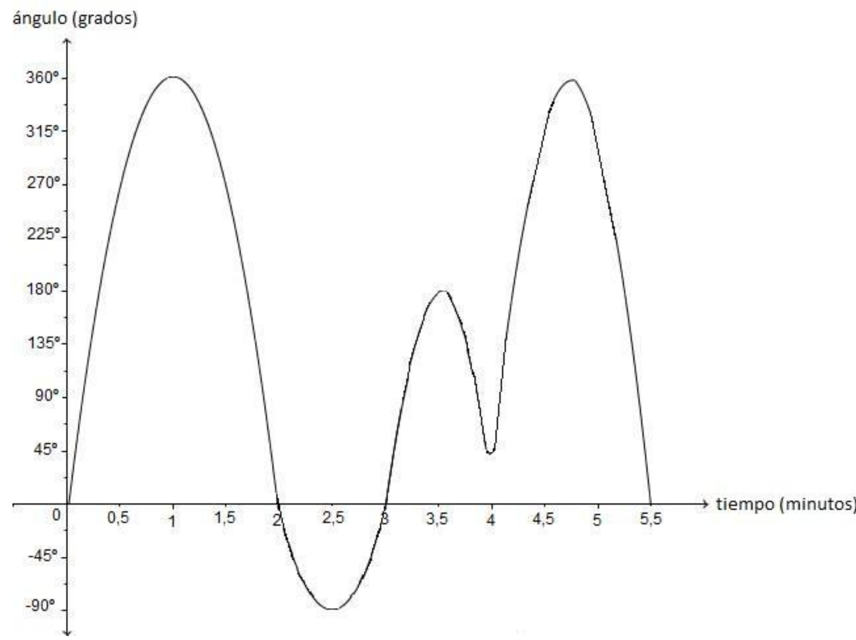
Propuesta: Tarea 8

¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

Esta tarea cumple con el objetivo planteado que es relacionar el resultado obtenido con el ángulo del centro que subtiende al arco y más aún, asociarlo al concepto de radián, por lo tanto, no fue modificada.

Propuesta: Tarea 9

El siguiente gráfico (tiempo (minutos) v/s ángulo (grados)) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna de un carro ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



Igualmente esta tarea no fue modificada ya que cumple con el objetivo planteado que es relacionar los ángulos con el movimiento de la rueda y los cambios de pendiente en la gráfica con el cambio de sentido en esta.

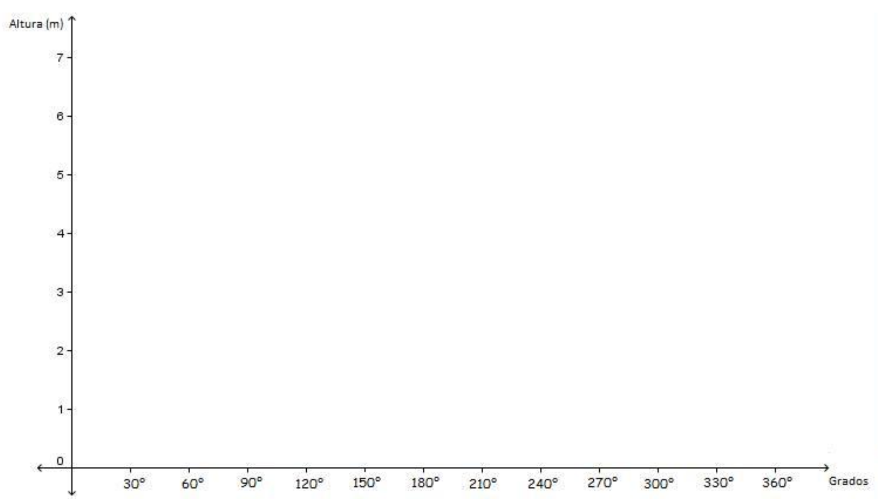
Propuesta: Tarea 10

Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

La tarea 10 cumple con el objetivo planteado que es identificar la proporcionalidad directa involucrada en las variables ángulo y cantidad de barras y al igual que la tarea 2 asociarlo a la proporcionalidad directa que existe entre ángulos y radianes, por lo tanto, no fue modificada.

Propuesta: Tarea 11

Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?



Esta tarea se confeccionó con el objetivo de reconocer que lo solicitado corresponde a la gráfica de una función seno, o en su defecto construir la gráfica solicitada y la reconocerla, el cual se cumplió por lo que no se modificó.

Propuesta: Tarea 12

Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

Al igual que la tarea anterior, se cumplió el objetivo planteado que es reconocer que lo solicitado corresponde a la gráfica de una función seno, o en su defecto construir la gráfica solicitada y la reconocerla, por lo tanto, no se modificó.

Propuesta: Tarea 13

Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

La última tarea se confeccionó con el objetivo de reconocer que la semejanza que existe de las gráficas obtenidas en las tarea 5 y 6 se debe a la proporcionalidad directa en que se relacionan las variables ángulo y cantidad de barras utilizadas en la rueda entre un carro y otro, por lo tanto, no se modificó.

Capítulo 6.

Conclusiones

Nuestro trabajo de investigación nos permitió proveer información relevante principalmente acerca de las dificultades que los estudiantes -de enseñanza media y superior- encuentran al adentrarse en materias que involucran conceptos de la trigonometría. Hemos podido evidenciar la escasa o nula relación que algunos estudiantes hacen entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, y las funciones trigonométricas, perdiendo la conexión entre el mundo geométrico y el mundo analítico.

En nuestro trabajo de investigación, la metodología escogida se caracterizó por tener un carácter cualitativo, enfocado a responder principalmente cuál es el espacio de trabajo matemático utilizado por estudiantes que han cursado alguna asignatura donde se enseñó trigonometría, ya sea a nivel secundario o universitario, y lograr la articulación de los conceptos involucrados en la trigonometría. Nuestra metodología apoyada de un marco teórico, que se enfoca en potenciar y permitir distintos trabajos matemáticos que se dan, a partir de una tarea, hizo posible que diéramos respuesta a nuestra problemática principal de estudio que apuntaba a la poca conexión que existe en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, en relación al triángulo rectángulo, y las funciones trigonométricas que se definen a partir del círculo unitario, específicamente, y en términos teóricos, fue posible evidenciar la desarticulación existente entre las *génesis semiótica*, *instrumental* y *discursiva*, y la poca o nula conexión entre el trabajo geométrico y el trabajo analítico en torno a la trigonometría.

Para nuestro primer objetivo: *Analizar el trabajo matemático, respecto al contenido de trigonometría, de estudiantes que han cursado asignaturas que involucren a dicho contenido, para así confeccionar una propuesta de enseñanza y aprendizaje que involucren problemas que requieran de la articulación entre las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas definidas a partir del círculo unitario*, se realizaron dos experiencias, que nos permitieron por un lado identificar y caracterizar el trabajo matemático de estudiantes universitarios que han cursado asignaturas de trigonometría de nivel superior, en este caso, pudimos evidenciar que los estudiantes no son capaces de modelar situaciones de la vida cotidiana que involucran razones trigonométricas, y mucho menos, utilizar la función trigonométrica para obtener resultados, graficar curvas u obtener valores específicos. Por otro lado, como segunda experiencia analizamos el trabajo matemático de estudiantes egresados de enseñanza media, que recibieron formación diferenciada de la asignatura de matemática, logrando conocer todos los posibles métodos y/o herramientas utilizadas por los estudiantes para llegar a lo solicitado en tareas que apuntaban a objetivos diferentes, y que fueron diseñadas para formar parte de nuestra Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje. En términos teóricos, observamos los distintos espacios de trabajo matemático que se pueden dar cuando los estudiantes se ven enfrentados a tareas que apuntan a articular las razones trigonométricas con las funciones definidas en un subconjunto de los números reales.

En la primera experiencia, realizada con estudiantes universitarios, de la cual fue posible observar dos momentos distintos, logramos evidenciar, en primer lugar, que los estudiantes no contextualizan los problemas a los cuales se les enfrenta. En un segundo momento, se observó que existen conceptos errados por parte de los estudiantes, donde se confunde la trayectoria de un determinado objeto con la distancia entre su punto inicial y su punto final. Si bien no constituyen parte de nuestro enfoque de atención, en relación a la problemática, fue posible identificar conceptos que no son adquiridos por los estudiantes de forma correcta, los cuales son utilizados en sus procedimientos, y en definitiva concluyen en una respuesta errónea para lo solicitado. Además fue posible identificar que los estudiantes no articulan las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo con el círculo, en problemas cuya necesidad era más o menos evidente.

Para la segunda experiencia se realizó un Cuestionario con dos ítems, como se mencionó en el Capítulo 3 con el objetivo de: *Analizar el trabajo matemático de* *estudiantes egresados de enseñanza media que han recibido formación diferenciada en la asignatura de matemática, en cuanto a las técnicas que ocupan, las propiedades o teoremas que ponen en juego y las distintas formas de visualizar el problema.* En el primer ítem evidenciamos que ambos binomios frente a una tarea, que frecuentemente se plantea en los programas de estudio del ministerio, privilegian técnicas mecanicistas por sobre el trabajo con razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. A pesar que la primera impresión de los binomios fue desarrollar la tarea mediante las razones trigonométricas, finalmente decidieron aplicar métodos que son adquiridos a partir de la preparación para pruebas estandarizadas como lo es la prueba nacional PSU. Consideramos que esto se debe principalmente a que el ángulo utilizado permitía la resolución de la tarea mediante una transformación de la figura inicial representada.

En el segundo ítem del Cuestionario fue posible evidenciar que el primer binomio privilegia las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, mientras que el segundo binomio se mostró más familiarizado al trabajar con las funciones trigonométricas. En este sentido las técnicas utilizadas por el primer binomio se basaban principalmente en razonamientos teóricos, los cuales inicialmente permitieron articular el trabajo del triángulo rectángulo con el círculo, no así, este último con las funciones trigonométricas. Por otro lado el segundo binomio se caracterizó por apoyar su trabajo en diversos instrumentos, tales como compás, regla, transportador, entre otros, y a partir de los resultados obtenidos al utilizar la técnica "ensayo y error" concluyeron regularidades que les permitió llegar a una respuesta, que si bien eran correctas, no permitían conectar el triángulo rectángulo con el círculo. Posteriormente en la segunda parte del Ítem II, este binomio logró una cierta conexión entre el círculo y la función trigonométrica seno, al identificar la gráfica obtenida como la gráfica de esta función y agrega el concepto de periodicidad, donde la situación planteada en el cuestionario tiene directa relación con la función trigonométrica y su gráfica.

La metodología no sólo nos permitió abarcar la producción de los estudiantes con lápiz y papel, sino que también sus "interacciones verbales" que para nosotros era importante observar, ésta nos mostró varios aspectos del ETM que quedarían latentes si nos restringimos al trabajo individual. Los binomios fueron capaces de interactuar, discutir cada idea y concluir de manera conjunta en cada tarea. Fue posible observar, con los distintos trabajos realizados por parte de los binomios, que las tareas propuestas favorecen el tránsito por las distintas génesis que componen el ETM potenciándose unas con otras a lo largo del cuestionario.

De acuerdo al análisis realizado a este Cuestionario se realizó un refinamiento de las tareas diseñadas y se confeccionó nuestra Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje, donde se realizaron modificaciones principalmente con respecto al ángulo de elevación escogido en la primera situación del Cuestionario. Si bien el objetivo de esa tarea apuntaba principalmente a que el estudiante reconociera en el triángulo rectángulo una determinada razón trigonométrica, éste no se cumplió en su totalidad, pues los estudiantes resolvieron la tarea sin utilizar razones trigonométricas. Consideramos que esto se debe a que el ángulo elegido, correspondía a un ángulo conocido, del cual se desprenden propiedades que no sólo tienen relación con razones trigonométricas. Para refinar esta propuesta realizamos una variación en los ángulos, para que en algún momento el estudiante requiera necesariamente de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Además se modificaron tareas que durante la aplicación necesitaron de intervenciones explicativas en relación a la comprensión de estas. Consideramos así mismo que eventualmente nuestra Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje pude seguir siendo refinada.

Finalmente, de acuerdo a las entrevistas realizadas a estudiantes universitarios, consideramos que el concepto de radián debe constituir un objeto de estudio para investigaciones posteriores, donde se trabaje no sólo de manera conceptual sino que también el porqué de su necesidad.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1987), *Processus de preuve et situations de validations,* Educational studies in mathematics, *18*(2), pp. 147 - 176.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), pp. 221–266.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, Recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval, R. (2005).Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Gonseth, F. (1945-1955). La géométrie et le problème de l'espace, Éditions du Griffon, Laussane.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de didactique et de sciences cognitives. *16*, 9-24.

Hernández, Fernández y Baptista. (2006). Metodología de la investigación.

Houdement, C. &Kuzniak, A. (1996). *Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques,* Recherches en didactique des mathématiques, *16*(3), 289-321.

Houdement, C. &Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné á étudierl'enseignement de la géométrie en formation des maitres, *Educational*

Studies in Mathematics, *40*(3), 238 - 312.

Houdement, C. &Kuzniak, A. (2006). *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*. Annales de didactique el de sciences cognitives. *11*. pp. 175- 193- IREM de Strasbourg.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico a la función trigonométrica.* Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav - IPN, México.

Martínez, G. (2011). Concepciones y Matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 15(1): 35 - 62.

Méndez, C. (2008). *Sobre la construcción escolar de las funciones trigonométricas: La transición grados → radianes → reales en el NMS.* Tesis de Maestría Facultad de Matemática - Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Meneses, H. (2010). *La transición grados → radianes ←→ reales en la construcción de la función trigonométrica: un análisis sistémico.* Tesis de maestría. CICATA-IPN. México.

Ministerio de Educación, (2005). Marco Curricular Enseñanza Media (Actualización 2005), Santiago, Chile.

Ministerio de Educación, (2009). Marco Curricular enseñanza Media (Actualización 2009), Santiago, Chile.

Ministerio de educación, (2000). Programas de Estudio Tercer año medio: Matemática. Santiago, Chile.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Un eapproche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. Francia, París.

Vance, P. (1965). Funciones trigonométricas en *Álgebra y Trigonometría modernas*. (pp. 99 -143) Reading, Massachusetts: Addison - Wesley, 1965.

Anexos

A continuación se presenta el material relevante utilizado para desarrollar nuestra investigación, que nos ayudó en cada una de las fases del estudio realizado: los cuestionarios aplicados en las Experiencias 1 y 2, las producciones de ambos binomio, el protocolo que se utilizó para analizar los resultados de nuestra Experiencia 1 y finalmente se presentan los diálogos de los binomios.

Anexo A

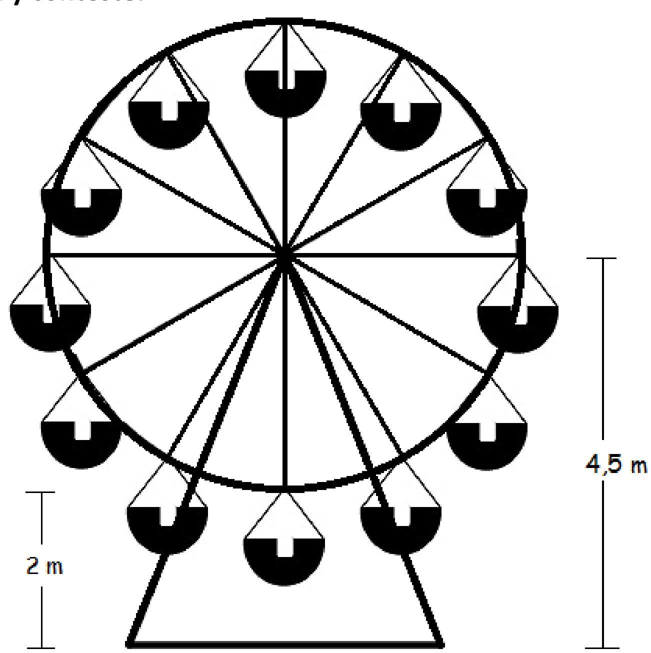
Cuestionario a Universitarios

A continuación se presenta el Cuestionario realizado a estudiantes Universitarios que han cursado asignaturas que involucran el contenido de Trigonometría, cuyos objetivos fueron planteados en el Capítulo 3.

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del Seminario I, enmarcado en el trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas, responder con claridad y señalar su nombre. No está de más decir que este instrumento **no** será usado con algún otro fin más que aportar a la investigación como una evidencia para la problemática abordada. El hecho de solicitar su nombre, es solo en caso de que exista alguna duda en su respuesta y se deba solicitar alguna aclaración.
Agradecemos de antemano su colaboración.

Pregunta 1:
Observe la siguiente figura y conteste:



1) Las personas van subiendo una a una al carro contiguo. Si hay 4 personas haciendo fila para subir a esta rueda y sólo se permite una persona por carro, luego de subir las 4 personas ¿Cuál es la longitud de la trayectoria realizada por el primer carro desde que la rueda empezó a girar?

2) Determine la distancia que hay desde el primer carro ocupado al suelo, en el instante en que suben las cuatro personas.

3) Si la rueda se mueve indefinidamente, construya un **gráfico,** cuyo eje de las ordenadas (eje Y) corresponde a la distancia que hay de cualquier carro al suelo y el eje de las abscisas (eje X) puede elegirlo convenientemente. Que puedes concluir después de realizar el gráfico.

Pregunta 2:
¿Qué es para ti un radián?

Anexo B

Cuestionario a estudiantes egresados de Enseñanza Media

A continuación se presenta el Cuestionario realizado a estudiantes egresados de Enseñanza Media que consta de dos ítems. El primero corresponde a la tarea del programa del ministerio y el Segundo corresponde a las tareas diseñadas para formar parte de la propuesta de Enseñanza y aprendizaje.

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

1. Lee atentamente y contesta.

   La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

   ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

Lee atentamente y contesta:

La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

Preguntas:

1. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

2. ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

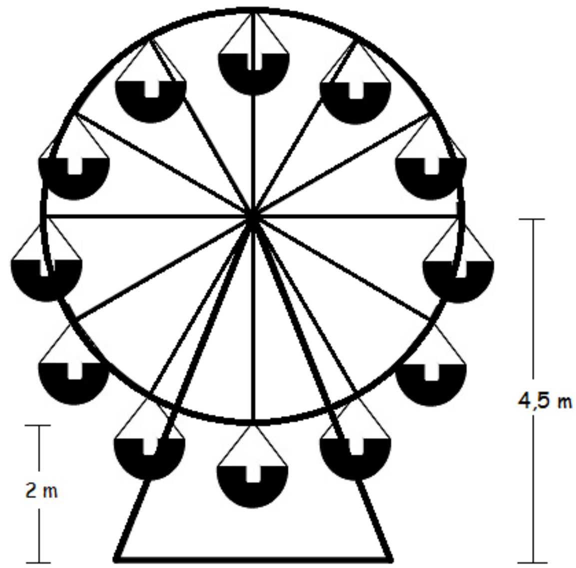
3. ¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza? Justifica tu respuesta.

4. ¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

5. ¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

6. ¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

II. Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.

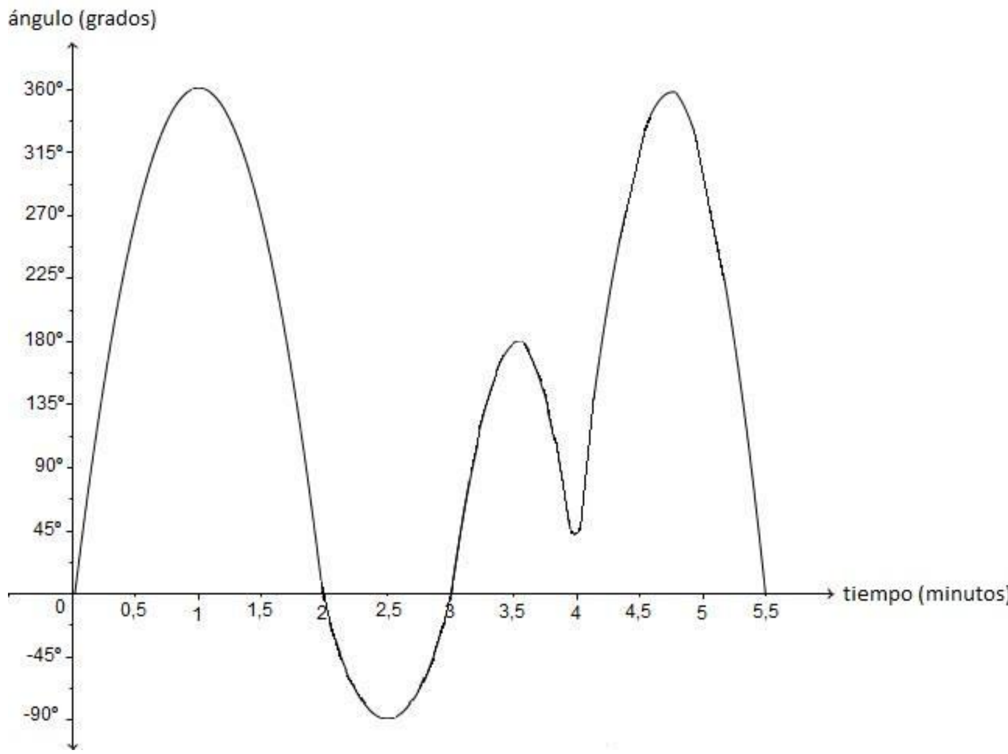


Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

1. ¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

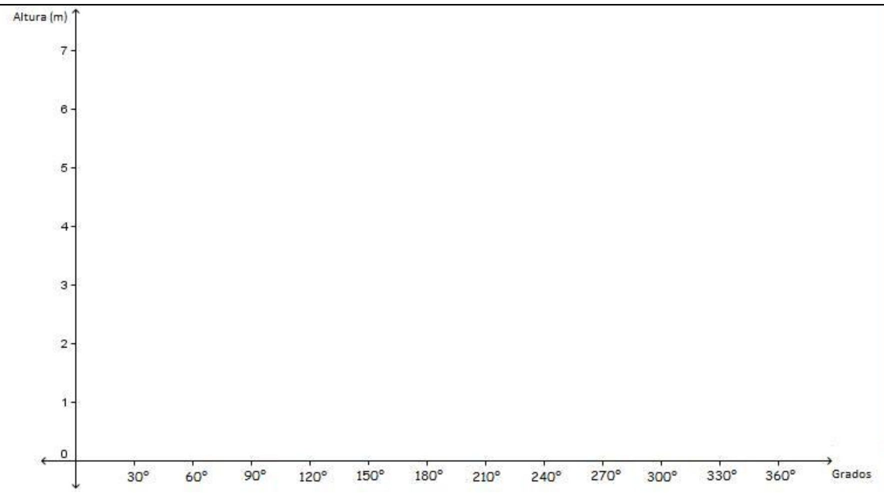
2. ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

3. El siguiente gráfico (tiempo (minutos) v/s ángulo (grados)) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna de un carro ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



4. Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

5. Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?



6. Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

7. Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

Anexo C

Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje

A continuación se presenta la Propuesta de Enseñanza y Aprendizaje, diseñada a partir de un refinamiento realizado a los Cuestionarios aplicados a estudiantes egresados de enseñanza media.

Propuesta de enseñanza y aprendizaje

Lee atentamente y contesta:

I. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 22°. Suponiendo que las condiciones son ideales responde:

1. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

2. ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?

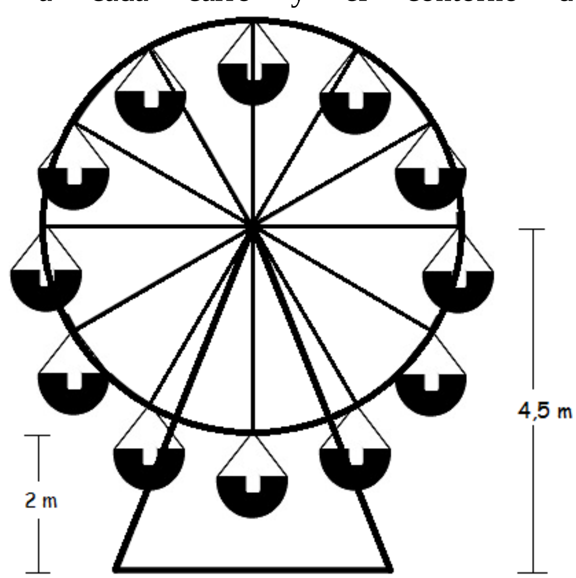
3. Imagina que el volantín cae al suelo y debes volver a elevarlo, para esto, utilizas la ayuda de un amigo que te ayudará a lanzarlo. Si usan el máximo de hilo dado y suponiendo que las condiciones son ideales ¿Qué trayectoria sigue el volantín desde que tu amigo lo lanza? Justifica tu respuesta.

4. ¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.

5. ¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?

6. ¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

I. Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.

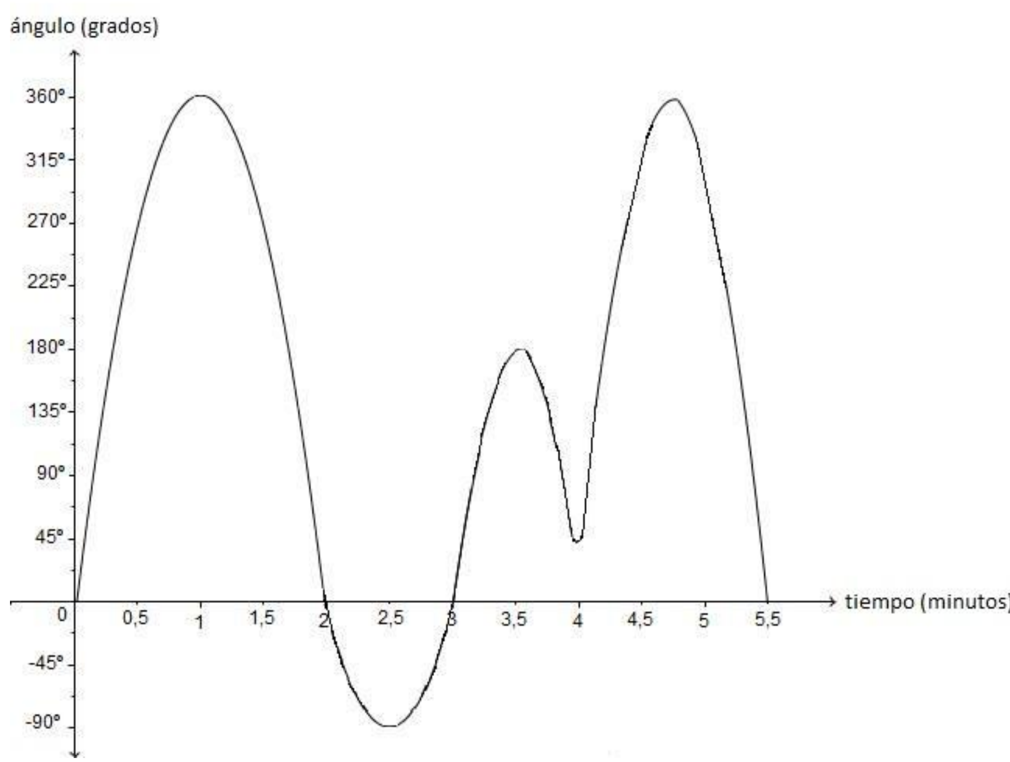


Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda y que la cantidad de barras que se requieran puede tomar un valor racional o irracional responde:

1. ¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

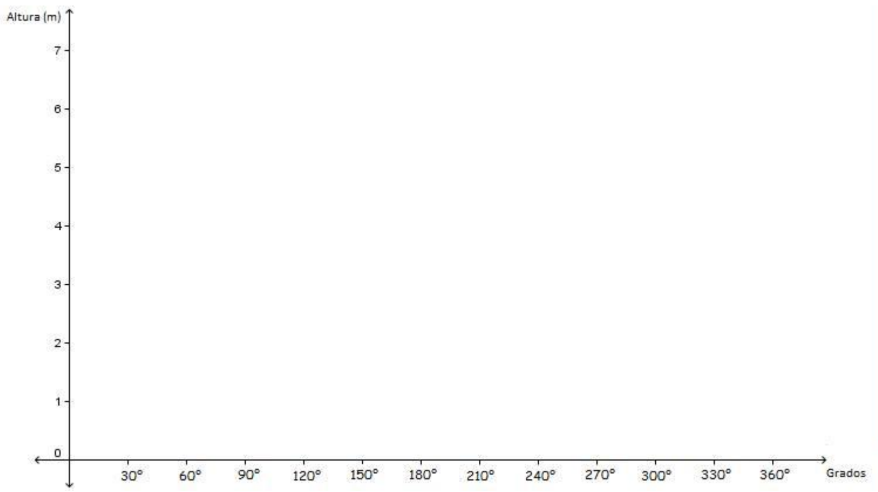
2. ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

3. El siguiente gráfico (tiempo (minutos) v/s ángulo (grados)) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna de un carro ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



4. Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

5. Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?



6. Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?
7. Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

Anexo D

Producciones de los binomios

A continuación se presentan las producciones realizadas por los binomios en la aplicación del Cuestionario a estudiantes egresados de enseñanza media.

Producciones Binomio 1

Universidad de Valparaíso CHILE

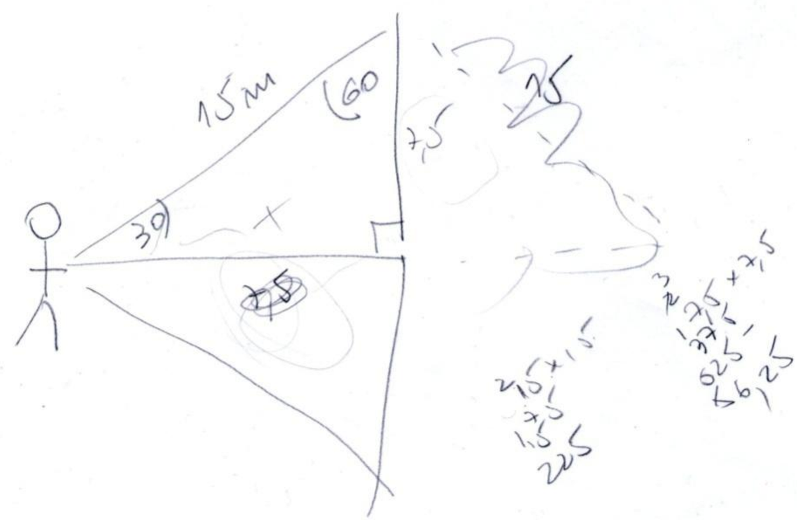
Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

1. Lee atentamente y contesta.

La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?



Universidad de Valparaíso CHILE

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

Lee atentamente y contesta:

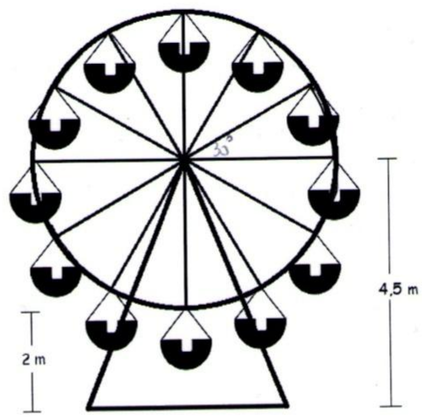
I. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

Preguntas:

1. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?
2. ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?
3. ¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza?. Justifica tu respuesta.
4. ¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?
6. ¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Universidad de Valparaíso
CHILE

II. Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



$r = 2,5$

$P = 5\pi$

$\frac{5\pi}{2,5}$

Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

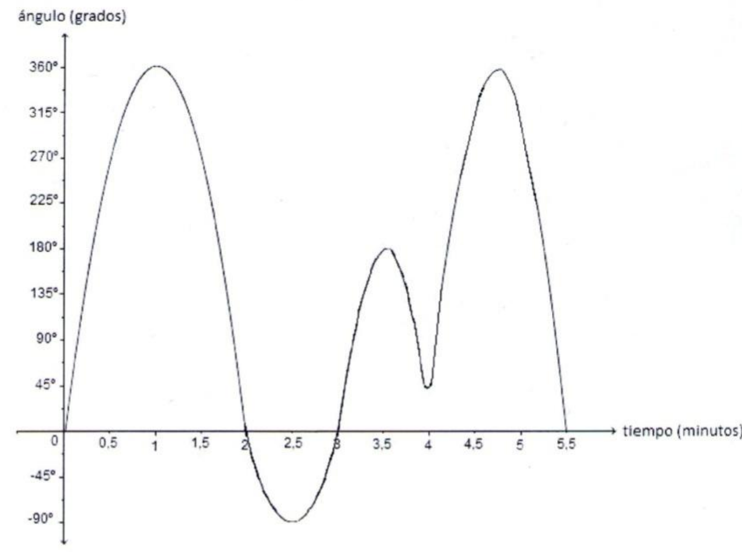
1.¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

2π

2. ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

$\frac{1}{6}\pi$ $\frac{5}{12}\pi \cdot \frac{2,5}{1}$

3. El siguiente gráfico (tiempo (minutos) v/s ángulo (grados)) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna de un carro ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?



4. Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

2π

5. Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?

Universidad de Valparaíso
CHILE

6. Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

7. Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

Universidad de Valparaíso CHILE

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

Lee atentamente y contesta:

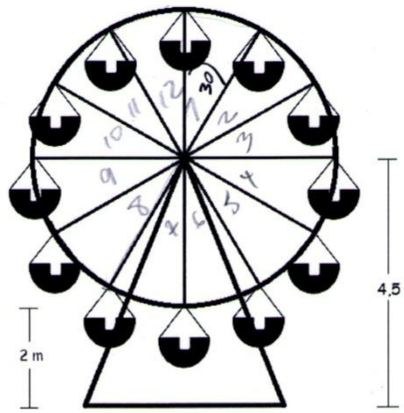
I. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

Preguntas:

1. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?
2. ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?: ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?
3. ¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza?. Justifica tu respuesta.
4. ¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?
6. ¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Universidad de Valparaíso CHILE

II. Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



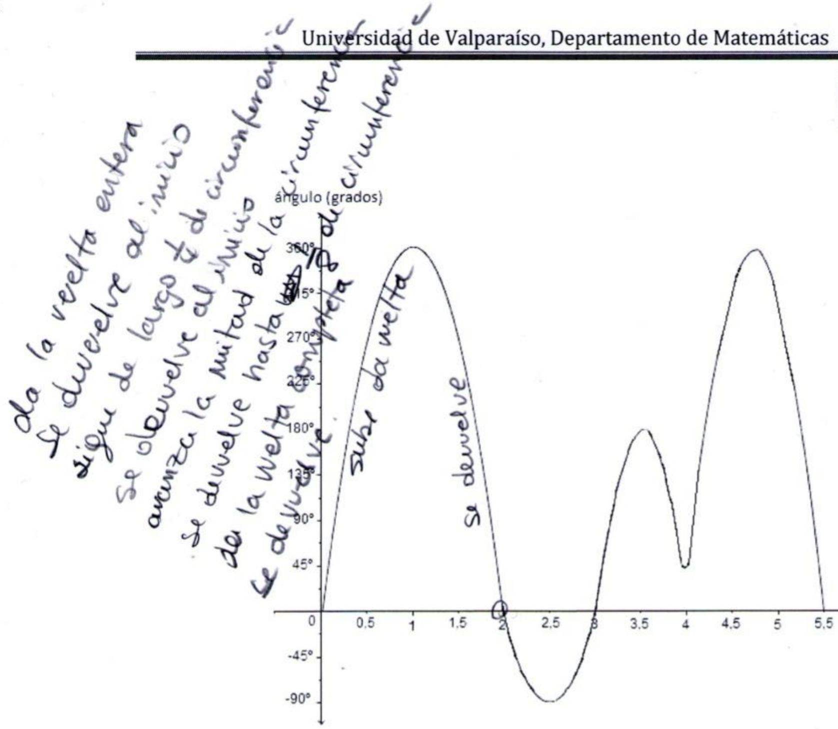
$360 : 12 = 30$

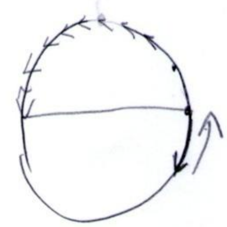
Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

1.¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda? $\rightarrow \frac{5\pi}{2,5} \downarrow 6,28$

2. ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro? $\rightarrow \frac{1}{6}\pi$

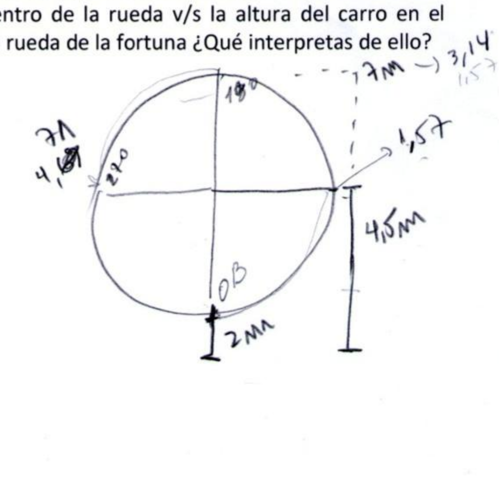
3. El siguiente gráfico (tiempo (minutos) v/s ángulo (grados)) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna de un carro ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?

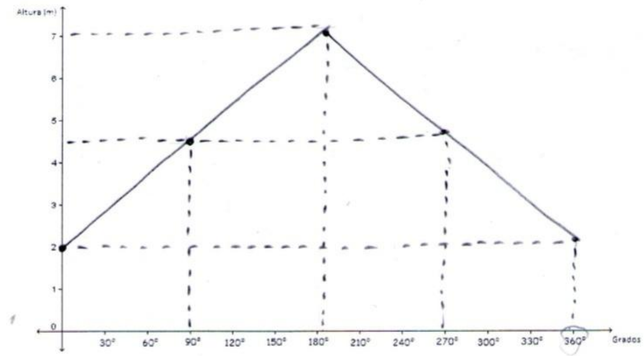




4. Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

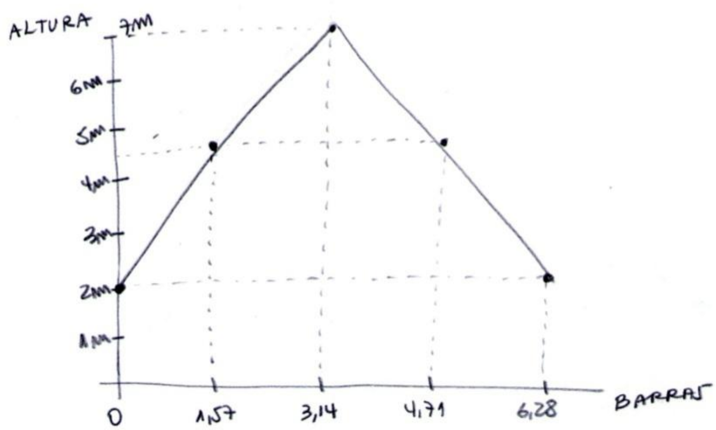
5. Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?





6. Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

7. Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto? → son iguales



~~0 1 2 3 4~~

seno $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{15}$$

$$\frac{15}{2} = x$$

7,5 metros de altura, seno de α.

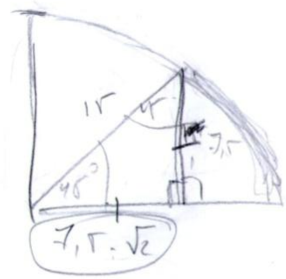
$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 30 & 45 & 60 & 90 \\ \text{sen} & \frac{\sqrt{0}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{4}}{2} \\ \text{cos} & \frac{\sqrt{4}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2} & \frac{\sqrt{0}}{2} \end{array}$$

$\frac{7,5}{2}\pi$ metros

$2 \cdot \pi$

30π

$360 \to \frac{30\pi}{12}$

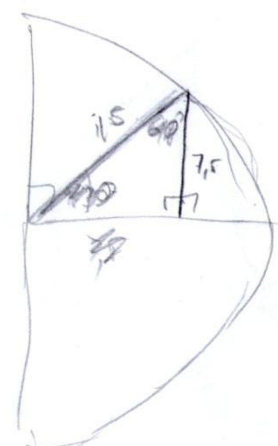


$\sqrt{2}x = 15$

$x = \frac{15}{\sqrt{2}}$

$\frac{15\sqrt{2}}{2}$

$\frac{30}{360}$

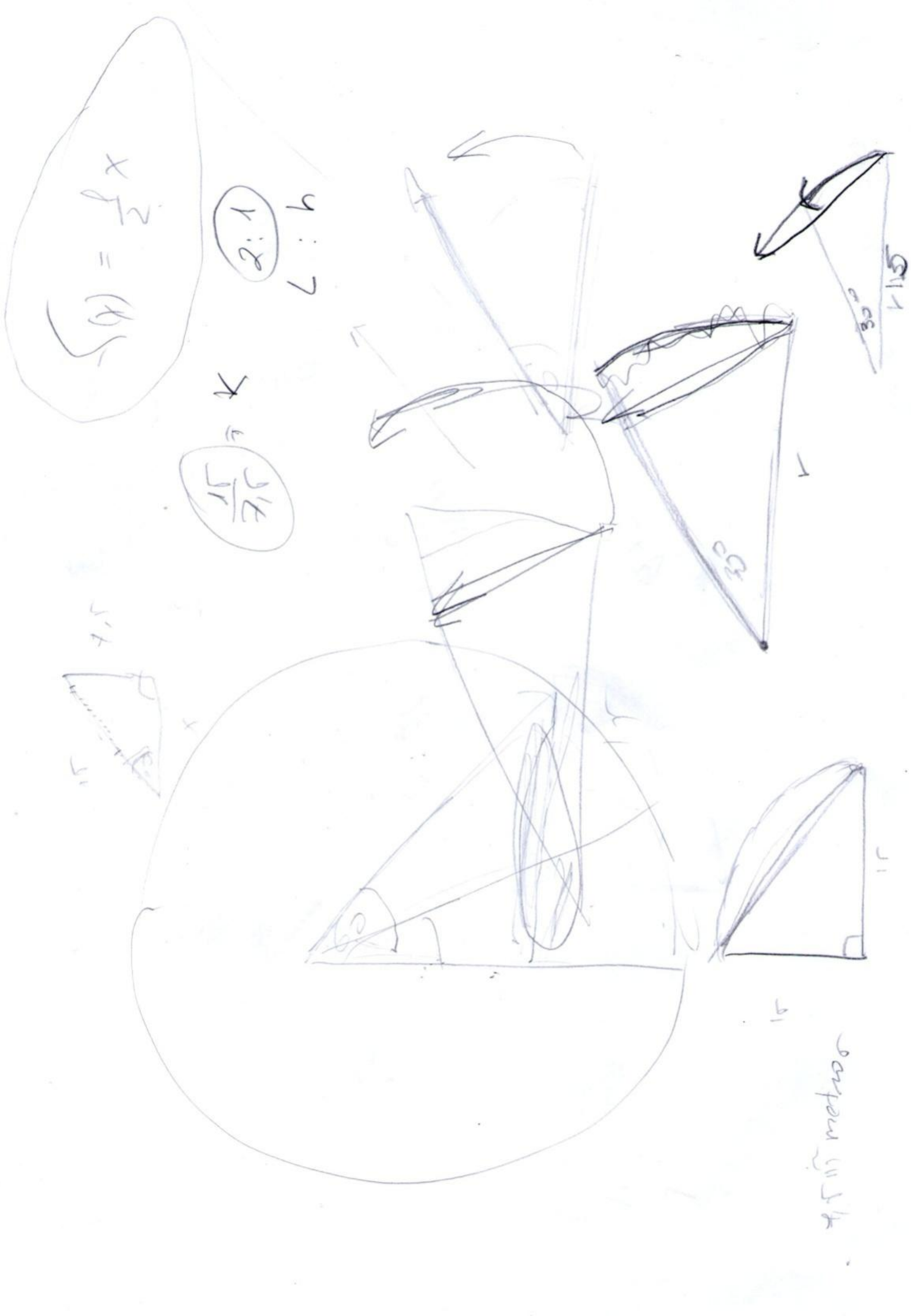


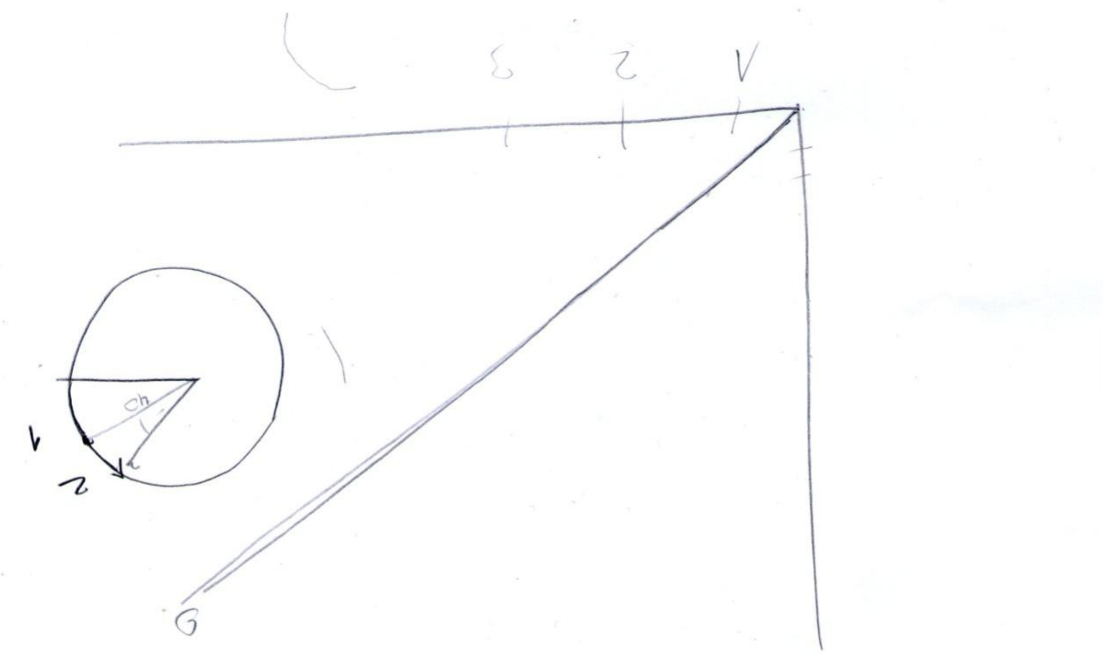
$\frac{1}{12}$

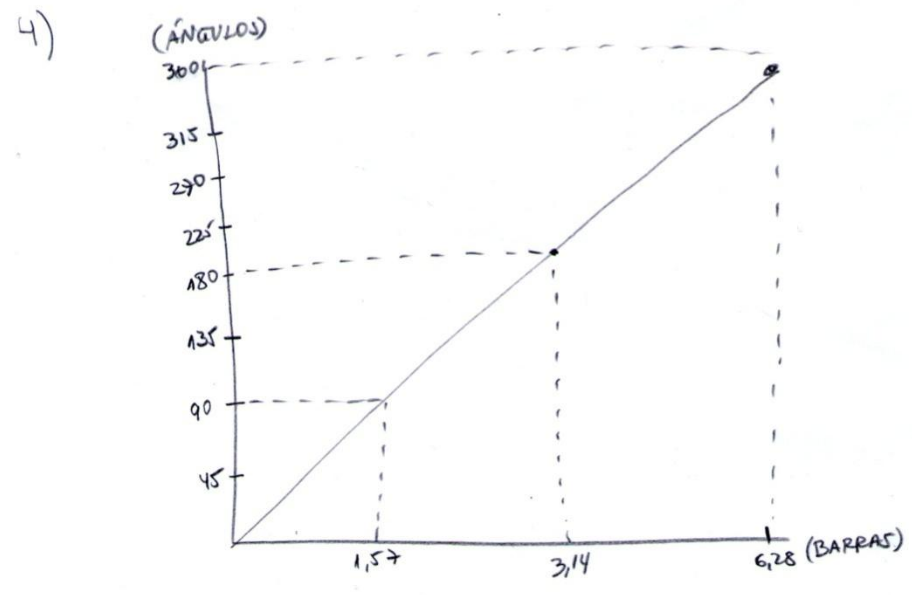
$\frac{5}{2}\pi$ metros

$\frac{30}{12}\pi$

$\frac{15}{6}\pi$






4)
(ÁNGULOS)
360
315
270
225
180
135
90
45
1,57
3,14
6,28 (BARRAS)

Producciones Binomio 2

Universidad de Valparaíso
CHILE

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

1. Lee atentamente y contesta.

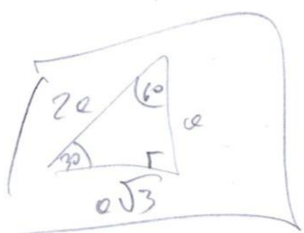
La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?

$\text{Se}\cdot 30 = \frac{x}{15}$

$x \to 7{,}5$

$\boxed{x = 7{,}5}$



Universidad de Valparaíso
CHILE

Cuestionario

El presente cuestionario constituye un instrumento de investigación para la realización del trabajo de título de Profesor de Matemáticas, de dos estudiantes de la Universidad de Valparaíso.
La respuesta a este cuestionario significa un gran aporte para el trabajo mencionado. Rogamos ser lo más específico posible en sus respuestas y responder con claridad. Puedes usar cualquier tipo de material.
Agradecemos de antemano su colaboración.

Lee atentamente y contesta:

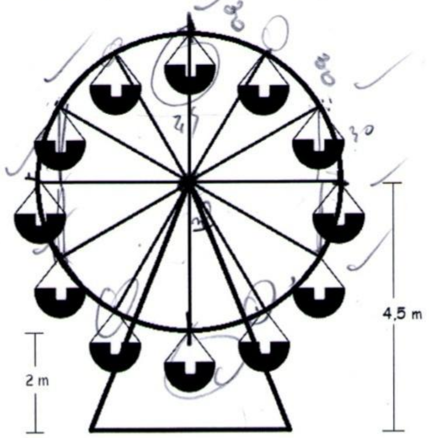
I. La longitud del hilo que sujeta un volantín es de 15 m y el ángulo de elevación es de 30°.

Preguntas:

1. ¿A qué altura está el volantín?, ¿Cómo lo calculaste?
2. ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?, ¿qué trayectoria recorre el volantín? descríbala, ¿cómo cambia la altura?, ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín?
3. ¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza?. Justifica tu respuesta.
4. ¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima? Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria?
6. ¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima?

Universidad de Valparaíso
CHILE

II. Se requiere construir una rueda de la fortuna como se muestra en la figura, para ello se cuenta con barras de acero de 2,5 metros de longitud, con las cuales se construirán los rayos que sujetan a cada carro y el contorno de toda la rueda.



r=2,5 [m]

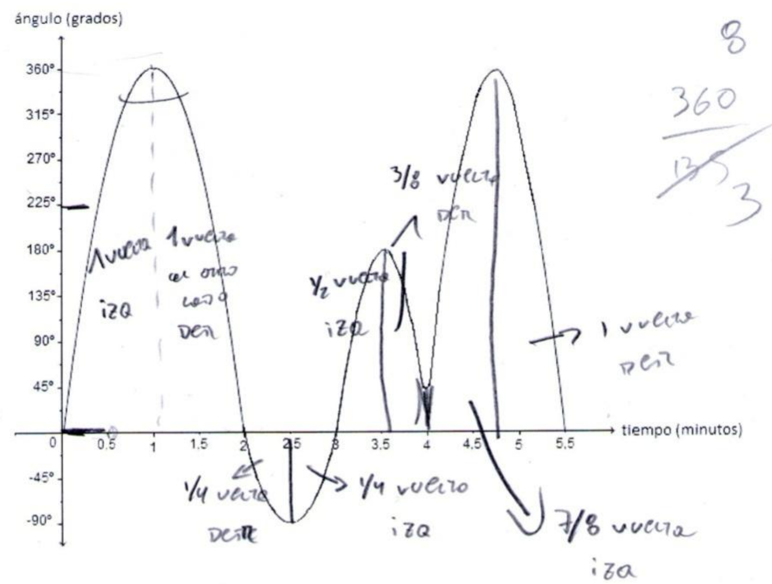
Considerando que se cuenta con un herrero que posee las herramientas precisas para doblar y cortar las barras con las que se cubrirá el contorno de la rueda responde:

1.¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

2. ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

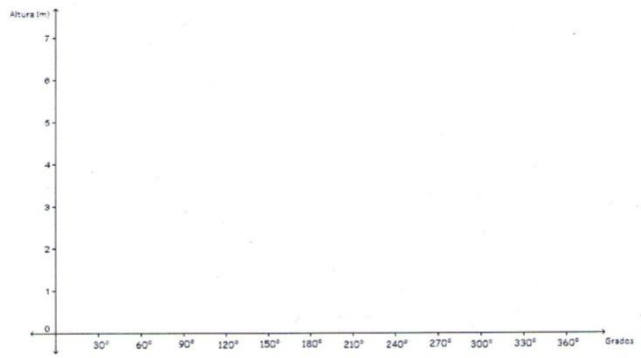
3. El siguiente gráfico (tiempo (minutos) v/s ángulo (grados)) describe un movimiento particular en la rueda de la fortuna de un carro ¿Puedes explicar con tus palabras el movimiento que está efectuando la rueda?

Universidad de Valparaíso CHILE



4. Si ahora nos fijamos en un carro y queremos construir un gráfico donde la variable independiente (eje x) es la cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro y la variable dependiente (eje y) es el ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda ¿Qué curva se describe? ¿Cómo lo interpretas?

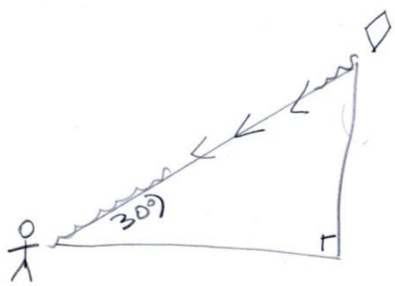
5. Fijémonos en un carro. Construye un gráfico ángulo de elevación del carro con respecto al centro de la rueda v/s la altura del carro en el movimiento regular de la rueda de la fortuna ¿Qué interpretas de ello?



6. Construye un gráfico de cantidad de barras de acero que se ocupan en la trayectoria que describe el carro v/s la altura que alcanza un carro en movimiento regular de la rueda de la fortuna. ¿Qué interpretas de ello?

7. Compara las curvas obtenidas en las preguntas 5 y 6. ¿Qué puedes decir al respecto?

I)

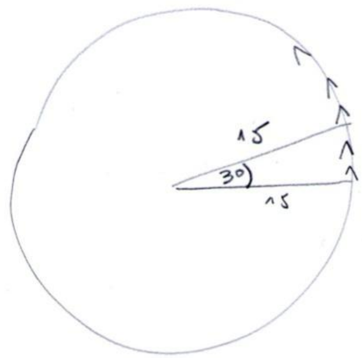


2a. La altura disminuye
2b.

2c. La altura será la mitad de la altura del hilo

2d. 2 es a 1 , L : h

3.

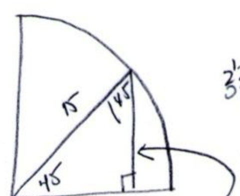


4. $2\pi r$

$\frac{30\pi}{4}$

$7{,}5\pi$ metros

5.



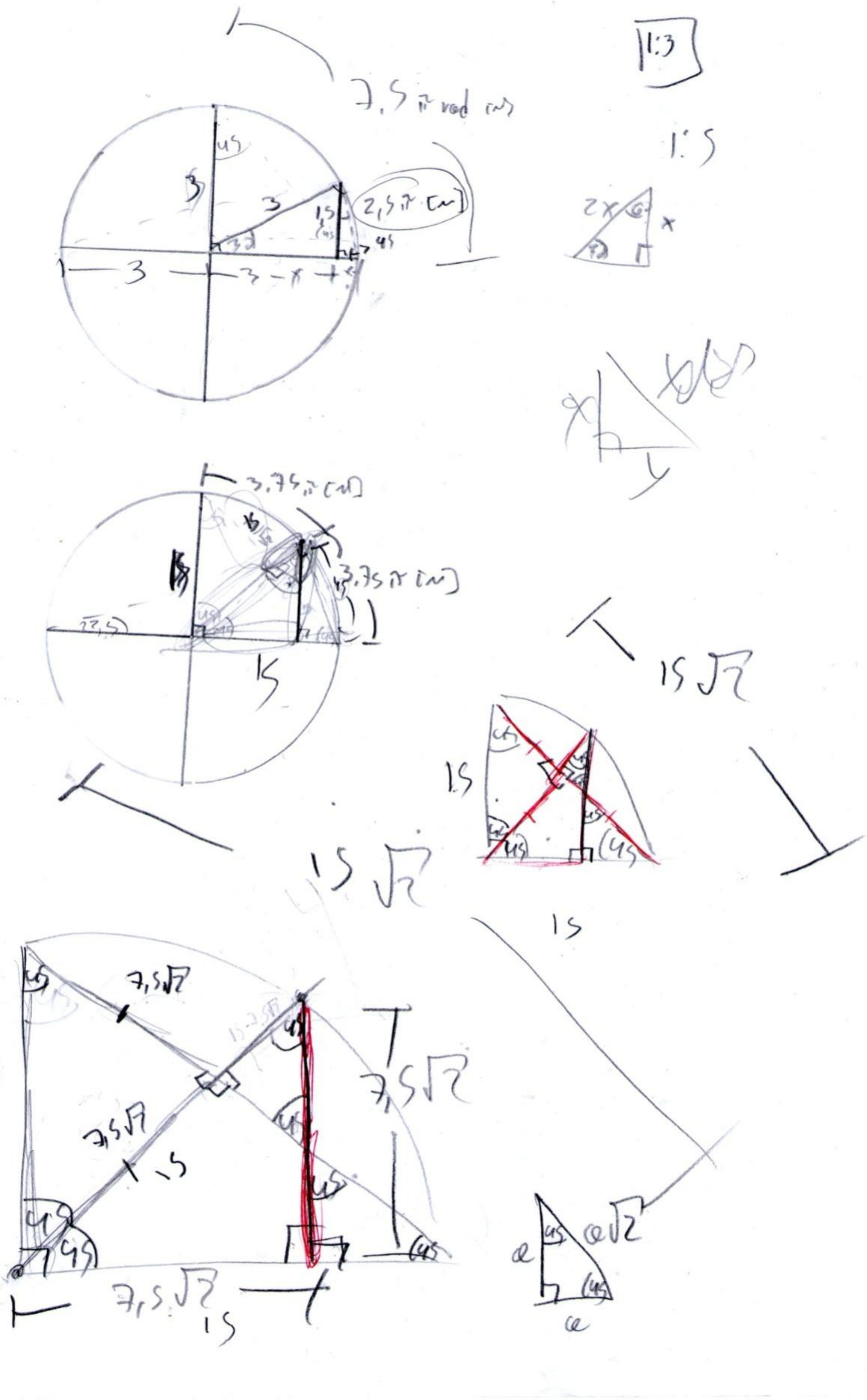
$225 : 2 = 112{,}5$
32
05
10

$\sqrt{112{,}5}$ metros

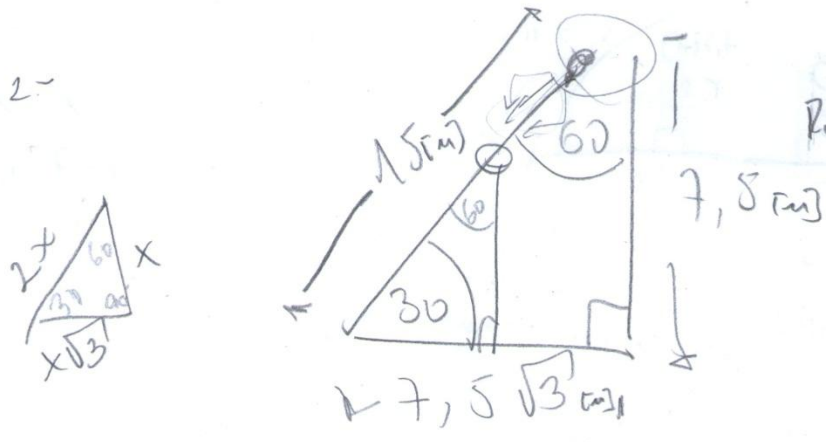
6. $\frac{7{,}5}{2}\pi$ metros (la mitad de lo recorrido en el ejercicio 4)

6 -

5:



2.-



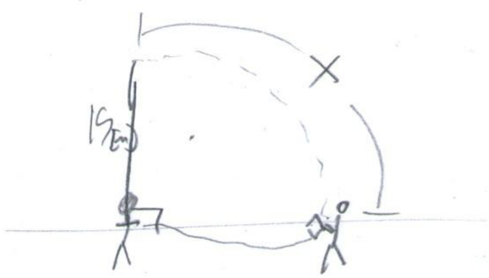
Razón → $\boxed{\frac{\text{altura}}{\text{largo}} = \frac{1}{2}}$

- Bajo en dirección del mismo ángulo de elevación
- Siempre en línea recta
- Proporcionalmente al largo del hilo del volantín

¡NO HAY VIENTO!

3: Una parte de circunferencia

4:



Perímetro = $2\pi r$

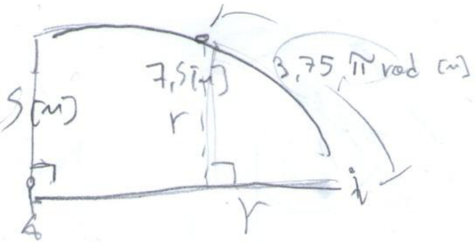
30π rad [m] = Perímetro.

- El volantín recorre 1/4 del perímetro

$\therefore$

$\frac{30}{4}\pi = \boxed{7,5\,\pi}$ rad [m]

5-



1/4 Perímetro: 3,75 π rad [m]

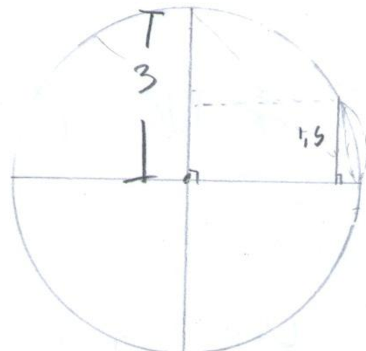
Perímetro: $15\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} r$

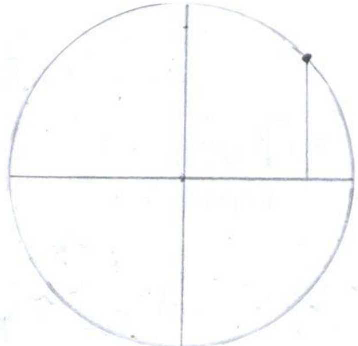
$\boxed{r = 7,5 [m]}$

6: Ha recorrido 3,75 π rad [m]

$\boxed{15:1}$
Dibujo

$\boxed{3:1}$
Perímetro





$\underline{\pi}$ r

(1) $r = 2,5$ m.

$\pi \cdot 2r$ $\qquad \dfrac{5\pi}{2,5\ m} = 2\pi$

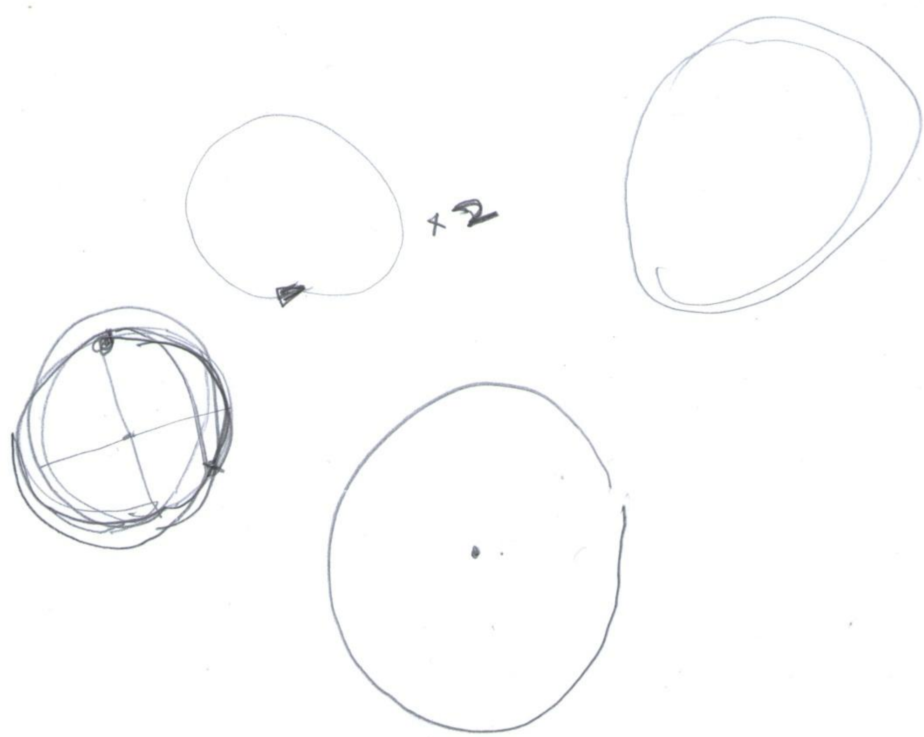
$\boxed{P = 5\pi}$

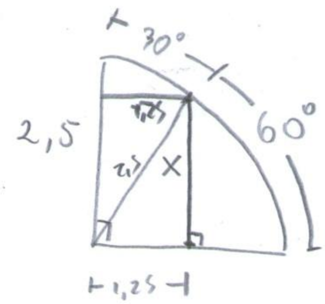
6,28 barras.

$6^{1/4}$

(2) $\dfrac{6,28}{12} = 0,52$ barras entre c/ carro.

(3).

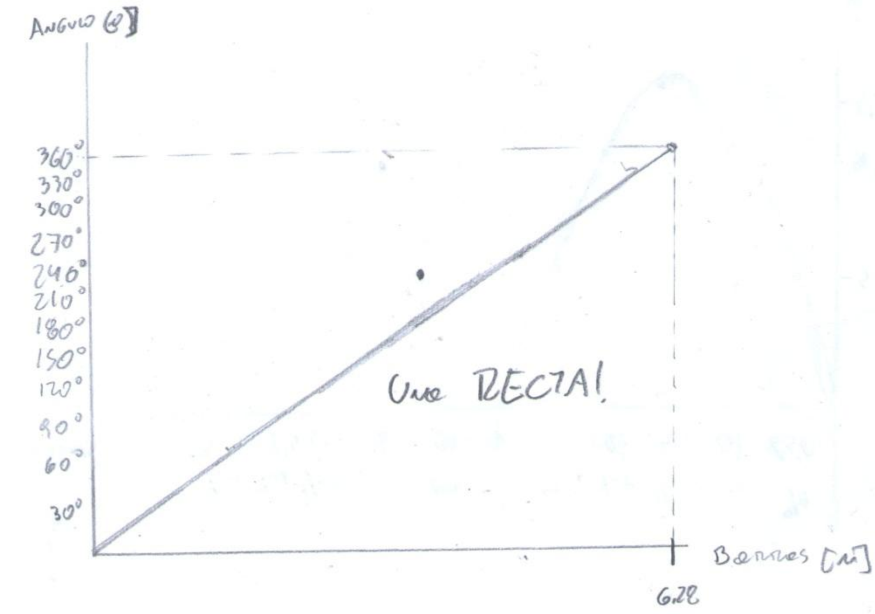




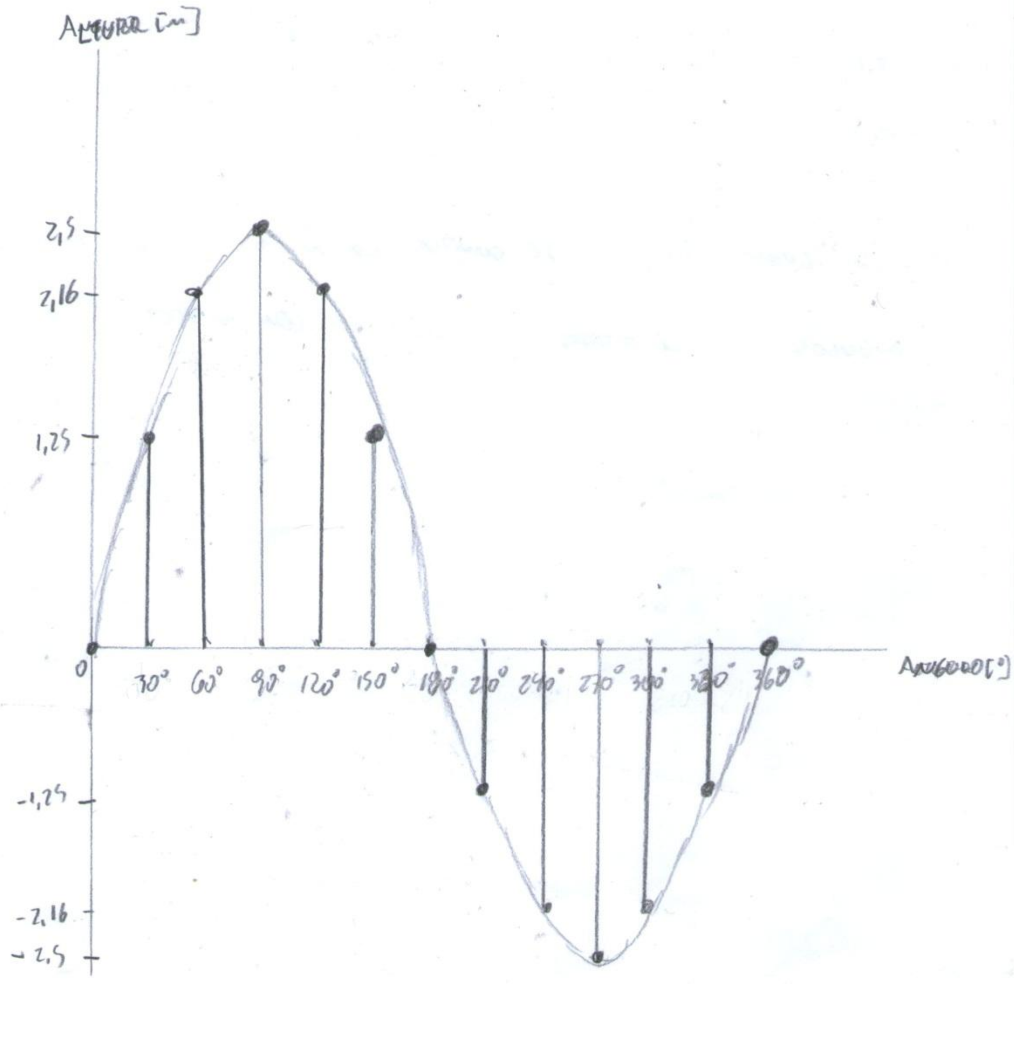
$x^2 = 2{,}5^2 - 1{,}25^2$

$x = 2{,}16$

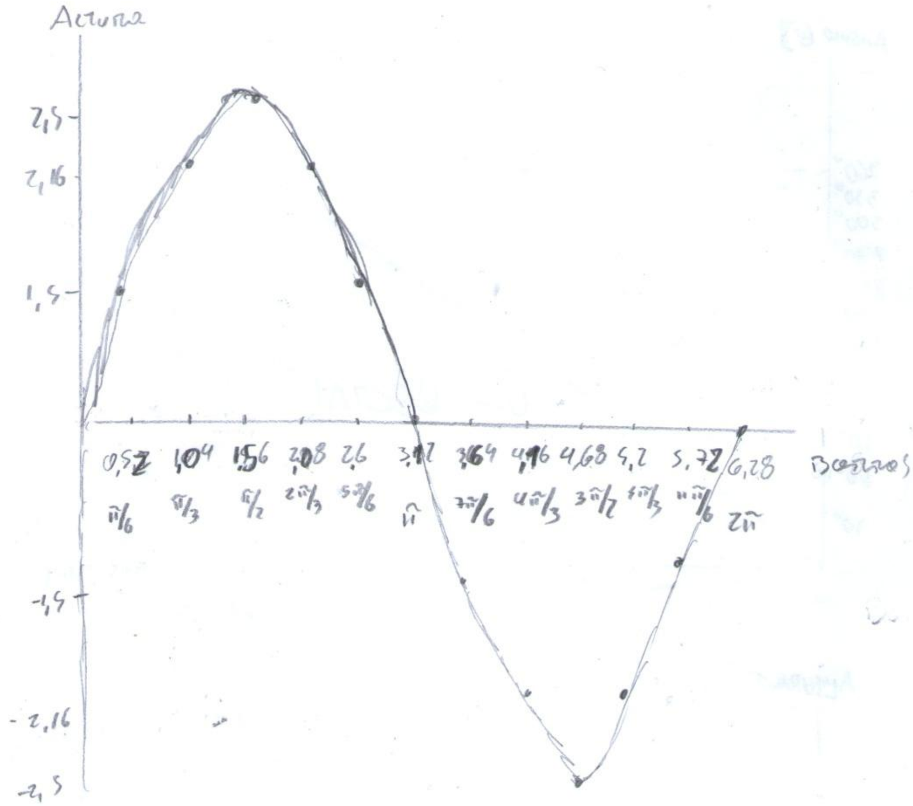
4.-


Angulo [θ]
360°
330°
300°
270°
240°
210°
180°
150°
120°
90°
60°
30°
Una RECTA!
Barras [m]
6,28

5.-


Altura [m]
2,5
2,16
1,25
0
-1,25
-2,16
-2,5
30°
60°
90°
120°
150°
180°
210°
240°
270°
300°
330°
360°

6.-

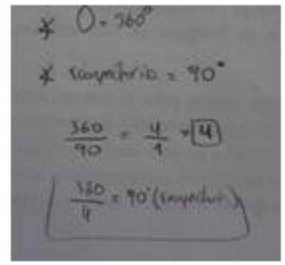
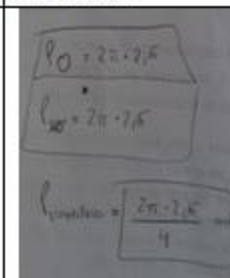
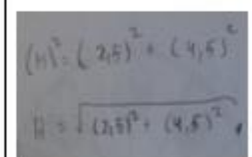


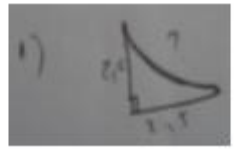
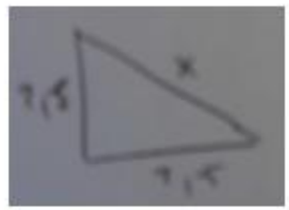
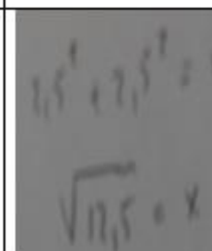
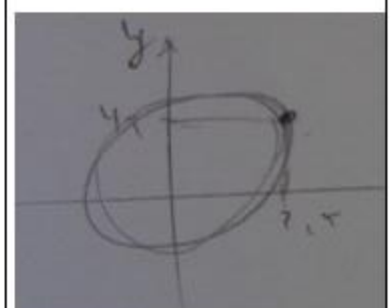
7: Son iguales, ya que se cumple la misma proporción entre angulos y cantidad de borros con respecto a la altura

Anexo E

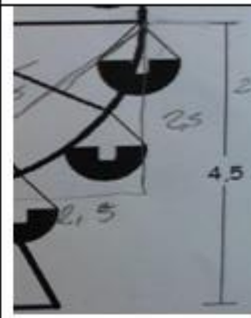
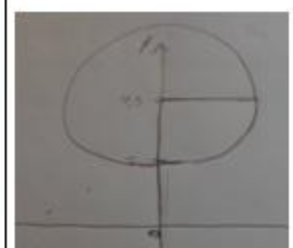
Protocolo

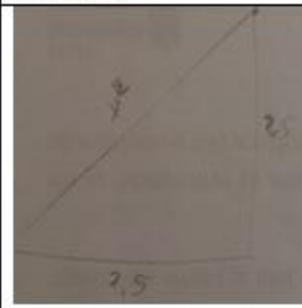
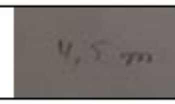
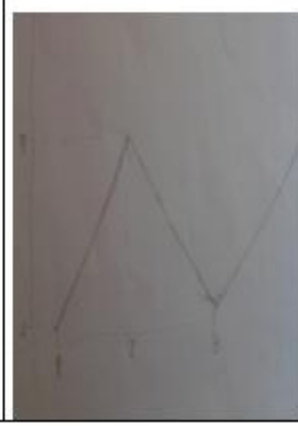
A continuación se presenta el protocolo utilizado para analizar los resultados del Cuestionario a universitarios aplicado a 10 estudiantes de una Universidad estatal de la región de Valparaíso.

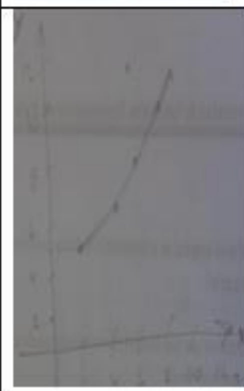
		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes	Pregun-ta	Génesis Semió-tica	Génesis Instru-mental	Génesis Discursiva	Génesis semiótica	Génesis Instru-mental	Génesis discursiva
Estudiante 1	A						
	B						
	C						

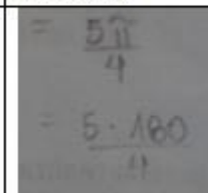
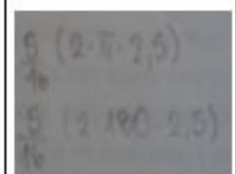
		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis Semiótica	Génesis instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 2	A						
	B						
	C						

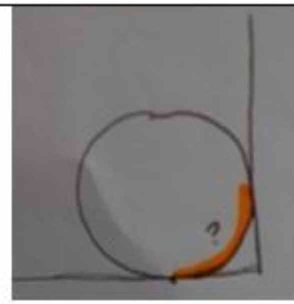
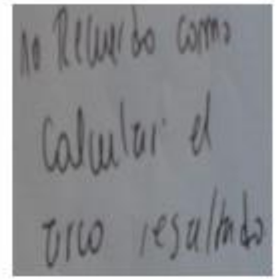
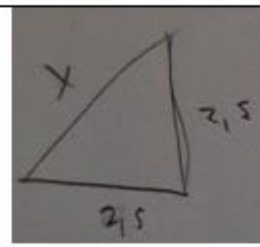
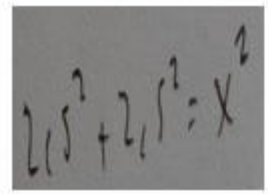
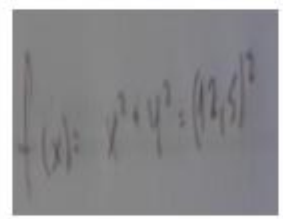
		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis Discursiva	Génesis semiótica	Génesis instrumental	Génesis Discursiva
Estudiante 3	A					$\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 2,5}{4} = 3,92$	
	B				R,, 4,5		
	C						teorema

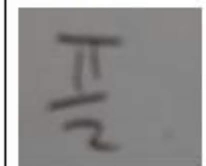
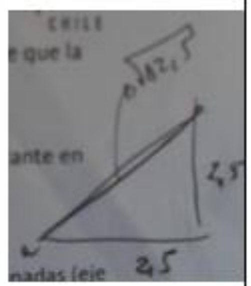
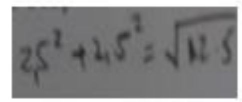
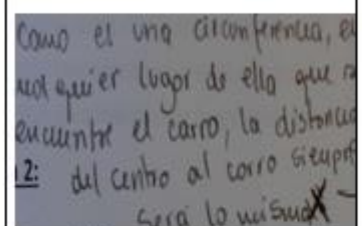
		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis Semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 4	A						
	B						
	C						

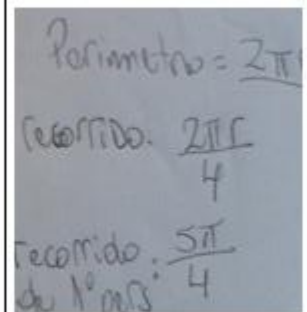
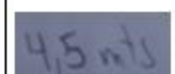
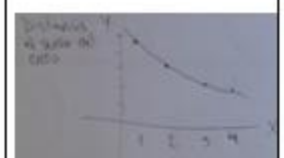
		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 5	A						
	B						
	C						

		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis Semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 6	A				$l = 3\pi\, m$		$l = 2\pi \cdot 2,5 m$
	B				4,5 m		
	C						

		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis Discursiva	Génesis Semiótica	Génesis instrumental	Génesis Discursiva
Estudiante 7	A						
	B						
	C						

		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 8	A						
	B						
	C						

		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 9	A						
	B						
	C						

		Desarrolla correctamente			Desarrolla incorrectamente		
Estudiantes		Génesis semiótica	Génesis Instrumental	Génesis discursiva	Génesis semiótica	Génesis instrumental	Génesis discursiva
Estudiante 10	A						
	B						
	C						

Anexo F

Dialogo binomios

A continuación se presenta el diálogo de los binomios que participaron en la aplicación del Cuestionario a estudiantes egresados de enseñanza media donde se presentan las tareas diseñadas para constituir una Propuesta de enseñanza y aprendizaje.

Diálogo Binomio 1

Tarea 1

Video 1 (00:00 – 05:00)

[e_{11}]: Ya, aquí está el niño, acá el hilo. (Dibuja)

[e_{12}]: ¿Con el triángulo?

[e_{11}]: Sí, con un ángulo de treinta, es rectángulo y este vale sesenta. Entonces seno de treinta es igual a un medio, un medio es equis partido quince, ¿cachaste?

[e_{12}]: ¡Ay! Shhh que no me puedo concentrar.

[Investigador]: Pero háganlo juntos.

[e_{12}]: ¿Cuál era la fórmula?

[e_{11}]: (Dibuja tabla).

[e_{12}]: No, yo no lo hago con seno y coseno.

[e_{11}]: ¿No?

[e_{12}]: No.

[e_{11}]: ¿Qué ocupas entonces?

[e_{12}]: Déjame ver.

[e_{11}]: ¡Ah ya! Con el de acá.

[e_{12}]: Si con Pitágoras.

[e_{11}]: Si, pero ¿Por qué tienes ese acá?

[e_{12}]: Porque… Ah no, nada que ver, era para el lado.

(Realizan cálculos)

[Investigador]: ¿Llegaron a lo mismo?

[e_{11}]: Si.

[Investigador]: ¿Nos podrían explicar lo que hicieron?

[e_{12}]: Es que cuándo hay un ángulo de noventa y otro de treinta, los ocupo como si fuera la mitad de un equilátero. Entonces la altura está a la mitad de la que sería la hipotenusa en este caso.

[Investigador]: ¿Y tú?

[e_{11}]: Como la hipotenusa del triángulo es quince y el seno de treinta es un medio, entonces este lado tiene que ser la mitad de la hipotenusa, eso, nada más.

Tarea 2

*Video 2 (*01:00 – 04:44)

[e_{12}]: En la dos, ya… Si se recoge el hilo…

[e_{11}]: Vas a tener un vector.

[e_{12}]: Ah si, pero lo de la trayectoria se refería a que va así.

[e_{11}]: Si.

[e_{12}]: El hilo se va manteniendo ¿Y la razón?

[e_{11}]: Se tiene una función con respecto al hilo y la altura sería un medio de equis, ¿cierto?

[e_{12}]: Si, porque se mantiene así.

[e_{11}]: Dice ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación? Va cambiando la altura ¿Cuánto? La mitad de la nueva distancia del hilo.

[e_{12}]: Si.

[e_{11}]: Porque va a bajar.

[e_{12}]: Si.

[e_{11}]: Pero siempre que sea el mismo ángulo de elevación.

[e_{12}]: Si.

[e_{11}]: Y ¿cuál es la razón entre las distintas alturas y el largo del volantín? Esa, y se va a mantener.

[Investigador]: Ya la primera pregunta ¿Qué dice?

[e_{12}]: ¿Qué sucede si se recoge hilo manteniendo el ángulo de elevación?

[Investigador]: ya, ¿Qué sucede?

[e_{11}]: Va a disminuir la altura.

[Investigador]: Ya, ¿Qué trayectoria sigue el volantín?

[e_{11}]: Hace esto, se supone que se está manteniendo el ángulo de elevación, porque si no fuera así y hay viento, podría bajar de cualquier forma, pero como es una situación ideal.

[e_{12}]: Ya, ¿Cómo cambia la altura?, es la mitad…

[e_{12}]: Va a ser la mitad de largo del hilo, y lo de la razón será largo de hilo y altura.

[Investigador]: Y ¿Pueden dar un valor para eso?, ahí dice ¿Cuál es la razón entre las distintas alturas? En números, ¿Podrías dar un resultado?

[e_{11}]: ¿Pero cuánto lo bajamos?

[Investigador]: Ya, pero por ejemplo con los datos que se tienen ahí,

[e_{12}]: Es que ahí, se puede bajar infinitas veces, entonces van a ser diferentes alturas, pero siempre va a ser dos es a uno.

Tarea 3

Video 2 (04:52 – 10:39)

[e_{11}]: La tres dice ¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado?

[e_{12}]: Esa no la entiendo.

[Investigador]: Leámosla entera, dice ¿Qué trayectoria sigue el volantín usando el máximo de hilo dado, desde que se lanza? Por ejemplo yo le tiro el volantín a alguien, usando el máximo de hilo ¿Cuál sería su trayectoria? Imagínate la situación.

[e_{11}]: ¿Cuál sería el máximo de hilo?

[Investigador]: Los quince metros.

[e_{11}]: La trayectoria, hacia allá con treinta grados, si se piensa desde que se lanza…

[e_{12}]: A no, va a ser así.

[e_{11}]: ¿Desde que empieza a subir los treinta grados dices tú?

[e_{12}]: Si, porque no parte al tiro arriba, si no es como un avión.

[e_{11}]: Pero acá se supone que si ¿o no?, se supone que acá ya está en los treinta grados.

[Investigador]: No, se supone que te lo lanzaron.

[e_{11}]: Entonces tiene treinta grados y después…

[e_{12}]: No, no puede salir así, tiene que ser así (Señala con la mano)

[e_{11}]: Si tiene el máximo, empieza desde abajo y lo tiré. Queda a la misma distancia.

[e_{12}]: No, sube así. Ah no, nada que ver, sería…

[e_{11}]: Si, acá estas tú, acá están los quince metros, acá estoy yo y lanzo el volantín para arriba y hace así, hasta que llega a los treinta, como una circunferencia, ahí, eso hace.

[e_{12}]: No, así. Porque aquí no tiene los quince.

[e_{11}]: Mmm, sí. Hace eso, esa es la trayectoria.

[e_{12}]: Si.

[e_{11}]: Pero espera, No! Porque los quince metros serían un radio.

[e_{12}]: Ya…

[e_{11}]: Entonces sería… no puede ser línea recta. Va a ser así, quince de radio. ¿Ya?

[e_{12}]: Ya.

[e_{11}]: Entonces sube hasta que llega a los treinta grados y esa es la trayectoria. ¿Sí?

[e_{12}]: Si.

[Investigador]: entonces ¿Cuál sería su trayectoria?

[e_{11}]: Así.

[Investigador]: Pero ¿Qué sucede si aumentan los grados?

[e_{11}]: Va a ir para acá, ahí estaría. Los quince están acá y después los quince estrían arriba, por eso la sombra es más chica.

[e_{12}]: Claro, pero después esto ya no sería la mitad de esto.

[e_{11}]: Es que ésta es la mitad, no eso.

[e_{12}]:]: ¿Cómo?

[e_{11}]: Porque ese es el coseno de sesenta.

[e_{12}]: No, pero al principio esta era la mitad de esta, pero esta ya no sería la mitad de esta.

[e_{11}]: Si. Siempre va a ser la mitad, cuando empieza a subir, empieza a ser la mitad siempre, siempre es la mitad. Cuando empieza a subir también.

[e_{12}]: Mmm…

[e_{11}]: Ah, ¿Tú dices cuando empieza a cambiar el ángulo?

[e_{12}]: Si.

[e_{11}]: Ah sí, ya no va a ser la mitad, porque va a ser otro ángulo acá.

[e_{11}]: Entonces el volantín seguiría esa trayectoria ¿Cierto?

[e_{12}]: Si.

Tarea 4

*Video 2 (*10:40 – 11:40)

[e_{11}]: ¿Cuántos metros recorre el volantín desde que se lanza hasta que alcanza su altura máxima?, Los treinta grados ¿Cierto?

[e_{12}]: Hay que sacar…

[Investigador]: ¿Cuál sería su altura máxima?

[e_{11}]: Ah ya. Arriba.

[e_{12}]: Es un cuarto del perímetro.

[e_{11}]: Si, es un cuarto del perímetro. De aquí hasta acá, cuando los quince están arriba.

[e_{12}]: Si, entonces treinta π, partido en cuatro.

[e_{11}]: Siete coma cinco π metros. Eso es lo que recorrió.

[e_{12}]: Si.

Tarea 5

Video 2 (11:41 – 13:30)

[e_{12}]: ¿Cuál es su altura cuando recorre la mitad de su trayectoria?

[e_{12}]: Cuarenta y cinco, entonces esto es quince. Éste si se puede sacar con Pitágoras, porque ese mide lo mismo que ese.

[e_{11}]: Si, espera. Este mide lo mismo que ese, entonces…

[e_{12}]: Es la raíz de eso, porque ese es la mitad del cuadrado.

[Investigador]: ¿Les da lo mismo?

[e_{11}]: Si.

[e_{12}]: Si.

Tarea 6

Video 2 (14:55 – 22:04)

[Investigador]: ¿Cuál es la pregunta?

[e_{11}]: ¿Cuánto ha recorrido cuando alcanza la mitad de la altura máxima? Eso.

[e_{11}]: ¿Cuál es la mitad de la altura máxima?

[e_{12}]: ¿La mitad de esto? ¿Los 15?

[e_{11}]: Siete coma cinco acá entonces.

[e_{12}]: Ahí tiene que ser quince.

[e_{11}]: ¿Segura?

[e_{12}]: Si. O sea si lo lanzas con los quince metros. Porque para que alcance su altura máxima tiene que ser lanzado con los quince.

[e_{11}]: A verdad.

[e_{11}]: ¿Cuánto ha recorrido? Esto. ¿Cuándo alcanza la mitad de la altura máxima?, entonces ¿Cuánto recorre?, ¿Cuánto es este ángulo? Y este ángulo tiene que ser, si esto es quince, cuarenta y cinco.

[e_{12}]: Si ese ángulo es cuarenta y cinco y eso siete coma cinco…

[e_{11}]: Pero éste valía quince.

[e_{12}]: Ah sí.

[e_{11}]: Pero mira, si éste vale quince, éste siete coma cinco y es la mitad, entonces el ángulo tiene que ser treinta y éste sesenta. Entonces ¿Cuánto recorrió con treinta grados?

[e_{12}]: Si.

[e_{11}]: Entonces no es la mitad de eso.

[e_{12}]: No.

[e_{11}]: Entonces treinta π es el total y en treinta grados.

[e_{12}]: Trescientos sesenta son treinta π, si son treinta π. Dividido en doce.

[e_{11}]: Ya listo. ¿Lo explico?

[Investigador]: Si.

[e_{11}]: Bueno esta es la mitad que es siete coma cinco entonces como este cateto es la mitad de la hipotenusa se asume que el ángulo de elevación es de treinta grados. Entonces con treinta grados sabemos qué parte de la circunferencia completa es este cachito.

[Investigador]: Y ¿Cómo lo calculaste?, ¿Usaste alguna fórmula?

[e_{12}]: Dividido en los treinta, porque el perímetro…

[e_{11}]: El ángulo dividido los trescientos sesenta. Eso.

Tarea 7

Video 3 (00:09 – 03:01)

[e_{12}]: Este es el radio ¿Cierto?

[Investigador]: Si.

[e_{12}]: Hay que calcular el perímetro, porque dice ¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

[e_{11}]: 5π el perímetro.

[e_{12}]: Si

[e_{11}]: Ya, y ¿Qué más?

[e_{12}]: ¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda?

[e_{11}]: El contorno es el perímetro ¿Cuántas barras? y las barras son de 2,5 ¿Cuántas necesito? 5π dividido en 2,5. Eso necesito ¿Cachaste?

[e_{12}]: No

[e_{11}]: Que el perímetro es 5π.

[e_{12}]: ya…

[e_{11}]: y cada barra mide 2,5 metros

[e_{12}]: Ya…

[e_{11}]: Entonces, ¿Cuántas barras necesito? 5π partido en 2,5.

[e_{12}]: Mmm, claro, si, pero ¿Cuántas barras se ocupan aproximadamente entre un carro y otro?

[e_{11}]: ¿Cuántas barras necesito aproximadamente para cubrir el contorno de la rueda? Esa es la primera.

[e_{12}]: Ya, entonces 5π partido en 2,5.

[Investigador]: ¿Cuánto les da?

[e_{11}]: 6,28… 2π

[e_{12}]: Oh! En todo caso era super...

Tarea 8

Video 3 (03:05 – 05:50)

[e_{12}]: ya y entre un carro y otro, son 12…

[e_{11}]: ¿Son 12?

[e_{12}]: Si, osea esto dividido en 12.

[e_{11}]: Tenemos que sacar eso, y después dividirlo en 2,5… entonces…sería un sexto de π.

[e_{12}]: No espera, no entendí.

[e_{11}]: Ya emm, el perímetro dividido 12.

[e_{12}]: Si

[e_{11}]: Dividido en 2,5.

[e_{12}]: No..espérate. El perímetro dividido en los 12 para sacar eso.

[e_{11}]: Si, y después ¿Cuántas barras? Y una barra 2,5.

[e_{12}]: Ah si!

[e_{11}]: Entonces eso... ¿Cierto?

[e_{12}]: No, claro

[e_{11}]: Entonces el 12 por 2,5, es la división de fracción.

[Investigador]: Si, pero no entiendo cuál se divide por cuál, que con un 5π y doce y entonces no entiendo cuál se divide primero. Ya lo primero el 5π partido en 12.

[e_{11}]: Ya ahí están los 5π entonces qué haces divides los 2,5 partido en doce, se da vuelta y queda 2,5 5π partido en 12. Y 12 con 2,5 son 30 se simplifica y entonces 5π dividido en 30.

[Investigador]: Si

Tarea 9

Video 3 (07:29 – 12:00)

[e_{12}]: Es que primero va subiendo, después esta ¿Devolviéndose? Si, se está devolviendo

[e_{11}]: Si.

[e_{12}]: Pero después ¿Qué pasa?, porque para aumentar tendría que aumentan a 380… porque sigue girando.

[e_{11}]: Se supone.

[e_{12}]: Porque esta… son… pero después que pasa, se sigue devolviendo, no, sigue bajando, después se va a devolver

[e_{11}]: Que cosa, ¿Acá?

[e_{12}]: Si, porque sigue de largo

[e_{11}]: Pero estamos acá, hace esto.

[e_{12}]: Ah, mira, sube, baja

[e_{11}]: Acá se devuelve a 180°, después sigue de largo…

[e_{12}]: Ya…

[e_{11}]: Y después hace esto y llega acá.

[e_{12}]: Ya haber espera.

[e_{11}]: Estamos sentados, empieza a dar vuelta estamos sentados del otro lado, después quedamos de cabeza…

[e_{12}]: Ya, este es el eje,

[e_{11}]: Ya.

[e_{12}]: Va así

[e_{11}]: Tienes 180, 360.

[e_{12}]: Después se devuelve.

[e_{11}]: Si, 180, 360, 0. Baja 90despues 0

[e_{12}]: Después sigue a los180, después sigue a los 45, y después va para acá y después 0. ¿Ya cómo lo explicamos?

[e_{11}]: ¿Ya cómo era?

[Investigador]: Pueden explicarlo asi.

[e_{12}]: Ya, primero da la vuelta entera, lo voy a anotar.

[e_{11}]: Ya, se devuelve al inicio.

[e_{12}]: Ya después se devuelve sigue de largo un cuarto de circunferencia.

[e_{11}]: Un cuarto, o sea 270 grados.

[e_{12}]: Después avanza a la mitad de la circunferencia y se devuelve hasta ¿?

[e_{11}]: Los 45°… Es como un barco pirata esto.

Tarea 10

Video 3 (13:29 – 21:53)

[e_{11}]: Ya, ¿Esto se refiere a una vuelta completa?

[Investigador]: El ángulo cada vez

[e_{12}]:Si, ¿Pero hay que ocupar esa trayectoria?

[Investigador]: No, la normal. Solo era un caso particular.

[e_{12}]: Es así, porque cada vez va dando más vueltas, porque aquí tengo una barra, entonces mientras más va subiendo voy ocupando más barras.

<u>Diálogo binomio 2</u>

Tarea 1

Video 5 (02:02 – 03:30)

(Los estudiantes resuelven en silencio la tarea)

[e_{21}]: Ya, aquí tenemos la primera.

[Investigador]: ¿Puedes explicar cómo lo hicieron?

[e_{22}]: Ocupamos el triángulo rectángulo de 30°-60°-90° e hicimos el dibujo del volantín y vimos que el opuesto a 90° era 15; era el largo de la cuerda, así que calculamos que la altura era el opuesto a 30°, o sea la mitad, y eso.

[Investigador]: Sí, está bien. ¿A alguien se le ocurrió hacerlo de otra manera?

[e_{21}]: Es que pensamos que esto era lo normal, que el seno del ángulo es igual ha… dependiendo de lo que sea, el lado opuesto dividido por la hipotenusa; y después se nos ocurrió algo más fácil que era la técnica PSU.

Tarea 2

03:30 – 11:10

[Investigador]: Ah, un detalle, traten de resolverlo ordenado para no tener las hojas dispersas.

[e_{21}]: ¿La número 1 la resolvemos de nuevo?

[Investigador]: No, porque ya la hicieron, así que pueden empezar de la número 2.

[e_{21}]: ¿Acá se refiere al largo del hilo, cierto? Donde dice “largo del volantín”.

[Investigador]: Sí. Ahora yo tengo una pregunta, ¿por qué colocaste eso?

[e_{22}]: Ah, por el triángulo 30°-60°-90° y vale “x”…

[Investigador]: Ya, ¿esa es la propiedad que tú sabes?

[e_{22}]: Sí.

[Investigador]: Ya, bien.

[e_{21}]: Acá preguntan cuál es la razón entre las distintas alturas y el volantín, claro, si mantiene el mismo ángulo va a ser la altura 1 y el largo del hilo, porque dice que lo vas recogiendo pero se mantiene el mismo, o sea de estar acá pudo haber pasado acá, así que sigue siendo una razón 1:2.

[e_{22}]: La misma.

[e_{21}]: ¿Cómo cambia la altura?

[e_{22}]: ¿Cuál era la pregunta?

[e_{21}]: ¿Qué sucede si se recoge el hilo manteniendo el ángulo de elevación?

[e_{21}] Y [e_22]: (Utilizan un trozo de lana para simular el hilo del volantín).

[e_{21}]: Baja de manera recta.

[e_{22}]: Es proporcional.

[e_{21}]: Sí. Es que no es recto, porque si fuera recto bajaría así (hace el dibujo en la hoja). Entonces, ¿cómo se dice?

[e_{22}]: Baja en dirección al ángulo.

[e_{21}]: Siempre va a seguir formando el mismo triángulo, y coloco ¿"cambia la altura proporcionalmente"?

[e_{22}]: Sí, a la distancia.

[e_{21}]: Pongo, cambia la altura proporcionalmente al largo de la cuerda interna del volantín.

Tarea 3

11:24 – 13:08

[e_{21}]: Eh, igual.

[e_{22}]: Sí, la misma.

[Investigador]: Ya, acá se refiere desde que te lo lanzan cuando tú tienes el volantín, es decir, qué trayectoria está siguiendo el volantín.

[e_{21}]: Ah, ¿eso? Es una semicircunferencia.

[Investigador]: ¿Por qué? ¿Qué habían entendido ustedes?

[e_{21}]: Que elevo el volantín y le doy más hilo para que siga subiendo.

[Investigador]: Ah ya, no en este caso se refiere a otra situación.

[e_{21}]: Ah, y el por qué de esa pregunta era porque el niño que está tirando el volantín siempre va a ser un punto fijo, entonces si se va elevando, como el largo del hilo va a ser igual, siempre va a estar la misma distancia del punto, entonces va a formar una curva que va a ser parte de una circunferencia.

Tarea 4

Video 5 (13:17 – 17:46)

[e_{21}]: ¿Se refiere al recorrido de lanzarlo desde abajo hasta que llegue arriba?

[Investigador]: Claro.

[e_{21}]: Acá, en la parte que dice metros recorre, significa ¿todo esto? (haciendo el gesto en la hoja).

[Investigador]: Claro.

[e_{21}]: Sería un cuarto de circunferencia, pero acá la máxima distancia no son los 15 metros, porque dice que se estira más, ¿cierto?

[Investigador]: No, está bien, son los 15 porque después cuando ustedes quitaban el hilo, pero el máximo de hilo como les dicen que son 15 metros, eso es lo máximo.

[e_{22}]: Ya, lo resolvimos así porque acá se supone que el niño es un punto fijo y está lanzando a 90°, entonces 90° en una circunferencia es un cuarto.

[Investigador]: ¿Por qué 90°?

[e_{22}]: Porque el volantín queda recto, y sabemos que el perímetro es 30π, o sea que dividido en 4 da 7,5, y eso.

[Investigador]: Ya, bien.

Tarea 5
Video 5 (17:55 – 26:00)

[e_{22}]: ¿Qué pide?

[e_{21}]: La altura

[e_{21}]: Acá sería el radio, y ahí está el cuarto del perímetro, o sea sacamos el perímetro total, le quitamos π y nos da el radio y lo dividimos en 2. ¿Lo hago?

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: (Resuelve el ejercicio en la hoja) Entonces 7,5, y esa es la altura.

[Investigador]: Ya, ¿7,5 qué?

[e_{21}]: Metros. ¿Tengo que colocar en lo que se miden las cosas?

[Investigador]: Sí mejor, para que se entienda qué es, o sea si son grados, metros, centímetros, etc.

(Realiza cálculos y dibujos)

[Investigador]: Ya, ¿qué están haciendo?

[e_{21}]: Es que es el mismo ejercicio de arriba con otras fórmulas, entonces el resultado que sacamos es el que nos dan.

[Investigador]: Ya, yo les digo que igual lean bien para saber cuál es la diferencia entre estas dos preguntas.

[e_{22}]: Ah verdad, cuánto ha recorrido.

[Investigador]: ¿O están preguntando exactamente lo mismo?

[e_{21}]: Es que el dato que dan acá es la respuesta de esto, y la respuesta a esto es el dato que dan acá (indicando con el lápiz sobre cada pregunta de la hoja).

[Investigador]: Ya a ver, ¿cómo?

[e_{21}]: Porque acá piden cuál es la altura cuando recorre la mitad de esa trayectoria.

[Investigador]: Ya, y ¿cuál sería la mitad de esa trayectoria?

[e_{21}]: Si recorría 7,5 metros de distancia serían 3,75.

[Investigador]: Ya, y eso ¿qué es?

[e_{21}]: La mitad de la trayectoria que recorre.

[Investigador]: Ya, y gráficamente ¿cuánto sería?

[e_{21}]: La mitad del entero, porque le faltaría la otra mitad para llegar a su entero máximo, y como sigue en 90° y son proporcionales estos dos.

[Investigador]: ¿Por qué sigue con 90°?

[e_{21}]: Porque piden la altura máxima, y para sacar la altura no se puede sacar, porque sería una distancia muy grande, y se ocupa esto porque se mantiene que estos son 90°, entonces son un cuarto de circunferencias semejantes.

[Investigador]: Ya, ¿están seguros de eso?

[e_{21}]: Sí.

[Investigador]: Ya y eso ¿por cuánto lo multiplicaste?

[e_{21}]: Por 4, para que me diera el perímetro total de esta circunferencia, y como sabemos que la fórmula del perímetro es 2π por el radio, calculamos el radio que es 7,5 y eso después termina siendo la mitad del radio.

Video 6 (00:00 – 01:51 min)

[e_{21}]: Ya, ¡comprobémoslo!

[Investigador]: ¿y qué estás haciendo ahí?

[e_{21}]: Dibujando la circunferencia, así yo compruebo, para ver si se cumple esto, porque nos quedó la duda.

[e_{21}]: Nos dio justo el radio de tres.

[Investigador]: ¿sí?

[e_{21}]: ¿Cómo?, no sé… entonces, veamos si fuera uno coma cinco… ¡ah mira!, es bastante la diferencia, no se cumple esto (tarja figura en hoja).

[Investigador]: ¿por qué?, ¿qué fue lo que hicieron?

[e_{21}]: Es que pensamos que eran semejantes, se mantenía la proporción. Ah, pero si fuera sido así (dibuja), tendría que haber quedado así (analiza dibujo); mas chico, pasaría parte de acá también. ¡Mira! (analiza dibujo), bastante diferencia… ¿eso sería?

Tarea 6

Video 6 (01:52 – 18:16 min)

[e_{21}]: Mejor continuemos con la seis (lee pregunta seis). …va a estar en proporción (analiza mientras dibuja). Da treinta grados (mide dibujo).

[e_{22}]: (Asiente)

[e_{21}]: (Bosqueja cálculos y resultados)

[Investigador]: ¿qué pasó?

[e_{21}]: Estamos teniendo una duda ahí....Es que ya sabemos cuánto valía, pero…, así como sin dibujito estamos viendo cómo hacerlo.

[Investigador]: ya

[e_{21}]: … que termina esta parte (señala bosquejo), este perímetro siendo la… un tercio de la…

[e_{22}]: … del total.

[e_{21}]: … distancia total que recorre; ocupando esto (señala transportador),… estamos viendo cómo hacerlo.

[Investigador]: ¿necesitan otra hoja limpia?; para que se les ordenen las ideas, pueden partir de nuevo, del ejercicio si quieren (apunta hoja de preguntas), léanlo bien, vuelvan a dibujar.

[Investigador]: …ya, ¿Qué pregunta en la cinco?...

[e_{21}]: …estamos haciendo la seis, que la encontrábamos más fácil.

[Investigador]: ya entonces… (Se lee la pregunta al unisonó con [e_{21}])

[e_{21}]: Ya sabemos que es un tercio de…

[e_{22}]: Un cuarto…

[e_{21}]: … si es un tercio de un cuarto, ósea un doceavo.

[Investigador]: ¿por qué eso?

[e_{21}]: Porque,…el cuarto de la circunferencia total era que habíamos dicho que era la distancia que recorría cuando llegaba a la altura máxima…

[Investigador]: Ya…

[e_{21}]: Pero ocupando el transportado; así viéndolo bien, este arco (señalando dibujo), es un tercio de la distancia que recorrió, por eso (afirma), ahí está la proporción que queda, que es tres es a uno (señala dibujo). Pero estamos viendo cómo hacerlo con matemáticas, sin dibujito,…porque acá sería un dibujo distinto (señala pregunta anterior), porque aquí está la altura máxima y aquí seria otra (señala bosquejo con escalas diferentes)

[Investigador]: …y aquí que les piden. Pueden marcar lo que les están pidiendo; para que se guíen más…

[e_{21}]: …en esta nos piden el valor de esto (mientras remarca en hoja)

[Investigador]: ah, ya (asiente)

….

[Investigador]: ¿qué hacen ahora?

[e_{21}]: Adelantamos el dibujo de la pregunta cinco.

[Investigador]: chicos no encuentran ninguna relación con lo que ya hicieron, que pueda relacionarlo con el ejercicio.

[e_{21}]: ¿Te das cuenta de algo?

[e_{22}]: No

[e_{21}]: Aquí no se mantiene (apunta dibujo comparando escalas)…

[e_{22}]: No

[e_{21}]: Aquí siempre se mantiene el mismo triangulo, la misma proporción de lados (apunta a bosquejo de otra hoja), pero acá no se mantiene igual (vuelve a apuntar el primero).

[Investigador]: ¿el triángulo?

[e_{21}]: Sí, va cambiando.

[Investigador]: ¿Qué es lo que cambia?

[e_{22}]: El ángulo de elevación.

[e_{21}]: Si, por ejemplo acá seria 45 (apunta dibujo),…

[Investigador]: ¿Dónde?

[e_{21}]: Acá, si yo tirara esto acá, seria 45 y 45 (apunta dibujo), pero como el dibujo está bien hecho, se nota que estos dos no se igualan, si que no pueden cambiar los ángulos.

[Investigador]: Claro

[e_{21}]: Pero deber haber algo aquí... (Apunta dibujo)… ¿Cuánto mide la recta?

[Investigador]: ¿Cuánto mide eso? (apunta a bosquejo hecho por el alumno).

[e_{21}]: Siete coma cinco

[Investigador]: ¿Dónde tienen ese resultado?

[e_{21}]: Aquí (alumno muestra cálculo hecho anteriormente)… ¿tenemos que resolverlo matemáticamente?

[Investigador]: No necesariamente

[Investigador]: Como ustedes quieran chiquillos…

[e_{21}]: ¿Sí?

Investigador: si esté bueno, o esté malo a nosotros todo eso nos sirve. Aunque si ustedes usan cierto razonamiento, que sea válido.

[e_{21}]: Es que dibujando así como se ve, daría que es un tercio de ese cuarto de circunferencia.

[Investigador]: Ya

[e_{21}]: Saldría bien, con los ángulos bien, las distancias bien, nos daría que es un tercio. ¿Con la recta seria…? (usa la calculadora), dos coma cinco…, radianes, metros, no sé como se dice, eso daría la seis. Vamos con la cinco.

Tarea 5
(Reanudación)

Video 6 (18:16 – 36:35 min)

[Investigador]: Ahora va a hacer la cinco

[e_{21}] Y [e_{22}]: ¡si!

[e_{22}]: Ya ahora la mitad (de un cuarto de circunferencia dibujado), ya al ojo

[e_{21}]: Ya, ya al ojo yo digo que es por acá. …¿y de lado, así y cuentas cuantos grados? (acusa metodología)

[e_{21}] Y [e_{22}]: (discrepan sobre una medida del dibujo)

[e_{22}]: No estoy seguro.

[Investigador]: ¿no están seguros que fuera qué?

[e_{21}]:…el cuarenta y cinco exacto, entonces lo aproximamos a dos.

[Investigador]: Y ¿por qué cuarenta y cinco?

[e_{21}]: Para que sea la mitad, tiramos (linearon) de aquí acá (del centro al perímetro), para quedara en la mitad de la trayectoria.

[Investigador]: Si.

[e_{21}]: Que eso pregunta.

[e_{22}]: Y eso es 3,75 (señala el arco q se forma en el dibujo)

[Investigador]: ¿y qué le están preguntando?

[e_{21}]: Aquí nos preguntan la altura, cuando recorre la mitad de la trayectoria. Y por el dibujito nos daría aproximadamente dos.

[Investigador]: ya…

[e_{21}]: (Toma calculadora y introduce datos)…., por dibujo nos sale, pero no nos ocurre como hacerlo con matemáticas.

[Investigador]: Háganlo como se les ocurra no más. ¿Qué piensan con el dibujo?

[e_{21}]: nos queda mucho más claro, porque es más concreto, ya que los otros dibujos no son perfectos, si se puede decir, al verlos en la práctica más que en la teoría, podemos comprobar mas que son esos resultados, a los que pensamos que eran. Porque no se nos ocurre bien…

[e_{22}]: …claro (asiente),… como plantearlo…

[e_{21}]: …como plantearlo,…

[Investigador]: Y ¿trataron de buscar relación con que hicieron antes?

[e_{21}]: Es que acá siempre mantenía la misma proporción (apunta dibujo), el mismo triangulo,…

[Investigador]: ¿Qué necesitan acá que no tienen?

[e_{21}]: Ángulos puede ser…

[e_{22}]: ..Por ejemplo este (apunta dibujo)

[Investigador]: ¿Qué ángulos se ven?, por ejemplo, pueden anotar todos los ángulos que ven.

[e_{21}]: Los de noventa (mientras anota), de ciento ochenta; es que no se si se podrá hacer con estos ángulos.

[Investigador]: Tú anteriormente mencionaste otro ángulo además.

[e_{21}]: El de cuarenta y cinco

[Investigador]: Ya…, puede anotarlo también

[e_{21}]: ….y aquí no se mantiene la proporción, por eso no funciona como habíamos tratado de hacer antes, y por eso no encontramos una relación con lo que habíamos hecho antes, que era si el tipo estuviera bajando…

[Investigador]: No se puede encontrar un dibujo similar a ese, por ejemplo.

[e_{21}]: No, no se podría. Si dice que se mantiene el mismo ángulo y sigue bajando, seguirá formando el triangulo, pero en proporciones mas chicas. Pero acá pregunta otra cosa distinta.

[Investigador]: Ya.

[e_{21}]: …Oh también,…era saber,…si tiramos de acá ah acá (bosqueja una línea en su dibujo)…, saber cuánto sale este ángulo (mientras lo apunta en el dibujo),…

[Investigador]: Ya (asiente)

[e_{21}]: Porque con eso ya podemos sacar cuánto vale este ángulo (mientras apunta el ángulo contrario del triangulo que se forma)

[Investigador]: Pero tampoco sabes cuánto vale ese ángulo.

[e_{21}]: No, tendríamos que saber… (Medita),…si supiéramos éste, automáticamente podríamos saber éste (apunta ángulos diferentes pero relacionados)

[Investigador]: ¿y por qué el de ahí?

[e_{22}]: …Porque es el diámetro…

[e_{21}]: ¡Sí! , porque es el diámetro, y el ángulo semi… semi…

[Investigador]: Pero aparte del diámetro, ¿qué otra cosa sabes?

[e_{21}]: El perímetro…

[e_{22}]: (Asiente)

[Investigador]: Ya, y ¿…el radio?

[e_{22}]: Y el radio (confirmando)…, pero,…podemos sacar éste,…

[e_{21}]: ¿Cómo?

[e_{22}]: ¿…si?

[e_{21}]: Ahí nos vamos ah otra cosa, y tampoco sería seguro que lo saquemos,..Es que tampoco tenemos todas las medidas…, estos dos cuadrados darían este (mientras apunta dibujo), y nos daríamos vuelta en la misma cuestión todo el rato.

[Investigador]: ya, haber..., ustedes querían formar un triangulo ahí, ¿cierto? (mientas señala idea anterior en dibujo)

[e_{21}] Y [e_{22}]: Si

[Investigador]: Y ¿no se puede…? por ejemplo, ¿…formar otro triangulo? Donde salgan otros ángulos, o algo más conocido.

[e_{22}]: Este serviría (mientras apunta el ángulo de otra figura).

[Investigador]: Haber, otra vez. ¿Qué tienes ahora?

[e_{21}]: Otro ángulo

[Investigador]: Ya, ¿qué necesitas?

[e_{21}]: Me faltaría alguna medida para hacer semejanza. … haber, espérame,…haber si con sistema de tres…

[Investigador]: Ya, ¿pero por qué tres?, hazlo con las medidas reales… ¿…o no?,…

[e_{21}]: ¡Ah!, ¡verdad!, sería otro triangulo, uno más grande,…porque está en otra proporción, de uno es a cinco, ósea esto sería quince (mientras anota en dibujo),…

[Investigador]: ¿Qué te piden?

[e_{21}]: Éste (señala dibujo),...no sé si me resultará, porque éste también vale quince (anota en dibujo) y todo esto debería valer quince raíz de dos (circunscribe en dibujo).

[e_{22}]: Si

[Investigador]: Ya, si…

[e_{21}]: Para el triangulo de… (Bosqueja en hoja un dibujo aparte)

[Investigador]: Ya, pero a ti, ¿qué te piden?

[e_{21}]: Éste (mientras lo señala en el dibujo)

[Investigador]: Ya

[e_{21}]: …si esto es veintidós coma cinco…

[e_{22}]: Si esto es… (Mientras dibuja una línea)

[e_{21}]: Me enredaste…. (Dibuja otro triángulo esquemático). …se supone que nos piden éste…tenemos noventa, y…. (Mientras anota ángulos sabido en el bosquejo)..., mira este, porque sería la mitad de este.

[e_{22}]: Mmmm,…

[e_{21}]: … (Toma calculadora),… no resulta tampoco

[Investigador]: Prueben con otro. Les vuelvo a decir, piensen lo que tienen y lo que necesitan. Que lados conocen, que medidas conocen, que ángulos conocen.

[e_{21}]: Si tenemos ese, podemos obtener este… (Divaga y bosqueja ideas)

[Investigador]: Y ¿para qué quieres saber ese?

[e_{21}]: No se, solo tanteaba…. Ya pero si sacamos este, obtenemos este y si tenemos este largo, podemos sacar este chico… y luego este (señala cada dato que lo lleva a una medida desconocida en el bosquejo). A ver, veamos…

[e_{22}]: Espera, a ver…

[e_{21}]: Teóricamente debería dar. (Balbucea datos que anota en un bosquejo aparte). Tenemos este lado que vale quince y este otro que vale trece, entonces… con estos dos podemos sacar este dato (señala al papel), pero con este podemos sacar… ¿no tiene lápiz rojo? (pide a la investigadora). Tendríamos este y este que serian iguales (remarca con rojo lados), si tenemos estos dos vamos a saber el valor de este (tercera marca enrojecida en el papel), porque a este le restamos este y da ese…

[e_{22}]: Si

[e_{21}]: … ¡ah, no!, es la mitad, hay un punto medio, ósea estos tres son iguales…

[e_{22}]: mmm…(balbucea en tono de duda), esto es el radio (apunta)

[e_{21}]: Ah verdad, entonces como este es quince, como ya tengo este, puedo sacar este (señala al papel). Y si tengo este, puedo sacar este y este (señala lados incognitos de la figura)

[Investigador]: Ya, a ver…, vuelve a dibujar lo que tienes y lo que falta. ¿Ya sabes cuánto vale ese? (mientras [e_{21}] bosqueja un lado)

[e_{21}]: Si (mientras anota datos al azar)

[Investigador]: Pero qué quieres saber tú

[e_{21}]: Queremos saber este (remarca en rojo y sigue anotando datos)

[Investigador]: Sólo ese vale quince

[e_{21}]: Y éste (y lo señala).

[Investigador]: Escríbalo allí grandecito

[e_{21}]: …este pedazo mide siete coma cinco, raíz de dos…

[Investigador]: ¿falta algo?

[e_{21}]: ¡Si!, éste, de acá a acá…

[Investigador]: ¿Por qué?

[e_{21}]: Porque…, triángulo de cuarentaicinco…, este lado es igual a este lado y este por raíz de dos (señala lados en dibujo), si multiplico este por raíz de dos, me va ah dar siete coma cinco por dos, que es quince, ósea este también valdría siete coma cinco por raíz de dos y este también siete coma cinco raíz de dos (señala un lado contrapuesto). I pongo que este vale siete coma cinco raíz de dos… me daría un numero feo… ah no, no, no ¡mal!, porque si todo esto vale quince…

[e_{22}]: Si

[e_{21}]: …este valdría siete coma cinco raíz de dos,…y porque es noventa, ósea este vale siete coma cinco raíz de dos, eso, nos da a nosotros,…

[Investigador]: Ya

Tarea 7

00:00 – 02:48

[e_{21}]: Ya, el radio sería 2,5 y acuérdate que el radio alcanzaba 3,14, π, o sea no, el diámetro era 3,14, el perímetro era 6,28.

[e_{22}]: Ya, voy a escribir el desarrollo.

[e_{21}]: Ya, saca el perímetro. Y tienes que dividir por la cantidad barras, si tengo 5π piensa que cada barra mide 2,5, o sea divides esto por 2,5 y te da los 2π; en resumen son como 6 barras y un cuarto.

[e_{22}]: O sea...

[e_{21}]: ¿Cuántas barras necesitas? Dos barras más, o sea 6 barras y un cuarto app.

Tarea 8

02:48 – 04:25

[e_{21}]:12.

[e_{22}]: ¿Son 12?

[e_{21}]: Sí, entonces sería el perímetro dividido en 12. O lo otro sería dividir esto (indica con el lápiz en la hoja) en 12 para saber cuántas barras se ocuparían, entonces 6,25…

[e_{22}]: Es 6,28.

[e_{21}]: No po, 6,25 si dijimos app. Entonces ocuparía un poco más de media barra.

Tarea 9

Video 7 (04:25 – 13:45)

[Investigador]: Ya, ¿qué pasa al minuto?

[e_{21}] Y [e_{22}]: Da una vuelta.

[Investigador]: ¿Y al segundo minuto?

[e_{21}] Y [e_{22}]: Se da otra vuelta.

[Investigador]: Ya, ¿y qué significa que la curva sea así o así? (Indicando con el dedo sobre el ejercicio) ¿Qué se les ocurre?

[e_{21}]: Eh, lo de arriba significa que gira en un sentido y lo de abajo gira en otro sentido.

[Investigador]: Ya, puede ser. Entonces ¿qué se les ocurre que pasa en los primeros dos minutos?

[e_{21}]: Se da dos vueltas así (Hace el gesto con el dedo, dibujando un círculo en el aire).

[Investigador]: Ya, pueden hacerlo tal vez mirando grado a grado, fijándose en un carro por ejemplo, y van viendo el carro está en tantos grados.

[e_{22}] Yo creo que va rápido y llega lento, y después va disminuyendo la rueda y se va para el otro lado, ¿o no?

[e_{21}]: Pero es que piensa cómo lo hacíamos en física, que acá no significaba que fueran menos…, sino que está disminuyendo.

[Investigador]: Ya, pero fíjense en lo que dice el enunciado; dice que el gráfico describe un movimiento muy particular de la rueda, así que no se extrañen.

[e_{21}]: Es que generalmente veíamos gráficos que eran de velocidad.

[Investigador]: Ya, pero este gráfico es de ángulos v/s tiempo, así que de acuerdo a eso expliquen el movimiento, no lo comparen con lo visto en otras materias.

[e_{21}]: Es que era para tener alguna referencia. Ya, entonces llega a 360° y después como que retroceden esos 360°, o sea va así y después así (haciendo dibujo en la hoja).

[Investigador]: Ya.

[e_{21}]: Después hace 90°y después va así.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Después hace 180° entonces llega acá (hace dibujo), después baja 35°; después sube más y llega como acá (hace dibujo) y después llega acá de nuevo. ¿Se entiende?

[Investigador]: Sí, igual si quieres puedes colocar algo en la curva, o sea si va bajando o subiendo cuántos grados y en qué dirección (horario, anti horario, etc.), por ejemplo ¿qué pasa en esta curva?

[e_{21}] Y [e_{22}]: Se da una vuelta.

[Investigador]: Ya, eso tienen que colocar, a esa me refería.

Tarea 10

Video 7 (13:45 – 17:58)

[e_{21}]: Entonces sería el perímetro, porque es la trayectoria.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Y la variable independiente "y"… oh, esa la preguntaron en la PSU (Vuelve a leer y comienza a dibujar el gráfico). Ya, se supone que a los 30° hay media barra

[e_{22}]: ¿Cuánto?

[e_{21}]: Media barra ¿? Es un poco más de media barra ¿? Entonces se supone que a 360° es 6,28.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: ¿Y cuál es la pregunta?

[e_{22}]: ¿Qué curva se describe?

[e_{21}]: Una recta (Traza línea recta en la gráfica). Están todos a la misma distancia y si avanza el doble, es el doble del arco.

Tarea 11

17:58 – 32:00

[e_{21}]: ¿Seria en un movimiento normal?

[Investigador]: Sí, en el fondo las distintas alturas que estarían alcanzando.

[e_{21}]: Ah, sería como el otro que hicimos, ¿te acuerdas?

[e_{22}]: Eh…

[e_{21}] :(Busca ejercicio que realizó antes y comienza a explicarle a su compañero).

[e_{22}]: Ah, sí me acuerdo.

[e_{21}]: Ya, esto sería… ¿el radio era 2,5?

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]:Entonces, esto está en cero y esto está en la mitad, porque estos son 30°, y en el otro ejercicio cuando nos preguntaron cuál era la mitad de la altura, no dio que éstos eran 30°, ¿te acuerdas?

[e_{22}]: Mmm sí.

[e_{21}]: Entonces a cero le restamos esto y va a ser lo mismo (indicando con el lápiz sobre la hoja).

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Acá ya sabemos que si tomo de referencia al centro.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Acá sabemos esto, sabemos esto y faltaría este porque esto otro está listo (haciendo vistos con el lápiz sobre el dibujo de la rueda). ¿Podemos dejarlo así sin hacer el ejercicio? Es que es el mismo planteamiento del otro.

[Investigador]: Ya, pero nosotras queremos la gráfica, ese gráfico que representa… ¿qué decía la pregunta?

[e_{21}]: El ángulo de elevación con respecto al centro y la altura del carro.

[Investigador]: Ah ya, yo les recomiendo… es que ustedes van a ver la altura que alcanza el carro, ¿cierto? Entonces la altura conviene… para que se vea reflejada la altura.

[e_{21}]: Ah ya.

[Investigador]: Porque los ángulos son los que van a ir avanzando, ¿cierto?

[e_{21}]: Ah, porque son independientes (Luego comienza a dibujar la gráfica). ¿Cuánto era la altura máxima?

[e_{22}]: 2,5.

[e_{21}]: Y eso ¿dónde de alcanza?

[e_{22}]: En los 90°.

[e_{21}]: Ya, y 180° en 0.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Ya, y en 360° también es 0, y a 1,25 llegan los 30°, 150°, y 250° pero ¿hacia abajo cierto?

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}] :(Comienza a dibujar un cuarto de circunferencia).
[Investigador]: Ya, y si ustedes ahora unen los puntos, ¿puedes reconocer la curva que se forma?

[e_{21}]: Ya (comienza a unir los puntos), entonces sería una función seno, algo así, pero de distinta manera pero como la misma idea.

[Investigador]: Ya, a ver explícame todo lo que se te venga a la mente sobre esa función y lo que hiciste en el ejercicio, la curva que describe, etc.

[e_{21}]: Eh, ¿lo de la función periódica?

[Investigador]: Sí, por ejemplo ¿qué dijiste sobre eso?

[e_{21}]: Que siempre se cumple lo mismo, o sea es constante, nunca va a cambiar siempre va a tener en cada ángulo la misma distancia.

[Investigador]: Ya, entonces ¿si yo aumento los grados acá?

[e_{21}]: Si sigue cumpliendo, es como copiar y pegar.

[Investigador]: Ah ya.

[e_{21}]: Y nos dimos cuenta que en la otra también se podía hacer así, en la del volantín, porque si trazábamos esto acá (dibuja un radio en la circunferencia) también iba a dar 3.

[Investigador]: ¿Por qué 3? Si ese fue el ejemplo.

[e_{21}]: Sí, es que es la proporción, que es de 1 a 5.

[Investigador]: Ah ya, sí.

[e_{21}]: Entonces si esto vale 2x y esto vale x, y como esta altura vale 90°, este vale 30° y este vale 60° (haciendo dibujo de un triángulo recto), y al ser 30°, este ángulo también vale 30°, porque es ángulo del centro, y es un tercio del cuarto de la circunferencia como en la otra pregunta, entonces por eso también nos daba justo 30°.

Tarea 13

Video 7 (32:00 – 38:51)

[e_{21}]: Eh, ¿tenemos que llenarlo ahí?

[Investigador]: Eh, da lo mismo, si ya lo hicieron.

[e_{21}]: Ah ya.

[Investigador]: Mira, lo que pasa es que aquí por ejemplo, ¿qué hubiese pasado? Es que hubiese quedado más arriba.

[e_{21}]: Y lo que pasaba es que… porque dice que ¿se toma en cuenta con el centro?

[Investigador]: Claro, pero eso da lo mismo, es que la altura con el suelo, por ejemplo aquí van a haber como 7 metros de altura, pero en el fondo esta gráfica que tú hiciste es como desplazarla un poquito más arriba. Ya, ¿qué dice la otra pregunta?

[e_{21}]: La altura con la cantidad de barras, o sea sería en el eje “y” las barras y en el eje “x” la altura.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}] :(Comienza a dibujar la gráfica) ¿La altura la consideramos igual como en el otro ejercicio?

[Investigador]: Sí.

[e_{21}]: Esto daría 24.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Y la altura sería 2,5, se supone que aquí entonces…

[e_{22}]: Es el mismo caso, mira acá hicimos el mismo gráfico.

[e_{21}]: Ah verdad, esto tendría que haber sido abajo y esto va subiendo, porque estos son 30°, 60°, entonces la altura va subiendo.

[e_{22}]: Sí.

[e_{21}]: Es el mismo gráfico que el anterior.

[Investigador]: ¿Por qué?

[e_{21}]: Porque a los 30° está la cantidad… la mitad de abajo ¿? (min 38:30).

[Investigador]: Ya.

[e_{21}]: Porque sigue subiendo esto y la altura daría igual.

[Investigador]: Ya, sí está bien.