



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Bifurcaciones en un modelo depredador-presa con función logística general y memoria con joroba

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
LUIS ARCE GONZÁLEZ

Profesor Guía: Dr. Rodrigo Castro Marín

VALPARAÍSO
DICIEMBRE, 2022

A mi madre, Lorena González

Índice general

Introducción	1
1. Nociones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	3
1.1. Sistemas Lineales	3
1.2. Estabilidad	7
1.3. Sistemas Dinámicos	10
1.4. Hiperbolicidad	11
2. Nociones de Teoría de Bifurcaciones	14
2.1. Introducción	14
2.2. Bifurcaciones en puntos de equilibrio no hiperbólicos	15
2.3. Bifurcación Hopf	22
3. Dinámica de Poblaciones en Tiempo Continuo	25
3.1. Ecuación Logística	25
3.2. Modelos de Depredación	26
3.3. Modelos de Depredación con Memoria	28
4. Estudio de en un modelo depredador-presa con función logística general y memoria con joroba	30
4.1. Bifurcación en el parámetro ϵ	32
4.2. Bifurcación en el parámetro a	38
4.3. Simulación Numérica	44
Conclusiones	53
A. Lema de Gronwall	54
Referencias	56

Introducción

La dinámica de poblaciones tiene como objetivo el estudio del crecimiento e interacción entre poblaciones. Estas poblaciones pueden ser animales, plantas, células, bacterias, virus, seres humanos, especies en extinción, etc. Las aplicaciones de estos modelos nos ayudan a entender las interrelaciones entre estas poblaciones y su ambiente, fenómenos de depredación, competencia, manejo de recursos naturales, evolución de cepas resistentes a pesticidas, control de pestes, etc.

Uno de los primeros trabajos sobre la dinámica de poblaciones lo podemos encontrar en el texto *An Essay on the Principle of Population*, obra de demografía escrita por el economista inglés Malthus y publicada en 1798, donde se propone que la velocidad de crecimiento de una población, es proporcional a la cantidad de individuos de la población, lo que implica un crecimiento exponencial ilimitado de esta. Ya que en la naturaleza, ninguna población puede crecer de forma ilimitada, en 1938 Verhulst propuso un modelo más realista, pues considera la cantidad de recursos disponibles en el hábitat de la población, limita el crecimiento de esta.

Posteriormente Lotka (1924) y Volterra (1931), de forma independiente plantean un modelo de competencia interespecífica, que se basa en la teoría logística del crecimiento poblacional el cual asume que las interacciones competitivas intra e interespecíficas entre especies son lineales, aunque ninguno de estos autores explica satisfactoriamente la dinámica poblacional de algunas especies. Esto se debe a que el modelo no tiene en cuenta algunas características importantes de la población que afectan su dinámica.

A mediados de la década de 1980, Farkas (ver [7]) propone una generalización de este modelo y Farkas et al. (ver [8]) brindan respuestas sobre el comportamiento de la interacción de las especies indicando cómo cambia la dinámica del sistema a lo largo del tiempo dependiendo de los parámetros para los que esta se define. Este modelo mejora el modelo Lotka-Volterra anterior en los dos aspectos. En primer lugar, se tiene en cuenta la competencia intraespecífica de la presa, que tiene un efecto de saturación y, por lo tanto, la presa no crece a un ritmo exponencial en ausencia de depredadores y tiene a un límite finito. En segundo lugar, introducen un término de memoria, aceptando que el crecimiento de los depredadores en el presente depende de cantidades pasadas de presas y, por lo tanto, se

introduce una función de peso (o densidad) continua cuyo rol es describir esa dependencia.

Más concretamente, el modelo estudiado en [8] es:

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= \epsilon N(t)(1 - N(t)/K - \alpha P(t)) \\ \dot{P}(t) &= \gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\tau)G(t - \tau)dt,\end{aligned}$$

donde ϵ representa la tasa de crecimiento de la presa, α la tasa de depredación, γ la tasa de mortalidad en ausencia de presas, β la tasa de conversión de las presas, K la capacidad de carga del hábitat y G es una función de densidad de probabilidad, definida por $G(s) = ae^{-as}$ o $G(s) = a^2se^{-as}$.

Farkas y Szabo probaron la existencia de una bifurcación tipo Hopf en el sistema, lo que implica, entre otras cosas que podemos hallar condiciones sobre los parámetros, en este caso, sobre el parámetro ϵ , para que exista coexistencia entre las especies, en términos dinámicos, bajo ciertas condiciones de los parámetros, aparecerán órbitas periódicas.

Castro et al (ver [2]), generalizan el modelo propuesto por Farkas con función de densidad $G(s) = ae^{-as}$, considerando una función de crecimiento logístico general, y por esta razón se acerca más a la realidad, pues el crecimiento logístico depende de cada especie, por lo que no es necesariamente lineal. Ellos probaron que dicha generalización también preserva una bifurcación tipo Hopf.

En este trabajo, estudiaremos el comportamiento del sistema anterior considerando la función de densidad $G(s) = a^2se^{-as}$ también conocida como “memoria con joroba” y una función logística general. A diferencia del sistema propuesto por Castro, el cual convierte el sistema 2-dimensional en uno 3-dimensional, nuestro trabajo convierte el sistema en uno 4-dimensional, lo que dificulta considerablemente el análisis de este.

1. Nociones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.1. Sistemas Lineales

Esta sección recordaremos de manera rápida lo básico sobre los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.1}$$

donde \dot{x} denota la derivada temporal, x es un vector columna de \mathbb{R}^n , $J \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una función matricial continua y $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.

Definición 1.1. Una matriz fundamental del sistema (1.1) es una función matricial $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas columnas $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ forman una base de soluciones para el sistema (1.1) para todo $t \in J$.

El estudio de matrices fundamentales implicará recordar algunos hechos sobre matrices y sus derivadas. De hecho, para cualquier función matricial $J \ni t \mapsto U(t)$, donde U no es necesariamente una matriz fundamental, diremos que es diferenciable en t si y solo si el siguiente límite existe

$$\dot{U}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{U(t+h) - U(t)\}.$$

Lema 1.1. Si una función matricial $J \ni t \mapsto U(t)$ es derivable e invertible para todo $t \in J$, entonces

$$\frac{d}{dt}U^{-1}(t) = -U^{-1}(t) \frac{d}{dt}U(t)U^{-1}(t). \tag{1.2}$$

Demostración. Si U es derivable en J , entonces también es continua en J . Este hecho,

implica la continuidad de U^{-1} . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U^{-1}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{U^{-1}(t+h) - U^{-1}(t)\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} U^{-1}(t+h) \{I - U(t+h)U^{-1}(t)\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} U^{-1}(t+h) \frac{1}{h} \{U(t) - U(t+h)\} U^{-1}(t)\end{aligned}$$

y de aquí se obtiene la igualdad (1.2). ■

Observación 1.1. Para todo $t \in J$, se deduce que toda matriz fundamental $X(t)$ de (1.1) verifica la siguiente igualdad:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t). \quad (1.3)$$

Observación 1.2. Si $X(t)$ es una matriz fundamental asociada a (1.1), para todo $t \in J$, se verifica fácilmente que:

- (i) Por definición tenemos que para cualquier $t \in J$, la matriz fundamental de $X(t)$ es invertible ya que sus columnas son vectores linealmente independientes de \mathbb{R}^n .
- (ii) Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es no singular, entonces $Y(t) = X(t)C$ también es una matriz fundamental asociada a (1.1).
- (iii) Siempre podemos elegir una matriz fundamental $Y(t)$ que satisfaga la condición $Y(0) = I$. En efecto, basta elegir $C = X^{-1}(0)$ en la propiedad anterior. $Y(t) = X(t)X^{-1}(0)$ es usualmente llamada *matriz fundamental normalizada*.
- (iv) Si $J = \mathbb{R}$ y $A(-t) = -A(t)$ para todo $t \in J$, entonces $Y(t) = X(-t)$ también es una matriz fundamental asociada a (1.1).
- (v) Si $J = \mathbb{R}$ y $A(-t) = A(t)$ para todo $t \in J$, entonces $Y(t) = -X(-t)$ también es una matriz fundamental asociada a (1.1).
- (vi) Ya que $X(t)$ es invertible y derivable, del Lemma 1.1 se deduce que $X^{-1}(t)$ también es derivable y (1.2) junto con (1.3) implican la identidad:

$$\frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t). \quad (1.4)$$

Lema 1.2. La función $J \ni t \mapsto X(t)X^{-1}(t_0)c$ con $t_0 \in J$ y $c \in \mathbb{R}^n$ es la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = c. \end{cases} \quad (1.5)$$

Demostración. Es fácil verificar que $t \mapsto X(t)X^{-1}(t_0)c$ es solución del problema de valor inicial (1.5), por lo que solo probaremos unicidad. Para esto, supongamos que $t \mapsto y(t)$ es otra solución para este problema. Definamos la función auxiliar $u(t) = X(t)X^{-1}(t_0)c - y(t)$ y notemos que $u(t)$ satisface

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t) \quad \text{con } u(t_0) = 0.$$

Supongamos que $t \geq t_0$ e integramos la ecuación anterior entre t_0 y t . Ya que $u(t_0) = 0$, se tiene que

$$u(t) = \int_{t_0}^t A(s)u(s)ds,$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)u(s)ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |A(s)u(s)|ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| |u(s)|ds. \end{aligned}$$

Por otra parte, si suponemos que $t_0 \geq t$ e integramos la ecuación anterior entre t y t_0 . Ya que $u(t_0) = 0$, se tiene que

$$-u(t) = \int_t^{t_0} A(s)u(s)ds,$$

y en consecuencia,

$$|u(t)| \leq \int_t^{t_0} \|A(s)\| |u(s)|ds.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$|u(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| |u(s)|ds \right| \leq c_n + \left| \int_{t_0}^t A(s)u(s)ds \right|$$

para cualquier sucesión positiva $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a cero.

Por la variación del Lema de Gronwall (ver Apéndice A), tenemos que

$$|u(t)| \leq c_n \exp \left(\int_{t_0}^t \|A(s)\| ds \right).$$

Luego, la unicidad se sigue de que $c_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. ■

El lema precedente, implica que para todo $t, s \in J$, las soluciones del sistema de ecuaciones $\dot{x} = A(t)x$ con condición inicial $x(s) = c$, son de la forma

$$x(t) = X(t, s)x(s) \quad \text{con } X(t, s) = X(t)X^{-1}(s),$$

lo que motiva la siguiente definición.

Definición 1.2. Sea $X(t)$ una matriz fundamental de (1.1). La matriz de transición asociada a $X(t)$ se define por $X(t, s) = X(t)X^{-1}(s)$, donde $t, s \in J$.

Observación 1.3. De las Observaciones 1.1 y 1.2 se desprende que

$$\frac{\partial X}{\partial t}(t, s) = A(t)X(t, s) \quad \text{y} \quad \frac{\partial X}{\partial s} = -X(t, s)A(s).$$

Observación 1.4. Una matriz de transición $X(t, s)$ asociada a (1.1) verifica las siguientes propiedades:

(i) Para todo $t, t_0 \in J$, se tiene que

$$X(t, t) = I \quad \text{y} \quad X(t, t_0)X(t_0, s) = X(t, s).$$

(ii) Dados $t, t_0 \in J$, la desigualdad de Gronwall implica que

$$\|X(t, t_0)\| \leq \|I\| e^{\left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| ds \right|}.$$

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz constante, entonces e^{At} es la matriz fundamental del sistema (1.1) cuando $A(t)$ es constante para todo $t \in J$. Luego, haciendo uso del Lema 1.2 tenemos que

$$X(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}.$$

Lema 1.3. *El problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

donde $J \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in J$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene una única solución dada por:

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)f(s)ds. \quad (1.7)$$

Demostración. Sea $J \ni s \mapsto x(s)$ una solución de (1.6), entonces si multiplicamos $x'(s)$ por $X^{-1}(s)$ obtenemos que

$$X^{-1}(s)\dot{x}(s) - X^{-1}(s)A(s)x(s) = X^{-1}(s)f(s).$$

Usando la afirmación (v) de la Observación 1.2 tenemos que la igualdad precedente es equivalente a

$$\frac{d}{ds} \{X^{-1}(s)x(s)\} = X^{-1}(s)f(s),$$

integramos entre t_0 y t y así obtenemos que

$$X^{-1}(t)x(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Multiplicamos por izquierda por $X(t)$ y obtenemos la expresión (1.7).

Para demostrar la unicidad, consideremos la solución $J \ni t \mapsto z(t)$ y definamos $u(t) = x(t) - z(t)$. Es fácil ver que $t \mapsto u(t)$ es solución del problema de valor inicial (1.5) con $u(t_0) = c = 0$. Luego, usando el Lema 1.2 tenemos que $u(t) = 0$ para todo $t \in J$ y se obtiene la unicidad. ■

1.2. Estabilidad

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.8}$$

donde $f, D_x f \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y $J = [t_0, \infty)$.

Definición 1.3. Decimos que $J \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ de (1.8) es

- (i) *estable* en el intervalo J , si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que toda solución $\psi(t)$ de (1.8) que satisfaga $|\psi(t_0) - x(t_0)| < \delta$, entonces también satisface $|\psi(t) - x(t)| < \epsilon$ para todo $t \in J$;
- (ii) *asintóticamente estable*, si es estable y además podemos elegir $\delta > 0$ de manera que $|\psi(t) - x(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- (iii) *uniformemente estable* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que cualquier solución $\psi(t)$ que satisfaga la desigualdad $|\psi(t_1) - x(t_1)| < \delta$ para algún $t_1 \geq t_0$, satisface $|\psi(t) - x(t)| < \epsilon$, para todo $t \geq t_1$.
- (iv) *uniformemente asintóticamente estable* si es uniformemente estable y además, existe δ_0 y para todo $\epsilon > 0$, existe $T = T(\epsilon) > 0$ tal que si $|\psi(t_1) - x(t_1)| < \delta_0$ para algún $t_1 \geq t_0$, entonces $|\psi(t) - x(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq t_1 + T$.

A menudo, el problema de estudiar la estabilidad de una solución arbitraria $\psi(t)$, se reduce a estudiar la estabilidad de una solución constante, es decir, un *punto de equilibrio*. En efecto, si realizamos el cambio de variable $x = y + \psi(t)$ y obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}(t) - \dot{\psi}(t) \\ &= f(t, y + \psi(t)) - f(t, \psi(t)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Además, si f es diferenciable respecto a la segunda variable, entonces

$$f(t, y + \psi(t)) = f(t, \psi(t)) + Df(t, \psi(t))y + r(y)$$

donde $r(y) \rightarrow 0$ cuando $|y| \rightarrow 0$. Reemplazando $f(t, y + \psi(t))$ en (1.9) obtenemos

$$\dot{y} = D_x f[t, \psi(t)]y + r(y) \quad (1.10)$$

Ya que $|r(y)| \rightarrow 0$ cuando $|y| \rightarrow 0$, es de esperar que la solución nula de la ecuación (1.10) tenga el mismo comportamiento de estabilidad que la solución nula de la *ecuación variacional*

$$\dot{y} = D_x f[t, \psi(t)]y.$$

1.2.1. Estabilidad de ecuaciones lineales

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad (1.11)$$

donde $J \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$ y $J = [t_0, \infty)$. Fijemos una solución ψ , y apliquemos el cambio de coordenadas $y = x - \psi(t)$. Si x satisface la ecuación (1.11), entonces y es solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$\dot{y} = A(t)y. \quad (1.12)$$

Esto implica que las condiciones de estabilidad se pueden estudiar independientemente de la solución particular considerada y del término no homogéneo $b(t)$.

Las condiciones de estabilidad se pueden expresar en términos de una matriz fundamental de la ecuación homogénea (1.12).

Teorema 1.1. *Sea $Y(t)$ una matriz fundamental de (1.12). Entonces la solución $J \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación (1.12) es*

(i) *estable, si y solo si existe $K > 0$ tal que*

$$|Y(t)| \leq K \quad \text{para todo } t \geq t_0, \quad (1.13)$$

(ii) *uniformemente estable, si y solo si existe $K > 0$ tal que*

$$|Y(t, s)| \leq K \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t < \infty, \quad (1.14)$$

(iii) *asintóticamente estable, si y solo si*

$$|Y(t)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

(iv) uniformemente asintóticamente estable, si y solo si existen $\alpha, K > 0$ tales que

$$|Y(t, s)| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{para } t_0 \leq s \leq t < \infty. \quad (1.16)$$

La demostración de este teorema se puede consultar en [3].

Estos resultados son especialmente útiles para el caso de una ecuación diferencial autónoma de la forma

$$\dot{y} = Ay, \quad (1.17)$$

ya que su matriz fundamental es de la forma $Y(t) = e^{At}$. Se verifica fácilmente que estable y uniformemente estable son conceptos equivalentes, y de manera análoga para los conceptos de asintóticamente estable con uniformemente asintóticamente estable. Luego, del Teorema 1.1 y la representación matricial en su forma de Jordan para la matriz exponencial, obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 1.2. *El sistema lineal (1.17)*

- (i) *es estable si y solo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real menor o igual a cero. En caso de existir valores propios con parte real cero, estos tienen multiplicidad algebraica uno. Por otra parte, es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A son negativos;*
- (ii) *es inestable si tiene al menos un valor propio con una parte real positiva o al menos un valor propio tiene una parte real cero y su multiplicidad es mayor que uno.*

Para facilitar el estudio de la estabilidad de un sistema lineal, introducimos los siguientes terminos: diremos que un *polinomio es estable* si todas sus raíces tienen partes negativas, y diremos que una *matriz cuadrada es estable* si todos sus valores propios tienen partes reales negativas.

Observemos que la estabilidad asintótica del sistema (1.17) está determinada por la estabilidad de la matriz A , y por lo tanto, por la estabilidad de su polinomio característico. Consideremos el polinomio de grado n

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (1.18)$$

donde $n \geq 1$ y $a_n \in \mathbb{R}_+$. Tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [3].

Teorema 1.3. (Routh-Hurwitz). Supongamos que todos los coeficientes a_k del polinomio $p(\lambda)$ son positivos, y consideremos la matriz de Hurwitz asociada al polinomio

$$H_p = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

donde $a_k = 0$ si $k > n$. El polinomio $p(\lambda)$ es estable si y solo si todos los menores principales de H_p son positivos.

1.3. Sistemas Dinámicos

Definición 1.4. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo. Una función continua $\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ es llamada *sistema dinámico* (o *flujo*) si

- (i) $\varphi \in \mathcal{C}^1$, y para todo $t \in \mathbb{R}$, la función $\varphi_t := \varphi(t, \cdot)$ es un difeomorfismo de U en si mismo;
- (ii) $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = x$;
- (iii) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, es decir, $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi(t + s, x)$

para todo $t, s \in \mathbb{R}$ y $x \in U$.

Un ejemplo de sistema dinámico es la solución del sistema lineal homogéneo (1.17), la cual es $\varphi_t(x) = e^{At}x$. En efecto, $\varphi_0(x) = x$ y $\varphi_t(\varphi_s(x)) = e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)} = \varphi_{t+s}(x)$, para todo $x \in U$ y $t, s \in \mathbb{R}$.

Ahora introduciremos algunos conceptos relacionados con los flujos. El conjunto $\{\varphi(t, x) \in U : t \in \mathbb{R}\}$ es llamado *trayectoria* u *órbita* de $x \in U$. Para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función $\varphi(\cdot, x)$ es el *movimiento* de x . Si para algún $x^0 \in U$, $\varphi(t, x^0) = x^0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, diremos que x^0 es un *punto fijo* (o un *equilibrio*) del flujo. Si para algún $x^p \in U$ existe un $T > 0$ tal que $\varphi(T, x^p) = x^p$, entonces diremos que x^p es un *punto periódico* y si T es el menor valor positivo que satisface esta propiedad, diremos que T es su *período*.

Un objeto de mucha utilidad en el estudio de sistemas dinámicos, es el *retrato de fase* asociado a este. El retrato de fase es una representación geométrica de las trayectorias del sistema en \mathbb{R}^n , que puede ser interpretado como la imagen del flujo del sistema, donde las órbitas muestran el camino que recorre un punto al seguir la “corriente” del flujo. Más formalmente podemos definir el retrato de fase como $\bigcup_{x \in U} \{\varphi(t, x) \in U : t \in \mathbb{R}\}$, donde cada curva está asociada a una condición inicial diferente, lo que es consecuencia directa de la existencia y unicidad de soluciones.

En el estudio de los sistemas dinámicos, estamos interesados no solo en las soluciones de un sistema específico, sino también en la clasificación de la solución de un sistema particular y la clasificación del sistema de acuerdo con los comportamientos cualitativos generales, es decir, la estabilidad de los equilibrios, órbitas periódicas, etc.

Intuitivamente, dos sistemas dinámicos son equivalentes si sus retratos de fase son similares en un sentido cualitativo, es decir, si pueden transformarse localmente uno en el otro a través de una transformación continua.

Definición 1.5. Sean $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos sistemas dinámicos. Diremos que son *topológicamente equivalentes*, si existe un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que mapea órbitas de φ en U , en órbitas de ψ en V , preservando la orientación de las trayectorias respecto a la variable t .

1.4. Hiperbolicidad

Definición 1.6. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = Ax \tag{1.19}$$

es *hiperbólico*, si A no tiene valores propios con parte real cero.

La condición de hiperbolicidad tiene notables consecuencias y aplicaciones en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias, destacaremos las más relevantes.

1.4.1. Separación entre espacios estables e inestables

Sea $\lambda_j = a_j + ib_j$ un valor propio (posiblemente múltiple) de A con vector propio generalizado $W_j = u_j + iv_j$. Entonces

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$$

con $n = 2m - k$ es una base de \mathbb{R}^n tal que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, donde E^s y E^u son los espacios estable e inestable respectivamente, y se definen como

$$E^s = \text{Span}\{u_j, v_j | a_j < 0\} \quad \text{y} \quad E^u = \text{Span}\{u_j, v_j | a_j > 0\}.$$

Recordemos que cualquier solución $t \mapsto x(t)$ de (1.19) que pase a través de x_0 en $t = 0$ puede escribirse como $x(t) = e^{At}x_0$ (ver Observación 1.4), entonces se tiene que (ver [11,

p.65]) los subespacios E^s y E^u son invariantes bajo el flujo inducido por (1.19). Es decir, si $x_0 \in E^s$ (respectivamente, $x_0 \in E^u$), entonces $x(t) \in E^s$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $x(t) \in E^u$).

Una consecuencia inmediata de la invarianza es que si $x_0 = x_s + x_u$ con $x_s \in E^s$ y $x_u \in E^u$, entonces $x(t) = e^{At}x_0$ puede escribirse como $x(t) = x_s(t) + x_u(t)$, donde $x_s(t) = e^{At}x_s$ y $x_u(t) = e^{At}x_u$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.4.2. Resultados de linealización

El teorema de Hartman-Grobman tiene un lugar distinguido en la teoría cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y la condición de hiperbolicidad juega un papel clave.

Para establecer el resultado mencionado anteriormente, consideremos el sistema no lineal

$$\dot{y} = g(y) \tag{1.20}$$

donde $g \in \mathcal{C}^1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto que contiene al origen, tal que $g(0) = 0$. La solución de (1.20) pasando por $y_0 \in \Omega$ en $t = 0$ se denotará por $\phi_t(y_0)$ y se asumirá su existencia local y unicidad.

Teorema 1.4. (Hartman-Grobman) *Si el sistema lineal*

$$\dot{x} = Dg(0)x \tag{1.21}$$

es hiperbólico, entonces existe un homeomorfismo $H : U \rightarrow V$ tal que :

- (i) *los conjuntos U y V son abiertos en \mathbb{R}^n que contienen al origen,*
- (ii) *para todo $y_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_{y_0} \subset \mathbb{R}$ que contiene al origen, tal que*

$$H \circ \varphi_t(y_0) = e^{At}H(y_0) \text{ para todo } t \in I_{y_0},$$

- (iii) *preserva la orientación de las trayectorias.*

El homeomorfismo de Hartman-Grobman ilustra la relación entre soluciones del sistema no lineal (1.20) y soluciones del lineal (1.21), para cualquier $t \in I_{y_0}$. Algunas consecuencias directas de este teorema son:

- (i) Si $t \mapsto \varphi_t(y_0)$ es una solución de (1.20) que pasa a través de y_0 en $t = 0$, entonces $t \mapsto H(\varphi_t(y_0))$ es una solución de (1.21) que pasa por $H(y_0)$ en $t = 0$.
- (ii) Si $t \mapsto e^{At}z_0$ es una solución de (1.21) que pasa por z_0 en $t = 0$, entonces $H^{-1}(e^{At}z_0)$ es una solución de (1.20) que pasa por $H^{-1}(z_0)$ en $t = 0$.

(iii) Una consecuencia directa de (i) y (ii), junto con la unicidad de soluciones es que $H(0) = 0$.

Así las cosas, el Teorema de Hartman-Grobman, nos permite afirmar que cerca de un equilibrio hiperbólico, el sistema se comporta esencialmente como el sistema linealizado. En consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5. *Dos sistemas de ecuaciones diferenciales con puntos de equilibrio hiperbólicos, son topológicamente equivalentes cerca de estos equilibrios si y solo si sus respectivas linealizaciones tienen la misma cantidad de valores propios con parte real positiva, y la misma cantidad de valores propios con parte real negativa.*

2. Nociones de Teoría de Bifurcaciones

2.1. Introducción

El término *bifurcación* fue utilizado originalmente por Poincaré para describir la ramificación de soluciones en una familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(\mu, x), \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

La variación continua de μ puede cambiar el comportamiento cualitativo de las soluciones de (2.1). Un valor $\mu \in \mathbb{R}^m$ para el que se produce tal cambio se denomina *valor de bifurcación*. Podemos usar un diagrama de bifurcación para mostrar esquemáticamente las soluciones consideradas de un sistema en función de un parámetro de bifurcación. Es usual representar soluciones estables con líneas sólidas y soluciones inestables con líneas discontinuas.

Existen sistemas dinámicos cuyo retrato de fase no cambia cualitativamente bajo perturbaciones suficientemente pequeñas. Si supongamos que (2.1) tiene un equilibrio x_0 cuando $\mu = \mu_0$, es decir, $f(\mu_0, x_0) = 0$. Es natural preguntarse acerca de la estabilidad de este equilibrio y cómo la estabilidad o inestabilidad se ve afectada a medida que μ varía. Por lo tanto, primero linealizamos (2.1) en (μ_0, x_0) y obtenemos

$$\dot{x} = D_x f(\mu_0, x_0)x.$$

Si todos los valores propios de $D_x f(\mu_0, x_0)$ son distintos de cero, entonces es invertible. Luego, por el Teorema de la Función Implícita, existe $\mu \mapsto \beta(\mu) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\beta(\mu_0) = x_0$ y $f(\mu, \beta(\mu)) = 0$ cuando $|\mu - \mu_0|$ es suficientemente pequeño. En otras palabras, para cada μ , el punto $\beta(\mu) \in \mathbb{R}^n$ corresponde a un punto de equilibrio para el sistema (2.1) en el valor del parámetro μ .

Notemos que la matriz de linealización de (2.1) en $(\mu, \beta(\mu))$ es $D_x f(\mu, \beta(\mu))$ coincide con $D_x f(\mu_0, x_0)$ cuando $\mu = \mu_0$. Esto implica que si x_0 es un equilibrio hiperbólico, entonces $\beta(\mu)$ también lo es cuando $|\mu - \mu_0|$ es suficientemente pequeño. Luego, la cantidad de equilibrios con parte real negativa y positivas son fijas para tales valores de μ . Por lo tanto, en virtud del Teorema 1.5, el sistema (2.1) es localmente topológicamente equivalente a $\dot{x} = f(\mu_0, x)$

cerca del equilibrio. Esto significa que un equilibrio hiperbólico es estructuralmente estable bajo perturbaciones suaves.

Inspirándonos en la propiedad anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1. Un flujo φ se dice *estructuralmente estable* en una región $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si para todo flujo ψ suficientemente cercano a φ (respecto a la C^1 -norma), existen regiones U y V con $D \subset U$ tales que ψ definido en V es topológicamente equivalente a φ definido en U .

El siguiente teorema se desprende de la discusión anterior y puede también ser consultado en [12].

Teorema 2.1. *Un flujo con un equilibrio hiperbólico es estructuralmente estable en una vecindad de el equilibrio.*

En la Definición 2.1, requerimos la métrica C^1 , en lugar de la usual, porque dos curvas según la métrica usual pueden estar arbitrariamente cerca una de la otra pero tener cantidad distinta de equilibrios.

2.2. Bifurcaciones en puntos de equilibrio no hiperbólicos

Comenzamos con una discusión de varios tipos de puntos críticos de sistemas unidimensionales

$$\dot{x} = f(\mu, x), \quad x, \mu \in \mathbb{R}, \quad f \in C^k, \quad k \geq 1. \quad (2.2)$$

2.2.1. Bifurcación Silla-Nodo

Consideremos la siguiente familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad x, \mu \in \mathbb{R}.$$

Notemos que si $\mu > 0$, entonces existen dos equilibrios: $x_1 = -\sqrt{\mu}$, que es inestable y $x_2 = \sqrt{\mu}$, que es estable. En el valor de bifurcación $\mu = 0$, el único equilibrio es $x = 0$ y no es hiperbólico. Si $\mu < 0$, entonces no existen equilibrios. Este tipo de bifurcación es conocida como *bifurcación silla-nodo*.

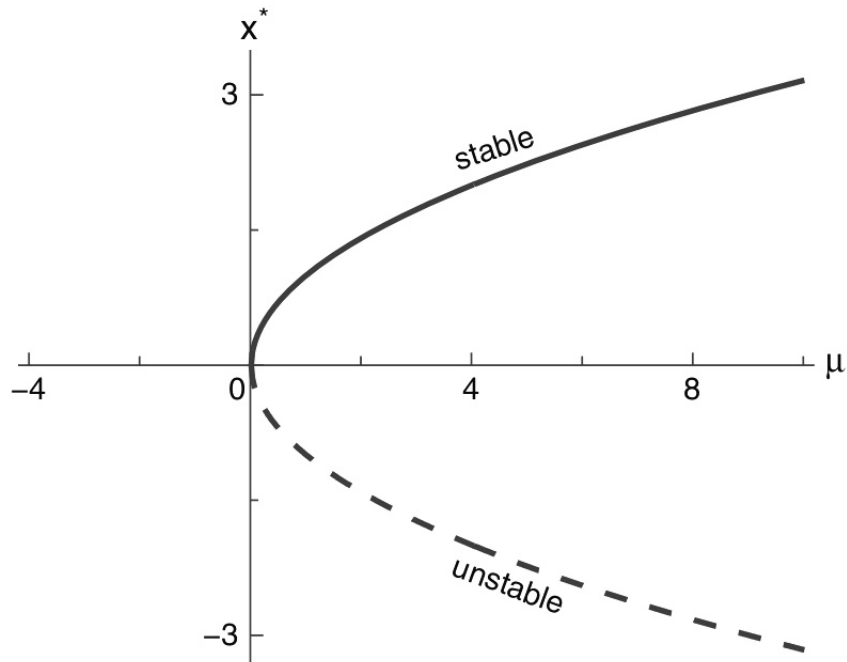


Figura 2.1.: Diagrama de bifurcación silla-nodo.

2.2.2. Bifurcación Transcritica

En una bifurcación silla-nodo, hacia un lado del valor de bifurcación no existen equilibrios y hacia el otro lado hay dos equilibrios. En algunos ejemplos, podemos encontrar otro tipo de bifurcación: ambos equilibrios existen antes y después del valor de bifurcación, y hay un equilibrio inestable y uno estable; sin embargo, su estabilidad se intercambia cuando chocan. Así que el equilibrio inestable se vuelve estable y viceversa. Nos referimos a este tipo de bifurcación como *bifurcación transcritical* y a continuación mostramos un ejemplo.

Consideremos la siguiente familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad x, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $\mu < 0$, existen dos equilibrios: $x = 0$, que es estable, y $x = \mu$, que es inestable. Estas dos equilibrios se unen en el valor de bifurcación $\mu = 0$. Si $\mu > 0$, también hay dos equilibrios: $x = 0$ que es inestable, y μ que es estable.

2.2.3. Bifurcación Pitchfork

La familia de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R}$$

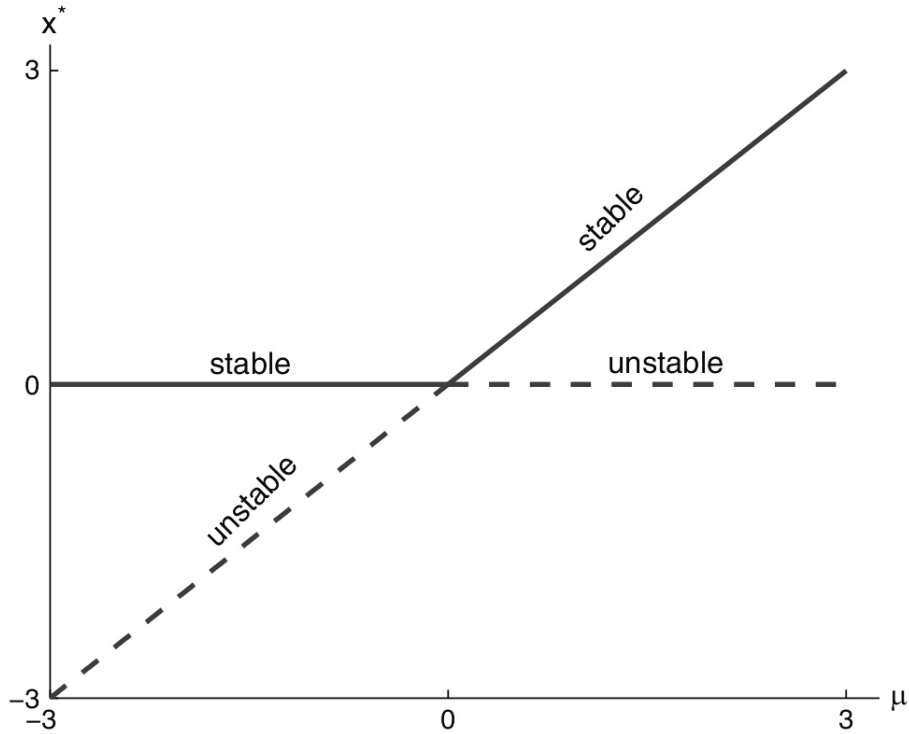


Figura 2.2.: Diagrama de bifurcación transcritical.

tiene a $x = 0$ como un equilibrio estable cuando $\mu < 0$, y si $\mu > 0$, $x = 0$ es un equilibrio inestable, mientras que $x = \pm\sqrt{\mu}$ son equilibrios estables. A este tipo de bifurcación se le conoce como *bifurcación pitchfork*.

Notemos que $x = 0$ siempre es un equilibrio. Sin embargo, cuando el parámetro μ pasa por el valor de bifurcación $\mu = 0$, el equilibrio en el origen pierde su estabilidad y dos nuevos equilibrios estables se bifurcan desde el origen. Este tipo de bifurcación pitchfork se denomina *supercrítica*, porque existen nuevos equilibrios para un parámetro μ que es mayor que el valor de bifurcación $\mu = 0$. Cuando existen equilibrios adicionales para un parámetro μ menor que el valor de bifurcación $\mu = 0$, la bifurcación se denomina *subcrítica*. Un ejemplo de una bifurcación subcrítica se puede ver en la ecuación $\dot{x} = \mu x + x^3$.

El siguiente teorema permite determinar el tipo de bifurcación para un sistema de ecuaciones n -dimensional. Su demostración se puede consultar en [9] o [11].

Teorema 2.2. (Sotomayor) Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = f(\mu, x), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad f \in \mathcal{C}^k, \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

Supongamos que $f(\mu_0, x_0) = 0$ y que la matriz $A = Df(\mu_0, x_0)$ tiene un valor propio simple

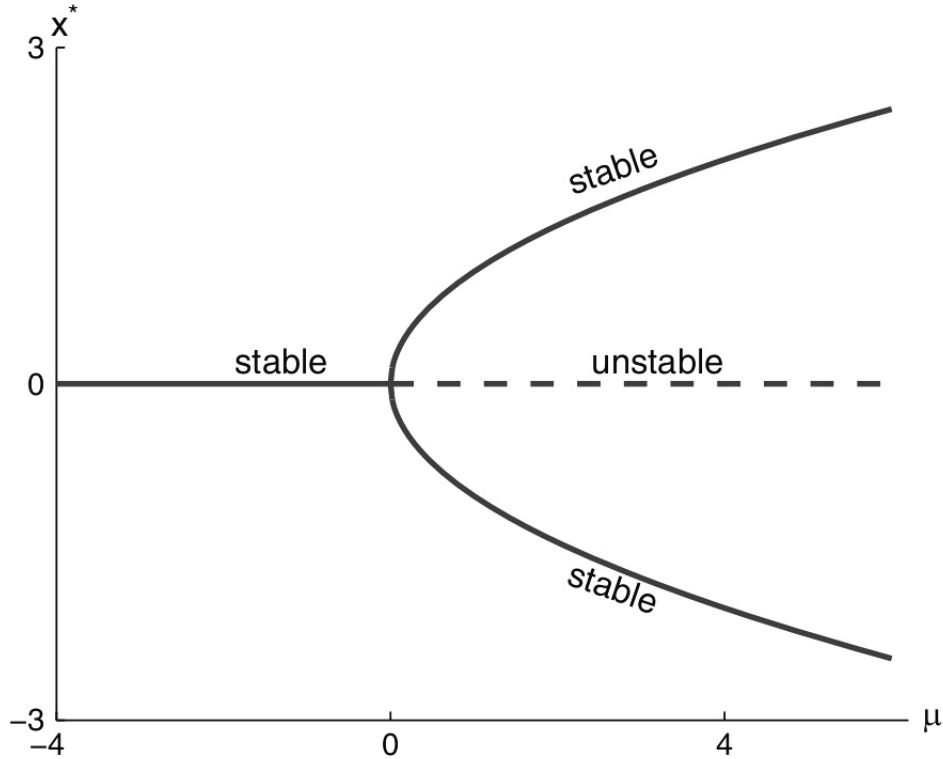


Figura 2.3.: Diagrama de una bifurcación pitchfork.

$\lambda = 0$ con vector propio v y que A^T tiene un vector propio w correspondiente al valor propio $\lambda = 0$. Supongamos también que A tiene k valores propios con parte real negativa y $(n - k - 1)$ valores propios con parte real positiva y que se cumplen las siguientes condiciones:

$$w^T f_\mu(\mu_0, x_0) \neq 0, \quad w^T [D^2 f(\mu_0, x_0)(v, v)] \neq 0. \quad (2.4)$$

Entonces existe una curva suave de equilibrios de (2.3) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pasando por (μ_0, x_0) y tangente al hiperplano $\{\mu_0\} \times \mathbb{R}^n$. Dependiendo de los signos de las expresiones en (2.4), no existen puntos de equilibrio de (2.3) cerca de x_0 cuando $\mu < \mu_0$ (o cuando $\mu > \mu_0$) y existen dos equilibrios de (2.3) cerca de x_0 cuando $\mu > \mu_0$ (o cuando $\mu < \mu_0$). Los dos equilibrios de (2.3) cerca de x_0 son hiperbólicos y tienen variedades estables de dimensión k y $k + 1$ respectivamente, es decir, el sistema (2.3) experimenta una bifurcación silla-nodo en el equilibrio x_0 cuando el parámetro μ pasa por el valor de bifurcación $\mu = \mu_0$.

Si la condición (2.4) es cambiada por

$$w^T f_\mu(\mu_0, x_0) = 0, \quad w^T [Df_\mu(\mu_0, x_0)v] \neq 0 \quad \text{y} \quad w^T [D^2 f(\mu_0, x_0)(v, v)] \neq 0, \quad (2.5)$$

entonces el sistema (2.3) experimenta una bifurcación transcritical en x_0 cuando $\mu = \mu_0$. En

cambio, si la condición (2.4) es cambiada por

$$\begin{aligned} w^T f_\mu(\mu_0, x_0) &= 0, & w^T [Df_\mu(\mu_0, x_0)v] &\neq 0, \\ w^T [D^2 f(\mu_0, x_0)(v, v)] &= 0, & w^T [D^3 f(\mu_0, x_0)(v, v, v)] &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

entonces el sistema (2.3) experimenta una bifurcación pitchfork en x_0 cuando $\mu = \mu_0$.

A continuación presentamos ejemplos de las bifurcaciones mencionadas anteriormente.

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

Usando las notaciones del Teorema 2.2 tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_\mu(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A tiene un valor propio $\lambda = 0$ y además, $A = A^T$. Por lo tanto, los vectores propios asociados a A y A^T son u, v respectivamente, donde $u = v = (1, 0)^T$. Luego,

$$\begin{aligned} w^T f_\mu(0, (0, 0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \\ D^2 f(\mu, (x, y))v &= \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 0 \end{pmatrix} \\ D^2 f(\mu, (x, y))(v, v) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= D^2 f(0, (0, 0))(v, v). \end{aligned}$$

Entonces,

$$w^T [D^2 f(0, (0, 0))(v, v)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Por lo tanto, el origen experimenta una bifurcación silla-nodo con valor de bifurcación $\mu = 0$. Si $\mu < 0$, no existen equilibrios, si $\mu = 0$ el origen es el único equilibrio, y si $\mu > 0$, existen dos equilibrios.

Ejemplo 2. Consireremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

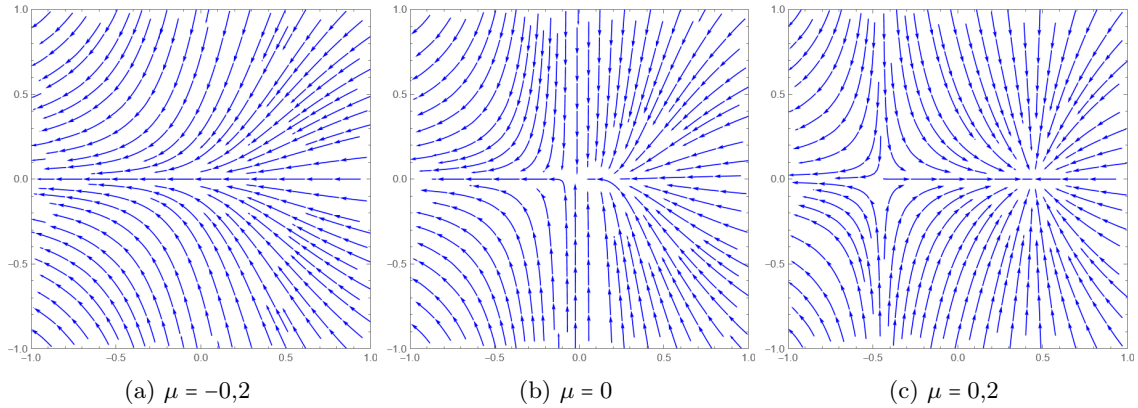


Figura 2.4.: Retratos de fase del Ejemplo 1 (MATHEMATICA).

Usando las notaciones del Teorema 2.2 tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_\mu(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A tiene un valor propio $\lambda = 0$ y además, $A = A^T$. Por lo tanto, los vectores propios asociados a A y A^T son u, v respectivamente, donde $u = v = (1, 0)^T$. Luego,

$$\begin{aligned} w^T f_\mu(0, (0, 0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ w^T [Df_\mu(0, (0, 0))v] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \\ Df_\mu(\mu, (x, y))(v) &= \begin{pmatrix} u - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 2x \\ 0 \end{pmatrix}, \\ D^2 f(\mu, (x, y))(v, v) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= D^2 f(0, (0, 0))(v, v). \end{aligned}$$

Entonces,

$$w^T [D^2 f(0, (0, 0))(v, v)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Por lo tanto, el origen experimenta una bifurcación transcítica con valor de bifurcación $\mu = 0$.

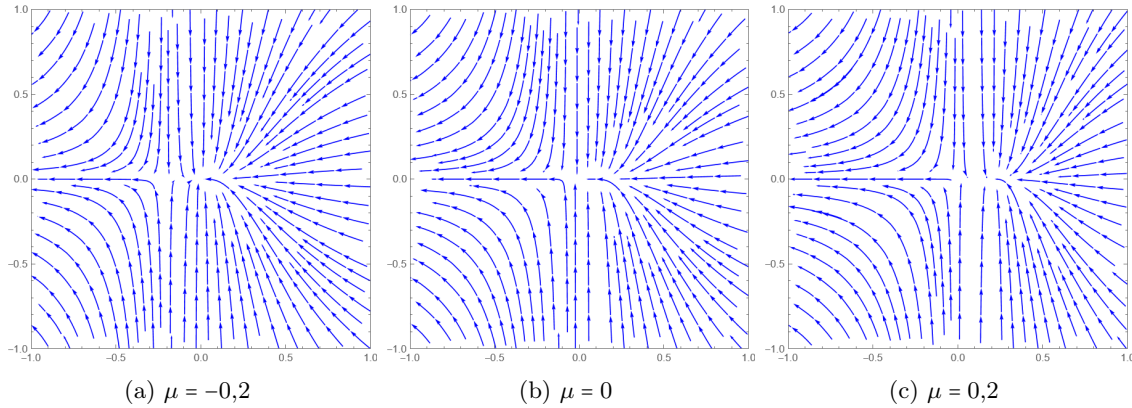


Figura 2.5.: Retratos de fase del Ejemplo 2 (MATHEMATICA).

Ejemplo 3. Consireremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Usando las notaciones del Teorema 2.2 tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f_\mu(0, (0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -1$. Además, $A = A^T$, y por lo tanto, los vectores propios asociados a A y A^T son u, v respectivamente, donde $u = v = (1, 0)^T$. Luego,

$$\begin{aligned}w^T f_\mu(0, (0, 0)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ w^T [Df_\mu(0, (0, 0))v] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \\ Df_\mu(\mu, (x, y))(v) &= \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ D^2 f(\mu, (x, y))(v, v) &= \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

y así,

$$w^T [D^2 f(\mu, (x, y))(v, v)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Procediendo de forma análoga obtenemos que

$$w^T [Df^3(\mu, (0, 0))(v, v, v)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6.$$

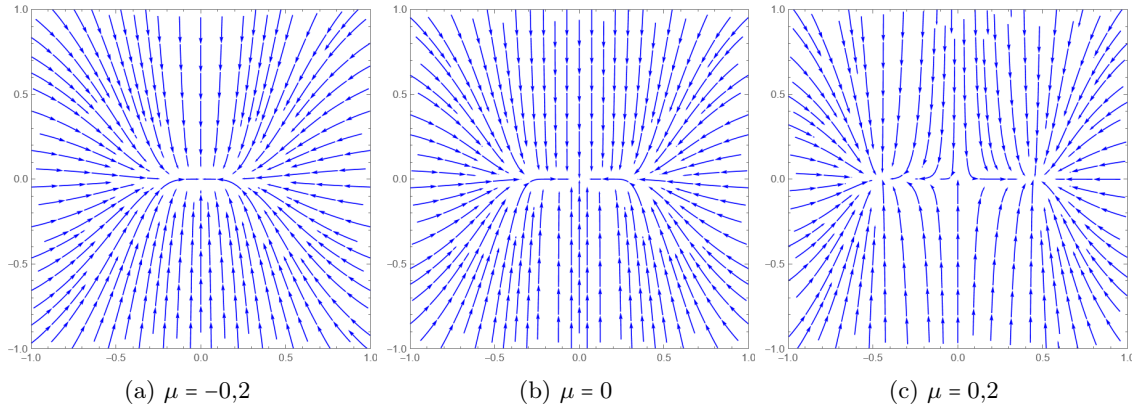


Figura 2.6.: Retratos de fase del Ejemplo 3 (MATHEMATICA).

Por lo tanto, el origen presenta una bifurcación pitchfork con valor de bifurcación $\mu = 0$.

2.3. Bifurcación Hopf

Comenzaremos con un ejemplo simple en el que un par de valores propios conjugados complejos simples cruzan el eje imaginario.

Consideremos el siguiente sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2), \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $x, y, \mu \in \mathbb{R}$. Su único equilibrio es el origen, y además

$$Df(\mu, 0) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

tiene valores propios $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$

Para simplificar el estudio del sistema (2.7), introducimos la variable $z = x + iy$, la cual satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) + i(x + \mu y - y(x^2 + y^2)) \\ &= \mu(x + iy) + (x + iy) - (x + iy)(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

la cual podemos reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{z} = (\mu + i)z - z|z|^2. \tag{2.8}$$

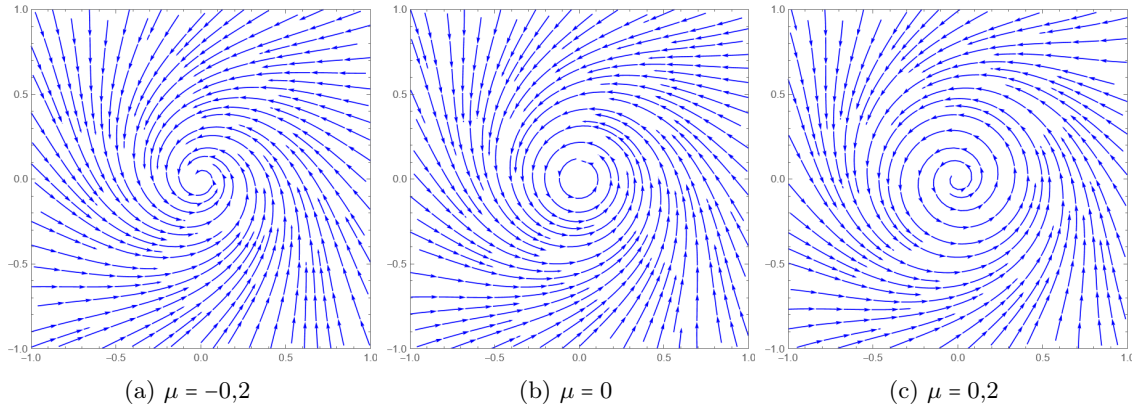


Figura 2.7.: Retratos de fase del sistema (2.7), que presenta una bifurcación Hopf supercrítica (MATHEMATICA).

Luego, usando el cambio de variable $z = re^{i\theta}$, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = \dot{r}e^{i\theta} + ri\dot{\theta}e^{i\theta}. \quad (2.9)$$

Así, de las ecuaciones (2.8) y (2.9) se desprende que

$$\begin{aligned} \dot{r}e^{i\theta} + ri\dot{\theta}e^{i\theta} &= (\mu + i)re^{i\theta} - re^{i\theta}|r|^2 \\ &= re^{i\theta}(\mu - r^2) + ire^{i\theta}, \end{aligned}$$

y de esta forma, llegamos a la forma polar del sistema (2.7), que está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Las variaciones del retrato de fase del sistema (2.7) cuando μ pasa por cero se pueden analizar fácilmente usando la forma polar (2.10), ya que las ecuaciones para r y θ están desacopladas. Podemos ver que el sistema (2.7) siempre tiene un único equilibrio en el origen, y es un foco estable para $\mu < 0$ y un foco inestable para $\mu > 0$. Este equilibrio está rodeado cuando $\mu > 0$ por una órbita cerrada aislada (ciclo límite) que es única y estable. Esta bifurcación *supercrítica*. De forma análoga, el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y + y(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

puede reescribirse de la forma (2.8), de donde obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu + r^2) \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

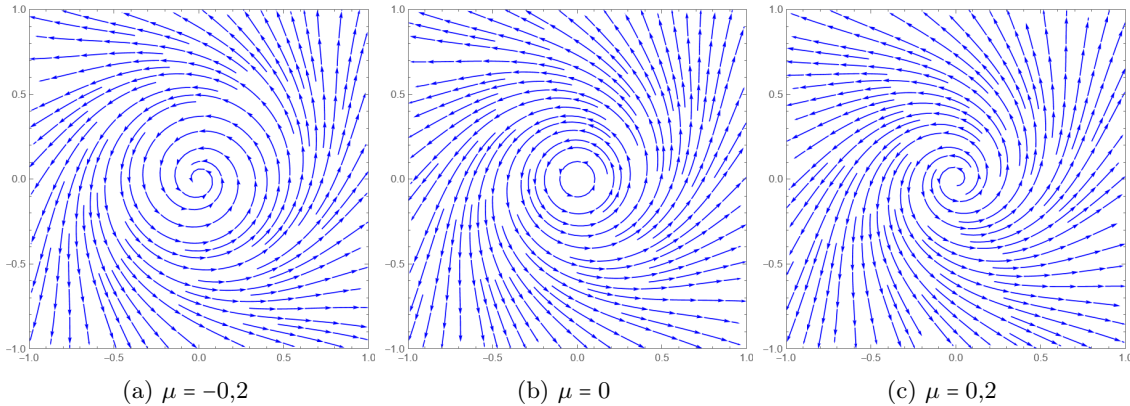


Figura 2.8.: Retratos de fase del sistema (2.11), que presenta una bifurcación Hopf subcrítica (MATHEMATICA).

Este tiene una solución periódica inestable para $\mu < 0$. De ahí que esta bifurcación sea *subcrítica*.

Como se describió en el ejemplo anterior, en la bifurcación de Hopf, el equilibrio de un sistema pierde estabilidad cuando un par de valores propios conjugados complejos de la linealización alrededor del equilibrio cruzan el eje imaginario del plano complejo. Es razonable esperar que el sistema dinámico bajo ciertas condiciones, presente un ciclo límite de pequeña amplitud que se bifurca desde el equilibrio. El ciclo límite es orbitalmente estable y la bifurcación es supercrítica, o el ciclo límite es inestable y la bifurcación es subcrítica.

El siguiente teorema enumera condiciones suficientes para que un sistema experimente una bifurcación Hopf, y su demostración puede consultarse en [6].

Teorema 2.3. (*Andronov-Hopf*) Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(\mu, x) \tag{2.12}$$

donde $f \in C^{k+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $k \geq 4$ y $f(\mu, 0) = 0$; supongamos que para $|\mu|$ pequeño la matriz $Df(\mu, 0)$ tiene un par de valores propios conjugados $\alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ tales que $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$ y los restantes $n - 2$ valores propios tienen parte real negativa, entonces:

- (i) existe $\delta > 0$ y una función $\mu \in C^{k-2}((-\delta, \delta), \mathbb{R})$ tal que para $\epsilon \in (-\delta, \delta)$, el sistema $\dot{x} = f(\mu(\epsilon), x)$ tiene una solución periódica $p(\epsilon, t)$ con periodo $T(\epsilon) > 0$, además $T \in C^{k-2}$, $\mu(0) = 0$, $T(0) = 2\pi/\omega(0)$, $p(t, 0) \equiv 0$ y la amplitud de esta solución periódica es proporcional a $\sqrt{|\mu(\epsilon)|}$;
- (ii) existe una vecindad U de $(\mu, x) = (0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que no contiene ninguna órbita periódica de (2.12), pero si las de la familia $p(\epsilon, t)$, con $\epsilon \in (-\delta, \delta)$.

3. Dinámica de Poblaciones en Tiempo Continuo

La dinámica de poblaciones tiene como objetivo el estudio del crecimiento e interacción entre poblaciones y su ambiente. Estas poblaciones pueden ser de animales, plantas, células, bacterias, virus, seres humanos, etc. Estos modelos nos ayudan a entender fenómenos tales como la depredación, competencia, manejo de recursos naturales, etc.

En este capítulo tratamos especies con generaciones superpuestas, es decir, especies cuyos padres normalmente están presentes cuando nace la nueva generación.

3.1. Ecuación Logística

En 1798, Malthus propone que la velocidad de crecimiento de una población, es proporcional a la cantidad de individuos de la población. Esta suposición es bastante razonable y podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\dot{N}(t) = rN(t), \quad (3.1)$$

donde $r > 0$ es una constante llamada *tasa de crecimiento intrínseco* de la población. También podemos expresar esta ecuación como

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = r,$$

lo que nos dice que la tasa de crecimiento *per cápita* (el número de descendientes producidos por un miembro de la población por unidad de tiempo) es la constante r . En una población hay un proceso continuo de nacimiento y muerte. Si no se tiene en cuenta la migración y las tasas de natalidad y mortalidad per cápita se denotan por b y d , respectivamente, entonces la tasa de crecimiento es $r = b - d$ y es positiva solo si la tasa de natalidad es mayor que la tasa de mortalidad.

Las soluciones de la ecuación (3.1) son de la forma $N(t) = N_0 e^{rt}$, donde $N_0 = N(0) > 0$ es el tamaño de la población en el tiempo inicial. Es decir, Malthus propuso que las poblaciones crecen o decrecen de manera exponencial.

Sin embargo, no posible tener un crecimiento exponencial ilimitado a largo plazo, para cualquier población. Debido a esto, Verhulst en 1838 modifica el modelo propuesto por Malthus debido a que los recursos disponibles en el hábitat de la población son finitos, y por lo tanto la población crece tanto como su hábitat se lo permita. Bajo este principio, la tasa de crecimiento per cápita no es una función constante. Por simplicidad, suponemos que la tasa de crecimiento per capita es una función lineal decreciente, es decir,

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

donde $K > 0$ es la *capacidad de carga* del hábitat. Multiplicando por $N(t)$ se obtiene la

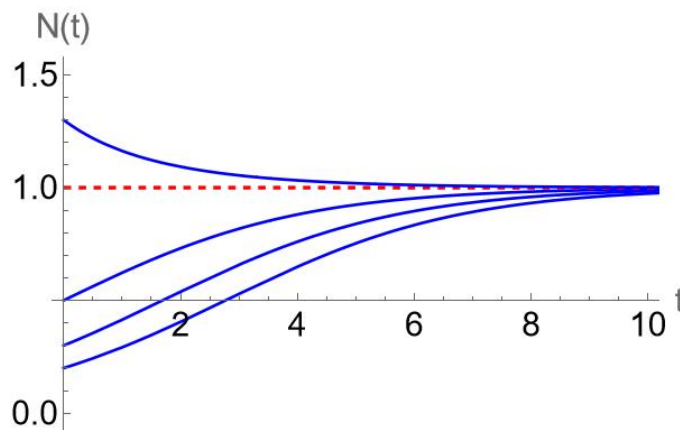


Figura 3.1.: Soluciones de la ecuación (3.2), con $r = 0,5$ y $k = 1$ (MATHEMATICA).

ecuación (3.2), llamada *ecuación de crecimiento logístico*:

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right). \quad (3.2)$$

3.2. Modelos de Depredación

En un hábitat donde varias especies viven juntas, uno puede seleccionar dos que parecen ser las más importantes entre sí y descuidar el efecto del resto de las especies para obtener una visión más profunda de su interacción. Aunque los resultados obtenidos de esta manera son abstractos y, por lo tanto, pueden ser erróneos, pueden ayudarnos a comprender la dinámica. Si las dos especies elegidas no son neutrales entre sí, entonces hay, en principio, tres formas de interactuar entre ellas:

- (i) uno de ellos puede servir de alimento al otro; en cuyo caso hablamos de una interacción *depredador-presa*;

- (ii) las dos especies pueden competir por los mismos recursos; en este caso hablamos de un *sistema competitivo*; y
- (iii) pueden ayudarse mutuamente a existir; entonces decimos que viven en *simbiosis* o que son *cooperativos*.

En este trabajo estudiamos la interacción depredador-presa.

Un sistema en el que las tasas de crecimiento per cápita de las especies participantes son funciones lineales de las cantidades (densidades) de las especies se denomina *sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra*. Denotaremos por $N(t)$ y $P(t)$ a las poblaciones de presas y depredadores en un tiempo t , respectivamente. La tasa de crecimiento per cápita de la población de presas es

$$\frac{\dot{N}}{N} = \epsilon \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \alpha P,$$

donde $K, \epsilon, \alpha > 0$ y K es la capacidad de carga del hábitat respecto a la población de presas (en ausencia de depredadores, la población de presas sigue una dinámica logística), ϵ es la tasa de crecimiento intrínseca de la población de presas, y α es la tasa de depredación. La tasa de crecimiento per cápita de la población de depredadores es

$$\frac{\dot{P}}{P} = -\gamma + \beta N - \delta P,$$

donde $\gamma, \beta > 0$, $\delta \geq 0$ y γ es la *mortalidad intrínseca* de la población de depredadores (en ausencia de comida, la población de depredadores disminuye a esta tasa); sin embargo, si $\delta \neq 0$, entonces la mortalidad de los depredadores es una función lineal creciente debido, quizás, a otros recursos restrictivos por los cuales existe una *competencia intraespecífica* dentro de la especie depredadora; finalmente, β es la tasa de conversión, es decir, los depredadores disminuyen la cantidad de presas por unidad de tiempo en αNP y esto aumenta la cantidad de depredadores por unidad de tiempo en $(\beta/\alpha)\alpha NP$. Multiplicamos por N y P , respectivamente, y obtenemos el *sistema general de ecuaciones diferenciales depredador-presa de Lotka-Volterra*:

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \epsilon N \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \alpha NP \\ \dot{P} &= -\gamma P + \beta NP - \delta P^2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si consideramos $\delta = 0$, la capacidad de carga K puede considerarse infinita, dicho de otra forma, si no existe competencia intraespecífica dentro de la población de presas, el sistema (3.3) puede reducirse a

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \epsilon N - \alpha NP \\ \dot{P} &= -\gamma P + \beta NP. \end{aligned} \tag{3.4}$$

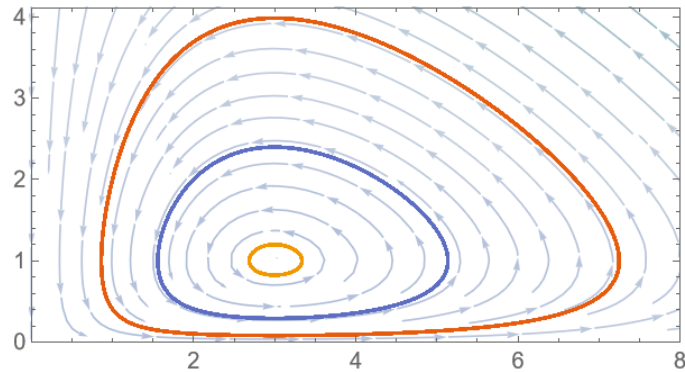


Figura 3.2.: Retrato de fase del sistema (3.4) (MATHEMATICA).

Este fue el primer modelo construido por Volterra después de la Primera Guerra Mundial para explicar por qué la cantidad de peces depredadores aumentó en relación con los peces de presa en el mar Adriático durante la guerra cuando la pesca se detuvo debido a las batallas navales entre la flota italiana y la austrohúngara.

3.3. Modelos de Depredación con Memoria

En 1984, Farkas (ver [7]) propone una generalización del sistema (3.3) y Farkas et al. (ver [8]) dan respuestas sobre el comportamiento de la interacción de especies indicando cómo cambia la dinámica del sistema a lo largo del tiempo dependiendo de los parámetros por los que se define. El modelo propuesto por Farkas es superior en dos aspectos:

- (i) se considera la *competencia intraespecífica* en la población de presas; esto tiene un efecto de saturación, y como consecuencia la presa no crece exponencialmente en ausencia de depredación sino que tiende a estabilizarse.
- (ii) si bien es aceptable que la cantidad de depredadores tenga un efecto instantáneo en la tasa de crecimiento de las presas, obviamente, la tasa de crecimiento presente de los depredadores depende no solo de la cantidad presente de alimento, sino también de otras cantidades pasadas, como el periodo de gestación, entre otras.

Por lo tanto, incorpora un *término de retardo* en la ecuación diferencial asociada a la población de depredadores. Este retardo juega un papel importante en la dinámica de poblaciones. La descendencia aparece pero debe alcanzar la madurez antes de participar en el proceso de reproducción, el ser vivo debe comer para poder reproducirse y además, la descendencia aparece solo después de un tiempo.

El modelo estudiado en [8] es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= \epsilon N(t)f(N/K) - \alpha N(t)P(t) \\ \dot{P}(t) &= -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\tau)G(t-\tau)d\tau,\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde $f(N/K) = (1 - N/K)$ es una función lineal asociada al crecimiento de la población de presas, es decir, se asume un crecimiento logístico de estas, y $G \in \mathcal{C}^1([0, \infty))$ es una función de densidad, cuyo rol es sopesar momentos pasados. Al igual que en los modelos anteriores, denotamos la tasa de crecimiento específico de la población de presas, la tasa de depredación, la mortalidad de los depredadores y la tasa de conversión por $\epsilon, \alpha, \gamma, \beta > 0$, respectivamente, y la capacidad de carga del hábitat (respecto a la población de presas) por $K > 0$.

Para el estudio del sistema (3.5), Farkas consideró las siguientes funciones de densidad:

- (i) $G(s) = ae^{-as}$ con $a > 0$, llamada *memoria con desvanecimiento exponencial* porque la mayor ponderación se le da a los momentos en la vecindad del presente y, a medida que retrocedemos en el tiempo, el peso disminuye exponencialmente.
- (ii) $G(s) = a^2se^{-as}$ con $a > 0$, llamada *memoria con joroba*. Esta función tiene la ventaja de que especifica un momento en el pasado cuando la cantidad de comida es más importante desde el punto de vista del crecimiento presente del depredador.

4. Estudio de en un modelo depredador-presa con función logística general y memoria con joroba

En 2017, Castro et al (ver [2]) estudiaron una generalización del sistema (3.5) y al igual que Farkas, consideraron la función de densidad $G(s) = ae^{-as}$, es decir, un sistema con memoria con desvanecimiento exponencial, pero con la diferencia de que, en lugar de considerar una función de crecimiento lineal asociada al crecimiento de la población de presas, se considera una función logística general (es decir, no lineal). En este trabajo, realizamos un estudio análogo al visto en [2], pero considerando la función de densidad $G(s) = a^2se^{-as}$, es decir, un sistema con memoria con joroba.

El modelo que estudiaremos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{N}(t) &= \epsilon N(t)f(N/K) - \alpha N(t)P(t), \\ \dot{P}(t) &= -\gamma P(t) + \beta P(t) \int_{-\infty}^t N(\tau)G(t-\tau)d\tau, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $G(s) = a^2se^{-as}$, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función logística general de clase C^k , con $k \geq 3$, tal que

$$f(0) > 0, \quad f(1) = 0, \quad y f'(\frac{\gamma}{K\beta}) < 0 y \gamma < K\beta. \quad (4.2)$$

Los problemas surgen cuando queremos comprobar la estabilidad de los equilibrios porque una típica ecuación diferencial con retardo tiene un espectro infinito. Sin embargo, cuando la función de densidad es el producto de un polinomio con una función exponencial, el sistema es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de dimensión superior (ver [5]). Entonces, para facilitar el estudio de la dinámica de este modelo, introducimos las siguientes funciones auxiliares:

$$\begin{aligned} Q(t) &= a^2 \int_{-\infty}^t N(\tau)(t-\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau \text{ y} \\ R(t) &= a \int_{-\infty}^t N(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Usando la regla de Leibniz obtenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{Q}(t) &= a^2 \int_{-\infty}^t N(\tau) \frac{\partial}{\partial t} (t - \tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \\
&= a^2 \int_{-\infty}^t N(\tau) (e^{-a(t-\tau)} - a(t - \tau) e^{-a(t-\tau)}) d\tau \\
&= a^2 \left(\int_{-\infty}^t N(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau - a \int_{-\infty}^t N(\tau) (t - \tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \right) \\
&= a(R(t) - Q(t)),
\end{aligned}$$

y de forma análoga,

$$\begin{aligned}
\dot{R}(t) &= aN(t) + a \int_{-\infty}^t N(\tau) \frac{\partial}{\partial t} e^{-a(t-\tau)} d\tau \\
&= a \left(N(t) - a \int_{-\infty}^t N(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau \right) \\
&= a(N(t)) - R(t).
\end{aligned}$$

Luego, el sistema (4.1) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}
\dot{N} &= \epsilon N f(N/K) - \alpha NP \\
\dot{P} &= -\gamma P + \beta PQ \\
\dot{Q} &= a(R - Q) \\
\dot{R} &= a(N - R)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

para $t \in [0, \infty)$ en el siguiente sentido (ver [4, 10]): $(N, P) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la solución de (4.1) correspondiente a la correspondiente función continua y acotada $\bar{N} : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ y condición inicial $P(0) = P_0$, si y solo si, $(N, P, Q, R) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$, es la solución de (4.4) que satisface la condiciones iniciales $N(0) = \bar{N}(0)$, $P(0) = P_0$ y

$$\begin{aligned}
Q(0) &= Q_0 = -a^2 \int_{-\infty}^0 \bar{N}(\tau) \tau e^{a\tau} d\tau \text{ y} \\
R(0) &= R_0 = a \int_{-\infty}^0 \bar{N}(\tau) e^{a\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

Para simplificar el estudio de la dinámica del modelo, consideremos el siguiente cambio de coordenadas y reescalación del tiempo $\{N \rightarrow Kn, P \rightarrow Kp, Q \rightarrow Kq, R \rightarrow Kr, t \rightarrow \frac{s}{\epsilon}\}$, donde n, p, q y r denotan las nuevas coordenadas. De esta forma, el sistema (4.4) es equivalente al sistema:

$$X_\eta : \begin{cases} \dot{n} = nf(n) - \frac{K\alpha}{\epsilon} np \\ \dot{p} = -\frac{\gamma}{\epsilon} p + \frac{K\beta}{\epsilon} pq \\ \dot{q} = \frac{a}{\epsilon} (r - q) \\ \dot{r} = \frac{a}{\epsilon} (n - r), \end{cases} \tag{4.5}$$

donde $(n, p, q, r) \in \Omega = \{(n, p, q, r) \in \mathbb{R}^4 : n, p, q, r \geq 0\}$ y $\eta = (a, K, \alpha, \beta, \gamma, \epsilon) \in \mathbb{R}_+^6$.

4.1. Bifurcación en el parámetro ϵ

Hallaremos los equilibrios del sistema (4.5), para esto, resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$nf(n) - \frac{K\alpha}{\epsilon}np = 0 \quad (4.6a)$$

$$-\frac{\gamma}{\epsilon}p + \frac{K\beta}{\epsilon}pq = 0 \quad (4.6b)$$

$$\frac{a}{\epsilon}(r - q) = 0 \quad (4.6c)$$

$$\frac{a}{\epsilon}(n - r) = 0. \quad (4.6d)$$

Como punto de partida consideremos la ecuación (4.6b). Para que esta ecuación se satisfaga, se debe cumplir que $p = 0$ o $\gamma = K\beta q$. Si $p = 0$, de la ecuación (4.6a) tenemos que $nf(n) = 0$, esto implica que $n = 0$ o $n = 1$. Si $n = 0$, de las ecuaciones (4.6c) y (4.6d) obtenemos que $r = q = 0$. En consecuencia, el punto $(0, 0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema. Por otro lado, si $n = 1$, de las ecuaciones (4.6c) y (4.6d) obtenemos que $r = q = 1$. Por lo tanto, el punto $(1, 0, 1, 1)$ también es un punto de equilibrio del sistema. Ahora supongamos que $\gamma = K\beta q$, entonces $q = b = \gamma/K\beta$. Luego, de las ecuaciones (4.6c) y (4.6d) obtenemos que $n = r = q = b$ y de la ecuación (4.6a) que $p = \epsilon \frac{f(b)}{K\alpha}$. Por lo tanto, el punto $\sigma = (b, \epsilon \frac{f(b)}{K\alpha}, b, b)$ es un punto de equilibrio.

En virtud de los Teoremas 1.2 y 1.4, para estudiar la estabilidad en los puntos de equilibrio, basta estudiar los signos de los valores propios de la matriz de la linealización del sistema (4.5) evaluada en cada punto de equilibrio. La matriz de la linealización del sistema (4.5) es:

$$DX(n, p, q, r) = \begin{pmatrix} f(n) + nf'(n) - K\alpha p/\epsilon & -K\alpha n/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & (-\gamma + K\beta q)/\epsilon & K\beta p/\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -a/\epsilon & a/\epsilon \\ a/\epsilon & 0 & 0 & -a/\epsilon \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Luego,

$$DX_{\eta}(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a/\epsilon & a/\epsilon \\ a/\epsilon & 0 & 0 & -a/\epsilon \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$p(\lambda) = (f(0) - \lambda) \left(\frac{-\gamma}{\epsilon} - \lambda \right) \left(\frac{a}{\epsilon} + \lambda \right)^2.$$

Como sus raíces son $\lambda_1 = f(0) > 0$, $\lambda_2 = -\gamma/\epsilon < 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = -a/\epsilon < 0$, entonces $(0, 0, 0, 0)$ es una silla hiperbólica de X_η .

De forma análoga,

$$DX_\eta(1, 0, 1, 1) = \begin{pmatrix} f'(1) & -K\alpha/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & (-\gamma + K\beta)/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a/\epsilon & a/\epsilon \\ a/\epsilon & 0 & 0 & -a/\epsilon \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$p(\lambda) = (f'(1) - \lambda) \left(\frac{-\gamma + K\beta}{\epsilon} - \lambda \right) \left(\frac{a}{\epsilon} + \lambda \right)^2.$$

Ya que sus raíces son $\lambda_1 = f'(1) \neq 0$, $\lambda_2 = (K\beta - \gamma)/\epsilon > 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = -a/\epsilon < 0$, entonces $(1, 0, 1, 1)$ es una silla hiperbólica de X_η .

Estos cálculos conducen al siguiente resultado:

Lema 4.1. *El sistema de ecuaciones (4.5) tiene un único punto de equilibrio $\sigma = (b, \frac{\epsilon f(b)}{K\alpha}, b, b)$ en Ω° . Además, los puntos de equilibrio $(0, 0, 0, 0)$ y $(1, 0, 1, 1)$ son sillas hiperbólicas.*

Para estudiar la dinámica del equilibrio σ , debemos estudiar la estabilidad de la matriz

$$DX_\eta(\sigma) = \begin{pmatrix} bf'(b) & -K\alpha b/\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta f(b)/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -a/\epsilon & a/\epsilon \\ a/\epsilon & 0 & 0 & -a/\epsilon \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{2a}{\epsilon} - bf'(b) \right) \lambda^3 + \frac{a}{\epsilon^2} (a - 2bf'(b)\epsilon) \lambda^2 - \frac{a^2 bf'(b)}{\epsilon^2} \lambda + \frac{K\beta a^2 bf(b)}{\epsilon^3}. \quad (4.8)$$

Observemos que

$$\left(\frac{2a}{\epsilon} - bf'(b) \right) > 0, \quad \frac{a}{\epsilon^2} (a - 2bf'(b)\epsilon) > 0, \quad -\frac{a^2 bf'(b)}{\epsilon^2} > 0, \quad \frac{K\beta a^2 bf(b)}{\epsilon^3} > 0,$$

y que la matriz de Hurwitz asociada a $p(\lambda)$ está dada por

$$H_p = \begin{pmatrix} -a^2 bf'(b)/\epsilon^2 & K\beta a^2 bf(b)/\epsilon^3 & 0 & 0 \\ 2a/\epsilon - bf'(b) & a(a - 2bf'(b)\epsilon)/\epsilon^2 & -a^2 bf'(b)/\epsilon^2 & K\beta a^2 bf(b)/\epsilon^3 \\ 0 & 1 & 2a/\epsilon - bf'(b) & a(a - 2bf'(b)\epsilon)/\epsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista estabilidad es necesario y suficiente que sus menores principales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 > 0$. Es claro que $\Delta_1 > 0$ y que $\Delta_3 = \Delta_4$. Por lo tanto, para establecer condiciones para la existencia de estabilidad, debemos estudiar bajo que condiciones se cumple que $\Delta_2, \Delta_3 > 0$. Consideraremos en un principio, el parámetro ϵ como variable, y al resto de los parámetros los consideraremos constantes.

$$\begin{aligned}\Delta_2(\epsilon) &= \frac{a^2b}{\epsilon^4}(-a(af'(b) + 2K\beta f(b)) + bf'(b)(2af'(b) + K\beta f(b)))\epsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow -a(af'(b) + 2K\beta f(b)) + bf'(b)(2af'(b) + K\beta f(b))\epsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow \epsilon < \frac{a(af'(b) + 2K\beta f(b))}{bf'(b)(2af'(b) + K\beta f(b))} = \epsilon^*.\end{aligned}$$

Notemos que $\frac{a}{bf'(b)} < 0$, en consecuencia, si $af'(b) + 2K\beta f(b)$ y $2af'(b) + K\beta f(b)$ tienen el mismo signo, entonces $\epsilon < 0$ y esto lo contradice las hipótesis del modelo. Además, se cumple la siguiente condición:

$$af'(b) + 2K\beta f(b) - (2af'(b) + K\beta f(b)) = -af'(b) + K\beta f(b) > 0.$$

Esto implica que $af'(b) + 2K\beta f(b) > 2af'(b) + K\beta f(b)$, y por lo tanto, para que dichos factores tengan distinto signo debe cumplirse que:

$$\frac{-K\beta f(b)}{2f'(b)} < a < \frac{-2K\beta f(b)}{f'(b)}. \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(\epsilon) &= \frac{a^2b}{\epsilon^5}(-2a^2(af'(b) + 2K\beta f(b)) + 4abf'(b)(af'(b) + K\beta f(b)))\epsilon \\ &\quad - b^2\epsilon^2(f'(b))^2(2af'(b) + K\beta f(b)) > 0 \\ &\Leftrightarrow -2a^2(af'(b) + 2K\beta f(b)) + 4abf'(b)(af'(b) + K\beta f(b))\epsilon \\ &\quad - b^2\epsilon^2(f'(b))^2(2af'(b) + K\beta f(b)) > 0.\end{aligned} \quad (4.10)$$

La condición (4.9) implica que $-b^2(f'(b))^2(2af'(b) + K\beta f(b)) > 0$ y que $-2a^2(af'(b) + 2K\beta f(b)) < 0$. En consecuencia, $\Delta_3(\epsilon)$ es convexo y tiene raíces de signo distinto. Ya que por hipótesis $\epsilon > 0$, nos quedamos con la raíz positiva:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2a(af'(b) + K\beta f(b)) + \sqrt{2a\sqrt{-aK\beta f(b)f'(b)}}}{bf'(b)(2af'(b) + K\beta f(b))}.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Routh-Hurwitz, si $\bar{\epsilon} < \epsilon < \epsilon^*$, el polinomio característico asociado a $DX_\eta(\sigma)$ es estable y en consecuencia, el punto de equilibrio σ es asintóticamente estable. En caso contrario, es asintóticamente inestable. Esto lo resumimos en el siguiente resultado:

Lema 4.2. *El punto de equilibrio $\sigma = (b, \epsilon \frac{f(b)}{K\alpha}, b, b)$ del sistema X_η es asintóticamente estable cuando $\bar{\epsilon} < \epsilon < \epsilon^*$. donde*

$$\bar{\epsilon} = \frac{2a(af'(b) + K\beta f(b)) + \sqrt{2a}\sqrt{-aK\beta f(b)f'(b)}}{bf'(b)(2af'(b) + K\beta f(b))}$$

y

$$\epsilon^* = \frac{a(af'(b) + 2K\beta f(b))}{bf'(b)(2af'(b) + K\beta f(b))}.$$

Por otra parte, si $\epsilon \geq \epsilon^*$ o $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$, entonces σ es asintóticamente inestable.

Ahora, supongamos que el polinomio

$$p(\lambda, \bar{\epsilon}) = \lambda^4 + \left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\lambda^3 + \frac{a}{\bar{\epsilon}^2}(a - 2bf'(b)\bar{\epsilon})\lambda^2 - \frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2}\lambda + \frac{K\beta a^2bf(b)}{\bar{\epsilon}^3} \quad (4.11)$$

puede ser factorizado como

$$p(\lambda, \bar{\epsilon}) = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 + A_1\lambda + A_0), \quad (4.12)$$

donde $\omega > 0$, entonces

$$A_1 = \left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right) \quad (4.13a)$$

$$A_0 + \omega^2 = \frac{a}{\bar{\epsilon}^2}(a - 2bf'(b)\bar{\epsilon}) \quad (4.13b)$$

$$A_1\omega^2 = -\frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} \quad (4.13c)$$

$$A_0\omega^2 = \frac{K\beta a^2bf(b)}{\bar{\epsilon}^3}. \quad (4.13d)$$

De las ecuaciones (4.13a), (4.13c) y (4.13d) podemos despejar A_0 , A_1 y ω^2 , y para que la factorización (4.12) sea correcta, estos tres valores deben satisfacer la ecuación (4.13b).

Mediante cálculos directos obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{-a^2bf'(b)}{2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2} \\ A_0 &= \frac{K\beta f(b)(bf'(b)\bar{\epsilon} - 2a)}{f'(b)\bar{\epsilon}^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ahora probaremos que se satisface la ecuación (4.13b), o equivalentemente

$$\begin{aligned} (A_0 + \omega^2)(2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2)f'(b)\bar{\epsilon}^2 &= \frac{a}{\bar{\epsilon}^2}(a - 2bf'(b)\bar{\epsilon})(2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2)f'(b)\bar{\epsilon}^2 \\ &= 2a^3f'(b)\bar{\epsilon} - 5a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 2ab^2(f'(b))^3\bar{\epsilon}^3. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(A_0 + \omega^2)(2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2)f'(b)\bar{\epsilon}^2 &= \left(\frac{K\beta f(b)(bf'(b)\bar{\epsilon} - 2a)}{f'(b)\bar{\epsilon}^2} + \frac{-a^2bf'(b)}{2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2} \right) \\
&\quad (2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2)f'(b)\bar{\epsilon}^2 \\
&= -4K\beta a^2\bar{\epsilon} - a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 4K\beta abf(b)f'(b)\bar{\epsilon}^2 \\
&\quad - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2\bar{\epsilon}^3.
\end{aligned}$$

De (4.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_3(\bar{\epsilon}) &= -2a^3f'(b) - 4K\beta a^2f(b) + 4a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon} + 4K\beta abf(b)f'(b)\bar{\epsilon} - 2ab^2(f'(b))^3\bar{\epsilon}^2 \\
&\quad - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 = 0,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
2a^3f'(b)\bar{\epsilon} + 2ab^2(f'(b))^3\bar{\epsilon}^3 &= -4K\beta a^2f(b)\bar{\epsilon} + 4a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 4K\beta abf(b)f'(b)\bar{\epsilon}^2 \\
&\quad - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2\bar{\epsilon}^3.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&2a^3f'(b)\bar{\epsilon} - 5a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 2ab^2(f'(b))^3\bar{\epsilon}^3 \\
&= -5a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 4K\beta a^2f(b)\bar{\epsilon} + 4a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 4K\beta abf(b)f'(b)\bar{\epsilon}^2 \\
&\quad - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2\bar{\epsilon}^3 \\
&= -4K\beta a^2\bar{\epsilon} - a^2b(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2 + 4K\beta abf(b)f'(b)\bar{\epsilon}^2 - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2\bar{\epsilon}^3,
\end{aligned}$$

en consecuencia, se satisface la ecuación (4.13b) y la factorización (4.12) es correcta. Ya que $p(\lambda, \bar{\epsilon})$ es un polinomio, es de clase \mathcal{C}^∞ y $p(\lambda(\bar{\epsilon}), \bar{\epsilon}) = 0$, donde $\lambda(\bar{\epsilon}) = \omega i$ y

$$\omega = \sqrt{\frac{-a^2bf'(b)}{2a\bar{\epsilon} - bf'(b)\bar{\epsilon}^2}}.$$

También, tenemos que

$$\begin{aligned}
p'_\lambda(\lambda, \epsilon) &= 4\lambda^3 + 3\left(\frac{2a}{\epsilon} - bf'(b)\right)\lambda^2 + \frac{2a}{\epsilon^2}(a - 2bf'(b)\epsilon)\lambda - \frac{a^2bf'(b)}{\epsilon^2}, \\
p'_\epsilon(\lambda, \epsilon) &= \frac{-2a}{\epsilon^2}\lambda^3 - \frac{2a(a - 2bf'(b)\epsilon)}{\epsilon^3}\lambda^2 - \frac{2abf'(b)}{\epsilon^2}\lambda^2 + \frac{2a^2bf'(b)}{\epsilon^3}\lambda - \frac{3K\beta a^2bf(b)}{\epsilon^4}
\end{aligned}$$

y

$$p'_\lambda(\lambda(\bar{\epsilon}), \bar{\epsilon}) = \frac{-a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} - 3\left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\omega^2 + i\left(\frac{2a(a - 2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right) \neq 0,$$

pues

$$\left(\frac{2a(a - 2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right) \neq 0.$$

Así, por el Teorema de la Función Implícita, existe $\delta > 0$ tal que $p(\lambda(\epsilon), \epsilon) = 0$ para todo $\epsilon \in (\bar{\epsilon} - \delta, \bar{\epsilon} + \delta)$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \lambda(\bar{\epsilon}) &= -\frac{p'_\epsilon(\omega i, \bar{\epsilon})}{p'_\lambda(\omega i, \bar{\epsilon})} \\ &= -\frac{\left(-\frac{3K\beta a^2 b f(b)}{\bar{\epsilon}^4} + \frac{2abf'(b)\omega^2}{\bar{\epsilon}^2} + \frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega^2}{\bar{\epsilon}^3}\right) + i\left(\frac{2a^2bf'(b)\omega}{\bar{\epsilon}^3} + \frac{2a\omega^3}{\bar{\epsilon}^2}\right)}{\left(-\frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} - 3\left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\omega^2\right) + i\left(\frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right)} \end{aligned}$$

cuya parte real está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} Re\lambda(\bar{\epsilon}) &= -\frac{\left(-\frac{3K\beta a^2 b f(b)}{\bar{\epsilon}^4} + \frac{2abf'(b)\omega^2}{\bar{\epsilon}^2} + \frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega^2}{\bar{\epsilon}^3}\right) \left(-\frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} - 3\left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\omega^2\right)}{\left(-\frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} - 3\left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\omega^2\right)^2 + \left(\frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right)^2} \\ &\quad - \frac{\left(\frac{2a^2bf'(b)\omega}{\bar{\epsilon}^3} + \frac{2a\omega^3}{\bar{\epsilon}^2}\right) \left(\frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right)}{\left(-\frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} - 3\left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\omega^2\right)^2 + \left(\frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right)^2}. \end{aligned}$$

Para determinar el signo de $\frac{d}{d\epsilon} Re\lambda(\bar{\epsilon})$, basta estudiar su numerador.

(i)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-3K\beta a^2 b f(b)}{\bar{\epsilon}^4} + \frac{2abf'(b)\omega^2}{\bar{\epsilon}^2} + \frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega^2}{\bar{\epsilon}^3}\right) \left(-\frac{a^2bf'(b)}{\bar{\epsilon}^2} - 3\left(\frac{2a}{\bar{\epsilon}} - bf'(b)\right)\omega^2\right) \\ &= \frac{a}{\bar{\epsilon}^6} (a^2 + b + f'(b) + \omega^2(6a\bar{\epsilon} - 3bf'(b)\bar{\epsilon}^2)) (3K\beta abf(b) - \omega^2(2a\bar{\epsilon} - 2af'(b)\bar{\epsilon}^2)) \end{aligned}$$

reemplazamos ω^2 y $\bar{\epsilon}$

$$= \frac{a}{\bar{\epsilon}^6} (-2abf'(b)) \left(\frac{2b^3(f'(b))^3(2af'(b) + K\beta f(b))^2}{(2af'(b) + 2K\beta f(b) + \sqrt{2}\sqrt{-K\beta af(b)f'(b)})^2} \right) < 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2a^2bf'(b)\omega}{\bar{\epsilon}^3} + \frac{2a\omega^3}{\bar{\epsilon}^2}\right) \left(\frac{2a(a-2bf'(b)\bar{\epsilon})\omega}{\bar{\epsilon}^2} - 4\omega^3\right) \\ &= \frac{4a\omega^2}{\bar{\epsilon}^5} (abf'(b) + \bar{\epsilon}\omega^2) (2a^2 - 3abf'(b)\bar{\epsilon} + 2b^2(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2) \\ &= \frac{4a\omega^2}{\bar{\epsilon}^5} \left(abf'(b) + \bar{\epsilon} \left(\frac{-a^2bf'(b)}{2a\bar{\epsilon} - 2bf'(b)\bar{\epsilon}^2} \right) \right) (2a^2 - 3abf'(b)\bar{\epsilon} + 2b^2(f'(b))^2\bar{\epsilon}^2) \\ &= \frac{abf'(b)(a - bf'(b)\bar{\epsilon})(2a^2 - 3abf'(b)\bar{\epsilon} + 2b^2 + (f'(b))^2\bar{\epsilon}^2)}{(-2a + bf'(b)\bar{\epsilon})^2} < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{d}{d\epsilon} Re\lambda(\bar{\epsilon}) > 0$.

Introduciendo el parámetro $\mu = \epsilon - \bar{\epsilon}$ (o equivalentemente $\epsilon(\mu) = \mu + \bar{\epsilon}$), tenemos que $\epsilon = \bar{\epsilon}$ si y solo si $\mu = 0$. Luego,

$$\frac{d}{d\mu}(Re(\lambda(\epsilon(\mu)))) = \frac{d}{d\mu}(Re(\lambda(\epsilon(\mu)))) \frac{\partial \epsilon}{\partial \mu}$$

y así,

$$\left. \frac{d}{d\mu} Re(\lambda(\epsilon(\mu))) \right|_{\mu=0} > 0$$

Las condiciones del Teorema 2.3 se cumplen y con esto, hemos establecido el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *A partir de la condición (4.9), si ϵ decrece hasta $\epsilon = \bar{\epsilon}$ entonces el sistema (4.5) exhibe una bifurcación Hopf, es decir, el equilibrio σ pierde su estabilidad a medida que ϵ decrece hacia $\bar{\epsilon}$ y el sistema tiene soluciones periódicas de pequeña amplitud en alguna vecindad de σ cuyas frecuencias angulares se aproximan a ω dada por (4.14).*

4.2. Bifurcación en el parámetro a

Realizamos un cambio de variable para los parámetros (manteniendo los mismos símbolos) del sistema (4.5) $\{\frac{\alpha}{\epsilon} \rightarrow \alpha, \frac{\beta}{\epsilon} \rightarrow \beta, \frac{\gamma}{\epsilon} \rightarrow \gamma, \frac{a}{\epsilon} \rightarrow a\}$ y así, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$Y_\eta : \begin{cases} \dot{n} = nf(n) - K\alpha np. \\ \dot{p} = -\gamma p + K\beta pq. \\ \dot{q} = a(r - q). \\ \dot{r} = a(n - r). \end{cases} \quad (4.15)$$

donde $(n, p, q, r) \in \Omega = \{(n, p, q, r) \in \mathbb{R}^4 : n, p, q, r \geq 0\}$ y los nuevos parámetros son $\eta = (a, K, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^5$.

Procediendo de manera análoga al estudio del sistema (4.5), concluimos que los puntos $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 1)$ y $\sigma = (b, \frac{f(b)}{K\alpha}, b, b) \in \Omega$ son puntos de equilibrio del sistema (4.15). Para estudiar la estabilidad en los puntos de equilibrio, estudiamos los signos de los valores propios de la matriz de la linealización del sistema Y_η , que está dada por

$$DY_\eta(n, p, q, r) = \begin{pmatrix} f(n) + nf'(n) - K\alpha p & -K\alpha n & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta q & K\beta p & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Por lo tanto,

$$DY_\eta(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$p(\lambda) = (f(0) - \lambda)(-\gamma - \lambda)(a + \lambda)^2.$$

Luego, ya que los valores propios son $\lambda_1 = f(0) > 0$, $\lambda_2 = -\gamma < 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = -a < 0$, entonces $(0,0,0,0)$ es una silla hiperbólica de Y_η .

De manera análoga,

$$DY_\eta(1,0,1,1) = \begin{pmatrix} f(1) + f'(1) & -K\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma + K\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = (f'(1) - \lambda)((-\gamma + K\beta) - \lambda)(a + \lambda)^2.$$

Ya que los valores propios son $\lambda_1 = f'(1) \neq 0$, $\lambda_2 = K\beta - \gamma > 0$ y $\lambda_3 = \lambda_4 = -a < 0$, entonces $(1,0,1,1)$ es una silla hiperbólica de Y_η .

Estos cálculos conducen al siguiente resultado:

Lema 4.3. *El sistema de ecuaciones (4.15) tiene un único punto de equilibrio $\sigma = (b, \frac{f(b)}{K\alpha}, b, b)$ en Ω° . Además, los puntos de equilibrio $(0,0,0,0)$ y $(1,0,1,1)$ son sillas hiperbólicas.*

Estudiaremos la dinámica del equilibrio σ , para esto, estudiamos la estabilidad de la matriz

$$DY_\eta(\sigma) = \begin{pmatrix} bf'(b) & -K\alpha b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta f(b)/\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (2a - bf'(b))\lambda^3 + a(a - 2bf'(b))\lambda^2 - a^2bf'(b)\lambda + K\beta a^2bf(b). \quad (4.17)$$

Para estudiar la estabilidad de este polinomio, haremos uso del criterio de Routh-Hurwitz. Observemos que

$$(2a - bf'(b)) > 0, \quad a(a - 2bf'(b)) > 0, \quad -a^2bf'(b) > 0, \quad K\beta a^2bf(b) > 0,$$

la matriz de Hurwitz asociada a este polinomio es

$$H_p = \begin{pmatrix} -a^2bf'(b) & K\beta a^2bf(b) & 0 & 0 \\ 2a - bf'(b) & a(a - 2bf'(b)) & -a^2bf'(b) & K\beta a^2bf(b) \\ 0 & 1 & 2a - bf'(b) & a(a - 2bf'(b)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y para que exista estabilidad es necesario y suficiente que sus menores principales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 > 0$. Es claro que $\Delta_1 > 0$ y que $\Delta_3 = \Delta_4$. Ahora estableceremos las condiciones sobre el parámetro a para que exista estabilidad, es decir, para que $\Delta_2, \Delta_3 > 0$.

Notemos que

$$\Delta_3 = (2a - bf'(b))\Delta_2 - a^4b^2(f'(b))^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta_2 > \frac{a^4b^2(f'(b))^2}{2a - bf'(b)},$$

esto implica que si $\Delta_3 > 0$, entonces $\Delta_2 > 0$. En consecuencia, para estudiar la estabilidad del polinomio característico, basta estudiar las condiciones sobre el parámetro a de modo que $\Delta_3 > 0$, es decir, se satisfaga la siguiente condición

$$\begin{aligned} \Delta_3(a) &= (2a - bf'(b))\Delta_2 - a^4b^2(f'(b))^2 \\ &= a^2b(-2ga^3 + (4b(f'(b))^2 - 4K\beta f(b))a^2 + (4K\beta bf(b)f'(b) - 2b^2(f'(b))^3)a \\ &\quad - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2) > 0. \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos, definamos Δ'_3 de la siguiente manera

$$\Delta'_3(a) = \frac{\Delta_3(a)}{-2a^2bf'(b)},$$

entonces

$$\Delta'_3(a) = a^3 + \left(\frac{2K\beta f(b)}{f'(b)} - 2bf'(b) \right) a^2 + b(b(f'(b))^2 - 2K\beta f(b))a + \frac{1}{2}K\beta b^2f(b)f'(b), \quad (4.18)$$

cuyo discriminante

$$\Delta = \frac{1}{432}K\beta b^3f(b)((4K\beta f(b) - 2b(f'(b))^2)^2 + 3K\beta bf(b)(f'(b))^2 + 4b^2(f'(b))^4) > 0.$$

Esto implica que $\Delta'_3(a)$ tiene dos raíces complejas conjugadas y una raíz real, y en consecuencia $\Delta_3(a)$ también. La raíz real está dada por

$$\bar{a} = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{2K\beta f(b)}{f'(b)} - 2bf'(b) \right),$$

donde

$$q = \frac{4b^3(f'(b))^6 + 15K\beta b^2 f(b)(f'(b))^4 - 24K^2\beta^2 b(f(b))^2(f'(b))^2 + 32K^3\beta^3(f(b))^3}{54(f'(b))^3}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{32}K\beta f(b) + \sqrt[3]{4}b(f'(b))^3 - 9K\beta b^2 f(b)(f'(b))^4 - 72K^2\beta^2 b(f(b))^2(f'(b))^2)}{54(f'(b))^3}.$$

Por lo tanto, en virtud del Teorema de Routh-Hurwitz, si $a > \bar{a}$, el polinomio característico asociado a $DY_\eta(\sigma)$ es estable y en consecuencia, el punto de equilibrio σ es asintóticamente estable. En caso contrario, es asintóticamente inestable. Lo anterior lo resumimos en el siguiente resultado:

Lema 4.4. *El punto de equilibrio $\sigma = (b, \frac{f(b)}{K\alpha}, b, b)$ es asintóticamente estable si y solo si $a > \bar{a}$, donde*

$$\bar{a} = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{2K\beta f(b)}{f'(b)} - 2bf'(b)\right),$$

$$\Delta = \frac{1}{432}K\beta b^3 f(b)((4K\beta f(b) - 2b(f'(b))^2)^2 + 3K\beta b f(b)(f'(b))^2 + 4b^2(f'(b))^4) > 0.$$

y

$$q = \frac{4b^3(f'(b))^6 + 15K\beta b^2 f(b)(f'(b))^4 - 24K^2\beta^2 b(f(b))^2(f'(b))^2 + 32K^3\beta^3(f(b))^3}{54(f'(b))^3}$$

Por otra parte, si $a < \bar{a}$, entonces σ es asintóticamente inestable.

Supongamos que el polinomio

$$p(\lambda, \bar{a}) = \lambda^4 + (2\bar{a} - bf'(b))\lambda^3 + \bar{a}(\bar{a} - 2bf'(b))\lambda^2 - \bar{a}^2 bf'(b)\lambda + K\beta \bar{a}^2 bf(b) = 0, \quad (4.19)$$

que puede ser factorizado de la forma

$$p(\lambda, \bar{a}) = (\lambda^2 + \omega^2)(\lambda^2 + A_1\lambda + A_0), \quad (4.20)$$

donde $\omega > 0$, entonces

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\bar{a} - bf'(b) & (i) \\ \omega^2 + A_0 &= \bar{a}(\bar{a} - 2bf'(b)) & (ii) \\ \omega^2 A_1 &= -\bar{a}^2 bf'(b) & (iii) \\ \omega^2 A_0 &= K\beta \bar{a}^2 bf(b), & (iv) \end{aligned} \quad (4.21)$$

De las ecuaciones (i), (iii) y (iv) podemos despejar A_0 , A_1 y ω^2 , y para que la factorización de (4.19) sea correcta, estos tres valores deben satisfacer la ecuación (ii).

Mediante cálculos directos obtenemos que:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2\bar{a} - bf'(b) \\
\omega^2 &= -\frac{\bar{a}^2bf'(b)}{2\bar{a} - bf'(b)} \\
A_0 &= -\frac{1}{f'(b)}K\beta f(b)(2\bar{a} - bf'(b))
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ahora verificamos que se satisface la ecuación (ii), o equivalentemente, para simplificar denominadores

$$\begin{aligned}
(\omega^2 + A_0)(2\bar{a} - bf'(b))f'(b) &= \bar{a}(\bar{a} - 2bf'(b))(2\bar{a} - bf'(b))g \\
&= 2f'(b)\bar{a}^3 - 5b(f'(b))^2\bar{a}^2 + 2b^2(f'(b))^3\bar{a}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(\omega^2 + A_0)(2\bar{a} - bf'(b))f'(b) &= \left(-\frac{\bar{a}^2bf'(b)}{2\bar{a} - bf'(b)} - \frac{K\beta f(b)}{f'(b)}(2\bar{a} - bf'(b)) \right) (2\bar{a} - bf'(b))f'(b) \\
&= 4K\beta b^2f(b)f'(b)\bar{a} - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2 \\
&\quad - \bar{a}^2(b(f'(b))^2 + 4K\beta f(b)).
\end{aligned}$$

De (4.18) tenemos que

$$\Delta'_3(\bar{a}) = \bar{a}^3 + \left(\frac{2K\beta f(b)}{f'(b)} - 2bf'(b) \right) \bar{a}^2 + b(b(f'(b))^2 - 2K\beta f(b))\bar{a} + \frac{1}{2}K\beta b^2f(b)f'(b) = 0,$$

de donde obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
K\beta b^2f(b)(f'(b))^2 &= -2\bar{a}^3f'(b) + \bar{a}^2(4b(f'(b))^2 - 4\beta f(b)) - \bar{a}(2b^2(f'(b))^3 \\
&\quad - 4K\beta bf(b)f'(b)).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
4K\beta b^2f(b)f'(b)\bar{a} - K\beta b^2f(b)(f'(b))^2 &= 4K\beta b^2f(b)f'(b)\bar{a} \\
&\quad - (-2\bar{a}^3f'(b) + \bar{a}^2(4b(f'(b))^2 - 4\beta f(b))) \\
&\quad - \bar{a}(2b^2(f'(b))^3 - 4K\beta bf(b)f'(b)) \\
&= 2f'(b)\bar{a}^3 - 5b(f'(b))^2\bar{a}^2 + 2b^2(f'(b))^3\bar{a},
\end{aligned}$$

en consecuencia, se satisface la ecuación (ii) y la factorización (4.20) es correcta.

Es claro que $p(\lambda, \bar{a})$, por ser un polinomio, es de clase C^∞ y que $p(\lambda(\bar{a}), \bar{a}) = 0$, donde $\lambda(\bar{a}) = \omega i$ y

$$\omega = \sqrt{-\frac{\bar{a}^2bf'(b)}{2\bar{a} - bf'(b)}}.$$

También, tenemos que

$$p'_a(\lambda, a) = \frac{1}{a}(2a\lambda^3 + a(a - 2bf'(b))\lambda^2 + a^2\lambda^2 - 2a^2bf'(b)\lambda + 2K\beta a^2bf(b))$$

y

$$p'_\lambda(\omega i, \bar{a}) = -\bar{a}^2bf'(b) - 3(2\bar{a} - bf'(b))\omega^2 + i(2\bar{a}(\bar{a} - 2bf'(b))\omega - 4\omega^3) \neq 0,$$

pues

$$(2\bar{a}(\bar{a} - 2bf'(b))\omega - 4\omega^3) \neq 0.$$

Así, por el Teorema de la Función Implícita, existe $\delta > 0$ tal que $p(\lambda(a), a) = 0$ para todo $a \in (\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta)$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}\lambda_1(\bar{a}) &= -\frac{p'_a(\omega i, \bar{a})}{p'_\lambda(\omega i, \bar{a})} \\ &= \frac{-\bar{a}^2\omega^2 - 2\bar{a}\omega^3i + 2A_0\omega^2 - \omega^2(\omega^2 + A_0) + 2\omega^3A_1i}{\bar{a}(-4\omega^3i + 2\omega i(\omega^2 + A_0) - 2\omega^2A_1)} \\ &= -\frac{-\omega(\bar{a}^2\omega + 2\bar{a}\omega^2i + \omega^3 - A_0\omega - 2\omega^2A_1i)}{-2\bar{a}i\omega(-A_0 + \omega(\omega - iA_1))} \\ &= -\frac{(\bar{a}^2\omega + \omega^3 - A_0\omega) + i(2\bar{a}\omega^2 - 2A_1\omega^2)}{2\bar{a}A_1\omega + i(2\bar{a}\omega^2 - 2\bar{a}A_0)}. \end{aligned}$$

Luego, la derivada de la parte real está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{da}Re\lambda_1(\bar{a}) &= -\frac{2\bar{a}A_1\omega(\bar{a}^2\omega + \omega^3 - A_0\omega) + (2\bar{a}\omega^2 - 2A_1\omega^2)(2\bar{a}\omega^2 - 2\bar{a}A_0)}{(2\bar{a}A_1\omega)^2 + (2\bar{a}\omega^2 - 2\bar{a}A_0)^2} \\ &= -\frac{2\bar{a}\omega^2(2\bar{a}(\omega^2 - A_0) + (\bar{a}^2 - \omega^2 + A_0)A_1)}{(2\bar{a}A_1\omega)^2 + (2\bar{a}\omega^2 - 2\bar{a}A_0)^2}. \end{aligned}$$

Pero

$$\omega^2 = -\frac{\bar{a}^2bf'(b)}{2\bar{a} - bf'(b)},$$

esto implica que

$$\begin{aligned} 2\bar{a}(\omega^2 - A_0) + (\bar{a}^2 - \omega^2 + A_0)A_1 &= 2\bar{a}\left(-\frac{\bar{a}^2bf'(b)}{2\bar{a} - bf'(b)} - A_0\right) - \left(\bar{a}^2 + \frac{\bar{a}^2bf'(b)}{2\bar{a} - bf'(b)} + A_0\right)A_1 \\ &= A_0(A_1 - 2\bar{a}) + \frac{2\bar{a}^3(A_1 - bf'(b))}{2\bar{a} - bf'(b)}. \end{aligned}$$

Es claro que

$$\frac{2\bar{a}^3(A_1 - bf'(b))}{2\bar{a} - bf'(b)} > 0$$

y por (4.21),

$$A_0(A_1 - 2\bar{a}) = A_0(2\bar{a} - bf'(b) - 2\bar{a}) = A_0(-bf'(b)) > 0,$$

por lo tanto

$$\frac{d}{da} \operatorname{Re} \lambda_1(\bar{a}) < 0.$$

Introduciendo el parámetro $\mu = \frac{1}{a} - \frac{1}{\bar{a}}$ (o equivalentemente $a(\mu) = \frac{\bar{a}}{1+\bar{a}\mu}$), tenemos que $a = \bar{a}$ si y solo si $\mu = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} (\operatorname{Re}(\lambda_1(a(\mu)))) &= \frac{d}{da} (\operatorname{Re}(\lambda_1(a(\mu))) \frac{\partial a}{\partial \mu} \\ &= -\frac{2A_1\omega(\bar{a}^2\omega + \omega^3 - A_0\omega) + (2\bar{a}\omega^2 - 2A_1\omega^2)(2\omega^2 - 2A_0)}{(2A_1\omega)^2 + (2\omega^2 - 2A_0)^2} \frac{-\bar{a}^2}{(1 + \bar{a}\mu)^2} \end{aligned}$$

y así,

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re}(\lambda_1(a(\mu))) \Big|_{\mu=0} > 0.$$

Las condiciones del Teorema 2.3 se cumplen y con esto, hemos establecido el siguiente resultado:

Teorema 4.2. *A partir de las condiciones del Lema 4.4, si a decrece hasta $a = \bar{a}$, entonces el sistema (4.15) exhibe una bifurcación Hopf, es decir, el equilibrio σ pierde su estabilidad a medida que a decrece hacia \bar{a} y el sistema tiene soluciones periódicas de pequeña amplitud en alguna vecindad de σ cuyas frecuencias angulares se aproximan a ω dada por (4.22).*

4.3. Simulación Numérica

En esta sección, utilizando el software MATHEMATICA, presentaremos un ejemplo numérico. Estableceremos el comportamiento y estabilidad de las trayectorias del sistema (4.15), haciendo variar el parámetro a y considerando una función logística no lineal.

Consideremos el sistema (4.15), donde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ viene dada por la función hiperlogística (ver [13])

$$f(n) = (1 - n)^2.$$

Con el fin de estudiar la bifurcación en el parámetro a , daremos valores a los otros parámetros, concretamente $\eta = (a, K, \alpha, \beta, \gamma) = (a, 2, 1, 1, 1)$. Así, obtenemos el sistema:

$$Y_\eta : \begin{cases} \dot{n} = n(1 - n)^2 - 2np \\ \dot{p} = -p + 2pq \\ \dot{q} = a(r - q) \\ \dot{r} = a(n - r) \end{cases} \quad (4.23)$$

cuyo equilibrio con coordenadas positivas es $\sigma = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Luego, trasladando el equilibrio σ al origen, mediante el cambio de coordenadas $\{n \rightarrow x + \frac{1}{2}, p \rightarrow y + \frac{1}{8}, q \rightarrow z + \frac{1}{2}, r \rightarrow w + \frac{1}{2}\}$, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$Z_\eta : \begin{cases} \dot{x} = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2xy - \frac{x}{2} - y \\ \dot{y} = 2yz + \frac{z}{4} \\ \dot{z} = a(w - z) \\ \dot{w} = a(x - w) \end{cases} \quad (4.24)$$

cuya matriz de linealización evaluada en el equilibrio σ es

$$DZ_\eta(0) = DY_\eta(\sigma) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Para visualizar el comportamiento cualitativo de las soluciones, llevaremos el sistema (4.24) a su forma normal, y luego lo restringimos a su variedad central (ver [11]). Usando el Lema 4.4, podemos calcular fácilmente el valor de bifurcación del parámetro a , el cual es $\bar{a} \cong 0,59574$. Luego, debemos simular dos casos: cuando $a < \bar{a} \cong 0,59574$ y cuando $a > \bar{a} \cong 0,59574$.

4.3.1. Caso 1: $a < \bar{a}$

Estudiemoslo para $a = 0,56$. Entonces la matriz de la linealización del sistema es

$$DZ_\eta(0) = A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -0,56 & 0,56 \\ 0,56 & 0 & 0 & -0,56 \end{pmatrix}.$$

Luego, una base de \mathbb{R}^4 formada por vectores propios de la matriz A es

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0,61210 \\ -0,30824 \\ 0,23995 \\ 0,46279 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0,19337 \\ 0,39228 \\ 0,25942 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,41961 \\ 0,13158 \\ -0,22089 \\ -0,31726 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0,14747 \\ -0,66489 \\ 0,4397 \end{pmatrix} \right\},$$

y una matriz que transforma la matriz A en su forma de Jordan es

$$T = \begin{pmatrix} 0,61210 & 0 & 0,41961 & 0 \\ -0,30824 & 0,19337 & 0,13158 & 0,14747 \\ 0,23995 & 0,39228 & -0,22089 & -0,66489 \\ 0,46279 & 0,25942 & -0,31726 & 0,4397 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el cambio de coordenadas

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

el sistema (4.24) adopta la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = T^{-1}AT \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + T^{-1}H \left(T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right), \quad (4.26)$$

donde

$$H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - \frac{x^2}{2} - 2xy - \frac{x}{2} - y \\ 2yz + \frac{z}{4} \\ a(w - z) \\ a(x - w) \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy - \frac{1}{2}x^2 + x^3 \\ 2yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mediante cálculos directos, obtenemos los términos que conforman la ecuación (4.26):

$$\begin{aligned} T^{-1}AT \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3,5779 \times 10^{-3} & -0,31592 & 0 & 0 \\ 0,31593 & 3,5779 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,81358 & -0,35145 \\ 0 & 0 & 0,35145 & -0,81358 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3,5779 \times 10^{-3}x_1 - 0,31592x_2 \\ 0,31593x_1 + 3,5779 \times 10^{-3}x_2 \\ -0,81358x_3 - 0,35145x_4 \\ 0,35145x_3 - 0,81358x_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6121x_1 + 0,41961x_3 \\ -0,30824x_1 + 0,19337x_2 + 0,13158x_3 + 0,14747x_4 \\ 0,23995x_1 + 0,39228x_2 - 0,22089x_3 - 0,66489x_4 \\ 0,46279x_1 + 0,25942x_2 - 0,31726x_3 + 0,4397x_4 \end{pmatrix}$$

y

$$T^{-1}H \left(T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ G_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0,16904x_1^3 + 0,34764x_1^2x_3 + 0,27746x_1^2 - 3,6051 \times 10^{-2}x_1x_2 \\
&\quad + 0,23832x_1x_3^2 - 0,30252x_1x_3 - 0,57954x_1x_4 - 0,14092x_2^2 \\
&\quad - 0,13615x_2x_3 + 0,13138x_2x_4 + 5,4457 \times 10^{-2}x_3^3 \\
&\quad - 9,2287 \times 10^{-2}x_3^2 + 0,13182x_3x_4 + 0,18215x_4^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 6,5395 \times 10^{-2}x_1^3 + 0,13449x_1^2x_3 - 0,28939x_1^2 - 0,41366x_1x_2 \\
&\quad + 9,2196 \times 10^{-2}x_1x_3^2 + 0,41754x_1x_3 + 1,0649x_1x_4 \\
&\quad + 0,35237x_2^2 - 4,9190 \times 10^{-3}x_2x_3 - 0,32852x_2x_4 \\
&\quad + 2,1068 \times 10^{-2}x_3^3 - 0,19161x_3^2 - 0,59301x_3x_4 - 0,45548x_4^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0,29996x_1^3 + 0,61689x_1^2x_3 + 4,8096 \times 10^{-2}x_1^2 - 0,51156x_1x_2 \\
&\quad + 0,42289x_1x_3^2 + 6,1792 \times 10^{-2}x_1x_3 + 0,41516x_1x_4 \\
&\quad + 0,20556x_2^2 - 0,18813x_2x_3 - 0,19165x_2x_4 + 9,6634 \times 10^{-2}x_3^3 \\
&\quad - 0,33834x_3^2 - 0,48723x_3x_4 - 0,26572x_4^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -6,6099 \times 10^{-5}x_1^3 - 1,3594 \times 10^{-4}x_1^2x_3 - 8,6587 \times 10^{-2}x_1^2 \\
&\quad - 8,7113 \times 10^{-2}x_1x_2 - 9,3189 \times 10^{-5}x_1x_3^2 + 0,11664x_1x_3 \\
&\quad + 0,28123x_1x_4 + 8,8747 \times 10^{-2}x_2^2 + 1,0462 \times 10^{-2}x_2x_3 \\
&\quad - 82739 \times 10^{-2}x_2x_4 - 2,1294 \times 10^{-5}x_3^3 - 3,3947 \times 10^{-2}x_3^2 \\
&\quad - 0,14043x_3x_4 - 0,11471x_4^2.
\end{aligned}$$

Ahora determinaremos la sección de la variedad central M , que se caracteriza por las condiciones de que es tangente al plano x_1, x_2 en el origen (el espacio propio correspondiente a los valores propios con parte real nula) y es localmente invariante con respecto al flujo del sistema (4.26). Por lo tanto, podemos asumir que localmente su ecuación en la forma $(x_3, x_4) = h(x_1, x_2)$, bajo las condiciones $h(0, 0) = Dh(0, 0) = (0, 0)$ y $h \in \mathcal{C}^3$.

Si $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ es una solución de (4.26) cerca del origen con un valor en M , entonces permanece localmente en M , es decir,

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + O(\|X\|^3) \\ dx_1^2 + gx_1x_2 + fx_2^2 + O(\|X\|^3) \end{pmatrix}$$

Para determinar la variedad central M del sistema (4.26) (ver [11]), lo reescribimos de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= CX + F(X, Y) \\
\dot{Y} &= PY + G(X, Y),
\end{aligned}$$

donde $X = (x_1, x_2)^T$, $Y = (x_3, x_4)^T$,

$$C = \begin{pmatrix} 3,5779 \times 10^{-3} & -0,31592 \\ 0,31593 & 3,5779 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -0,81358 & -0,35145 \\ 0,35145 & -0,81358 \end{pmatrix},$$

$$F(X, Y) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix}, \quad G(X, Y) = \begin{pmatrix} G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ G_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix}.$$

y además, se debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$Dh(X)(CX + F(X, h(X))) - Ph(X) = G(X, h(X)). \quad (4.27)$$

Calculamos los términos de la ecuación (4.27):

$$Ph(X) = \begin{pmatrix} -0,81358 & -0,35145 \\ 0,35145 & -0,81358 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \\ dx_1^2 + gx_1x_2 + fx_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0,8136ax_1^2 - 0,8136cx_2^2 - 0,3515dx_1^2 - 0,3515fx_2^2 - 0,3515gx_1x_2 - 0,8136bx_1x_2 \\ 0,3515ax_1^2 + 0,3515cx_2^2 - 0,8136dx_1^2 - 0,8136fx_2^2 - 0,8136gx_1x_2 + 0,3515bx_1x_2 \end{pmatrix},$$

$$Dh(X) = \begin{pmatrix} 2ax_1 + bx_2 & bx_1 + 2cx_2 \\ 2dx_1 + gx_2 & gx_1 + 2fx_2 \end{pmatrix}$$

y

$$Dh(X)(CX + F(X, h(X))) - Ph(X) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$Q_1 = (0,8208a + 0,3159b + 0,3515d)x_1^2 + (0,8208b - 0,6318a + 0,6318c + 0,3515g)x_1x_2$$

$$+ (0,8208c - 0,3159b + 0,3515f)x_2^2,$$

$$Q_2 = (0,8208d - 0,3515a + 0,3159g)x_1^2 + (0,6318f - 0,6318d - 0,3515b + 0,8208g)x_1x_2$$

$$+ (0,8208f - 0,3515c - 0,3159g)x_2^2.$$

Para calcular la variedad central, solo necesitamos los coeficientes cuadráticos de $F(X, h(X))$ y $G(X, h(X))$. Es decir, si

$$\tilde{F}(X, h(X)) = F(X, h(X)) - O(|X|^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{G}(X, h(X)) = G(X, h(X)) - O(|X|^3)$$

$$= \begin{pmatrix} 4,8096 \times 10^{-2}x_1^2 - 0,51156x_1x_2 + 0,20556x_2^2 \\ -8,6587 \times 10^{-2}x_1^2 - 8,7113 \times 10^{-2}x_1x_2 + 8,8747 \times 10^{-2}x_2^2 \end{pmatrix},$$

entonces es suficiente analizar la ecuación

$$Dh(X)(CX + \tilde{F}(X, h(X))) - Ph(X) = \tilde{G}(X, h(X)). \quad ,$$

Igualando coeficientes de $Dh(X)(CX + \tilde{F}(X, h(X))) - Ph(X)$ y $\tilde{G}(X, h(X))$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
0,8208a + 0,3159b + 0,3515d &= 4,8096 \times 10^{-2} \\
0,8208b - 0,6318a + 0,6318c + 0,3515g &= -0,51156 \\
0,8208c - 0,3159b + 0,3515f &= 0,20556 \\
0,8208d - 0,3515a + 0,3159g &= -8,6587 \times 10^{-2} \\
0,6318f - 0,6318d - 0,3515b + 0,8208g &= -8,7113 \times 10^{-2} \\
0,8208f - 0,3515c - 0,3159g &= 8,8747 \times 10^{-2},
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1888, \\ -0,4219 \\ 7,137 \times 10^{-2} \\ 7,507 \times 10^{-2} \\ 3,899 \times 10^{-2} \\ -0,259 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2 + O(\|X\|^3) \\ 7,507 \times 10^{-2}x_1^2 - 0,259x_1x_2 + 3,899 \times 10^{-2}x_2^2 + O(\|X\|^3) \end{pmatrix}$$

y

$$F(X, h(X)) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= 0,16904x_1^3 + 0,34764x_1^2(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2) \\
&\quad + 0,27746x_1^2 - 3,6051 \times 10^{-2}x_1x_2 + 0,23832x_1(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 \\
&\quad + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2)^2 - 0,30252x_1(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2) \\
&\quad - 0,57954x_1(7,507 \times 10^{-2}x_1^2 - 0,259x_1x_2 + 3,899 \times 10^{-2}x_2^2) - 0,14092x_2^2 \\
&\quad - 0,13615x_2(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2) \\
&\quad + 0,13138x_2(7,507 \times 10^{-2}x_1^2 - 0,259x_1x_2 + 3,899 \times 10^{-2}x_2^2) \\
&\quad + 5,4457 \times 10^{-2}(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2)^3 \\
&\quad - 9,2287 \times 10^{-2}(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2)^2 \\
&\quad + 0,13182(0,1888x_1^2 - 0,4219x_1x_2 + 7,137 \times 10^{-2}x_2^2)(7,507 \times 10^{-2}x_1^2 \\
&\quad - 0,259x_1x_2 + 3,899 \times 10^{-2}x_2^2) + 0,18215(7,507 \times 10^{-2}x_1^2 - 0,259x_1x_2 \\
&\quad + 3,899 \times 10^{-2}x_2^2)^2,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) = & 6,5395 \times 10^{-2} x_1^3 + 0,13449 x_1^2 (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2) \\
& - 0,28939 x_1^2 - 0,41366 x_1 x_2 + 9,2196 \times 10^{-2} x_1 (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 \\
& + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2)^2 + 0,41754 x_1 (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2) \\
& + 1,0649 x_1 (7,507 \times 10^{-2} x_1^2 - 0,259 x_1 x_2 + 3,899 \times 10^{-2} x_2^2) + 0,35237 x_2^2 \\
& - 4,9190 \times 10^{-3} x_2 (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2) \\
& - 0,32852 x_2 (7,507 \times 10^{-2} x_1^2 - 0,259 x_1 x_2 + 3,899 \times 10^{-2} x_2^2) \\
& + 2,1068 \times 10^{-2} (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2)^3 \\
& - 0,19161 (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2)^2 \\
& - 0,59301 (0,1888 x_1^2 - 0,4219 x_1 x_2 + 7,137 \times 10^{-2} x_2^2) (7,507 \times 10^{-2} x_1^2 \\
& - 0,259 x_1 x_2 + 3,899 \times 10^{-2} x_2^2) - 0,45548 (7,507 \times 10^{-2} x_1^2 - 0,259 x_1 x_2 \\
& + 3,899 \times 10^{-2} x_2^2)^2.
\end{aligned}$$

Luego, el flujo sobre la variedad central está definido por el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + F \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \quad (4.28)$$

o más concretamente,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 = & 3,578 \times 10^{-3} x_1 - 0,3159 x_2 + 3,665 \times 10^{-4} x_1^6 - 2,457 \times 10^{-3} x_1^5 x_2 + 8,495 \times 10^{-3} x_1^5 \\
& + 5,906 \times 10^{-3} x_1^4 x_2^2 - 3,797 \times 10^{-2} x_1^4 x_2 + 6,524 \times 10^{-2} x_1^4 - 5,947 \times 10^{-3} x_1^3 x_2^3 \\
& + 4,884 \times 10^{-2} x_1^3 x_2^2 - 0,1497 x_1^3 x_2 + 6,842 \times 10^{-2} x_1^3 + 2,233 \times 10^{-3} x_1^2 x_2^4 \\
& - 1,435 \times 10^{-2} x_1^2 x_2^3 + 3,526 \times 10^{-2} x_1^2 x_2^2 + 0,2619 x_1^2 x_2 + 0,2775 x_1^2 - 3,511 \times 10^{-4} x_1 x_2^5 \\
& + 1,214 \times 10^{-3} x_1 x_2^4 - 2,726 \times 10^{-3} x_1 x_2^3 - 2,077 \times 10^{-2} x_1 x_2^2 - 3,605 \times 10^{-2} x_1 x_2 \\
& + 1,980 \times 10^{-5} x_2^6 + 1,736 \times 10^{-4} x_2^4 - 4,595 \times 10^{-3} x_2^3 - 0,1409 x_2^2, \\
\dot{x}_2 = & 0,3159 x_1 + 3,578 \times 10^{-3} x_2 + 1,418 \times 10^{-4} x_1^6 - 9,505 \times 10^{-4} x_1^5 x_2 + 3,286 \times 10^{-3} x_1^5 \\
& + 2,285 \times 10^{-3} x_1^4 x_2^2 - 1,469 \times 10^{-2} x_1^4 x_2 + 7,590 \times 10^{-3} x_1^4 - 2,301 \times 10^{-3} x_1^3 x_2^3 \\
& + 1,890 \times 10^{-2} x_1^3 x_2^2 + 3,928 \times 10^{-2} x_1^3 x_2 + 0,2242 x_1^3 + 8,637 \times 10^{-4} x_1^2 x_2^4 \\
& - 5,552 \times 10^{-3} x_1^2 x_2^3 - 0,1352 x_1^2 x_2^2 - 0,4776 x_1^2 x_2 - 0,2894 x_1^2 - 1,358 \times 10^{-4} x_1 x_2^5 \\
& + 4,696 \times 10^{-4} x_1 x_2^4 + 4,146 \times 10^{-2} x_1 x_2^3 + 0,1585 x_1 x_2^2 - 0,4137 x_1 x_2 + 7,659 \times 10^{-6} x_2^6 \\
& - 3,319 \times 10^{-3} x_2^4 - 1,316 \times 10^{-2} x_2^3 + 0,3524 x_2^2.
\end{aligned}$$

El Lema 4.4 indica que para valores de $a \leq \bar{a}$, el equilibrio es asintóticamente inestable. Por lo tanto, si tomamos una solución con condición inicial dentro de la órbita periodica,

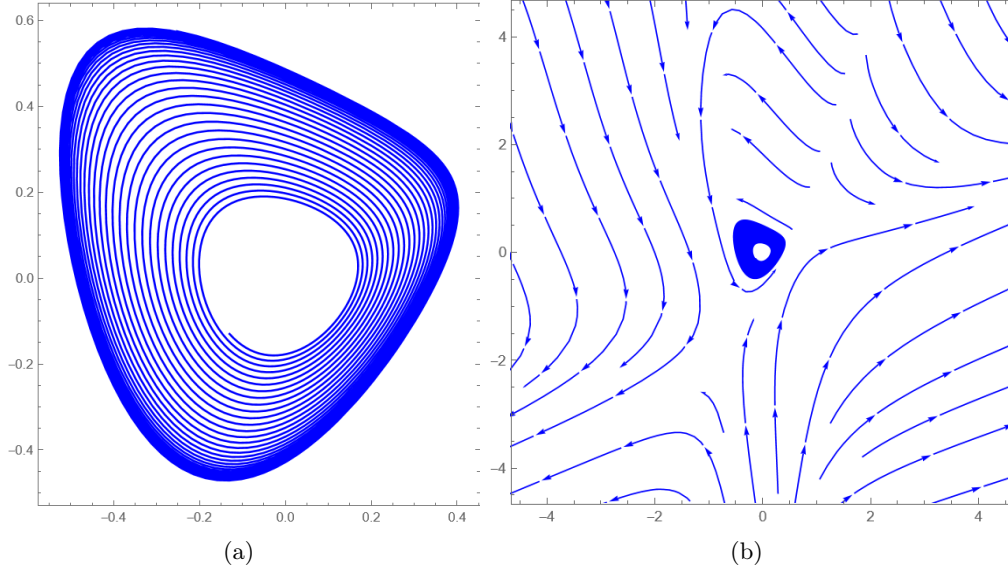


Figura 4.1.: Retratos de fase del sistema (4.28) (MATHEMATICA).

esta solución converge a la órbita cuando $t \rightarrow \infty$, tal como se observa en la Figura 4.1(a). Por otra parte, si elegimos una solución con condición inicial fuera de la órbita periódica, esta se aleja de la órbita cuando $t \rightarrow \infty$, tal como se aprecia en la Figura 4.1(b).

4.3.2. Caso 2: $a > \bar{a}$

Si $a = 0,65$, procediendo de forma análoga al caso anterior, concluimos que el flujo sobre la variedad central definido por el sistema (4.24) es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + F \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \quad (4.29)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -5,496 \times 10^{-3} x_1 - 0,3351 x_2 + 1,753 \times 10^{-4} x_1^6 - 1,336 \times 10^{-3} x_1^5 x_2 + 5,258 \times 10^{-3} x_1^5 \\ & + 3,630 \times 10^{-3} x_1^4 x_2^2 - 2,672 \times 10^{-2} x_1^4 x_2 + 5,208 \times 10^{-2} x_1^4 - 4,069 \times 10^{-3} x_1^3 x_2^3 \\ & + 3,864 \times 10^{-2} x_1^3 x_2^2 - 0,1349 x_1^3 x_2 + 0,0943 x_1^3 + 1,621 \times 10^{-3} x_1^2 x_2^4 - 1,194 \times 10^{-2} x_1^2 x_2^3 \\ & + 3,173 \times 10^{-2} x_1^2 x_2^2 + 0,2471 x_1^2 x_2 + 0,2802 x_1^2 - 2,667 \times 10^{-4} x_1 x_2^5 + 1,049 \times 10^{-3} x_1 x_2^4 \\ & - 2,672 \times 10^{-3} x_1 x_2^3 - 2,808 \times 10^{-2} x_1 x_2^2 - 0,0941 x_1 x_2 + 1,563 \times 10^{-5} x_2^6 + 2,206 \times 10^{-4} x_2^4 \\ & - 3,15 \times 10^{-3} x_2^3 - 0,1322 x_2^2, \end{aligned}$$

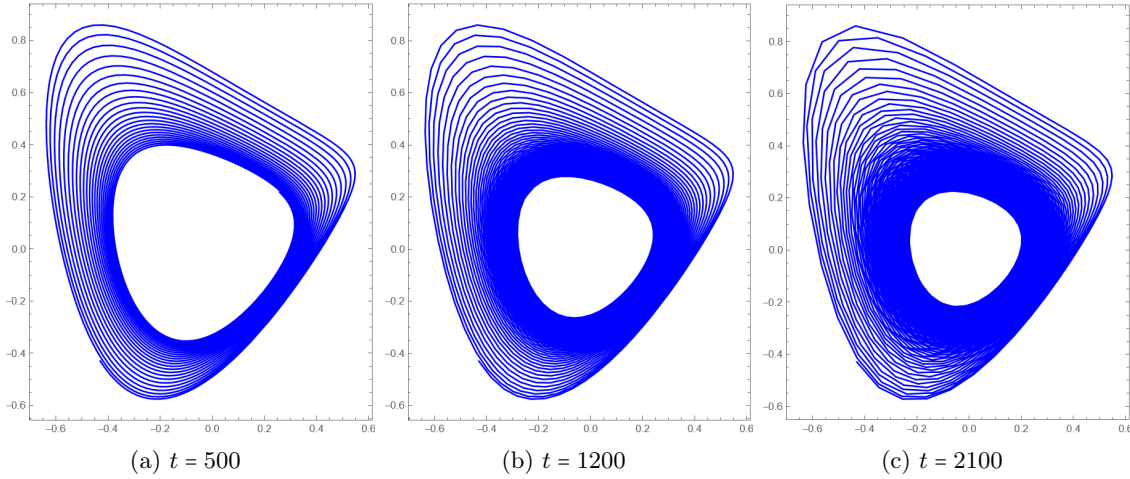


Figura 4.2.: Retratos de fase del sistema (4.29) para distintos valores de t (MATHEMATICA).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 = & 0,3351x_1 - 5,496 \times 10^{-3}x_2 + 6,323 \times 10^{-5}x_1^6 - 4,819 \times 10^{-4}x_1^5x_2 \\
& + 1,896 \times 10^{-3}x_1^5 + 1,309 \times 10^{-3}x_1^4x_2^2 - 9,633 \times 10^{-3}x_1^4x_2 + 6,303 \times 10^{-3}x_1^4 \\
& - 1,467 \times 10^{-3}x_1^3x_2^3 + 1,393 \times 10^{-2}x_1^3x_2^2 + 3,164 \times 10^{-2}x_1^3x_2 + 0,2056x_1^3 + 5,848 \times 10^{-4}x_1^2x_2^4 \\
& - 4,303 \times 10^{-3}x_1^2x_2^3 - 0,131x_1^2x_2^2 - 0,5048x_1^2x_2 - 0,3485x_1^2 - 9,617 \times 10^{-5}x_1x_2^5 \\
& + 3,783 \times 10^{-4}x_1x_2^4 + 4,357 \times 10^{-2}x_1x_2^3 + 0,1969x_1x_2^2 - 0,37x_1x_2 + 5,636 \times 10^{-6}x_2^6 \\
& - 3,776 \times 10^{-3}x_2^4 - 1,961 \times 10^{-2}x_2^3 + 0,3865x_2^2.
\end{aligned}$$

El Lema 4.4 indica que para valores de $a > \bar{a}$, el equilibrio es asintóticamente estable. Es decir, toda solución del sistema converge al equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, esta convergencia de la solución hacia el origen es “lenta”, pues se hace necesario graficar la solución para distintos valores de t para poder apreciar la convergencia, tal como se muestra en la Figura 4.2.

Conclusiones

De acuerdo a lo expuesto hasta ahora, si reemplazamos la función logística lineal del sistema depredador-presa con memoria con joroba propuesto por Farkas en [8] por una función logística general, se observa que se preservan la cantidad de equilibrios y también las órbitas periódicas, es decir, estas son intrínsecas del sistema y no dependen de la función logística considerada. Como aporte adicional, hemos encontrado una bifurcación Hopf diferente a la estudiada por Farkas en [8] (respecto al parámetro a), lo que otorga mayor importancia a este sistema, pues a parte de poder estudiar condiciones para coexistencia de especies que interactúan en un mismo habitat asumiendo los roles de depredadores y presas, también este modelo podría ser usado para exteminar plagas, buscando un mínimo impacto ambiental en el ecosistema.

Debido a la complejidad de los cálculos, solo pudimos determinar la existencia de órbitas periódicas, sin poder dar una descripción general sobre la estabilidad de estas en términos abstractos, tal como lo hicieron Castro en [2] su *modelo depredador-presa con desvanecimiento exponencial de memoria*. Es por esto, que recurrimos a una simulación numérica sencilla para ilustrar el fenómeno estudiado.

Un trabajo pendiente, es buscar alternativas para el estudio de sistemas de este tipo. Para dar término al estudio de este modelo, una alternativa es calcular explícitamente el segundo coeficiente de Lyapunov G_4 (ver [6]).

A. Lema de Gronwall

Lema A.1. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $t_0 \in J$ y $c > 0$. Sean $u, v \in \mathcal{C}(J, (0, +\infty))$ tal que para todo $t \geq t_0$ con $t \in J$ tales que

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds, \quad (\text{A.1})$$

entonces

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t v(s)ds}. \quad (\text{A.2})$$

Demostración. La positividad de las funciones y parámetros implican que la desigualdad (A.1) es equivalente a

$$\frac{u(t)v(t)}{c + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds} \leq v(t).$$

Por otra parte, se tiene que

$$\frac{u(t)v(t)}{c + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds} = \frac{d}{dt} \ln \left(c + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right) \leq v(t).$$

Luego, integrando entre t_0 y t y usando la desigualdad (A.1) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\ln u(t) \leq \ln \left(c + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right) = \ln c + \int_{t_0}^t v(s)ds,$$

de donde la desigualdad (A.2) se desprende fácilmente. ■

Una variación importante del Lema de Gronwall viene dada por el siguiente resultado, que puede consultarse en [1]:

Lema A.2. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $t_0 \in J$ y $c > 0$. Sean $u, v \in \mathcal{C}(J, (0, +\infty))$ tal que para todo $t \geq t_0$ con $t \in J$ tales que

$$u(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right|, \quad (\text{A.3})$$

entonces

$$u(t) \leq ce^{|\int_{t_0}^t v(s)ds|}. \quad (\text{A.4})$$

Demostración. Si $t \geq t_0$, la desigualdad (A.3) es equivalente a desigualdad (A.1). Entonces por el Lema de Gronwall deducimos que

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t v(s)ds} = ce^{\left| \int_{t_0}^t v(s)ds \right|}.$$

Ahora, supongamos que $t \in J$ con $t < t_0$. Entonces, de la desigualdad (A.3) obtenemos que

$$0 < u(t) \leq w(t) := c + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds \right| = c - \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds.$$

Derivando $w(t)$ obtenemos que

$$\dot{w}(t) = -v(t)u(t) \geq -v(t)w(t),$$

o equivalentemente

$$\dot{w}(t) + v(t)w(t) \geq 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \dot{w}(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} + v(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}w(t) &\geq 0 \\ \iff \frac{d}{dt} \left[w(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} \right] &\geq 0. \end{aligned}$$

Esto implica que la función $t \mapsto \phi(t) = w(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$ es creciente para todo $t \in J$ con $t \leq t_0$.

En consecuencia, ya que $t \leq t_0$, tenemos que $\phi(t) \leq \phi(t_0) = w(t_0) = c$, es decir,

$$w(t)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} \leq w(t_0) = c,$$

y por lo tanto,

$$w(t) \leq ce^{-\int_{t_0}^t v(s)ds}.$$

Como $w(t) \geq u(t) > 0$, concluimos que

$$u(t) \leq w(t) \leq ce^{-\int_{t_0}^t v(s)ds} = ce^{\left| \int_{t_0}^t v(s)ds \right|} = ce^{\left| -\int_t^{t_0} v(s)ds \right|} = ce^{\left| \int_t^{t_0} v(s)ds \right|},$$

completandose así la demostración. ■

Referencias

- [1] F. Berthelin. *Équations Différentielles*. Paris: Cassini, 2017.
- [2] R. Castro, W. Sierra y E. Stange. «Bifurcations in a predator-prey model with general logistic growth and exponential fading memory». En: *Applied Mathematical Modelling* 45 (2017), págs. 134-147.
- [3] W.A. Coppel. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. Boston: D.C. Heath y Company, 1965.
- [4] J. M. Cushing. *Integro-differential equations and delay models in population dynamics*. Vol. 20. Lect.Notes Biomath. Berlin Heidelberg New York: Springer, 1977.
- [5] D. Fargue. «Réductibilité des systèmes héréditaires á des systèmes dynamiques». En: *C.R. Acad. Sci. Paris B* 277 (1973), págs. 471-473.
- [6] M. Farkas. *Periodic Motions*. Vol. 104. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [7] M. Farkas. «Stable oscillations in predator-prey model with lag». En: *J. Math. Anal. Appl* 102 (1984), págs. 175-188.
- [8] M. Farkas, A. Farkas y G. Szabo. «Multiparameter bifurcation diagrams in predator-prey models with time lag». En: *J. Math. Biol* 26 (1988), págs. 93-103.
- [9] J. Guckenheimer y P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [10] R. K. Miller. *Nonlinear Volterra Integral Equations*. Menlo Park, California: Benjamin Press, 1971.
- [11] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Text in Applied Mathematics. New York: Springer, 2006.
- [12] Guo S. y Wu J. *Bifurcation Theory of Functional Differential Equations*. 1.^a ed. Vol. 184. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2013.
- [13] A. Tsoularis. «Analysis of logistic growth models». En: *Res. Lett. Inf. Math. Sci.* 2 (2001), págs. 23-46.