Universidad de Valparaíso
CHILE

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

APLICACIÓN DE ALGEBRA LINEAL EN ESTADÍSTICA MEDIANTE SOFTWARE MATA

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ALUMNO: IVÁN FLORES E.
PROFESOR GUÍA: CARLOS HERIQUEZ R.
JESÚS JUYUMAYA R.

Valparaíso 2013

Dedico este trabajo a:
Mis padres Iván Flores Durán y Patricia Espinoza Valenzuela
Mis hermanas Paola, Jaqueline y Anita y a mi hermano Roberto
Mi sobrina Jennifer
Carmen

Agradezco:

A mis padres por su incondicional apoyo a través del tiempo. Por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, incluyéndo mi educación tanto la académica como de la vida.

A mis hermanas Paola, Jaqueline y Anita y a mi hermano Roberto, por estar conmigo y apoyarme siempre. Los quiero mucho.

A mi sobrina Jennifer, para que veas que con esfuerzo se logran las metas trazadas.

A todos mis amigos, Michael, Hanna, Berny, José, Ángel y “Los Mios”, por compartir los buenos y malos momentos.

A Carmen un agradecimiento especial por ser un pilar fundamental en este último tiempo.

A todos aquellos familiares y amigos que no recordé al momento de escribir esto. Sin embargo, ustedes saben quiénes son.

Finalmente, a los maestros. A los que marcaron cada etapa de mi camino universitario, y a los que me ayudaron a resolver las dudas que les planteé al momento de desarrollar este trabajo de tesis.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Para la realización de este trabajo de tesis se tomó en cuenta aquellas carreras que, en general, imparten asignaturas de algebra lineal y que en otra asignatura de estadística podrían ver la diversa gama de aplicaciones. En particular se consideró como referente la carrera de Ingeniería en Estadística de la Universidad de Valparaíso (IES-UV), donde el autor de este estudio tuvo la oportunidad de trabajar como ayudante en la asignatura de algebra lineal.

Los estudiantes de IES-UV, sin saber al momento de cursar algebra lineal (la malla curricular incluye dos asignaturas de algebra lineal): vectores, matrices, las propiedades y las extensiones de éstas serán básicas para comprender de mejor manera varias de las asignaturas profesionales de los estadísticos. Por ejemplo, en asignaturas tales como, modelos lineales, diseños experimentales, formas cuadráticas, análisis multivariado y diversos seminarios. En términos prácticos un estudiante de estadística en la primera asignatura de estadística que estudia, e incluso cualquier estudiante de enseñanza media, puede visualizar que las notas de una prueba se puede representar en un vector, y todas las notas de un curso pueden verse representadas en un arreglo matricial; donde cada fila usualmente se refiere a las notas de un estudiante y cada columna se refiere a las notas de los diferentes aspectos evaluados en la asignatura (pruebas, trabajos, disertaciones, etc.). Las operatorias de esta “matriz de notas ” y sus propiedades son la motivación para la escritura de este trabajo de tesis. Este estudio de notas se enseña usualmente sin considerar un software que apoye la comprensión de conceptos que teóricamente son de difícil comprensión para los estudiantes. Si en vez de un curso, se piensa en un arreglo matricial para todos los estudiantes de un establecimiento educacional (de 1.000, 5.000 o 15.000 estudiantes) el trabajar con lápiz y papel es prácticamente imposible. Así por ejemplo, la inversión de una matriz 2x2 o 3x3 es factible realizarla con lápiz y papel; no obstante invertir una matriz 20x20, 1000x1000 o 11.000x11.000 sin un computador y un software adecuado pareciera estadística ficción. Lo que se pretende en este trabajo de tesis es introducir un software que permita comparar los resultados que un estudiante sea capaz de trabajar en papel y lápiz, con un software que avale lo que obtuvo, para que internalice los conceptos asociados en pequeñas dimensiones y pueda inducir o inferir a otras situaciones análogas con matrices o espacios matriciales de mayor dimensión. En especial, se implementará un módulo del software estadístico Stata denominado Mata. Este software se caracteriza por su rapidez y la versatilidad de complementar los trabajos que se hagan en Mata con los que se hacen en Stata.

Existen software que trabajan con matrices como por ejemplo: Matlab, Scilab , Derive , usados bajo el ambiente Windows.

Octave es utilizado principalmente bajo Linux. Existen otros para distintos sistemas operativos. Dentro de los software estadísticos SAS (Statistical Analysis System) dispone de IML (Interactive Matrix Language) y Stata (StataCorp, 2009) dispone de un módulo matricial que permite interactuar entre los ambientes de Stata y Mata.

Stata-Mata fue el software elegido para el trabajo de esta tesis, ya que a partir de la versión Stata 9 se incorpora una extensión llamada Mata. Esta extensión no es un sustituto de Stata como muchos creen si no una herramienta poderosa para simplificar los cálculos matriciales y llevarlos al plano estadístico en Stata.

Mata mejora el rendimiento de Stata en cálculos matemáticos y matriciales, puede ser ocupado en cálculos básicos o también en matrices (descomposición triangular, calcular valores propios y vectores propios, entre otros) [12]

En este trabajo de tesis se ocupa el software Stata-Mata para enseñar aspectos básicos del algebra lineal, así como algnas aplicaciones que tienen las matrices en el campo de la estadística y a la vez mostrar con ejemplos reales su aplicación.

En este trabajo no se ocupó todo el potencial de este software pero queda mucho que aprender sobre el programa y sus características y como ayudar a aprender mejor distintas áreas de la ciencia con ayuda de programas computacionales. Este software es tanto útil para la enseñanza del álgebra lineal para los estudiantes que utilicen Stata y para los estudiantes de estadística que requieran programar sus trabajos desde el punto de vista del álgebra lineal.

Con ejemplos básicos de interés para los estudiantes de IES-UV se pretende motivar tanto a profesores como estudiantes que requieran el uso de matrices.

Capítulo 2

Álgebra lineal

2.1. Matrices

Definición 1. *Una matriz A de orden $m \times n$, cuyos elementos pertenecen a un cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), es un arreglo rectangular formada por m filas y n columnas. Se llama elemento del lugar (i, j) o $ij-$ésimo lugar de la matriz A al escalar que está situado en la intersección de la fila i-ésima (para $i = 1, 2, ..., m$) y la columna j-ésima (para $j = 1, 2, ..., n$), este elemento se llama a_{ij}.[1] La matriz se denota por:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Abreviadamente se escribe $\boldsymbol{A}= [a_{ij}]$. Cuando se expresa una matriz $\boldsymbol{A}$ de tamaño $m \times n$ se denota por $\boldsymbol{A}_{m\times n}$

2.1.1. Álgebra de matrices

Suma de matrices

Las matrices con la suma cumplen con las siguientes propiedades:
Sean $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, matrices de igual tamaño, entonces:

$1)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ Conmutativa

$2)\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$ Elemento neutro

$3)\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$ Elemento inverso

$4)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ Asociatividad

Otra operación matricial es ponderar un escalar con una matriz. Dados k_1 y $k_2 \in K$ y $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices entonces:

1) $k_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k_1\boldsymbol{A}+k_1\boldsymbol{B}$

2) $(k_1+k_2)\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}$

3) $(k_1k_2)\boldsymbol{A}=k_1(k_2\boldsymbol{A})$

4) $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

5) $0\cdot\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$

Multiplicación de matrices

Dadas las matrices $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ cuyo tamaño es $m\times p$ y $\mathbf{B}=[b_{ij}]$ de tamaño $p\times n$, se llama producto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ o $\mathbf{AB}$, a la matriz $C=[c_{ij}]$ de tamaño $m\times n$ cuyo elemento de lugar (ij); donde (ij) es la posición de un elemento de la matriz [1] :

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ip}b_{pj}=\sum_{h=1}^{p}a_{ih}b_{hj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Casos particulares de especial interés en algunas aplicaciones:

- Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden $1 \times p$ y $\boldsymbol{B}$ cualquier matriz $p \times n$, entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \end{bmatrix}$$

donde $c_{ij} = \sum\limits_{h=1}^{p} a_{ih} b_{hj}$, $\quad i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$.

- Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden $m \times p$ y $\boldsymbol{B}$ es una matriz columna $p \times 1$, entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}$$

donde $c_{ij} = \sum\limits_{h=1}^{p} a_{ih} b_{hj}$, $\quad i = 1, 2, ..., m;$ y $j = 1, 2, ..., n$.

- Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden $1 \times p$ y $\boldsymbol{B}$ matriz de orden $p \times 1$, entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{p1} \end{bmatrix} = [c_{11}]$$

- Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz de orden $m \times 1$ y $\boldsymbol{B}$ matriz de orden $1 \times n$, entonces:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $c_{ij} = a_i b_j$, $\quad i = 1, 2, ..., m;$ y $j = 1, 2, ..., n$.

- Una matriz escalar $\boldsymbol{E}_{n\times n}$, es aquella que en su diagonal tiene el mismo número y el resto de los componentes de la matriz son ceros, equivalentemente; se define como un escalar multiplicando la matriz identidad (λ $\boldsymbol{I}$,$\lambda \in \boldsymbol{K}$).

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \lambda \boldsymbol{I}$$

- Si una de las matrices que se multiplican es una matriz escalar $\mathbf{E}_{p\times n}$, entonces,

$$\mathbf{AE} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}e & a_{12}e & \dots & a_{1n}e \\ a_{21}e & a_{22}e & \dots & a_{2n}e \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}e & a_{m2}e & \dots & a_{mn}e \end{bmatrix} = \mathbf{EA}$$

Para las matrices del tipo $\mathbf{A}_{m\times p}$, $\mathbf{E}_{m\times p}$, $\mathbf{B}_{p\times n}$, $\mathbf{D}_{p\times n}$, y $\mathbf{C}_{n\times q}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(\mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n})\mathbf{C}_{n\times q} = \mathbf{A}_{m\times p}(\mathbf{B}_{p\times n}\mathbf{C}_{n\times q})$ (asociativa)

2. $$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_{m\times p}(\mathbf{B}_{p\times n} + \mathbf{D}_{p\times n}) &= \mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n} + \mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{D}_{p\times n} \\ (\mathbf{A}_{m\times p} + \mathbf{E}_{m\times p})\mathbf{B}_{p\times n} &= \mathbf{A}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n} + \mathbf{E}_{m\times p}\mathbf{B}_{p\times n} \end{aligned}\right\} \text{(distributivas)}$$

Observación 1.

1. $\boldsymbol{A}_{m\times p}\boldsymbol{B}_{p\times n} \neq \boldsymbol{B}_{p\times n}\boldsymbol{A}_{m\times p}$, *en general el producto no es conmutativo salvo en casos particulares.*

2. $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$ *sin que sea* $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ *ó* $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ *(cuando sea* $\boldsymbol{AB} = \mathbf{0}$, *con* $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ *y* $\boldsymbol{B} \neq 0$, *se dice que* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *son divisores de cero).*

Proposición 1.

El conjunto de $\boldsymbol{M}_{n\times n}$ de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$, con las operaciones suma y producto de matrices, es un anillo conmutativo con unidad y con divisores de cero.

2.1.2. Traspuesta de una matriz

Definición 2. *A cada matriz, $\mathbf{A}$, se le puede asociar una matriz, que se llama traspuesta de la matriz $\mathbf{A}$ denotada por $\mathbf{A}^\top$; es el resultado de cambiar, las filas de $\mathbf{A}$ por columnas. Dada la matriz de tamaño $m \times n$, su traspuesta va a ser una matriz de tamaño $n \times m$, que tiene por elemento en el lugar ij-ésima al elemento ji-ésima de $\mathbf{A}$, para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$. [1]*

Propiedades

Para matrices cualesquiera $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, se verifica que :

1.$(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$,	la transposición es involutiva.
2.$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$,	si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son de la misma dimensión.
3.$(\lambda\mathbf{A})^\top = \lambda\mathbf{A}^\top$,	con λ escalar.
4.$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$,	si $\mathbf{A}$ es de tamaño $m \times p$ y $\mathbf{B}$ de tamaño $p \times m$.

Ejemplo 1. *Se ha recogido información sobre el gasto semanal monetario de cinco sujetos durante dos semanas; los cuales, concurren a un bar a consumir cerveza, cigarros y bebidas. En las siguientes tablas se muestra el gasto de la primera semana (Tabla 1) y segunda semana (Tabla 2).*
Se desea saber cuánto gastaron las personas y cuánto se gasta en cerveza, cigarros y bebidas en las dos semanas, usando operaciones matriciales.

Gastos ($) personales en productos que de indican

Semana 1

productos / *personas*	*Cerveza*	*cigarros*	*bebidas*
1	*2000*	*3000*	*1500*
2	*3000*	*1500*	*650*
3	*30000*	*6000*	*5000*
4	*3500*	*4500*	*2000*
5	*10000*	*3500*	*3200*

Semana 2

productos / *personas*	*Cerveza*	*cigarros*	*bebidas*
1	*2500*	*1500*	*3000*
2	*4500*	*3000*	*1500*
3	*10000*	*6000*	*4500*
4	*5500*	*4500*	*2500*
5	*6500*	*3600*	*2500*

Fuente: Datos ficticios.

Sólo se tiene que sumar las filas de una forma ordenada llevándolas a matrices:
Sea $\boldsymbol{A}$ *la matriz que representa el gasto de la primera semana de las cinco personas:*

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 1500 \\ 3000 & 1500 & 650 \\ 30000 & 6000 & 5000 \\ 3500 & 4500 & 2000 \\ 10000 & 3500 & 3200 \end{bmatrix}$$

Sea $\boldsymbol{B}$ *la matriz que representa el gasto de la segunda semana de las cinco personas:*

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2500 & 1500 & 3000 \\ 4500 & 3000 & 1500 \\ 10000 & 6000 & 4500 \\ 5500 & 4500 & 2500 \\ 6500 & 3600 & 2500 \end{bmatrix}$$

luego se suman:

$$\begin{bmatrix} 2000 & 3000 & 1500 \\ 3000 & 1500 & 650 \\ 30000 & 6000 & 5000 \\ 3500 & 4500 & 2000 \\ 10000 & 3500 & 3200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2500 & 1500 & 3000 \\ 4500 & 3000 & 1500 \\ 10000 & 6000 & 4500 \\ 5500 & 4500 & 2500 \\ 6500 & 3600 & 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 & 4500 & 4500 \\ 7500 & 4500 & 2150 \\ 40000 & 12000 & 9500 \\ 9000 & 9000 & 4500 \\ 16500 & 7100 & 5700 \end{bmatrix}$$

La matriz resultante se denominará $\boldsymbol{R}$.
Para saber el gasto de cada persona, la matriz $\boldsymbol{R}_{5\times3}$ *se multiplicará por una matriz* $\boldsymbol{J}_{3\times1}$, *de la*

forma:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar $\boldsymbol{R}_{5\times 3} \times \boldsymbol{J}_{3\times 1}$ *se tiene una matriz* $\boldsymbol{C}_{5\times 1}$*, la cual dará el gasto por cada una de las personas.*

$$\begin{bmatrix} 4500 & 4500 & 4500 \\ 7500 & 4500 & 2150 \\ 40000 & 12000 & 9500 \\ 9000 & 9000 & 4500 \\ 16500 & 7100 & 5700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13500 \\ 14100 \\ 61500 \\ 22500 \\ 29300 \end{bmatrix}$$

Si se desea saber cuanto se gastó en cigarros, cerveza y bebidas sólo se tiene que trasponer la matriz $\boldsymbol{A}$ *y multiplicar esta por una matriz* $\boldsymbol{J}_{5\times 1}$*, esto es:*

$$\begin{bmatrix} 4500 & 7500 & 40000 & 9000 & 16500 \\ 4500 & 4500 & 12000 & 9000 & 7100 \\ 4500 & 2150 & 9500 & 4500 & 5700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77500 \\ 37100 \\ 26350 \end{bmatrix}.$$

Otra forma de obtener el resultado requerido es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4500 & 4500 & 4500 \\ 7500 & 4500 & 2150 \\ 40000 & 12000 & 9500 \\ 9000 & 9000 & 4500 \\ 16500 & 7100 & 5700 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77500 & 37100 & 26350 \end{bmatrix}.$$

Así, se gasto \$ 77500 en cerveza, \$ 37100 cigarro y \$ 26350 bebidas.

Definición 3. *Rango de una matriz: es el número de filas de una matriz (o columnas) que son linealmente independientes.*

Definición 4. *Para cualquiera matriz* $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$*, de m filas y n columnas, se verifica que el rango del sistema de sus m vectores fila es igual al rango del sistema de sus n vectores columnas. A cualquiera de estos dos rangos, iguales entre sí, se llama rango de la matriz.*

Se trabajará con el rango de filas, esto dice que se verá el rango de una matriz, contando sus filas no nulas.

Ejemplos : Sea $\mathbf{A}_{3\times 3}$ y $\mathbf{B}_{4\times 4}$, entonces sus rangos son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} ;\ \mathbf{A}_{3\times 3} \text{ es de rg} = 3$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & -1 \\ -13 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} ;\ \mathbf{B}_{4\times 4} \text{ es de rg} = 3$$

2.1.3. Matrices cuadradas

Propiedades:

Las matrices cuadradas son matrices que cumplen con las siguientes propiedades:
Sea **A**,**B** y **C** matrices de orden $n \times n$

1. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ y $det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

2. Si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, entonces no necesariamente **A** ó **B** son matrices nulas.

3. Toda matriz cuadrada se puede descomponer en la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. [11]
   Una matriz real es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$.
   Ejemplo
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$
   Es una matriz real antisimétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{-A}^\top$, donde los elementos de la diagonal de esta matriz antisimétrica son todos ceros.
   Ejemplo
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.4. Traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$, es la suma de sus elementos diagonales:

$$tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propiedades

1. $tr(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$.
2. $tr(\lambda\mathbf{A}) = \lambda tr(\mathbf{A})$, λ escalar.
3. $tr(\mathbf{A}^\top) = tr(\mathbf{A})$.
4. $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$.

Ejemplo 2. *Sea la matriz*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 12 & 5 \\ 6 & 9 & 14 & 2 \\ 1 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 15 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

La traza de $\boldsymbol{A}$ es :

$$tr(\boldsymbol{A}) = 17$$

2.1.5. Matrices invertibles

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, de tamaño $n \times n$, se dice que es invertible (o inversible) si existe otra matriz de igual tamaño, que se denota por $\mathbf{A}^{-1}$, tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}\text{=matriz identidad}$$

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas de tamaño $n \times n$, se verifica que:

1. Si $\mathbf{A}$ tiene inversa, entonces la inversa de $\mathbf{A}$ es única
2. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen inversa, entonces el producto $\mathbf{AB}$ también tiene inversa
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$
3. Si $\mathbf{A}$ tiene inversa, entonces su traspuesta $\mathbf{A}^\top$ también tiene inversa
$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.$$
4. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada que tiene una fila o columna nula, entonces $\mathbf{A}$ no es invertible.

2.1.6. Cálculo de inversa de una matriz

Para calcular la matriz inversa, se ocupara el siguiente método:

1. Método de Gauss (operaciones elementales filas o columnas).
Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada entonces para obtener la inversa se tiene que ampliar con la matriz identidad. Esto es:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array}\right]$$

La inversa $\mathbf{A}^{-1}$, de una matriz $\mathbf{A}$, se puede hallar realizando operaciones elementales en $\mathbf{A}$ y las mismas operaciones en la matriz identidad. Todo ello se hace sólo en filas o sólo en columnas, hasta conseguir que $\mathbf{A}$ se transforme en la identidad, lo cual siempre es posible si $\mathbf{A}$ es de rango completo; en ese momento, la transformada de la identidad es $\mathbf{A}^{-1}$

$$[\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}] = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a'_{11} & \dots & a'_{1j} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & a'_{i1} & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & a'_{n1} & \dots & a'_{nj} & \dots & a'_{nn} \end{array}\right]$$

Ejemplo 3. *Sea*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces se amplía con la identidad

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

para anotar las operaciones entre las matrices se hará de la siguiente forma; a,b filas y c $\in \mathbb{R}$

$$F_{ab}\ , \quad \textit{la fila “b” se suma a la fila “a”}$$

$$F_{ab^{(c)}}\ , \quad \textit{c veces la fila “b” mas la fila “a”}$$

$$F_{a^{(c)}}\ , \quad \textit{a la fila “a” se multiplica “c”}$$

entonces

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{2\,1(-2)}\ F_{3\,1(-3)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_{2(-\frac{1}{2})}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{1\,2(-3)}\ F_{3\,2(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_{3\,\frac{1}{3}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{F_{2\,3(-2)}\ F_{1\,3(4)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] = [\boldsymbol{I}|\boldsymbol{A}^{-1}]$$

2.1.7. Determinante de una matriz

Definición 5. *Se llama determinante de una matriz a una aplicación que a cada matriz cuadrada* $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ *le asigna un escalar, que se llama determinante de la matriz* $\boldsymbol{A}$ *y se denota por:*

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz $\mathbf{A}$ se hace con el siguiente algoritmo:
Si $\mathbf{A}_{2\times 2}$ se tiene que:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si $\mathbf{A}_{3\times 3}$ se tiene:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si $\mathbf{A}_{n\times n}$ se tiene que el determinante es :

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|.$$

Donde $|A_{ij}|$ es el resultado de eliminar la fila i y la columna j de la matriz original.

Propiedades

1. Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna con todos sus componentes igual a cero su determinate es cero.

2. Si tiene dos filas iguales (o columnas) su determinante es cero.

3. Si $|\mathbf{A}| = c$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $|\mathbf{A}^\top| = c$.

4. Se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo.

5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas del mismo orden entonces $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

6. Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es regular (o invertible), si y sólo sí su determinante es distinto de cero, entonces
$$|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

El adjunto de un término a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$, es el resultado del cálculo de la submatriz que resulta al eliminar la fila y columna del elemento a_{ij}, multiplicado por (-1^{i+j}).
Dadas las componentes explícitas de la matriz: $(a_{ij}) = \mathbf{A} \in M_{n\times n}$ para cada i y j, se define la matriz $\hat{\mathbf{A}}(i,j)$, como la matriz de orden $(n-1)$ obtenida a partir de $\mathbf{A}$ eliminando la fila i-ésima y la columna j-ésima. Y se define la cantidad:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j}|\hat{\mathbf{A}}(i,j)|$$

Donde d_{ij} es el elemento de la matriz adjunta.

Definición 6. *Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$, su matriz adjunta (adj($\boldsymbol{A}$)), es el resultado de calcular cada adjunto de $\boldsymbol{A}$ y sustituirlos por cada término de la matriz.*

Ejemplo 4. *Sea*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

su adjunta es:

$$adj(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

En el caso que $\boldsymbol{A}$ *es una matriz de orden* 3×3 *se tiene:*

$$\boldsymbol{A} \;=\; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y su adjunta

$$adj(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} & A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33} & A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31} \\ A_{32}A_{13} - A_{33}A_{12} & A_{33}A_{11} - A_{31}A_{13} & A_{31}A_{12} - A_{32}A_{11} \\ A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} & A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23} & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{bmatrix}$$

La importancia de esta matriz es que permite calcular la matriz inversa con el siguiente cálculo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(adj(\mathbf{A}))^{\top}$$

2.1.8. Inversa generalizada

Definición 7. *Es un concepto de invertibilidad para matrices singulares así como para matrices rectangulares. La inversa Moore-Penrose (MP), permite resolver de forma explícita un sistema de ecuaciones lineales.[2]*

Proposición 2. *Inversa Moore-Penrose*
Sea $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$*, la inversa Moore-Penrose de* $\mathbf{A}$ *es la matriz* $\mathbf{G} \in M_{n\times m}$*, y satisface las siguientes condiciones*

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^{\top}(\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{F}^{\top})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}^{\top}$$

1. $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{GAG} = \mathbf{G}$.
3. $(\mathbf{AG})^{\top} = \mathbf{AG}$.
4. $(\mathbf{GA})^{\top} = \mathbf{GA}$

La inversa MP de $\mathbf{A}$ se denota como $\mathbf{A}^{+}$. Si $\mathbf{G}$ satisface sólo la condición (1) entonces decimos que $\mathbf{G}$ es una inversa generalizada y la denotamos por $\mathbf{A}^{-}$

Proposición 3. *Para cada* $\mathbf{A}$*, existe una única* $\mathbf{A}^{+}$

Propiedades

(a) $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-}$, para $\mathbf{A}$ matriz no singular

(b) $\mathbf{A}^{++} = \mathbf{A}$

(c) $(\mathbf{A}^{\top})^{+} = (\mathbf{A}^{+})^{\top}$

(d) $\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}$, si $\mathbf{A}$ es simétrica e idempotente.

(e) $\mathbf{AA}^{+}$ y $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$ son idempotentes.

(f) $rg(\mathbf{A}) = rg(\mathbf{A}^{+}) = rg(\mathbf{AA}^{+}) = rg(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A})$.

(g) $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$.

(h) $\mathbf{A}\mathbf{A}^{+^\top}\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A}^{+^\top}\mathbf{A}$.

(i) $A^+ = (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^+\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^+$

Ejemplo 5. *Determine la matriz MP de la matriz* $\mathbf{A}$*:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Para poder encontrar la matriz MP se aplica eliminación gaussiana y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego la factorización $\mathbf{A} = \mathbf{BF}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Recuerde que la matriz $\mathbf{F}$ *es la matriz reducida que se obtiene de* $\mathbf{A}$*, eliminando en el resultado las posibles filas de ceros, mientras que* $\mathbf{B}$ *es la matriz cuyas columnas son las columnas de* $\mathbf{A}$ *que tienen las posiciones de los pivotes en* $\mathbf{F}$*. Por tanto,*

$$\mathbf{B}^\top\mathbf{A}\mathbf{F}^\top = \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 60 \end{bmatrix}$$

De donde,

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^\top(\mathbf{B}^\top\mathbf{A}\mathbf{F}^\top)^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}^\top$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{5}{18} & \dfrac{5}{90} \\ \dfrac{5}{90} & \dfrac{5}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & \frac{-1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.9. Producto Kronecker

Definición 8. *Sea $\boldsymbol{A}_{n\times m}$ y $\boldsymbol{B}_{p\times q}$, se define el producto directo Kronecker ($\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$) [2], como:*

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1m}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{nm}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

Propiedades

Sean **A,B,C** y **D** matrices de ordenes apropiados y λ escalar. Entonces:

1. $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}$
3. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$
4. $\lambda \otimes \mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} = \mathbf{A}\lambda$
5. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top \otimes \mathbf{B}^\top$
6. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$
7. $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-} = \mathbf{A}^{-} \otimes \mathbf{B}^{-}$

Si $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ y $\mathbf{B} \in M_{p\times p}$, entonces:

1. $tr(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A})tr(\mathbf{B})$
2. $rg(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = rg(\mathbf{A})rg(\mathbf{B})$
3. $|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^p|\mathbf{B}|^n$

2.2. Espacios vectoriales reales

2.2.1. Espacio vectorial

Definición 9. *Sea V un conjunto de elementos llamados vectores y $\mathbb{R}$ un cuerpo, a cuyos elementos se da el nombre de escalares. Se dice que V es un espacio vectorial si dispone de las operaciones suma y producto por escalar y satisfacen las siguientes propiedades[1]:*

1. La suma $(+)$

   a) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \qquad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V.$

   b) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u} \qquad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V.$

   c) $\exists\, \mathbf{0}\in V$(vector nulo) tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0} \qquad \forall\, \mathbf{u}\in V.$

   d) $\forall\, \mathbf{u}\in V, \exists\, -\mathbf{u}\in V,$ tal que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

2. El producto por escalar.
   Sea $\mathbf{v}\in V$, $\lambda\in K$, entonces:

   a) $\lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v} \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V \quad \forall\lambda\in K$

   b) $(\lambda+\mu)\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}+\mu\mathbf{u} \qquad \forall\mathbf{u}\in V \quad \forall\lambda,\mu\in K$

   c) $\lambda(\mu\mathbf{u})=(\lambda\mu)\mathbf{u} \qquad \forall\mathbf{u}\in V \quad \forall\lambda,\mu\in K$

   d) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$(1= unidad de K) $\quad \forall\in V$

2.2.2. Subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea U un subconjunto de V.

Definición 10. *Se dice que U es un subespacio vectorial de V, si cumplen con las siguientes propiedades:*

1. $U \neq \phi$

2. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.

3. $\lambda \in K, \mathbf{u} \in U \Rightarrow \lambda\mathbf{u} \in U$.

Observación 2.

1. *El vector nulo* $\mathbf{0}$ *pertenece a todos los subespacios de un espacio* V.

2. *Un espacio vectorial* V *tiene como subespacios, entre otros posibles, al conjunto* $0 = \{\mathbf{0}\}$, *formado sólo por el vector nulo, que se llama subespacio nulo. El propio espacio* V *es un subespacio de sí mismo. Los demás subespacios de* V, *distintos de* 0 *y* V, *se llaman subespacios propios.*

2.2.3. Dependencia lineal e independencia lineal

Definición 11. *Sea* V *un espacio vectorial sobre un cuerpo* K*; sea* $U = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_p}\}$ *un sistema de vectores de* V. *Se llaman combinaciones lineales de los vectores de* U *a los vectores* $\mathbf{v}$, *cuya forma son :*

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u_1}, \lambda_2\mathbf{u_2}, ..., \lambda_p\mathbf{u_p}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ *son escalares cualesquiera del cuerpo* K

Definición 12. *Se dice que* U *es linealmente independiente, si la única conbinación lineal entre ellos que vale* $\mathbf{0}$ *es la que tiene todos sus coeficientes nulos; esto es, si*

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + ... + \lambda_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0} \\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K) \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 =, ..., = \lambda_n = 0$$

Definición 13. *Se dice que* U *es un sistema linealmente dependiente si existen escalares* $\lambda_1, \lambda_, ..., \lambda_n$ *no todos nulos tales que*

$$\lambda_1\mathbf{u_1} + \lambda_2\mathbf{u_2} + ... + \lambda_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}$$

Se dice que un vector depende linealmente de otros si aquel es igual a una combinación lineal de éstos.

2.2.4. Propiedades de la dependencia lineal e independencia lineal

1. Dado un conjunto finito de vectores $U = \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ...\mathbf{u_n}$, es linealmente dependiente, sí y sólo si, alguno de sus vectores depende linealmente de los demás.

2. Dos sistemas de vectores $U = \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_r}$ y $W = \mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, ..., \mathbf{w_s}$ son equivalentes, sí y sólo si todo vector de uno de los sistemas depende linealmente de los vectores del otro, y recíprocamente.

3. Si V es un sistema linealmente independiente de vectores y $\mathbf{w}$ es un vector que no depende de V, entonces el sistema $V \cup \mathbf{w}$ es linealmente independiente.

Ejemplos de vectores independientes y dependientes.

1. Los vectores $\mathbf{u} = (-2, -1, 5); \mathbf{v} = (-1, 4, -2); \mathbf{w} = (-1, -2, 4)$, forman un sistema linealmente dependiente, ya que

$$-2(-2, -1, 5) + 1(-1, 4, -2) + 3(-1, -2, 4) = (0, 0, 0)$$

es decir $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v} + \lambda_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$, para $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, que no son todos nulo.

2. En $\mathbb{R}^3$, los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0), \mathbf{v} = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ son linealmente independientes. $\lambda_1\mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{w} + \lambda_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ esto es :

$$(\lambda_1, 0, 0) + (\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

donde la única solución es $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

2.2.5. Bases y dimensión

Definición 14. *Si V es un espacio vectorial finito, se dice que un sistema de vectores $B = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n})$ es una bases de V si se verifica la siguiente condición:*

B es un sistema generador de V y además es linealmente independiente.

Ejemplo 6. *El espacio vectorial de las matrices* $\mathbf{A} = [a_i j]$ *de* $\mathcal{M}_{n\times n}$ *tienen como base las matrices del tipo* $\mathbf{B} = \{E_{ij} | \, i, j = \overset{\frown}{1, \mathrm{n}}\}$, *donde* E_{ij} *es la matriz que tiene nulos todos sus elementos excepto el que ocupa el lugar* ij *que vale la unidad, en le caso de las matrices de orden* 2×2 *su base es según lo anterior*

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Definición 15. *A la cantidad de elementos que forman una base de un espacio vectorial, se le llama dimensión del espacio vectorial* V *y su notación es* $dim\, V$

Ejemplo 7. *En el ejemplo anterior la dimensión es:* $dim\, M_{2\times 2} = 4$.

Propiedades

Si $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p)$ es un sistema de vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces se verifica que:

1. Si $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p)$, es un sistema generador de V, entonces $p \geq dim\, V$.

2. Si $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p)$, es un sistema independiente, entonces $p \leq dim\, V$.

3. Si $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p)$ es un generador de V y $dim\, V = p$, entonces U es base del espacio V.

4. Si $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p)$ es independiente y $dim\, V = p$, entonces U es base del espacio de V.

Teorema 4. *Si* V *es un espacio vectorial de dimensión finita* n *y si* $S = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_p)$ *es un sistema independiente de* p *vectores de* V, *donde* $p < n$, *entonces es posible encontrar algún sistema* S' *de* $n - p$ *vectores de* V, *tal que* $S \cup S'$ *sea una base de* V.

2.2.6. Cambios de coordenadas

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, sobre un cuerpo K. Sea $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$ una base de V, en al que el sistema de coordenadas de un vector $\mathbf{x} \in V$ se denota por $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Sea $B' = (\mathbf{e_1}', \mathbf{e_2}', ..., \mathbf{e_n}')$ una nueva base de V, en al que el sistema de coordenadas de $\mathbf{x}$ es $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$.
Si se conocen los vectores de B' en función de los de B, es decir, si se conocen los escalares a_{ij} que permiten colocar:

$$\mathbf{e_j}' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e_i} \qquad (\text{para } j = 1, 2, ..., n)$$

Esto es,

$$\begin{cases} \mathbf{e_1}' &= a_{11}\mathbf{e_1} + a_{12}\mathbf{e_2} + ... + a_{n1}\mathbf{e_n} \\ \mathbf{e_2}' &= a_{21}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2} + ... + a_{n2}\mathbf{e_n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \mathbf{e_n}' &= a_{1n}\mathbf{e_1} + a_{2n}\mathbf{e_2} + ... + a_{nn}\mathbf{e_n} \end{cases}$$

entonces el sistema de coordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ valdrá, en función del $(x_1', x_2', ..., x_n')$:

$$x_i' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x_j}', \qquad \text{para } i = 1, 2, ..., n$$

o sea:

$$\begin{cases} x_1 &= a_{11}\mathbf{x_1}' + a_{12}\mathbf{x_2}' + ... + a_{n1}\mathbf{x_n}' \\ x_2 &= a_{21}\mathbf{x_1}' + a_{22}\mathbf{x_2}' + ... + a_{n2}\mathbf{x_n}' \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ x_n &= a_{1n}\mathbf{x_1}' + a_{2n}\mathbf{x_2}' + ... + a_{nn}\mathbf{x_n}' \end{cases}$$

Estas últimas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial como:

$$X = AX'$$

donde,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8. *Hallar las coordenadas del vector* $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *en la base,*

$$B' = \{(1, 2, 0); (-3, -7, 1); (0, -2, 1)\}$$

Resolución:
Como x, y, z *son las coordenadas de* $\mathbf{u}$ *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*, llamando* x_1, x_2, x_3 *a las coordenadas pedidas se tiene que:*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Luego de este sistema

$$X = AX'$$

despejamos A buscando su inversa, se calcula su determinante y si es distinto de cero tiene inversa la matriz

$$|\mathbf{A}| = 1$$

luego se calcula su inversa por uno de los dos métodos antes descrito.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

luego,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

entonces las coordenadas pedidas son:

$$\begin{cases} x_1 & = -5x + 3y + 6z \\ x_2 & = -2x + y + 2z \\ x_3 & = 2x - y - z \end{cases}$$

2.2.7. Ortogonalización de espacios vectoriales

Definición 16. *Producto interno*
Es el producto entre dos vectores n-dimensionales de un espacio vectorial y se calcula de la forma siguiente:
Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *y* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *entonces el producto interno entre* $\mathbf{x}$ *y* $\mathbf{y}$ *es*

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = (x, y)$$

Propiedades:
Sea $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ y $\mathbf{w} \in V$ y $a, b \in K$, se cumple:

$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$	conmutativa
$(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$	es positivo
$(a\mathbf{x}, b\mathbf{y}) = ab(\mathbf{x},\mathbf{y})$	asociatividad
$(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{z}) + (\mathbf{y},\mathbf{z})$	distributividad
$(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{w}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x},\mathbf{w}+\mathbf{z}) + (\mathbf{y},\mathbf{w}+\mathbf{z})$	linealidad

Ejemplo 9. *Sea* $\mathbf{x} = (2, 7, -8)$ *e* $\mathbf{y} = (6, -2, 3)$ *dos vectores de* $\mathbb{R}^3$*, calcular el producto interno* (x, y).
Luego,

$$(2 \cdot 6) + (7 \cdot -2) + (-8 \cdot 3) = -26$$

Definición 17. *Sea* V *un espacio vectorial. Para cualquier vector* $\mathbf{x} \in V$ *como* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$*, existe el siguiente número real* $\| \mathbf{x} \|$*, recibe el nombre de* ***norma*** *del vector* $\mathbf{x}$.

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

Propiedades:
Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores del espacio vectorial V y para $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$\| \mathbf{x} \| > 0$	para $\mathbf{x} \neq 0$; además $\| \mathbf{0} \| = 0$
$\| \lambda \mathbf{x} \| = \|\lambda\| \, \| \mathbf{x} \|$	
$\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\| \leq \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|$	desigualdad de Schwarz
$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$	desigualdad de Minkowski

Definición 18. *Vectores ortogonales*
Dos vectores distintos de cero $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *son* ***ortogonales*** $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})$*, si y sólo sí su producto interno es cero.*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Ejemplo 10. *Sea,*

$$\mathbf{x} = (1, 2, 4), \quad \mathbf{y} = (8, -2, -1)$$

entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*=0 ya que :*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1)(8) + (2)(-2) + (4)(-1) = 0$$

Definición 19. *Si la norma de un vectores uno, este vector se llama* ***ortonormal***

$$\| \mathbf{x} \| = 1$$

Ejemplo 11. *Si tomamos el vector* x *del ejemplo anterior su norma es:*

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

pero si se quiere tener un vector ortonormal sólo se tiene que dividir este vector por su norma, a este proceso se llama normalización de un vector.
Entonces un vector unitario es :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, 2, 4)$$

Ahora se calcula $\| \mathbf{v} \|$, *esto es :*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2 = 1$$

2.3. Diagonalización y matrices en estadística

2.3.1. Diagonalización

En álgebra lineal, a cada matriz cuadrada de orden $n \times n$ con coeficiente en K, se asocia un **polinomio característico**, este contiene una gran cantidad de información sobre la matriz la cual se ocupa en estudios estadísticos, los mas importantes son los valores propios, la traza y el determinante.

Definición 20. *Polinomio característico y valores propios:*
Sea la matriz $\mathbf{A}$ *sobre un cuerpo* K, *un valor propio de* $\mathbf{A}$ *en* K *es un escalar* λ *de* K, *tal que la matriz:*

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \quad \textit{es singular.}$$

Como λ *es un valor propio de* $\mathbf{A}$ *si y sólo sí* $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ *o en forma equivalente, si y sólo sí* $det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, *se puede construir la matriz* $(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ *con elementos polinómicos y considerar el polinomio* $f = (x\mathbf{I} - \mathbf{A})$. *En tal caso los valores propios de* $\mathbf{A}$ *en* K *son escalares* λ *tales que* $f(\lambda) = 0$, *por esta razón a* f *se le llama polinomio característico de* $\mathbf{A}$. *Es importante observar que* f *es un polinomio mónico de grado* n. *Lo cual es fácilmente comprobable por fórmula para el determinante de una matriz en términos de sus elementos. [4]*

Ejemplo 12. *Sea la matriz:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular los valores propios.

Solución
Por definición $(\mathbf{A} - x\mathbf{I})$, *entonces:*

$$\mathbf{A} - x\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

luego

$$\mathbf{A} - x\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$$

si el $det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = 0$, *el polinomio característico es:*

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= -x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$$

Los valores propios son las raíces de este polinomio.

$$= (x-2)(x-1)(x+1)$$

Luego los valores propios buscados son

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = -1$$

El concepto de vectores propios, se logra encontrando los valores propios.

Definición 21. *Sea* $f : V \to V$ *un endomorfismo. del espacio vectorial* V, *de dimensión finita* n; *y sea* K *el cuerpo de escalares. Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz cuadrada de* $n \times n$, *cuyos elementos pertenecen al cuerpo* K. *se dice que las formas diagonales de* f *y* $\mathbf{A}$ *son:*

- *La matriz de* f *es diagonal en una base* $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n})$ *de* V, *se forma uniendo bases de los subespacios propios de* f; *la matriz diagonal es :*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  Donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *son los valores propios de* f.

- *La forma diagonal de la matriz* $\mathbf{A}$ *es la misma matriz* $\mathbf{D}$, *donde se tiene la siguiente igualdad:*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P^{-1}AP}$$

  Donde la columnas de $\mathbf{P}$ *son las coordenadas de los vectores de las bases de los respectivos subespacios propios de* $\mathbf{A}$, *los cuales se encuentran a partir de los valores propios. [1]*

Definición 22. *Un espacio propio es un espacio formado por todos los vectores propios del mismo valor propio, además del vector nulo, que no es un vector propio.*

Definición 23. *Para cada espacio vectorial* V, V *es un subespacio de sí mismo y el conjunto vacio (*ϕ *o espacio nulo), es un subespacio de* V. *Los subespacios distintos* V *y* ϕ *se denominan **subespacios propios**.*

Ejemplo 13. *Sea un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 10z, 2x + y + 10z, -x - y - 6z)$$

para encontrar nuestra matriz asociada a muestra función, se aplica cambio de coordenadas, en este caso con respecto a la base canónica. esto es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

luego,

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 10 \\ 2 & 1-x & 10 \\ -1 & -1 & -6-x \end{vmatrix}$$

el polinomio característico es:

$$-x^3 - 4x^2 - 5x - 2$$

y sus valores propios son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = -2$$

Los subespacios propios $V_\lambda = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$, entonces:

$$\mathbf{V_{\lambda=-1}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & 10 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores propios de $V_{\lambda=-1}$ están formado por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 5z = 0\}$$

donde se concluye que:

$$v_1 = (-1, 1, 0); \qquad v_2 = (-5, 0, 1)$$

La dimensión del espacio generado por $V_{\lambda=-1}$ es dos, como estamos trabajando en $\mathbb{R}^3$ y este tiene dimensión tres, el espacio generado por $V_{\lambda=-2}$ debe ser uno.
Luego

$$V_{\lambda=-2} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

esto es:

$$V_{\lambda=-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 5z = 0\}$$

donde:

$$v_3 = (-2, -2, 1)$$

entonces nuestra matriz es:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así $\mathbf{D} = \mathbf{P^{-1}AP}$ *es*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 10 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2. Matrices en estadística

Las matrices son fundamentales para el estudio de la estadística; las mas utilizadas son la matriz de datos, matriz de covarianza, matriz de correlación.

Matriz de datos

Definición 24. *Es en la cual en sus filas se ubican objetos o sujetos y en sus columnas variables.*

$$\begin{array}{cccccc} & & & Variables & & \\ \hline Objetos & 1 & \ldots & j & \ldots & n \\ \hline 1 & X_{11} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1n} \\ 2 & X_{21} & \cdots & X_{2j} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i & X_{i1} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m & X_{m1} & \cdots & X_{mj} & \cdots & X_{mn} \end{array}$$

Matriz de covarianza

Definición 25. *La covarianza es una medida de dispersión que se relacionan dos o mas variables en estadística .*
La covarianza $S(X,Y)$ de dos variables aleatorias X e Y se define como:

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i,j}^{n} x_{i.}y_{.j}n_{ij} - \overline{xy}.$$

1. *Si $S_{xy} > 0$, hay dependencia directa o positiva, es decir, a grandes valores de x corresponden grandes valores de y.*

2. *Si $S_{xy} = 0$, una covarianza 0 se interpreta como la no existencia de una relación lineal entre las dos variables estudiadas.*

3. *Si $S_{xy} < 0$, hay dependencia inversa o negativa, es decir, a grandes valores de x corresponden pequeños valores de y.*

La matriz de covarianza de dos variables aleatorias n-dimensional expresadas como vectores $X = (X_1, ..., X_n)^\top$ e $Y = (Y_1, ..., Y_n)^\top$ los cuales son matrices de dimensión $n \times 1$. Se define como:

$$S_{XY} = \mathrm{E}([X - \mathrm{E}(X)][Y - \mathrm{E}(Y)]^\top) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Donde E es la esperanza matemática.

Matriz de correlación

La correlación se usa para determinar la relación que existe entre dos o mas variables.

Definición 26. *La matriz de correlación esta compuesta por variables independientes o explícitas las cuales se ubican en una tabla de doble entrada que muestra una lista multivariable horizontalmente y la misma lista verticalmente, y con su correspondiente coeficiente de correlación(**r**) entre las variables, este coeficiente esta entre 0 y 1; esta matriz nos muestra la interdependencia entre las variables. La matriz de correlación de denota como $\mathbf{R}$ esta se define como:*

$$\mathbf{R} = \mathbf{D^{-1}SD^{-1}}$$

donde,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &= \begin{bmatrix}
\dfrac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{12}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\
\dfrac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \dfrac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \dfrac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \dfrac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\
\rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego $\mathbf{D}$ *es una matriz donde en su diagonal se encuentran la desviación standard y el resto son cero.[5]*

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix}
\sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}}
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix}
\dfrac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}}
\end{bmatrix}
$$

Ejemplo 14. *con la siguiente base de datos se desea saber la varianza y correlación que existe con respecto de sus variables.*

A	*72*	*60*	*56*	*41*	*32*
B	*66*	*53*	*57*	*29*	*32*

La matriz $\mathbf{X}$ *es:*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 72 & 66 \\ 60 & 53 \\ 56 & 57 \\ 41 & 29 \\ 32 & 32 \end{bmatrix}$$

Luego se sabe:

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})^\top = \frac{1}{n}\sum_{i,j}^{n} x_i x_i - \overline{x}\overline{x}^\top$$

Pero $\mathbf{S}$ *se puede escribir como.*

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top\mathbf{X} - \bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^\top = \frac{1}{n}\left(\mathbf{X}^\top\mathbf{X} - \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\mathbf{X}\right)$$

entonces,

$$\frac{1}{n}\left(\mathbf{X}^\top\mathbf{X} - \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\mathbf{X}\right) = \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top)\mathbf{X}$$

donde se define la matriz $\mathbf{H}$ *como la matriz de centrado :*

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$$

donde ésta matriz $\mathbf{H}$ *es simétrica idempotente esto es*

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\top \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H^2}$$

luego,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^\top\mathbf{H}\mathbf{X}$$

Entonces como la matriz de datos es de dimensión 2×5 *la matriz* $\mathbf{H}$ *es:*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5\times 5} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{5\times 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 5}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

la matriz de covarianza es :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 72 & 60 & 56 & 41 & 32 \\ 66 & 53 & 57 & 29 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 72 & 66 \\ 60 & 53 \\ 56 & 57 \\ 41 & 29 \\ 32 & 32 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \dfrac{5004}{5} & \dfrac{4828}{5} \\ & \\ \dfrac{4828}{5} & \dfrac{5226}{5} \end{bmatrix} \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1000,8 & 965,6 \\ 965,6 & 1045,2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta matriz **S** *representa la variabilidad entre A y B. Esta matriz es fácil de obtener y a su vez entender, también se encuentra incorporada la matriz diagonal, la cual es representada por* **D** *y en esta se encuentra la varianza correspondiente a cada variable en esta matriz se tiene que*

1. a_{11} *representa la varianza de la variable A.*

2. a_{22} *representa la varianza de la variable B.*

3. $a_{12} = a_{21}$ *representa la variabilidad que existe entre la variable A Y B.*

La matriz de correlación es $\mathbf{R} = \mathbf{D^{-1}SD^{-1}}$
Entonces,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{1000,8} & 0 \\ 0 & \sqrt{1045,2} \end{bmatrix}$$

luego:

$$\mathbf{D^{-1}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1000,8}} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1045,2}} \end{bmatrix}$$

ahora,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1000,8}} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1045,2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000,8 & 965,6 \\ \\ 965,6 & 1045,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1000,8}} & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1045,2}} \end{bmatrix}$$

Para los cálculos se ocupara 4 decimales de aproximación, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0{,}0316 & 0 \\ \\ 0 & 0{,}0309 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000,8 & 965,6 \\ \\ 965,6 & 1045,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0316 & 0 \\ \\ 0 & 0{,}0309 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0{,}9428 \\ 0{,}9428 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se puede observar que existe una fuerte relación entre las dos variables ya que se relacionan en un 94,28 %.

En estadística se tiene matrices de dimensiones muy grandes lo cual sería muy difícil de calcular sin ayuda de un software por lo que los ejemplos de esta sección son sólo para mostrar como se aplica la teoría en estadística. En la sección siguiente se realizarán ejercicios con matrices de mayor tamaño con ayuda del software MATA.

Capítulo 3

Mata

Mata es un software matemático de Stata, es un lenguaje de programación matricial, de fácil utilización y es interactivo mediante archivos do-ado-archivo.

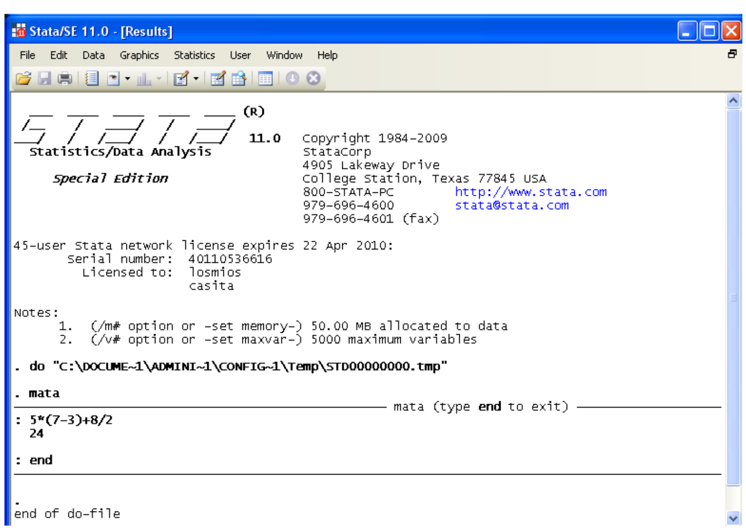
3.1. Comandos básicos

Para ocupar Mata tenemos que primero abrir la ventana de Stata :

1. Escribir mata.

2. Hacer los cálculos y apretar enter.

3. Para salir solo escribir “end”.



Las operaciones básicas en Mata se escriben en forma sencilla y los resultados se dan en la linea siguiente.

Ejemplo 15. *Para la suma y resta se tiene*

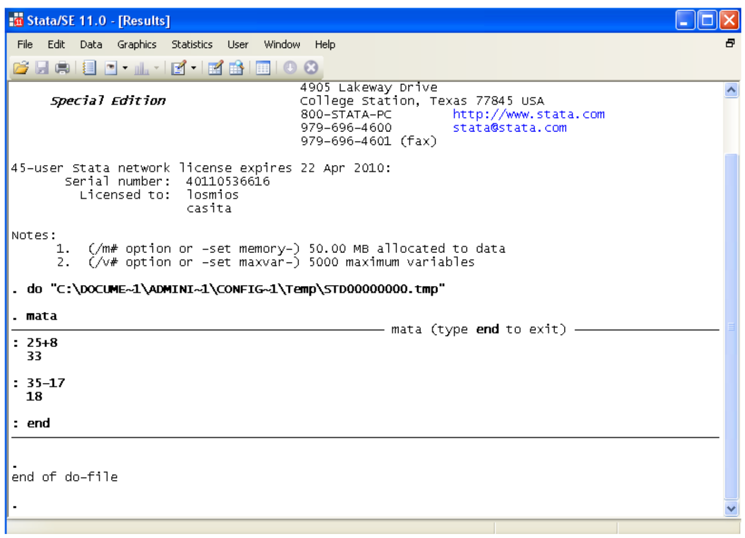
1. *Se escribe Mata en Command.*

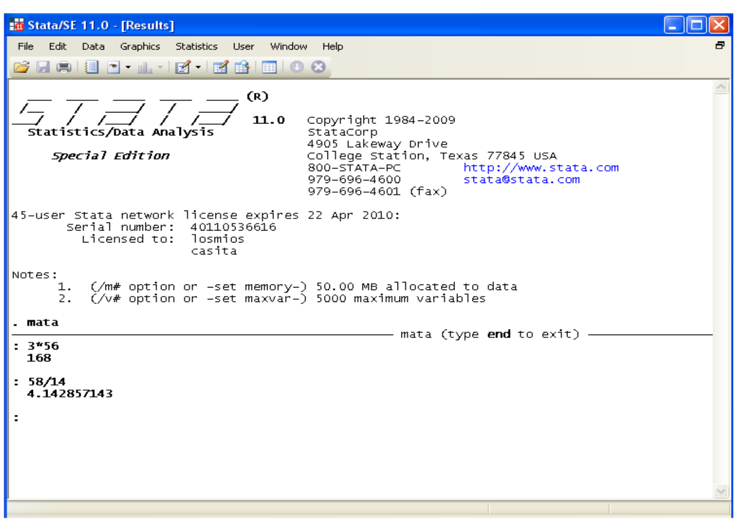
2. *luego, la operación matemática "28+5" y se presiona "enter".*

3. *El resultado aparecerá en la linea siguiente de la pantalla principal.*

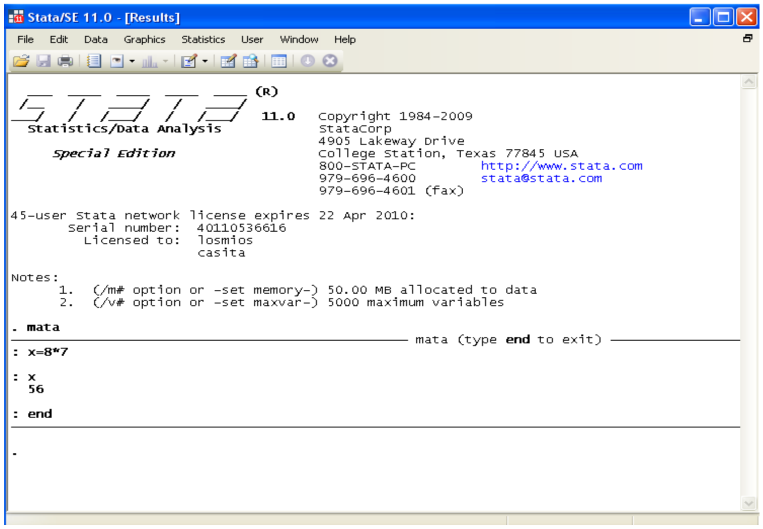
4. *Para salir de Mata.*

5. *En la operación resta, multiplicación y division se hace de la misma forma.*

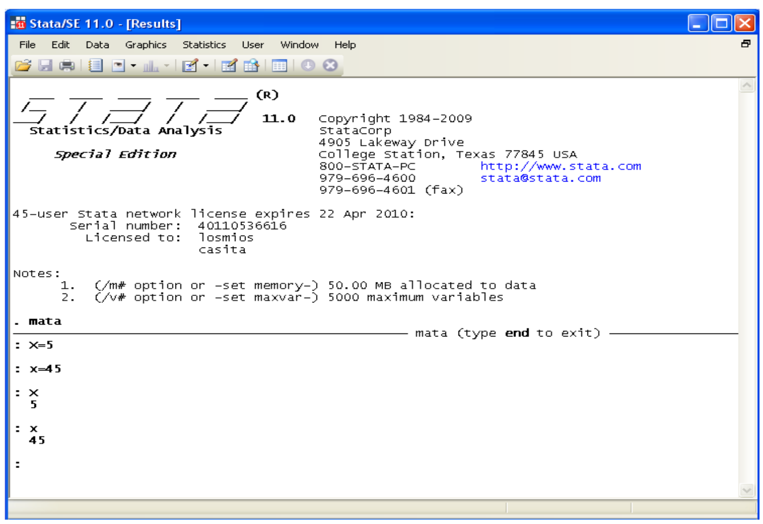




Para designar una variable se designa mediante el signo de igualdad.



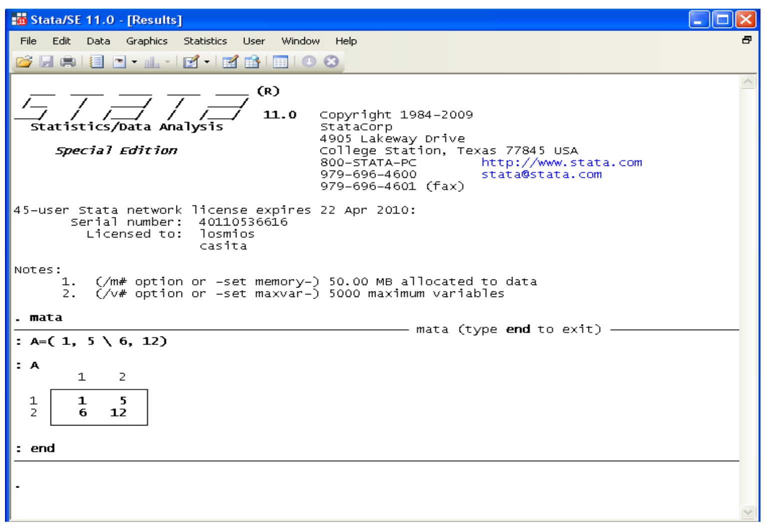
Mata diferencia mayúsculas y minúsculas, por ejemplo “X” es diferente a “x”



3.2. Matrices en Mata

Para trabajar con matrices en Mata su notación es sencilla:

1. Se escribe en command mata.
2. La matriz se escribe de la forma A=(1,5 \ 6, 12); donde las comas dan el lugar en la matriz y " \ " es el salto a la fila siguiente; para ver si la variable esta bien designada solo se anota la variable en este caso "A".
3. y si se quiere salir de Mata se escribe "end".

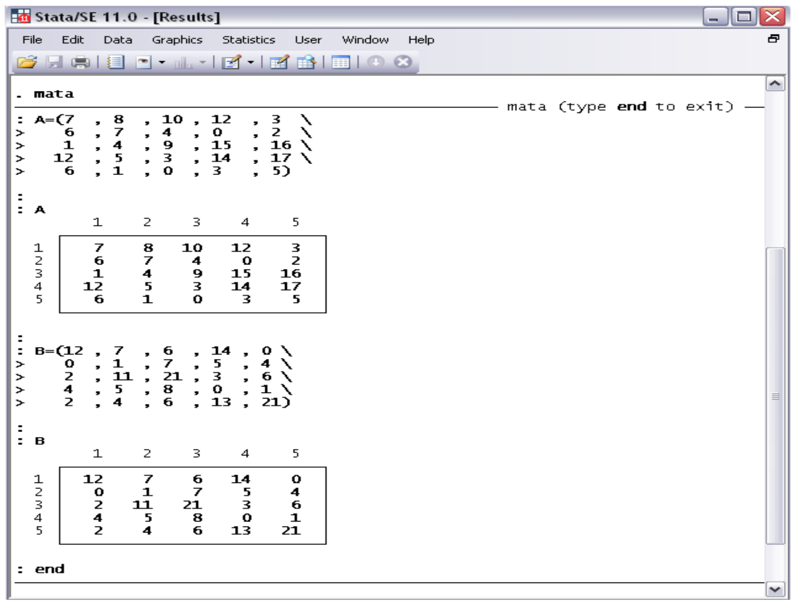


Las diferentes operaciones de matrices como suma, resta, multiplicación, inversa, determinante se detallan a continuación, ya que para trabajar Mata es muy sensillo.

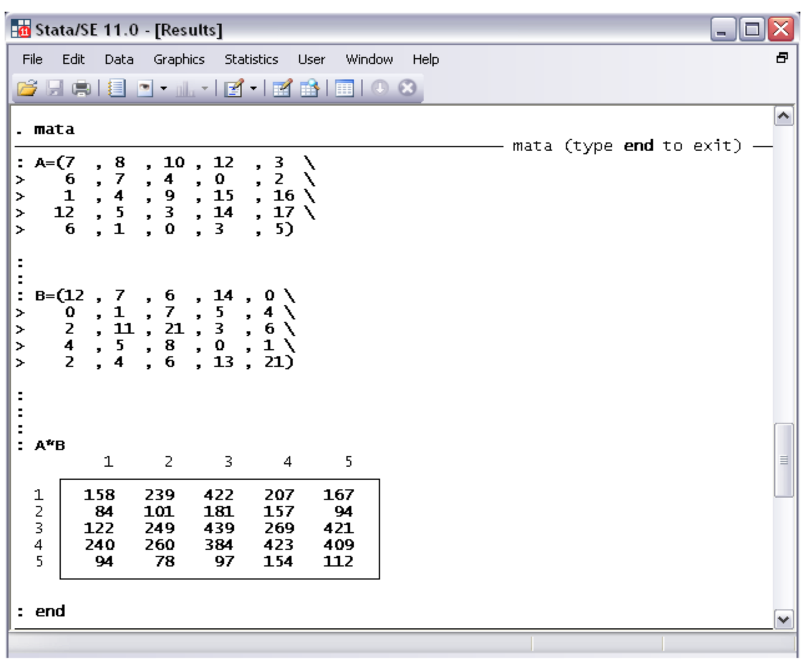
Ejemplo 16. *Sea* $\mathbf{A}_{5\times5}$ *y* $\mathbf{B}_{5\times5}$*, donde:*

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 10 & 12 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 15 & 16 \\ 12 & 5 & 3 & 14 & 17 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 & 14 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 11 & 21 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 13 & 21 \end{bmatrix}$$

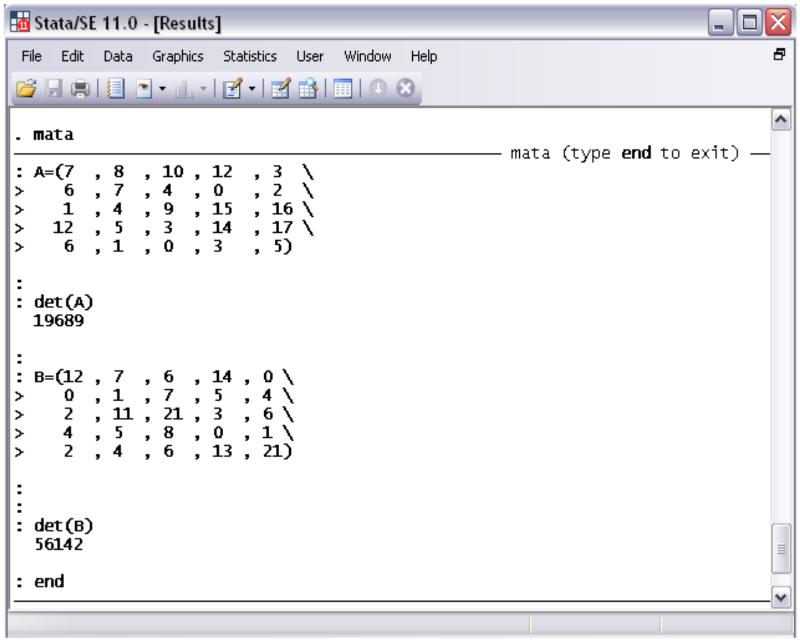
Escribimos en Mata las matrices **A** *y* **B**



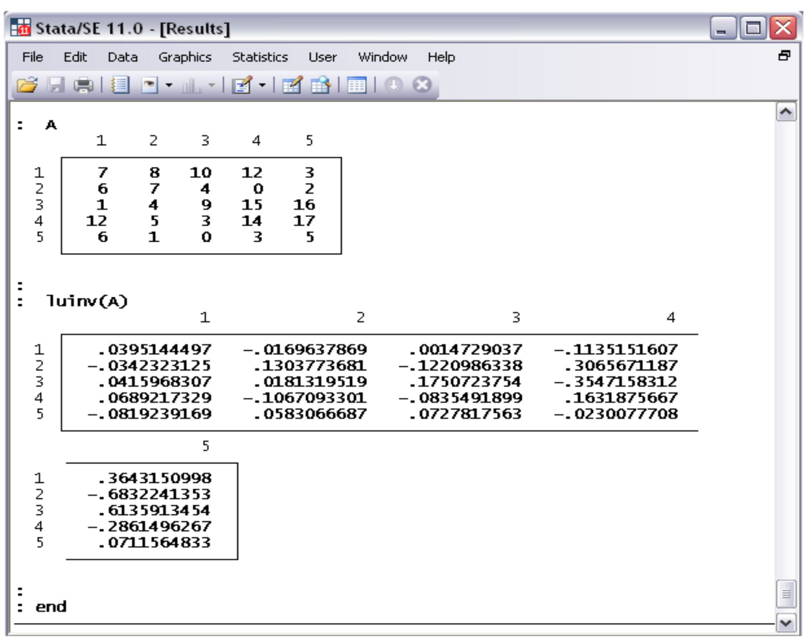
Luego como ya las variables están designadas solo se hacen las operaciones con las variables, de la forma siguiente:



aquí se muestra una multiplicación.
Para el determinante ocupamos la sentencia "det()".

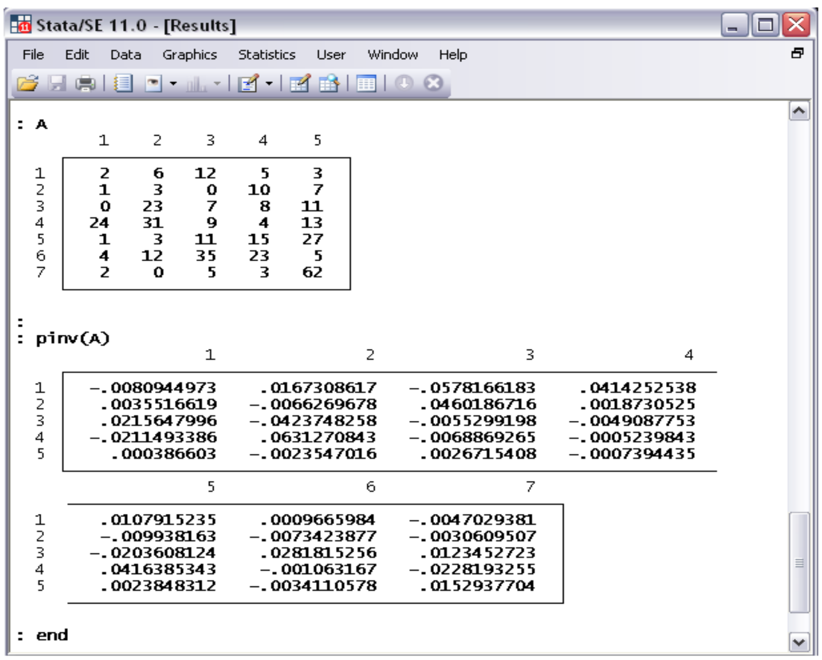


El deteminante de una matriz en Mata se calcula con la sentencia "luinv()", los elementos de la matriz Mata estarán en forma decimal.



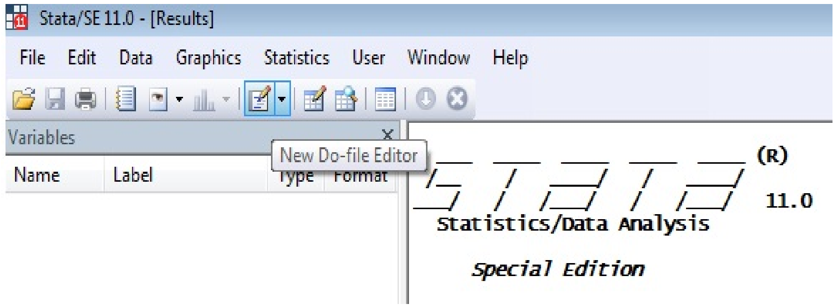
$$Sea\ A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 10 & 7 \\ 0 & 23 & 7 & 8 & 11 \\ 24 & 31 & 9 & 4 & 13 \\ 1 & 3 & 11 & 15 & 27 \\ 4 & 12 & 35 & 23 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 62 \end{bmatrix}$$

calcule si es posible la inversa generalizada.
Anteriormente se describió el método para calcular la inversa generalizada para matrices no cuadradas. En Mata esta inversa se realiza con el siguiente comando "pinv()".
Así nuestra inversa es:

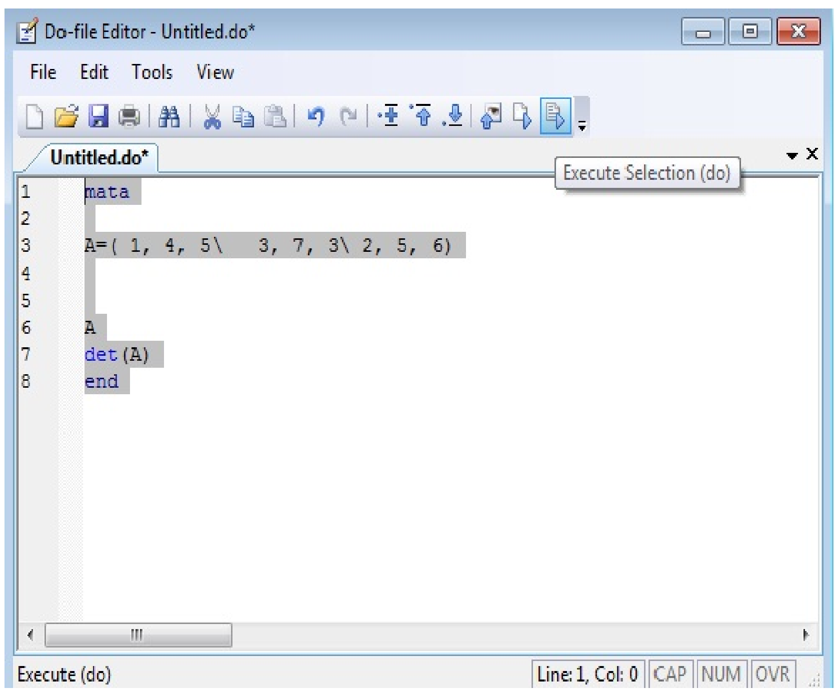


3.2.1. Archivos .do

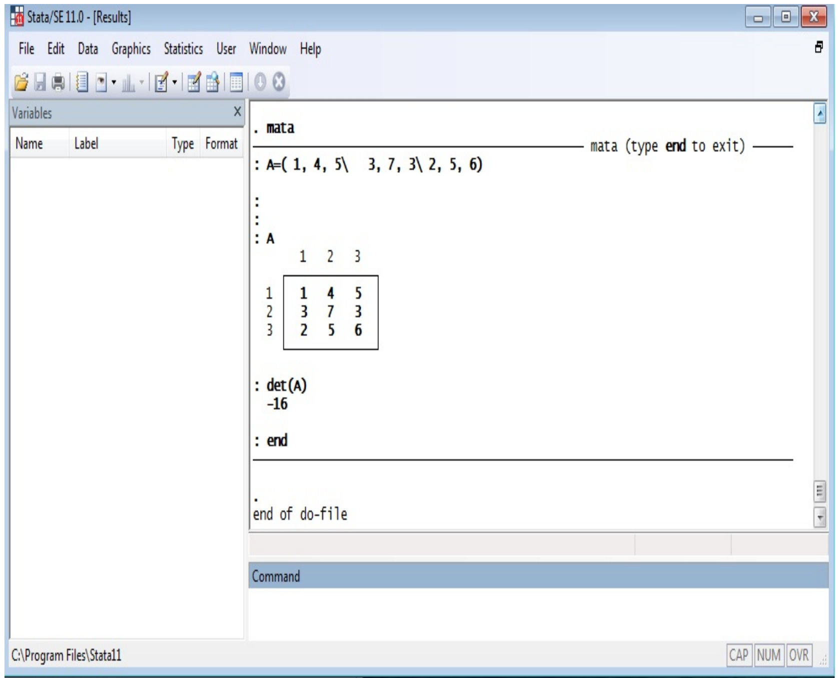
En MATA también se pueden trabajar con una extensión de archivo .do, el cual nos permite trabajar, guardar cambios y editar los distintos tipos de ejercicios que dejamos guardados en esta extensión. Para abrir la ventana de la extensión del archivo.do, se tiene que hacer click en el icono **new do file**,



en la nueva ventana se realizan los cálculos que se necesitan.



se ejecuta en el icono **execute selection do**, y el resultado aparecerá en la pantalla principal.



3.3. Aplicación

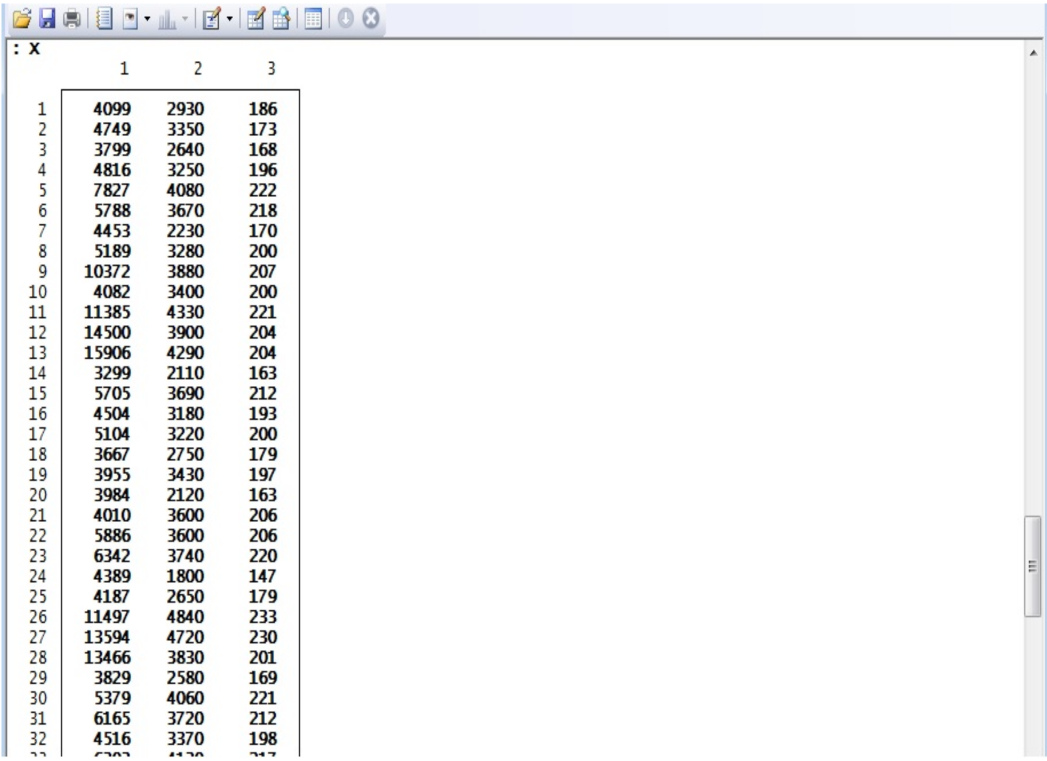
Ejemplo 17. *En la siguiente tabla se muestran diferentes tipos de autos con su precio y características.*
Se quiere saber cual es la relación que tienen las diferentes marcas de autos con respecto al largo, ancho y precio.

Características de marcas de vehículos

make	*price*	*headroom*	*trunk*	*weight*	*length*	*turn*	*displacement*
AMC Concord	4099	2.5	11	2930	186	40	121
AMC Pacer	4749	3.0	11	3350	173	40	258
AMC Spirit	3799	3.0	12	2640	168	35	121
Buick Century	4816	4.5	16	3250	196	40	196
Buick Electra	7827	4.0	20	4080	222	43	350
Buick LeSabre	5788	4.0	21	3670	218	43	231
Buick Opel	4453	3.0	10	2230	170	34	304
Buick Regal	5189	2.0	16	3280	200	42	196
Buick Riviera	10372	3.5	17	3880	207	43	231
Buick Skylark	4082	3.5	13	3400	200	42	231
Cad. Deville	11385	4.0	20	4330	221	44	425
Cad. Eldorado	14500	3.5	16	3900	204	43	350
Cad. Seville	15906	3.0	13	4290	204	45	350
Chev. Chevette	3299	2.5	9	2110	163	34	231
Chev. Impala	5705	4.0	20	3690	212	43	250
Chev. Malibu	4504	3.5	17	3180	193	31	200
Chev. Monte Carlo	5104	2.0	16	3220	200	41	200
Chev. Monza	3667	2.0	7	2750	179	40	151
Chev. Nova	3955	3.5	13	3430	197	43	250
Dodge Colt	3984	2.0	8	2120	163	35	98
Dodge Diplomat	4010	4.0	17	3600	206	46	318
Dodge Magnum	5886	4.0	17	3600	206	46	318
Dodge St. Regis	6342	4.5	21	3740	220	46	225
Ford Fiesta	4389	1.5	9	1800	147	33	98
Ford Mustang	4187	2.0	10	2650	179	43	140
Linc. Continental	11497	3.5	22	4840	233	51	400
Linc. Mark V	13594	2.5	18	4720	230	48	400
Linc. Versailles	13466	3.5	15	3830	201	41	302
Merc. Bobcat	3829	3.0	9	2580	169	39	140
Merc. Cougar	5379	3.5	16	4060	221	48	302
Merc. Marquis	6165	3.5	23	3720	212	44	302
Merc. Monarch	4516	3.0	15	3370	198	41	250
Merc. XR-7	6303	3.0	16	4130	217	45	302
Merc. Zephyr	3291	3.5	17	2830	195	43	140
Olds 98	8814	4.0	20	4060	220	43	350

make	*price*	*headroom*	*trunk*	*weight*	*length*	*turn*	*displacement*
Olds Cutl Supr	*5172*	*2.0*	*16*	*3310*	*198*	*42*	*231*
Olds Cutlass	*4733*	*4.5*	*16*	*3300*	*198*	*42*	*231*
Olds Delta 88	*4890*	*4.0*	*20*	*3690*	*218*	*42*	*231*
Olds Omega	*4181*	*4.5*	*14*	*3370*	*200*	*43*	*231*
Olds Starfire	*4195*	*2.0*	*10*	*2730*	*180*	*40*	*151*
Olds Toronado	*10371*	*3.5*	*17*	*4030*	*206*	*43*	*350*
Plym. Arrow	*4647*	*2.0*	*11*	*3260*	*170*	*37*	*156*
Plym. Champ	*4425*	*2.5*	*11*	*1800*	*157*	*37*	*86*
Plym. Horizon	*4482*	*4.0*	*17*	*2200*	*165*	*36*	*105*
Plym. Sapporo	*6486*	*1.5*	*8*	*2520*	*182*	*38*	*119*
Plym. Volare	*4060*	*5.0*	*16*	*3330*	*201*	*44*	*225*
Pont. Catalina	*5798*	*4.0*	*20*	*3700*	*214*	*42*	*231*
Pont. Firebird	*4934*	*1.5*	*7*	*3470*	*198*	*42*	*231*
Pont. Grand Prix	*5222*	*2.0*	*16*	*3210*	*201*	*45*	*231*
Pont. Le Mans	*4723*	*3.5*	*17*	*3200*	*199*	*40*	*231*
Pont. Phoenix	*4424*	*3.5*	*13*	*3420*	*203*	*43*	*231*
Pont. Sunbird	*4172*	*2.0*	*7*	*2690*	*179*	*41*	*151*
Audi 5000	*9690*	*3.0*	*15*	*2830*	*189*	*37*	*131*
Audi Fox	*6295*	*2.5*	*11*	*2070*	*174*	*36*	*97*
BMW 320i	*9735*	*2.5*	*12*	*2650*	*177*	*34*	*121*
Datsun 200	*6229*	*1.5*	*6*	*2370*	*170*	*35*	*119*
Datsun 210	*4589*	*2.0*	*8*	*2020*	*165*	*32*	*85*
Datsun 510	*5079*	*2.5*	*8*	*2280*	*170*	*34*	*119*
Datsun 810	*8129*	*2.5*	*8*	*2750*	*184*	*38*	*146*
Fiat Strada	*4296*	*2.5*	*16*	*2130*	*161*	*36*	*105*
Honda Accord	*5799*	*3.0*	*10*	*2240*	*172*	*36*	*107*
Honda Civic	*4499*	*2.5*	*5*	*1760*	*149*	*34*	*91*
Mazda GLC	*3995*	*3.5*	*11*	*1980*	*154*	*33*	*86*
Peugeot 604	*12990*	*3.5*	*14*	*3420*	*192*	*38*	*163*
Renault Le Car	*3895*	*3.0*	*10*	*1830*	*142*	*34*	*79*
Subaru	*3798*	*2.5*	*11*	*2050*	*164*	*36*	*97*
Toyota Celica	*5899*	*2.5*	*14*	*2410*	*174*	*36*	*134*
Toyota Corolla	*3748*	*3.0*	*9*	*2200*	*165*	*35*	*97*
Toyota Corona	*5719*	*2.0*	*11*	*2670*	*175*	*36*	*134*
VW Dasher	*7140*	*2.5*	*12*	*2160*	*172*	*36*	*97*
VW Diesel	*5397*	*3.0*	*15*	*2040*	*155*	*35*	*90*
VW Rabbit	*4697*	*3.0*	*15*	*1930*	*155*	*35*	*89*
VW Scirocco	*6850*	*2.0*	*16*	*1990*	*156*	*36*	*97*
Volvo 260	*11995*	*2.5*	*14*	*3170*	*193*	*37*	*163*

Se realiza la matriz $X_{74\times 3}$ en MATA con los datos seleccionados.



: X

	1	2	3
1	4099	2930	186
2	4749	3350	173
3	3799	2640	168
4	4816	3250	196
5	7827	4080	222
6	5788	3670	218
7	4453	2230	170
8	5189	3280	200
9	10372	3880	207
10	4082	3400	200
11	11385	4330	221
12	14500	3900	204
13	15906	4290	204
14	3299	2110	163
15	5705	3690	212
16	4504	3180	193
17	5104	3220	200
18	3667	2750	179
19	3955	3430	197
20	3984	2120	163
21	4010	3600	206
22	5886	3600	206
23	6342	3740	220
24	4389	1800	147
25	4187	2650	179
26	11497	4840	233
27	13594	4720	230
28	13466	3830	201
29	3829	2580	169
30	5379	4060	221
31	6165	3720	212
32	4516	3370	198

Para calcular la matriz de correlación es:

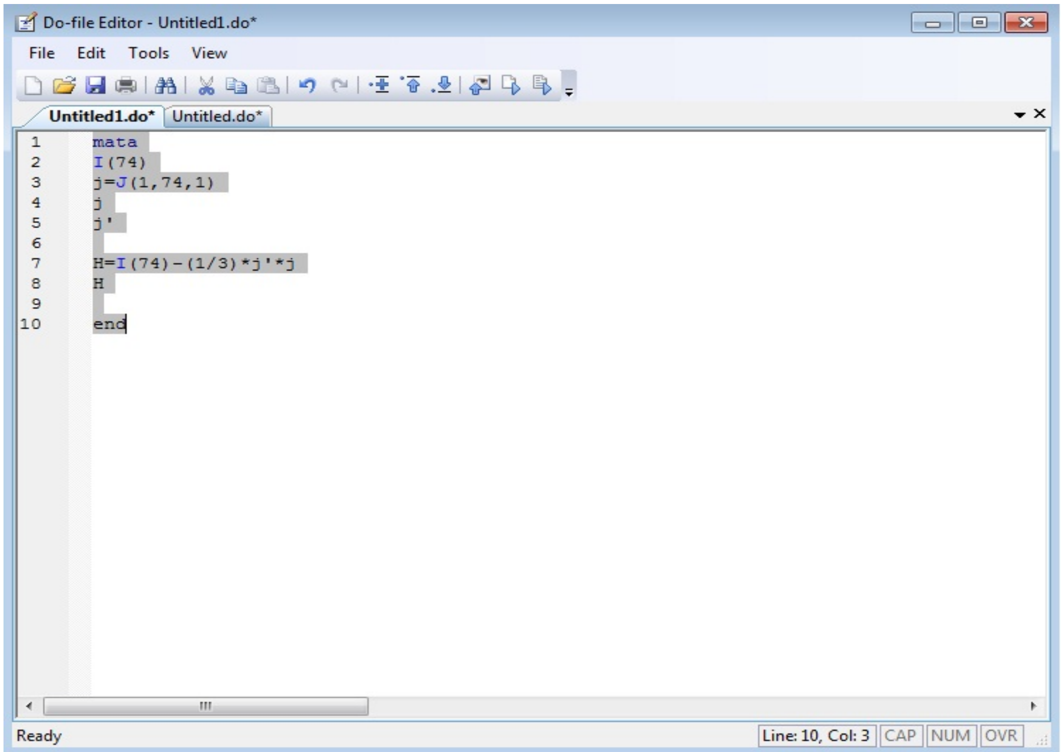
$$\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}^{-1} \qquad ;$$

se necesita una matriz $\boldsymbol{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n}\mathbf{X}^{\top}\mathbf{H}\mathbf{X}$$

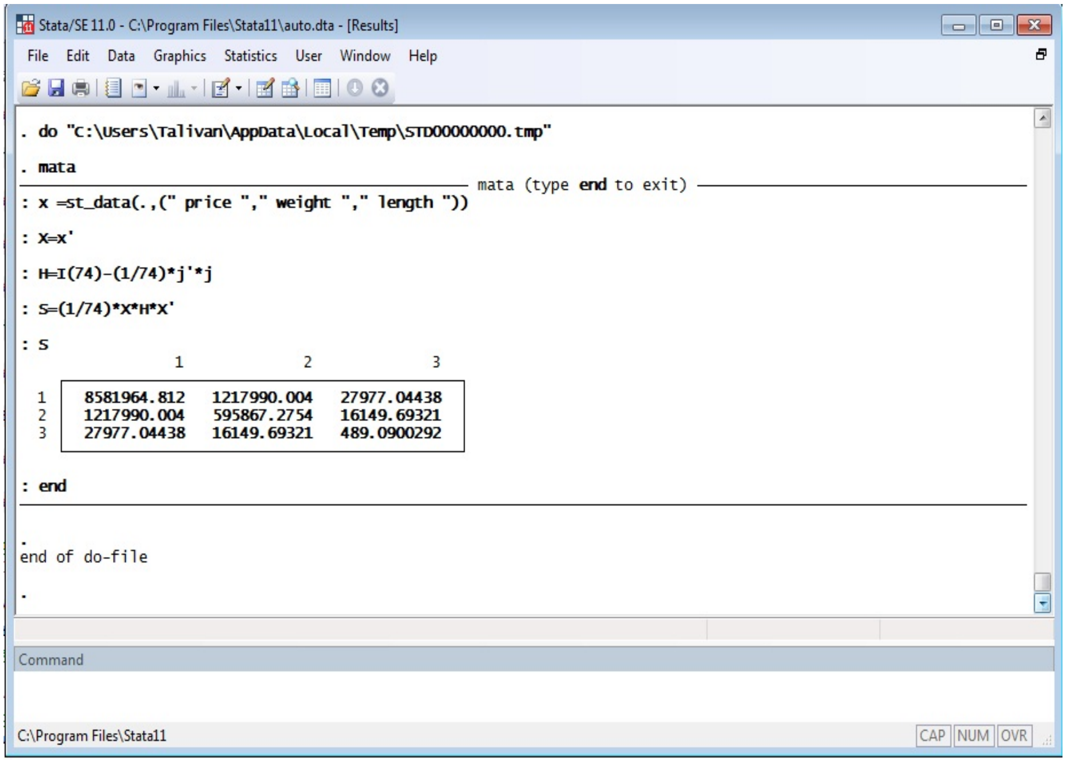
Entonces $\mathbf{H}$ *en el archivo .do es*

```
mata
I(74)                  */matriz identidad
j=J(1,74,1)            */matriz de unos
j
j'                     */matriz de unos traspuesta

H=I(74)-(1/3)*j'*j
H                      */matriz H

end
```



Luego para calcular la matriz **S** *se ocupan los siguientes comandos:*

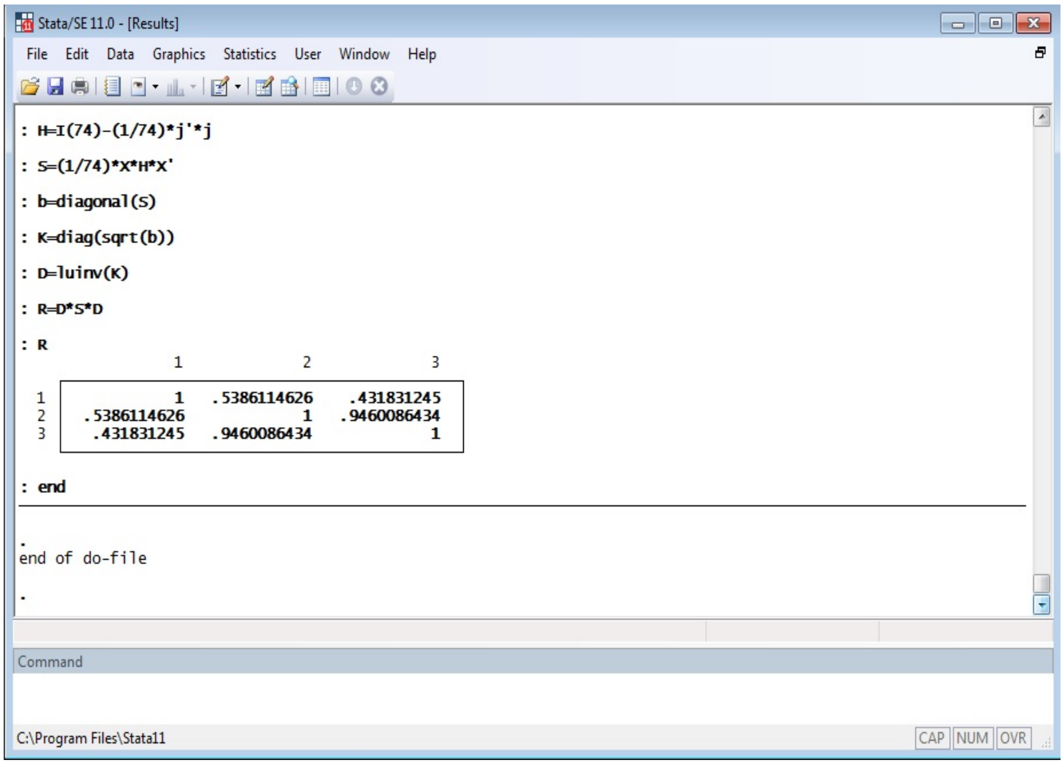
```
mata
x = st data(.,("price ","weight ","length "))    */archivo de datos
X=x'
X                                                */matriz de datos
I(74)                                            */matriz identidad
j=J(1,74,1)                                      */matriz de unos
j
j'                                               */matriz de unos traspuesta

H=I(74)-(1/74)*j'*j
H                                                */matriz H
S=(1/74)*X*H*X'
S                                                */matriz S
end
```



La matriz **S** *representa la variabilidad entre las variables price, weight, length. Para calcular la matriz de correlación* **R** *se escribe en el archivo .do el código:*

```
mata
x =st data(.,(”price ”,”weight ”,”length ”))
X=x’
H=I(74)-(1/74)*j’*j
S=(1/74)*X*H*X’
S
b=diagonal(S)                  */toma los datos de la diagonal

K=diag(sqrt(b))                */calcula la raiz cuadrada de la diagonal de la matriz
K
D=luinv(K)                     */es la inversa de la matriz
D
R=D*S*D                        */matriz de correlación
R
end
```

donde la matriz de correlación resultante es:



Donde se puede apreciar que la correlación entre precio-largo y precio-ancho es baja; en cambio existe una correlación alta, entre ancho-largo.

Ejemplo 18. *La tabla pertenece a notas y puntajes de alumnos de un colegio particular subvencionado de la Quinta región, en la cual se muestran los resultados de las asignaturas que tienes directa relación con las pruebas de selección universitaria que se muestran con sus resultados.*

NOTAS Y PUNTAJES PSU															
Alumno	LENGUA CASTELLANA	IDIOMA EXTRANJERO	MATEMÁTICA	HISTORIA Y CS	BIOLOGÍA	FÍSICA	Prom. Final	Promedio EM	Puntaje por promedio	Puntaje PSU Lenguaje	Puntaje PSU Matemática	Puntaje PSU CS	Puntaje PSU Cinecias	Promedio PSU
A	5,3	7,0	4,5	6,0	5,5	5,0	6,0	6,1	641	569	432	574	442	500.5
B	5,3	7,0	6,3	6,1	5,0	5,3	6,2	5,7	558	614	535	592	503	574.5
C	6,0	6,1	5,0	6,4	6,0	5,4	6,2	6,2	661	530	505	538	503	517.5
D	6,0	6,2	6,3	6,3	6,1	6,0	6,4	6,2	661	591	657	484	563	624.0
E	5,2	5,1	3,6	6,0	4,8	5,0	5,5	5,4	496	443	399	542	410	421.0
F	6,3	7,0	7,0	7,0	7,0	6,3	6,8	6,7	764	646	601	0	468	623.5
G	5,0	5,7	4,2	5,8	5,4	4,8	6,0	5,7	558	619	512	565	524	565.5
H	6,5	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	826	660	627	609	648	643.5
I	4,8	6,4	6,1	5,6	6,1	5,8	6,1	6,0	620	585	580	479	477	582.5
J	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	6,5	7,0	6,8	785	675	604	574	571	639.5
K	5,4	5,7	4,8	5,4	5,8	5,5	6,0	5,9	599	530	535	435	487	532.5
L	6,5	7,0	6,5	6,5	6,5	6,0	6,7	6,6	744	619	563	502	535	591.0
M	4,0	5,7	4,5	5,1	5,1	5,2	5,3	5,4	496	299	432	360	272	365.5
N	5,2	6,0	6,0	6,0	5,8	5,5	6,2	6,1	641	484	490	443	455	487.0
O	4,1	6,0	4,0	5,2	5,5	5,4	5,3	5,3	476	299	334	373	427	316.5
P	6,0	6,3	6,1	6,5	6,0	6,0	6,3	6,3	682	602	497	443	468	549.5
Q	5,0	7,0	7,0	6,3	6,0	7,0	6,4	5,5	517	490	539	528	442	514.5
R	4,5	6,3	5,0	5,2	5,5	5,0	5,8	6,0	620	477	432	268	348	454.5
S	5,2	7,0	7,0	6,3	6,0	5,4	6,3	6,1	641	580	630	443	535	605.0

Se quiere saber si existe una relación entre las notas de enseñanza media de las asignaturas de lenguaje y comunicación, matemática y el promedio de la prueba de selección universitaria.
Se escribe la matriz con las variables con las que se va a trabajar el problema en el archivo .do en este caso las columnas de Lenguaje, Matemática y promedio PSU.

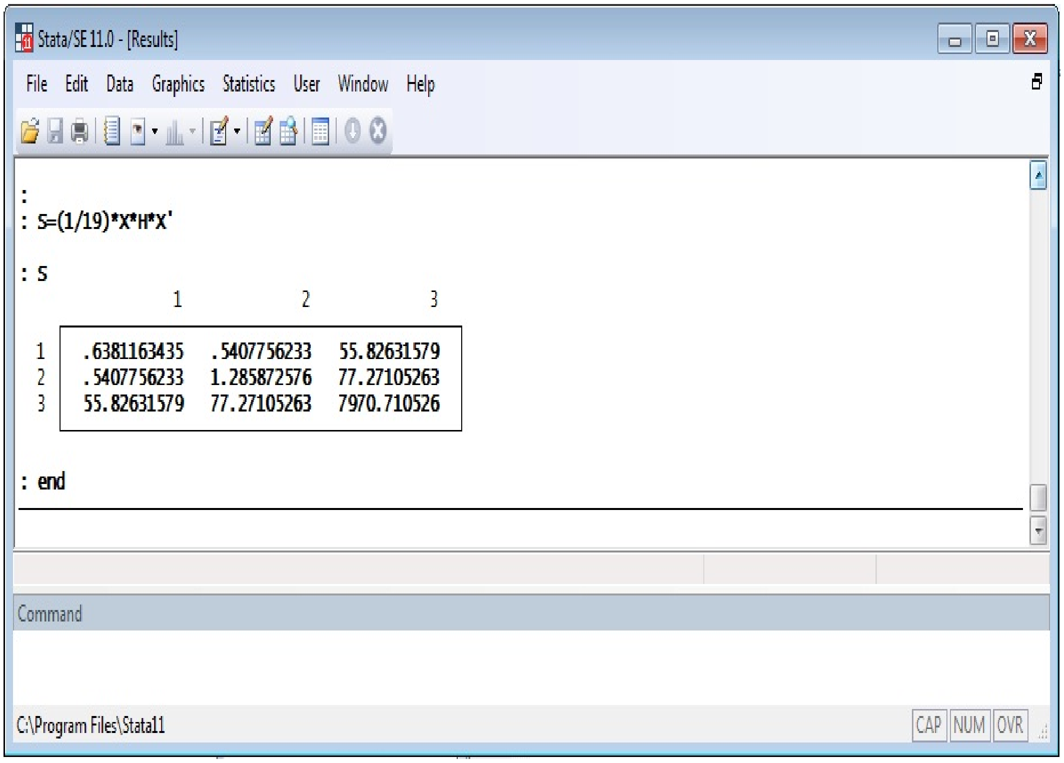
$$x = \begin{bmatrix} 5,3 & 4,5 & 500,5 \\ 5,3 & 6,3 & 574,5 \\ 6,0 & 5,0 & 517,5 \\ 6,0 & 6,3 & 624,0 \\ 5,2 & 3,6 & 421,0 \\ 6,3 & 7,0 & 623,5 \\ 5,0 & 4,2 & 565,5 \\ 6,5 & 7,0 & 643,5 \\ 4,8 & 6,1 & 582,5 \\ 7,0 & 7,0 & 639,5 \\ 5,4 & 4,8 & 532,5 \\ 6,5 & 6,5 & 591,0 \\ 4,0 & 4,5 & 365,5 \\ 5,2 & 6,0 & 487,0 \\ 4,1 & 4,0 & 316,5 \\ 6,0 & 6,1 & 549,5 \\ 5,0 & 7,0 & 514,5 \\ 4,5 & 5,0 & 454,5 \\ 5,2 & 7,0 & 605,0 \end{bmatrix} \qquad ,$$

se define la matriz $X = x'$.
Luego se define la matriz **H** *con las matriz* **J** *y la matriz identidad de la siguiente forma:*

I(19)	*/matriz identidad*
J=J(1,19,1)	*/matriz de unos de dimensión* 1×19
J	
J'	*/traspuesta de la matriz de unos*
*H=I(19)-(1/19)*J'*J*	*/matriz* **H**

Entonces la matriz **S** *es:*

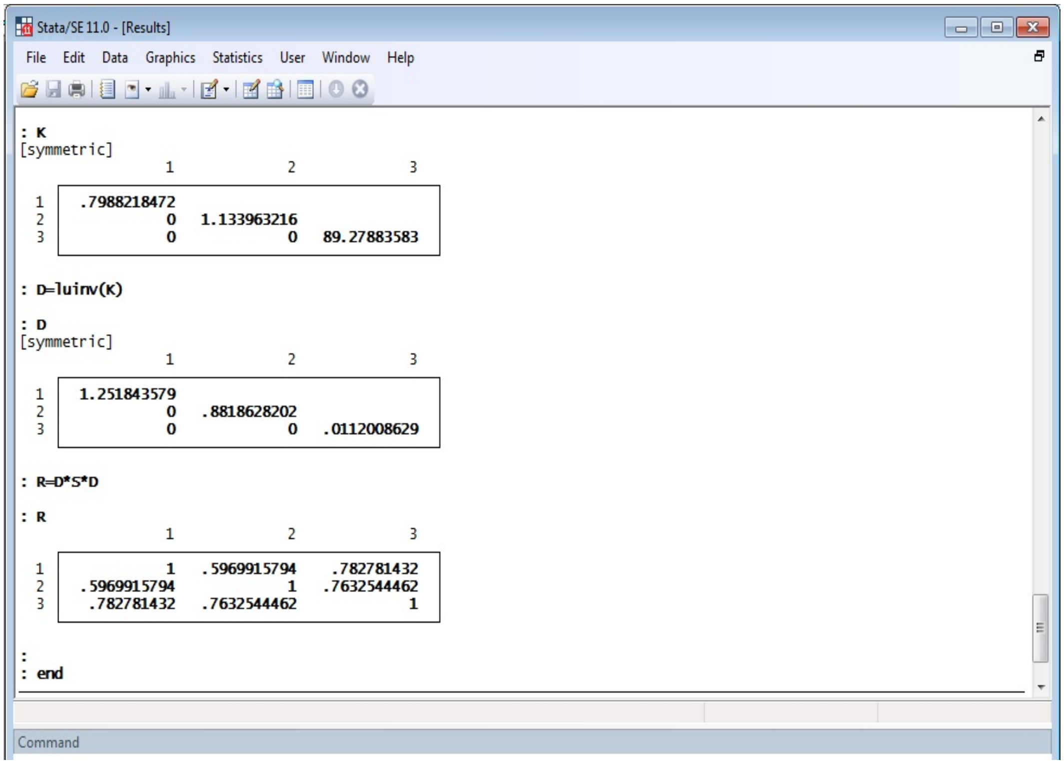
*S=(1/19)*X*H*X'*	
S	*/matriz* **S**



En esta matriz se aprecia que la variabilidad entre las variables Lenguaje, Matemática, y resultado PSU.
Se observa que la variabilidad entre los ramos de lenguaje y Matemática no es grande; pero entre los ramos y el puntaje PSU si existe una mayor diferencia.

Luego la matriz de correlación **R** *esta dada por:*

b=diagonal(S)	**/calcula los elemetos de la diagonal.*
K=diag(sqrt(b))	**/raiz cuadrada de los elementos de la diagonal. y genera la matriz diagonal.*
D=luinv(K)	**/inversa de la matriz.*
*R=D*S*D*	**/matriz de correlación.*
R	



Donde se puede apreciar que existe una correlación fuerte, entre el promedio PSU y las asignaturas de Lenguaje y Matemática; no así entre Matemática y Lenguaje.

Capítulo 4

Conclusión

Se puede decir que mezclando el Álgebra lineal, Estadística y un buen software en este caso MATA se puede entender mejor la forma en que el álgebra lineal es una herramienta fundamental en la carrera de Ingeniería en Estadística, así los alumnos pueden ver con mayor claridad, los contenidos de la asignatura y pueden practicar directamente con ejemplos reales los distintos campos donde se ocupa la estadística.

En la carrera de Matemática y específicamente en la asignatura de Álgebra Lineal se puede trabajar de la misma manera por que el software MATA tiene muchas herramientas que aquí no fueron nombradas, las cuales tienen un gran potencial para el estudio de la matemática y sus aplicaciones.

Esto solo es una muestra de lo potente que puede ser la inclusión de un software a la enseñanza de estos ramos en la carrera de Ingeniería en Estadística y hacer mas fácil la comprensión de muchos conceptos de matemática que se aplican a distintas áreas del campo laboral.

Bibliografía

[1] De Burgos, J. (1993) *Algebra lineal.* Mc Graw Hill/Interamericana de España,S.A.

[2] Timm, N.H. (1975) *Multivariate analysis with apllications in education an psychology.* Wadsworth Publishing Company, Inc.

[3] Carroll, J.D. and Green, P. E. (1997) *Mathematical tools for applied multivariate analysis.* Academic Press.

[4] Hoffman, K. and Kuzne, R. (1973) *Algebra lineal.* Pretince-Hall Hispanoamericana, S.A.

[5] Johnson, R.A. and Wichern, D.W. (1998) *Applied multivariate statiscal analysis.* Prentice-Hall, Inc.

[6] Serber, G.A. (2007) *A matrix handbook for statisticians.* Wiley-Interscience.

[7] Bowers, J. (2000) *Matrices & quadratic forms.* London; Arnold.

[8] Lang, S. (1987) *Linear Algebra.* Springer.

[9] Grossman. S, (2008) *Algebra Lineal 6^{ta} edición .* Mc Graw Hill.

[10] Hoffman. K, (1973) *Algebra Lineal .* Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall.

[11] Lipschutz. S, (1993) *Algebra Lineal 2^{da} edición.* Mc Graw Hill : Prentice Hall.

[12] http://www.stata.com/why-use-stata/introduction-to-mata/