Universidad de Valparaíso
CHILE
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias

"Estudio de la transición de la aritmética al álgebra en alumnos de séptimo básico"

Tesis para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media en Matemáticas, mención Didáctica de la Matemática y al grado de Licenciado en Educación

Romanee Francisca Díaz Salinas
Alejandra Peña Vergara
Katherine Andrea Vivanco Carvallo

Profesora Guía: María Inés Pezoa Reyes

Valparaíso, Enero año 2016

Índice

Agradecimientos

A Jehová Dios por concederme fuerza y paciencia para no decaer en este trabajo. A mis queridos padres María y Raúl por siempre darme su amor, confianza y apoyo.

Alejandra Peña.

A mis padres Manuel y Jeanette por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aquí y convertirme en lo que soy. Me enseñaron a luchar para lograr lo que solo con esfuerzo se alcanza. Muchas gracias padres queridos.

A Miguel por sus palabras y confianza, por su amor y apoyo en los momentos difíciles, siempre ayudándome. No fue sencillo culminar este trabajo, sin embargo siempre fuiste muy motivador y esperanzador. Me ayudaste hasta donde te era posible, incluso más que eso. Muchas gracias amor.

Romanee Díaz.

Primeramente agradezco a Dios por darme la oportunidad de formarme en lo que más me apasiona y por darme las herramientas necesarias para terminar este proceso.

Agradezco a mis padres por enseñarme acerca de la importancia de la superación, por enseñarme a ser una persona honesta, a ser responsable ante mis actos y por sobre todo a ser esforzada y perseverante en la vida. Agradezco especialmente a mi marido Osvaldo Yáñez por acompañarme todos estos años de estudio, por levantarme en los momentos difíciles y por creer en mi cuando yo misma me sentía incapaz de lograrlo.

Agradezco a todos los profesores presentes en mi formación por ayudarme a lograr esta meta. Gracias a cada una de las personas que de alguna manera han sido claves en este proceso, a mi amiga Carolina Oyarce por su generosidad en ayudarme en las materias, a mi amiga Alejandra Peña por ser mi compañera de desveladas noches de estudio y a Romanee Díaz por elegirme para terminar este proceso juntas.

Katherine Vivanco.

Finalmente agradecemos a nuestro querido secretario de la carrera Gerardo Araya, por su constante ayuda y estar presente todos estos años de estudio y formación como profesoras. Muchas Gracias.

Introducción

A lo largo de nuestra experiencia en el aula hemos observado diversas dificultades y errores que nuestros estudiantes evidencian en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y más aún en el área de álgebra. En muchas ocasiones estas dificultades y errores no son analizados para conocer las causas que los originan.

La investigación que se presenta a continuación aborda la problemática que enfrentan los alumnos a la hora de trabajar la resolución de adición y sustracción de términos semejantes, y para esto se presenta una secuencia de aprendizaje con el propósito de lograr que los estudiantes adquieran un aprendizaje correcto de dicho concepto.

Respecto a la estructura de este trabajo, en el primer capítulo se presenta antecedentes, problemática y objetivos de nuestra investigación, sustentada en el marco curricular escolar vigente y análisis de textos escolares.

En el capítulo dos se presenta el objeto matemático polinomios que se relaciona con nuestro objeto de estudio expresiones algebraicas. Además se realiza un análisis epistemológico de como surgen el álgebra a través de la historia hasta llegar a la representación algebraica que utilizamos hoy en día, la cual es universal en todas las partes del mundo. Finalmente se presenta el sustento didáctico de nuestra investigación basado en el concepto de obstáculo y en la Teoría de las Situaciones didácticas de Brousseau, el cual establece la clasificación de las relaciones que experimenta el alumno al interactuar con el medio propuesto, las cuales son categorizadas en cuatro fases: fase de acción, fase de formulación, fase de validación y fase de institucionalización (Fregona, 2007).

El capítulo tres de este trabajo se denomina Experimentación, donde se expone una secuencia de aprendizaje sustentada a partir de las fases de la Ingeniería Didáctica, a través de la cual se pretende dar respuesta a nuestra problemática y objetivos. En este proceso se realiza un análisis exploratorio y de esta manera se evidencia las dificultades y errores que presentan los estudiantes, continuando con los análisis a priori y a posterior de las actividades propuestas, además se verifica si se cumplen los objetivos de la investigación.

Finalmente en el capítulo cuatro se presentan las conclusiones y análisis obtenidos a lo largo de esta investigación.

En el anexo, se entregan evidencia de la aplicación de la situación tales como cuestionario exploratorio, actividad de la secuencia de aprendizaje y reproducciones que los estudiantes entregaron al momento de la implementación de la secuencia de aprendizaje.

Capítulo 1.
Problema de Investigación.

1.1 Antecedentes

De acuerdo a las nuevas bases curriculares (2013), el currículum escolar en Chile se organiza en cinco ejes temáticos, para los niveles de 1° a 6° básico (MINEDUC, 2014). y para los niveles de 7° a 2° medio en cuatro ejes: Números, Álgebra y Funciones, Geometría y Probabilidad y Estadística. En cada uno de éstos, se considera fundamental el desarrollo de las habilidades: resolver problemas, representar, modelar y argumentar y comunicar.

En particular, el eje Álgebra en las actuales bases curriculares se espera que los estudiantes logren comprender la importancia del trabajo con el lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las diversas posibilidades que ese lenguaje entrega a los estudiantes (MINEDUC, 2013). A partir del trabajo en el eje de álgebra se desarrollan diversas habilidades para poder comunicarnos por medios de expresiones algebraicas y que los llevará a desarrollar nuevos conceptos aplicables en niveles superiores y fortalecer los ya adquiridos en los niveles anteriores.

En nuestra primera experiencia como profesores de matemática, específicamente en las prácticas realizadas en diferentes aulas escolares, hemos evidenciado que los estudiantes de 7°, 8° y 1° medio presentan dificultades en el eje de Álgebra, lo que conlleva a una desmotivación por el aprendizaje del sector de matemática.

Este lenguaje es considerado por los estudiantes como una herramienta nueva y compleja, además es común escuchar de los estudiantes “mejor con números”, “con letras no se entiende”, y realizar ejercicios de manera errónea como (Fig.1, Fig.2):

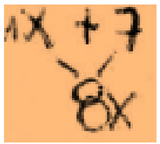


Fig.1

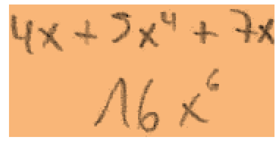


Fig.2

Es por esto, que poder conocer los diversos obstáculos y las causas que los originan nos permitirán en nuestra labor docente, contribuir con situaciones que generan conflictos en los estudiantes.

1.2 Investigaciones previas y justificación del problema

Al adentrarnos en el análisis de las dificultades que se presentan en el aprendizaje del álgebra nos encontramos con investigaciones como las de Palarea & Soccas (1994), que se enfoca en la naturaleza de las dificultades que presentan los alumnos, categorizando en obstáculos y errores, clasificándolos en tres categorías, la primera se refiere a los obstáculos, por ejemplo, en expresiones algebraicas como $x + 7$, las ven como expresiones incompletas, es decir, que no hay aceptación de la falta de clausura, dificultad que tiene su origen en un conocimiento previo que interfiere al nuevo conocimiento, mientras que la segunda categoría destaca que muchos errores en operaciones de adición y sustracción de expresiones algebraicas provienen de errores anteriores presentes en la aritmética, como los errores de procedimientos, de cancelación, del mal uso de recíproco y al mal uso de propiedades, finalmente, la tercera categoría se relaciona a los errores provienen de las características propias del lenguaje algebraico como el nuevo sentido que se le otorga al signo igual “=” y la sustitución formal. Por consiguiente, esta investigación, destaca la importancia que tiene estudiar y analizar el origen del error, por parte del profesor, ya que ayudaría al estudiante a resolver sus dificultades a la hora de aprender conceptos algebraicos.

En este mismo sentido, Esquinas (2009), aborda las dificultades del aprendizaje del símbolo a la formalización, señala que las variables dependiendo del contexto, puede adquirir distintos significados algebraicos y esta incomprensión del cambio de significado que experimentan las letras, a menudo crea un conflicto en los alumnos. En esta investigación, Küchemann (citado en Esquinas, 2009) clasifica la forma en que los alumnos usan las letras y destaca que muchas veces los alumnos conciben las letras como objetos, al tratar de explicar cómo se suman expresiones algebraicas con términos semejantes, con frases tales como "no pueden sumar peras con manzanas" o "se juntan las x con las x y los números con los números" esto busca la memorización de reglas con la intención de evitar errores en la manipulación de las operaciones con los símbolos algebraicos, pero impide el desarrollo de las ideas características del pensamiento algebraico como la variabilidad y la generalidad.

En cuanto a las propuestas de aprendizajes que aportan a la mejora de estas dificultades, González (2012), propone una selección de ejercicios pertinentes a potenciar el significado de variable, en el paso del lenguaje natural al algebraico y afirma que existen grandes dificultades para los estudiantes al momento de resolver problemas algebraicos, debido a la falta de comprensión, manipulación y significado del concepto de variable, operando en situaciones algebraicas de la misma manera que las expresiones numéricas, esto quiere decir que utilizan las letras sin interpretar su significado, es decir, para el estudiante un término algebraico carece de sentido y esto no beneficia a una correcta identificación para realizar operaciones algebraicas y como consecuencia de esto, la expresión algebraico se convierte en una búsqueda de algoritmos entre letras. En esta investigación se concluye que una de las maneras de lograr la construcción del lenguaje simbólico y el manejo de letras con significado es a través de procesos de generalización que se pueden abordar a partir de actividades en diferentes contextos, es decir, estableciendo una relación aritmética- geometría-álgebra.

Garriga (2011) al referirse al lenguaje algebraico, destaca que:

> "Si el estudiante relacionara más frecuentemente el álgebra con el significado intuitivo de los objetos y de las operaciones se evitarían los errores en la manipulación de las expresiones algebraicas."(p.13)

Es necesario entonces manipular y relacionar las expresiones algebraicas a partir de elementos concretos, pictóricos y simbólicos. Por ejemplo para realizar operaciones con términos algebraicos, una actividad que favorece el aprendizaje es ligar objetos utilizados en situaciones cotidianas para el estudiante, como contabilizar los diferentes artículos escolares (lápices, gomas etc.), que serán representados en una expresión algebraica, ya que determinaran cada objeto como una variable diferentes. Por consiguiente realizar actividades lúdicas en contextos conocidos, de manera de facilitar la comprensión de la variable.

Ursini & Trigueros (2006), han estudiado la comprensión del concepto de variable en distintos niveles educativos, determinando los distintos usos de la variable: como incógnita específica, número general y relación funcional, por consiguiente, es preciso interpretar, manipular y simbolizar estos usos. Por lo tanto para trabajar en términos algebraicos es necesario manejar la variable en sus tres usos según propone esta investigación, logrando que el estudiante maneje de forma significativa el concepto primordial de variable, para lograr un manejo flexible y sólido de este, evitando dificultades importantes en el aprendizaje de términos algebraicos.

Tomando en cuenta los antecedentes recopilados, hemos evidenciado que los estudiantes encuentran dificultades al adentrarse en el estudio del álgebra, y más aún en la identificación y reducción de términos semejantes, dado que previamente la enseñanza ha estado basada en la aritmética y operaciones con los números, dando énfasis a sus aspectos manipulativos; una de las dificultades que la mayoría enfrenta, se debe a que el álgebra es vista como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal. Es por esto, que nuestra investigación se enfocará en una propuesta que considera las dificultades y obstáculos que hay en el trabajo de la reducción de términos algebraicos semejantes.

A la luz de lo expuesto, en la educación actualmente son muchas las problemáticas que afronta la enseñanza de las matemáticas, y a partir de lo recopilado se observó que una de ellas es la transición de lo concreto que suponen los procesos aritméticos, a lo abstracto que se materializa con el álgebra. En este sentido, se visualizó que el primer conflicto que se genera en los estudiantes es el reconocimiento correcto de la variable, debido a esta transición sin sentido y es así como conlleva a manipular las expresiones algebraicas de manera mecanizada sin interpretar su significado, esto provoca una incorrecta identificación de términos algebraicos semejantes.

1.3 Objetivos

Objetivo General

Elaborar una secuencia de aprendizaje para la adición y sustracción de términos semejantes, en estudiantes de Séptimo Básico.

Objetivos Específicos

1. Identificar obstáculos asociados a actividades que involucran términos semejantes.
2. Analizar la propuesta del Marco curricular escolar chileno vigente en relación a los ejes Patrones y Álgebra; Álgebra y funciones a partir de la organización curricular.

1.4 El álgebra en el programa de estudio (séptimo básico)

A partir de nuestro trabajo queremos identificar la concepción de la reducción de términos semejantes en el Curriculum escolar vigente. Para ello consideraremos algunos ejemplos de actividades sugeridas en los programas de estudio, considerando que estos son los documentos oficiales que orientan al docente en su trabajo pedagógico. En el programa de estudio vigente de Séptimo año Básico, se presenta en la segunda unidad "Álgebra y Funciones", donde ubicamos nuestro objeto de estudio "Reducción de términos semejantes", lugar donde los estudiantes tienen como primera aproximación a las expresiones algebraicas semejantes.

Hemos organizado en la Tabla.1 el análisis de la concepción de reducción de términos semejantes, a partir del aprendizaje esperado "*Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma* $ax + by + cz \ (a, b, c \ \in \mathbb{Z})$ *"***,** mostrando ejemplos de actividades según los cuatro indicadores de evaluación sugeridos, los cuales son:

> "Representan la adición y la sustracción de variables por la unión y la separación de símbolos pictóricos.
>
> Representan la conmutatividad y la asociatividad de la suma en forma concreta o pictórica.
>
> Reducen expresiones algebraicas en perímetros de figuras geométricas.
>
> Aplican la conmutatividad y la asociatividad de la adición para reducir expresiones algebraicas"
> (MINEDUC, 2014, p. 79).

	Objetivo de Aprendizaje	Ejemplo
Séptimo Básico	Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la forma $ax + by + cz$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$	Actividad 1 (ver abajo)
		Actividad 2 (ver abajo)

<u>Actividad 1:</u>

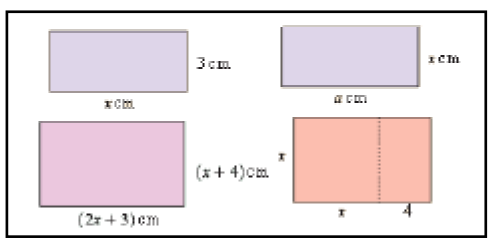
Para las siguientes representaciones pictóricas, asocian una expresión algebraica y luego la reducen.

Dibujo	Expresión algebraica	Expresión algebraica reducida
	2a +3b+a+2b+3a	6a +5b
		
Dibujar poleras de 3 colores diferentes de acuerdo a la expresión algebraica	n + n + r+ a	
Dibujar lentes de 3 diferentes formas o colores de acuerdo a la expresión algebraica	3 (a + b+ c)	
		

(MINEDUC, 2014 p. 90)

<u>Actividad 2:</u>

Reducen términos semejantes al calcular el perímetro de figuras geométrica.



(MINEDUC, 2014 p. 87)

		<u>Actividad 3:</u> Aplica la conmutatividad y la asociatividad para reordenar las siguientes expresiones. Luego factoriza la expresión obtenida, es decir, escríbela como un producto. Ejemplo: $\boxed{-6r + 7q - 8r + 18q + 2r - q =}$ $\boxed{24q - 12\,r =}$ $\boxed{12(2q - r)}$ 1) $2\text{a} + 5\text{bs} + 7\text{a-b-}2\text{a} + 9\text{b} =$ 2) $18\text{st} + 30\text{s-}3\text{st} + 17\text{s} + 25\text{st-}2\text{s} =$ 3) $16\text{b-}5\text{ba-}18\text{b-}7\text{ab} + 3\text{b-}3\text{ab} =$ **(Sacher, 2013)**

Tabla.1

La unidad de “Álgebra y Funciones”, se ubica como segunda unidad en el programa de estudio de séptimo año básico y tiene como propósito:

“Que los estudiantes toman el primer contacto con la noción de variable y lo hacen por medio de generalizaciones de cantidades; por ejemplo: el doble de una cantidad desconocida. Reconocen que las expresiones algebraicas son una nueva forma de expresarse y que tienen su equivalente en el lenguaje natural hablado. Se comienza con un lenguaje simbólico que usarán en argumentaciones y demostraciones en cursos superiores. La reducción de términos semejantes se hace para que puedan resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones en cursos superiores, para lo cual trabajan con expresiones algebraicas sencillas.” (Mineduc, 2014, p. 77)

1.5 El álgebra en Textos escolares (séptimo básico)

Considerando que los textos escolares en nuestro actual currículum escolar, cumplen una función central en la tarea educativa, tanto en el aula como en otros espacios de aprendizaje. Para los estudiantes juega fundamentalmente un rol articulador en el proceso aprendizaje. Además en sectores de mayor vulnerabilidad socioeconómica y cultural, el texto escolar representa un instrumento de equidad y enriquecimiento cultural para las familias.

Es por esto que analizaremos dos textos escolares, que llamaremos Texto 1: Texto del Estudiante 7º Básico Matemática, Editorial Galileo[1] y Texto 2: Texto del Estudiante Matemática 7º Básico Bicentenario, Editorial Santillana.

El objetivo de este estudio es determinar si ambos textos propician la transición de la aritmética al álgebra, enfocado en un trabajo de manera concreta, pictórica y simbólica, para el aprendizaje de los estudiantes en la identificación de términos semejantes y reducción de expresiones algebraicas.

Texto 1

En Texto 1 se aborda términos semejantes, en el **capítulo 2: Razonamiento Algebraico**. La sección de nuestro investigación se encuentra 2.2 **Cómo Reducir expresiones algebraicas**, comienza con una situación relacionada con el tiempo estimativo que una persona puede estar en una entrevista para un reality show, expresando el tiempo con una incógnita y el tiempo máximo que durará el casting con una expresión algebraica. Posteriormente plantean una problemática con cierta cantidad de personas que realizan la entrevista y la traducen a lenguaje algebraico, resaltando que en la expresión algebraica resultante encontrarán términos semejantes, ya que estos tendrán igual factor literal.

[1] Texto de estudio entregado en forma gratuita por el Ministerio de Educación a los colegios particulares-subvencionados y municipales de Chile.

Aunque la introducción resulta llamativa podría resultar compleja para el estudiante, pues no se explica en un principio las partes de un término algebraico, por lo tanto, puede ser confuso comprender que dos o más términos son semejantes cuando tienen igual factor literal, si no tiene manejo del concepto.

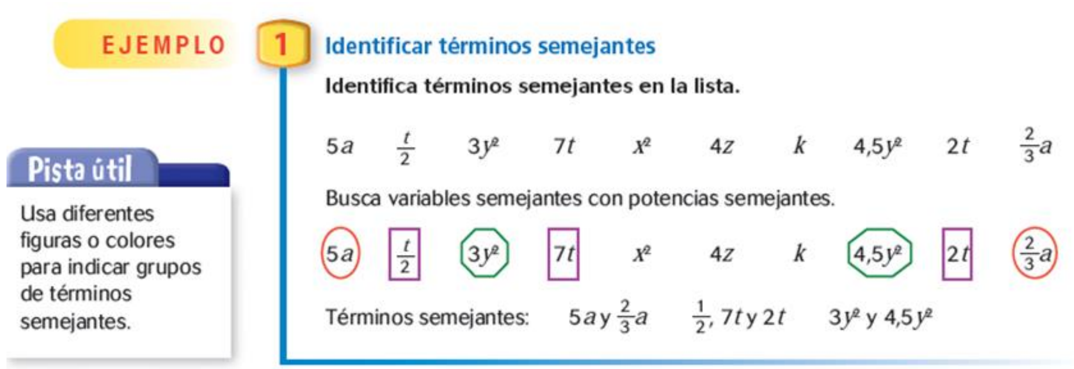
Posteriormente se explican las partes de un término algebraico mediante una imagen y se expone una tabla (Fig.1) donde se diferencian aquellos términos que son semejantes y cuáles no.

Términos semejantes	$3x$ y $2x$	w y $\frac{w}{7}$	5 y 1,8
Términos no semejantes	$5x^2$ y $2x$ *Los exponentes son distintos.*	$6a$ y $6b$ *Las variables son distintas.*	3,2 y n *Solo un término contiene una variable.*

Fig.1 (Bennett, y otros, 2014, p. 58)

En el recuadro (Fig.1), se observa que para separar cada término algebraico utilizan una letra, lo cual produce una confusión si esta pertenece alguno de los términos algebraicos, pues el estudiante podría comprender que la letra "y" utilizada como conector es parte del coeficiente literal del término algebraico.

Se comienza a trabajar con términos semejantes en Ejemplo 1 Identificar términos semejantes (Fig.2), donde en la izquierda del texto en el recuadro Pista útil se da una estrategia para agrupar los términos semejantes


EJEMPLO 1 **Identificar términos semejantes**

Identifica términos semejantes en la lista.

$5a$ $\quad \frac{t}{2}$ $\quad 3y^2$ $\quad 7t$ $\quad x^2$ $\quad 4z$ $\quad k$ $\quad 4{,}5y^2$ $\quad 2t$ $\quad \frac{2}{3}a$

Busca variables semejantes con potencias semejantes.

$5a$ $\quad \frac{t}{2}$ $\quad 3y^2$ $\quad 7t$ $\quad x^2$ $\quad 4z$ $\quad k$ $\quad 4{,}5y^2$ $\quad 2t$ $\quad \frac{2}{3}a$

Términos semejantes: $5a$ y $\frac{2}{3}a$ $\quad \frac{1}{2}$, $7t$ y $2t$ $\quad 3y^2$ y $4{,}5y^2$

Pista útil

Usa diferentes figuras o colores para indicar grupos de términos semejantes.

Fig.2 (Bennett, y otros, 2014, p. 58)

En la Fig.2 se observan dos errores al escribir los términos semejantes al final del recuadro "Ejemplo 1", uno ya mencionado anteriormente que es utilizar como conector la letra "y" , pues podrían pensar que es solo un término semejante y no varios . Además en la edición del libro se encuentra un error de diagramación, ya que el término semejantes " $\frac{t}{2}$" se reescribió como "$\frac{1}{2}$", esto podrían causar dificultad y confusión. Tal vez el estudiante crea que los términos semejantes se modifican o cambia su numerador cuando se agrupan con sus semejantes.

Para introducir la reducción de términos semejantes se descompone un término algebraico y se muestra de manera concreta mediante cilindros con la incógnita en cada uno de ellos, de manera que el estudiante puede visualizar que reducir términos semejantes es agrupar objetos semejantes. (Fig.3)

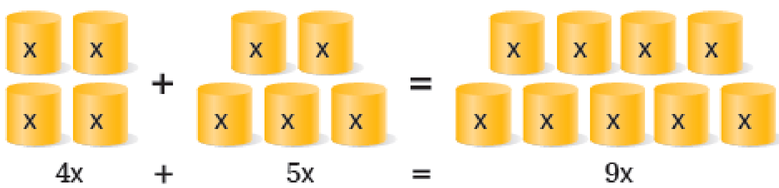
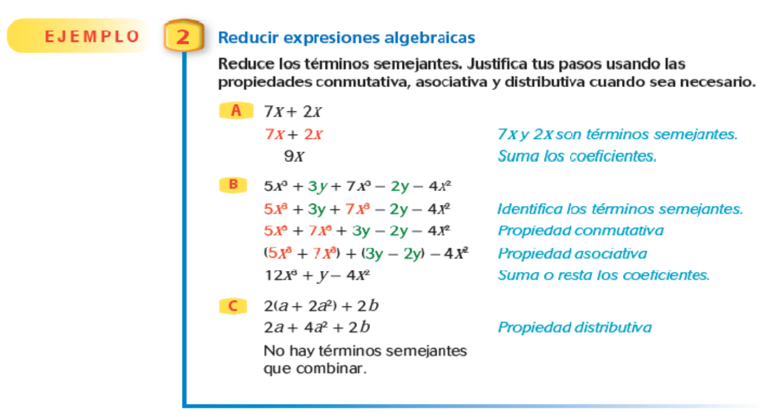


Fig.3 (Bennett, y otros, 2014, p. 59)

En el Ejemplo 2 Reducir expresiones algébricas (Fig.4), muestra la reducción de términos semejantes utilizando propiedades de la adición: Conmutativa, asociativa y distributiva. La estrategia utilizada está planteada paso a paso a un costado del desarrollo algebraico, especificando propiedades utilizadas.



EJEMPLO 2 Reducir expresiones algebraicas

Reduce los términos semejantes. Justifica tus pasos usando las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva cuando sea necesario.

A $7x + 2x$

$7x + 2x$ — *7x y 2x son términos semejantes.*

$9x$ — *Suma los coeficientes.*

B $5x^3 + 3y + 7x^3 - 2y - 4x^2$

$5x^3 + 3y + 7x^3 - 2y - 4x^2$ — *Identifica los términos semejantes.*

$5x^3 + 7x^3 + 3y - 2y - 4x^2$ — *Propiedad conmutativa*

$(5x^3 + 7x^3) + (3y - 2y) - 4x^2$ — *Propiedad asociativa*

$12x^3 + y - 4x^2$ — *Suma o resta los coeficientes.*

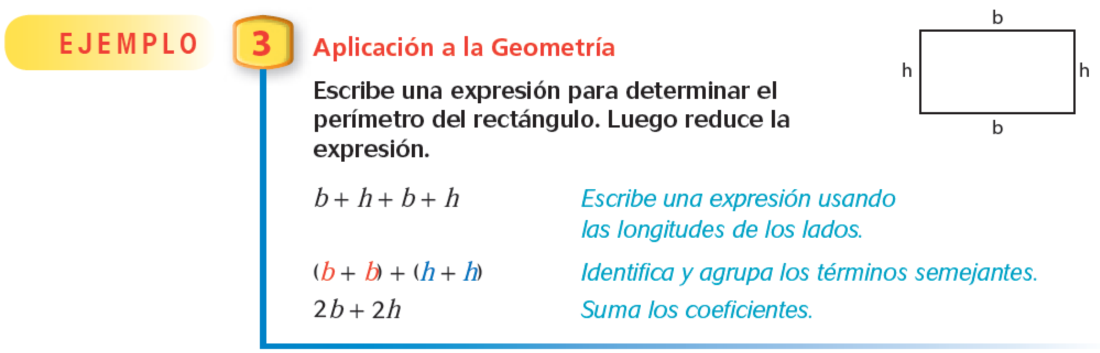
C $2(a + 2a^2) + 2b$

$2a + 4a^2 + 2b$ — *Propiedad distributiva*

No hay términos semejantes que combinar.

Fig.4 (Bennett, y otros, 2014, p. 59)

El Ejemplo 3 Aplicación a la Geometría (Fig.5) proponen un ejercicios donde se debe escribir la expresión que represente el perímetro de un rectángulo, el cual tiene sus longitudes formuladas en términos algebraicos, por tanto el estudiantes al realizar el cálculo del perímetro obtendrá una expresión algebraica, donde tendrá que realizar la reducción de los términos, utilizando la estrategia del ejemplo anterior.


EJEMPLO 3 Aplicación a la Geometría

Escribe una expresión para determinar el perímetro del rectángulo. Luego reduce la expresión.

$b + h + b + h$	*Escribe una expresión usando las longitudes de los lados.*
$(b + b) + (h + h)$	*Identifica y agrupa los términos semejantes.*
$2b + 2h$	*Suma los coeficientes.*

Fig.5 (Bennett, y otros, 2014, p. 59)

En los ejemplos presentados, los contenidos pudieran resultar difíciles de comprender por el estudiante, en particular ejemplo 2 en el cual se utilizan propiedades sin activar aprendizajes previos del estudiante, para este caso bastaría recordar las propiedades de la adición en los números enteros. La reducción de términos no tiene una explicación más amplia que permita que el estudiante razone la información, induciendo a algoritmizar la solución del problema.

Para finalizar la lección se dan tres prácticas de ejercitación, las primeras dos los ejercicios a desarrollar son completamente iguales a los realizados en los apartados "EJEMPLO", en el costado derecho de cada actividad se menciona que "EJEMPLO" debe observar para resolver y finaliza con "Práctica Supervisada". Las actividades para desarrollar en cada "Práctica" no presentan mayor desafío, los ejercicios en su totalidad son de mecanización, las últimas actividades es donde necesitan un análisis por parte del alumno, ya que su resolución no es de manera directa como los problemas anteriores.

En general, con las herramientas y estrategias entregadas en el Texto 1, los estudiantes podrían mecanizar el contenido y dificultar el proceso de transición de la aritmética al álgebra, pues existe una falta de conexión entre el lenguaje algebraico y el numérico, en particular en sus inicios pues podría comenzar dando ejemplos de adición y sustracción de números enteros, activando conocimientos previos del estudiante y posteriormente trabajar en el ámbito algebraico.

También tal vez se genera un quiebre ya que no se observan enlaces entre los simbólico, concreto y pictórico, en particular la parte lúdica refiriéndose a lo concreto no es integrada para favorecer el aprendizaje, se ve como una técnica aislada y sin vínculo con el trabajo simbólico y pictórico.

Texto 2

En el Texto 2, encontramos términos semejantes en la **Unidad 5: Álgebra y Ecuaciones**., se introduce al estudiante con un problema relacionado a calcular perímetro de un triángulo isósceles, dando el perímetro total de la figura y como dato que sus lados miden el doble de la base. Posteriormente se realiza el razonamiento algebraico, determinando que la medida de la base se representará con una letra "x", y por lo tanto sus lados serán "$2x$" (Fig.1).

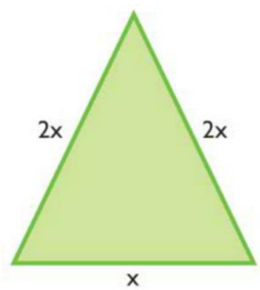


Fig.1 (Díaz, 2010, p. 177)

Luego se formaliza el planteamiento de una ecuación, explicando que para resolver esta ecuación se debe sumar los lados del triángulo, y que al hacer esta operación se llama reducir términos semejantes. A continuación de resolver se vuelve a plantear un problema geométrico (Fig.2) pero ahora con un rectángulo, donde la dificultad estará en que habrán dos términos algebraicos distintos.

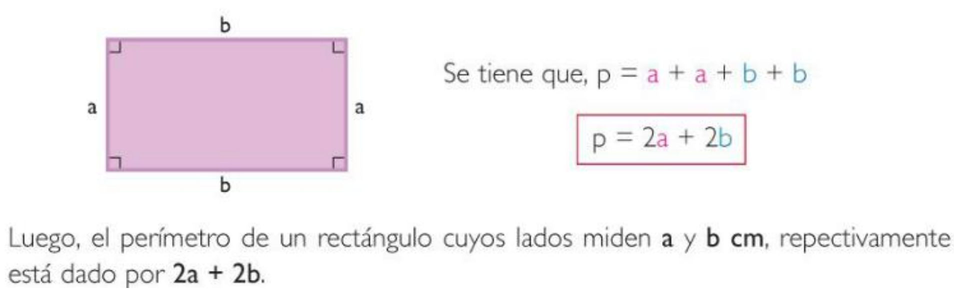


Fig.2 (Díaz, 2010, p. 177)

La problemática planteada para comenzar está relacionada con lo que propone el programa de estudio matemática 7º básico 2014, en el objetivo de reducir términos semejantes, pues se articula geometría y álgebra en este caso cálculo de perímetro de una figura y la reducción de términos semejantes. La explicación al problema es de fácil comprensión y detallada con los procedimientos realizados.

En el texto se observa en un costado un glosario donde se define término y sus partes, se dan diferentes ejemplos, cambiando sus coeficientes numéricos entre números enteros, fraccionarios y sus factores literales también son distintos aumentando la cantidad de letras para el término algebraico. (Fig.3)

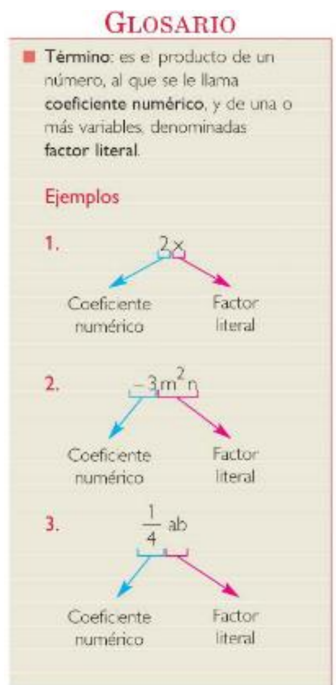


Fig.3 (Díaz, 2010, p. 177)

En el "Glosario" los ejemplos son variados en sus coeficientes y factores, lo que ayudara al estudiante cuando identifique un término semejante, pues se exponen términos con una y más letras.

El cuadro “En síntesis” verbaliza en dos puntos como se debe identificar y reducir términos semejantes (Fig.4)

EN SÍNTESIS

Se denominan **términos semejantes** a todos aquellos términos que tienen igual factor literal.

Reducir términos semejantes consiste en sumar o restar los coeficientes numéricos y conservar el factor literal común.

Fig.4 (Díaz, 2010, p. 177)

A continuación se explica reducción de términos semejantes que tienen en la expresión algebraica paréntesis, cuando están precedidas de signos y multiplicación (Fig. 5).

> Si un paréntesis es precedido por un signo positivo (+), este se suprime sin variar los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

Ejemplo

$$5a + (-2a + 3b) = 5a - 2a + 3b$$
$$= 3a + 3b$$

> Si un paréntesis es precedido por un signo negativo (–), este se suprime cambiando los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

Ejemplo

$$6a - (4a - 2b) = 6a - 4a + 2b$$
$$= 2a + 2b$$

> Si un paréntesis está precedido por una multiplicación, se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

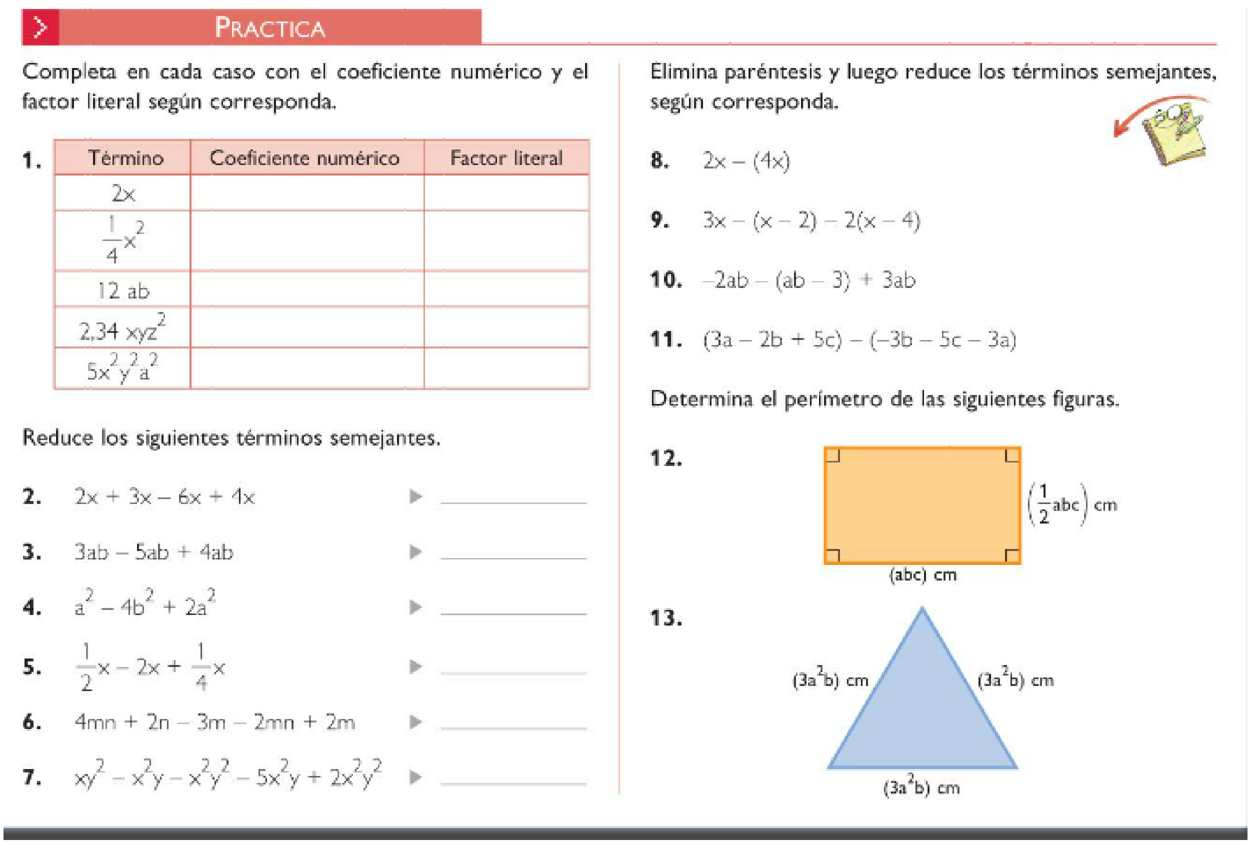
Ejemplo

$$2 \cdot (a + 3) = 2 \cdot a + 2 \cdot 3 = 2a + 6$$

Fig.5 (Díaz, 2010, p. 178)

El Texto 2 en todo lo referente a reducción de términos semejantes no se observa utilización de propiedades de la adición: Conmutativa, asociativa y distributiva para reducir, tampoco alguna conexión del aprendizaje con contextos conocido por el estudiante, por ejemplo interprete mediante material concreto términos semejantes.

Se finaliza con una práctica (Fig.6) que está dividida en cuatro actividades, la primera de identificar las partes de un término algebraico completando una tabla, luego la actividad dos, tres y cuatro es de reducir términos semejantes aplicando lo expuesto anteriormente.



PRACTICA

Completa en cada caso con el coeficiente numérico y el factor literal según corresponda.

1.

Término	Coeficiente numérico	Factor literal
$2x$		
$\frac{1}{4}x^2$		
$12\ ab$		
$2{,}34\ xyz^2$		
$5x^2y^2a^2$		

Reduce los siguientes términos semejantes.

2. $2x + 3x - 6x + 4x$ ▶ ______
3. $3ab - 5ab + 4ab$ ▶ ______
4. $a^2 - 4b^2 + 2a^2$ ▶ ______
5. $\frac{1}{2}x - 2x + \frac{1}{4}x$ ▶ ______
6. $4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m$ ▶ ______
7. $xy^2 - x^2y - x^2y^2 - 5x^2y + 2x^2y^2$ ▶ ______

Elimina paréntesis y luego reduce los términos semejantes, según corresponda.

8. $2x - (4x)$
9. $3x - (x - 2) - 2(x - 4)$
10. $-2ab - (ab - 3) + 3ab$
11. $(3a - 2b + 5c) - (-3b - 5c - 3a)$

Determina el perímetro de las siguientes figuras.

12.

13.

Fig.6 (Díaz, 2010, p. 178)

La práctica no presenta mayor desafío para los estudiantes. En la actividad dos entre los ejercicios hay con coeficiente fraccionario, en el texto no se recordó el aprendizaje previo de adición de fracciones, podría generar una dificultad para el estudiante en su desarrollo. La práctica no tiene ninguna actividad que inste al razonamiento matemático, solo de aplicación de contenido.

En general, el Texto 2 aunque en un principio permite que el estudiante realice un análisis en lo referente a reducir términos semejantes aplicándolo en geometría facilitando pasar de lo aritmético a lo algebraico, solo utiliza este método no se aborda otras maneras de realizar la reducción de términos semejantes. Destacar que el Texto 2 solo menciona en una ocasión el uso de propiedades y no está relacionada con la concepción de reducción de términos semejantes.

Por lo tanto se observa que ambos textos escolares con respecto a lo propuesto en el Curriculum escolar chileno vigente de un modelo de trabajo donde se enfatiza la transición entre lo simbólico, pictórico y concreto, podría ser complejo de concebir por el estudiante, pues más bien las actividades son una repetición de procedimientos, sin una comprensión y análisis que permita al estudiante alcanzar una noción de términos semejante y además variadas dificultades mencionadas que tal vez entorpecen la fluidez del aprendizaje.

Se visualiza que el planteamiento del programa de estudio está dirigido a un trabajo de manera concreta, pictórica y simbólica, donde las expresiones algebraicas puedan representarse a través de diversas formas, logrando así un trabajo correcto en identificación y reducción de términos semejantes. Además, hemos observado que el álgebra en los textos escolares, presenta la identificación y reducción de términos semejantes, pero no muestra una relación con los contenidos vistos previamente, donde la operatoria de adición y sustracción de números enteros se relaciona directamente con la reducción de términos semejantes.

En consecuencia, se plantea la necesidad de poder trabajar un aspectos importantes, el sentido y significado en el reconocimiento de las letras como variable para lograr una correcta identificación de términos semejantes y así poder trabajar la relación de las operaciones de adición y sustracción de números enteros con las operaciones en reducción de expresiones algebraicos.

Capítulo 2.

Marco Teórico.

En este capítulo presentamos el sustento de nuestra investigación, analizado desde tres dimisiones: didáctica, epistemológica y matemática. Por un lado desde la perspectiva didáctica que propone Brousseau, se presenta la Teoría de Situaciones didáctica, como también la naturaleza de los errores y obstáculos que presentan los estudiantes en el ámbito de las matemáticas, en el eje de álgebra, pues será nuestro sustento para determinar dificultades de diversa naturaleza, en adición y sustracción de términos semejantes.

Conocer el desarrollo epistemológico del álgebra, nos permite como docentes analizar aspecto relacionados con su evolución. Por ende, señalaremos las distintas acepciones dela variable a lo largo de la historia, según los distintos usos que se hace de ella en las diferentes ramas de la ciencia.

Por último, se estudiará el fundamento matemático de esta investigación, ya que como docentes se requiere un manejo de las propiedades y estructuras algebraicas, para poder transmitir los conceptos necesarios, de manera que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo del álgebra.

2.1 Aproximaciones epistemológicas

Antecedentes históricos

A continuación, se considera la evolución histórica del álgebra y sus etapas, basadas en las investigaciones de Bayer, Carrillo, Kline, Socas y Vasco (citados por González, 2012).

Las primeras nociones matemáticas se fueron estableciendo intuitivamente hace ya más de 50000 años; con los primeros indicios de numeración y de dibujos geométricos que el hombre primitivo realizaba en sus diversas actividades cotidianas en su afán continuo de sobrevivencia frente a la naturaleza. El hombre aprendió primero a contar, luego inventó las palabras para los números y posteriormente sus respectivos símbolos. Esta vinculación (números, palabra y símbolos) condujo a la búsqueda y creación de sistemas numéricos y gráficos, lo que permitió el surgimiento de la Aritmética y el álgebra. Es así como con el paso del tiempo la aritmética quedó establecida como la ciencia de los números y el álgebra como la parte de las matemáticas que utiliza letra u otros signos para representar cantidades.

En la evolución histórica, el álgebra es posterior a la aritmética, el pensamiento algebraico va a continuar al aritmético, derivándose de él. La aritmética tiene como propósito operar con valores numéricos específicos, mientras que el álgebra tiene un doble propósito: el de generalizar y el de formalizar relaciones cuantitativas.

Para llegar a comprender asuntos relacionados con el lenguaje algebraico es necesario manejar una aproximación del álgebra como concepto. Según el Diccionario de la lengua española (2012), álgebra se define de la siguiente manera:

"Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita."[2]

.

El uso de las letras como variables procede de la geometría griega, teniendo claro que el proceder de la geometría algebraica griega no pretendía resolver ecuaciones algebraicas, sino satisfacer condiciones geométricas, y además la solución griega se aplica a líneas y áreas únicamente, no a cualquier cantidad numérica (Socas & Paralea, 1996). Sin embargo, los árabes trabajan directamente el problema algebraico - utilización de las operaciones aritméticas y de los algoritmos algebraicos - y la geometría clarifica y concreta los procesos algebraicos.

El libro II de los Elementos de Euclides es uno de los más cortos de los suyos que contiene 14 proposiciones. La proposición 1 del Libro II citado *"Si tenemos dos rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores"*, refiriéndose totalmente a la formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la Aritmética, conocida como la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

[2] Diccionario de la lengua española (DRAE), edición 22ª, publicada en 2012.

Actualmente representamos las magnitudes por letras y empleamos gran cantidad de reglas algorítmicas de álgebra, y, en tiempos de Euclides, las magnitudes se representaban como segmentos de línea recta, cumpliendo con los axiomas y teoremas de geometría. El álgebra moderna facilita considerablemente la manipulación de relaciones entre magnitudes y el álgebra geométrica proporcionaba mucha habilidad a la hora de aplicar teoremas.

En Grecia, las letras significaban números, que podían haber incitado a los matemáticos griegos a su manejo como incógnita; sin embargo, se produce un impedimento fuerte para trasladar el uso geométrico de las letras, directamente al álgebra: mientras todos los puntos son "el mismo" en geometría, los números tienen una individualidad bien distinguida.

Muchos estudios hablan que el álgebra es la generalización de la aritmética, cuya transición introduce letras que luego se relacionan con las variables, con el objetivo de dar respuestas a problemas y necesidades reales sin métodos de resoluciones conocidas, por ende, el lenguaje algebraico es una forma de comunicación matemática y es esencial para el uso del simbolismo.

En la aparición de la notación y métodos algebraicos en la historia de las matemáticas, se distinguen tres etapas de evolución del lenguaje algebraico, estas son: álgebra retórica (2000 – 250 a.C. época de la matemática babilónica, egipcia y griega), álgebra sincopada (250 a.C. - 1500 d.C.) y álgebra simbólica, año 1500 en adelante.

A continuación se muestra la evolución histórica del lenguaje algebraico, narrando cada una de sus etapas.

En el **álgebra retórica**, como su nombre lo dice, no hay uso de símbolos especiales, pero sí de terminología geométrica; palabras como por ejemplo “us” (longitud), “sag” (anchura) y “asa” (area) usadas en un sentido abstracto como incógnitas, pues muchos problemas algebraicos surgen de situaciones geométricas y esto hizo que esa terminología se impusiera. Para resolver problemas y dar respuestas a situaciones reales particulares (cuentas diarias, préstamos etc.), todas las expresiones se escribían utilizando el lenguaje natural y los razonamientos eran verbales, sin ninguna intención de generalización ni formalización. En este periodo solo se resolvían ecuaciones por medio de procesos aritméticos, por lo que podríamos decir que esta etapa es previa al álgebra.

En esta etapa, aproximadamente en el año 2000 a.C., los babilonios plantean y resuelven problemas de manera verbal, pues no utilizan letras para representarlos. La principal fuente de información sobre la civilización y la matemática babilónica procede de textos grabados en tablillas mediante símbolos cuneiformes. Estas tablillas han proporcionado información sobre el sistema numérico y posicional de base 60 que utilizaban y además los métodos de cálculo en suma y resta que consistía en quitar o añadir símbolos. En las figuras 2.1 y 2.2 se muestran respectivamente una representación del sistema posicional de base 60 y *símbolos especiales para algunas fracciones.*

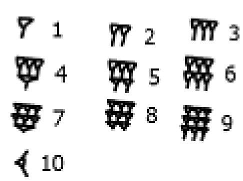


Fig. 2.1: *Sistema posicional de base 60.*

Fig. 2.2: *Símbolos especiales para algunas fracciones.*

Otra civilización que marcó dentro de esta etapa, aproximadamente en el año 1700 a.C, es **la civilización egipcia** que dejaron pocas evidencias matemáticas. La principal fuente de información sobre la civilización y la matemática egipcia procede de dos papiros de gran importancia: el papiro Rhind y el Moscú. Estos papiros han proporcionado información sobre el sistema de numeración decimal no posicional, sino aditivo, donde se adicionan o cancelan símbolos, con signos distintos para 10, 100, 1000, etc. Además, utilizaban escritura en jeroglífico inicialmente, y posteriormente usaron el sistema hierático.

Referente a la aritmética, los egipcios para simbolizar la suma y la resta, utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, y además trabajaban las cuatro operaciones aritméticas con fracciones utilizando la descomposición en fracciones unitarias. En lo referente al álgebra, los papiros contienen soluciones a problemas con una incógnita. Sin embargo los procesos eran puramente aritméticos y no constituían un tema distinto a éste que es el predominante junto con problemas geométricos.

En la etapa retórica, para los egipcios la incógnita no poseía símbolos, y la llamaban "aha" o "montón". Además posibilitaban más de un valor para la incógnita a través de los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas[3] denominados *método de falsa posición* y *método doble falsa posición,* que consisten básicamente en ensayo y error, tomando un valor concreto para la incógnita y verificando si se cumple la igualdad.

[3] Del tipo $ax^2 = b$, como hoy en día se representa.

En las figuras 2.3 y 2.4 se muestran respectivamente el sistema de numeración decimal no posicional y la escritura en jeroglífico egipcio.

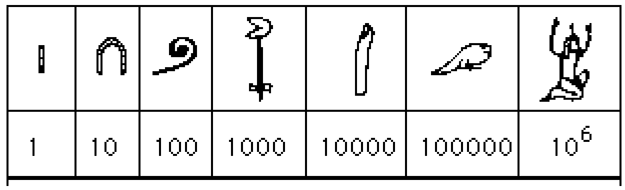


Fig. 2.3: *Sistema de numeración decimal no posicional egipcio*

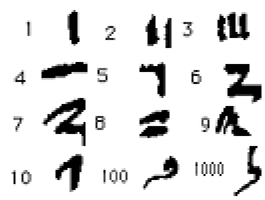


Fig. 2.4: *Escritura en jeroglífico egipcio*

Otra civilización importante dentro de la etapa del álgebra retórica, es **la civilización griega**. El período del álgebra retórica en esta civilización se originó aproximadamente en el año 600 a.C, con la *Geometría Demostrativa* de Thales y culmina con los *Elementos de Euclides*. Este último expresa la matemática en lenguaje verbal y lenguaje geométrico. Dentro de este período existe una estrecha relación entre geometría y aritmética, lo que llamaría Zeuthen *álgebra de tipo geométrico*, que se encuentra consignada en los libros I y IV de los elementos de Euclides. Los griegos utilizaban el sistema no posicional de base 10 e inicialmente usaban el Sistema Jónico Alejandrino, que consistía en utilizar las letras del alfabeto, donde estas representaban cantidades constantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 , múltiplos de 10 hasta 90 y múltiplos de 100 hasta 900. La combinación de estas letras representan números intermedios y además los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas. El producto de los números se representaba con el área de un rectángulo, y el producto de tres números con el volumen. Además usaron las fracciones solamente como razón entre números enteros y no como partes de un todo y las razones se utilizaban sólo para proporciones. En las figuras 2.5 y 2.6 se muestran respectivamente el sistema de numeración no posicional de base 10 y el sistema Jónico Alejandrino de los griegos.

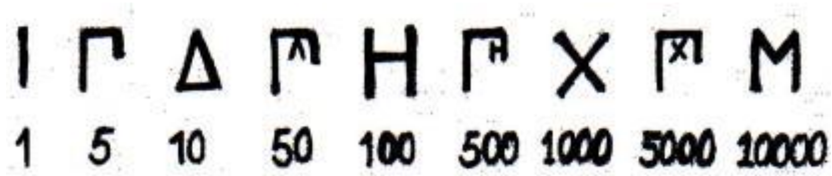


Fig. 2.5: *Sistema no posicional de base 10 de los griegos*

Fig. 2.6: *Sistema Jónico Alejandrino de los griegos*

Los griegos desarrollaron un álgebra de tipo geométrico, y el uso de las letras como variables procede de la geometría griega, además se observa que se establece relaciones entre magnitudes geométricas, pues a los entes geométricos les asocian medidas y la variable está presente en las longitudes de segmentos de recta, medidas de área o de volumen, como por ejemplo, en el *Postulado 1* de Euclides: "por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta".

La Figura 2.7 nos muestra la longitud AB que representa *"a" unidades*, es decir, que para cierta unidad de medida esa unidad de medida está contenida "a" veces en el segmento. Todo número representa la longitud de un segmento de recta, un área o un volumen.

Fig. 2.7: *Postulado 1 de Euclides.*

Como observamos en la primera fase del desarrollo histórico del álgebra, más conocido como álgebra retórica, se describe principalmente la forma en que resolvían problemas matemáticos y el sistema de numeración de los babilonios, egipcios y griegos, además el uso de operaciones aritméticas y de qué manera está presente la incógnita en estas culturas.

Con el paso del tiempo y el desarrollo histórico del álgebra, se da paso a un álgebra denominada álgebra sincopada, caracterizada por el uso de abreviaciones para las incógnitas, aunque los cálculos se describen totalmente en lenguaje natural. En el álgebra sincopada o álgebra abreviada, se comenzó a utilizar por primera vez, símbolos y abreviaturas usando letras para representar la incógnita y sus potencias, es una combinación de lenguaje retórico con abreviaturas predominando los cálculos en lenguaje natural.

La segunda fase en el desarrollo histórico recibe el nombre de **álgebra sincopada**. En esta etapa, entre los años 250 a.C. - 1500 d.C. se destacan los griegos, los hindúes, y los árabes. **Los griegos** (330 a.C-600 d.C.) usaban un sistema no posicional de base 10. Dentro de esta civilización, se destaca a Diofanto (250 d.C.) ya que se reconoce en él, la figura griega más prominente de la época Alejandrina con respecto al álgebra, debido a que introduce por primera vez el uso de letras griegas como abreviaciones para las incógnitas y sus potencias. Diofanto usó nombres y símbolos para las potencias, lo que nosotros representamos por “x” la escribe Δ por ser la primera letra de la palabra dymanis: “potencia”. Además, resuelve problemas con varias incógnitas, las cuales las reduce expresando todas las cantidades desconocidas en términos de una sola. Más aún, Diofanto, introduce símbolos especiales para algunas operaciones aritméticas, como la adición, sustracción, la igualdad, el cero, la unidad y las fracciones, pero no utiliza signos para representar la multiplicación y división, además obtiene un sistema cerrado para las cuatro operaciones del álgebra, para lo cual establece las leyes de los signos. En las figuras 2.8 y 2.9 se muestran respectivamente el sistema de numeración no posicional de base 10 y el simbolismo de Diofanto que utilizaba letras griegas como abreviaciones para las incógnitas y sus potencias.

Fig. 2.8: *Sistema numérico de los griegos*

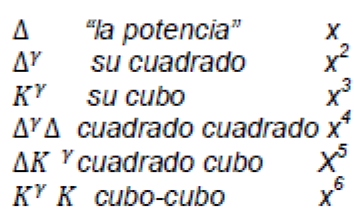


Fig. 2.9: *Simbolismo de Diofanto*

Los hindúes (200-1200), también se destacaron dentro de la etapa intermedia de la evolución del lenguaje álgebra, denominada etapa sincopada. Brahmagupta fue el más grande de los matemáticos hindúes.

Los hindúes aplicaban un sistema de numeración posicional y decimal desde el siglo VIII a.C.; usan símbolos especiales para los números del 1 al 9 y mejoran la notación simbólica creada por Diofanto, pero aún usan diferentes abreviaturas de palabras y símbolos para algunas operaciones aritméticas como también para la incógnita. Ellos introducen el cero como número, trabajan los números racionales e irracionales cuadráticos y números negativos y además se caracterizan por el desarrollo del cálculo numérico y algebraico.

A continuación las figuras 2.10 y 2.11 se muestran respectivamente el Sistema numérico hindú y la simbología para la incógnita hindúes.

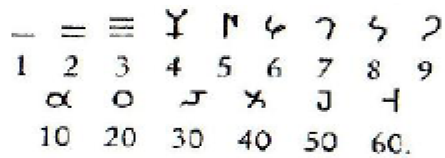


Fig. 2.10: *Sistema numérico hindú. Notación Brāhmi.*

X ***"ya"*** *yavattavat (tanto-cuanto)*
X^2 ***"va"***
X^3 ***"gha"***
X^4 ***"vava"***
X^9 ***"ghagha"***
$X^{1/2}$ ***"ka"***

Fig. 2.11*: Simbología para la incógnita*

Otro pueblo importante que marca dentro de la etapa sincopada son **los árabes** entre los años 800-1300 d.C, debido a que contribuyen con el nombre de álgebra, proveniente de la palabra "aljabr" que al parecer significa "restauración" o completación" y "muqabalah" probablemente "reducción o compensación". Se destaca dentro de la matemática árabe a Al-khowarizmi (780-840) ya que es el autor de una de las obras que ha tenido especial importancia en la historia matemática. Al-khowarizmi en su libro, llama al lado de un cuadrado "la cosa", y en la solución a los problemas, hace referencia al producto de la "cosa", la mitad de las “cosa”. Los trabajos algebraicos de al-Khwarizmi fueron influenciados por los hindúes, como también de los babilónicos, griegos y egipcios. La matemática árabe se aproxima un poco al trabajo de Diofanto, respecto al tratamiento de varias incógnitas ya que las reduce a una indeterminada y luego las resuelve.

Los árabes conocían la forma de resolver números racionales e irracionales cuadráticos pero no hacen uso de los números negativos y además relacionan geometría y álgebra para poder complementar sus argumentos. Influenciados por los griegos, la variable tiene dimensionalidad y está presente en las longitudes de segmentos de recta, un área o un volumen. Este pueblo, tenían un sistema de numeración posicional en base 10, y mejoraron los símbolos de los indios y su notación posicional. Los números están escritos con palabras, sin ninguna abreviatura. La figura 2.12 muestra el sistema numérico posicional en base 10 de los árabes.

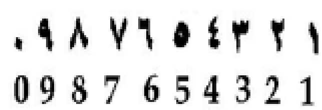


Fig. 2.12: *Sistema numérico árabe*

Es evidente que la limitante en la obra de Al-khowarizmi es la ausencia de la notación simbólica, ya que es de un nivel mucho más elemental, por lo que retrocede respecto a los avances de Diofanto.

En consecuencia de lo anterior, si bien es cierto que en el álgebra sincopada, las civilizaciones se acercaron significativamente a los símbolos y abreviaturas, se hace necesario en la evolución del lenguaje algebraico, abandonar finalmente los números escritos de manera retórica, dando origen a una nueva etapa, llamada álgebra simbólica.

En el **álgebra simbólica**, todos los términos y la solución de problemas son escritos por medio de símbolos. Como resultado de las necesidades en matemáticas, se utilizaba símbolos especiales para la incógnita y sus potencias. Esta etapa fue inaugurada por el francés François Viète (1540-1603) quien establece una diferencia entre álgebra y aritmética e inicia la generalización a la expresión algebraica. Este francés se da cuenta que la incógnita no necesita ser un número o un segmento geométrico por lo que su contribución más importante radica en la introducción de los signos literales para los coeficientes. Se concibe la distinción entre parámetro e incógnita y lo hace con símbolos diferentes para cada uno, escribiendo las magnitudes conocidas "parámetros" como consonantes (B, D, etc.) y las magnitudes desconocidas "incógnitas" como vocales. Su notación algebraica fue nombrada "logística speciosa", para referirse al álgebra como método de operar con formas o cosas. Esta álgebra no es del todo simbólica, pues aún se usan abreviaturas. La figura 2.13 muestra un ejemplo de la notación logística speciosa.

A^2 "A Quadrates" A^3 "A Cubus" ***"B in A quadratum, plus D plano in A, aequari"***	$A^2 + B^3C^2 + DE = F^2H$ la escribía así: *Aq + Bc in Cq + Dpl in E ae. Fq in H*

Fig. 2.13: *Ejemplo notación logística speciosa.*

François Viète demuestra una preocupación por la matemática distinta al de sus antecesores, ya que concibe la matemática como una forma de razonamiento, además trabaja tanto con números racionales e irracionales cuadráticos como con números complejos, y descarta enteramente los números negativos.

La principal simbología en aritmética destacada en esta última etapa fue la siguiente: “in” multiplicación, “I” división y “aequalis” igualdad. La expresión *a - b* la utilizaba en el sentido “a mayor que b” y la notación *a = b* significa “a menor que b”.

Gracias a los trabajos realizado por François Viete en la introducción de un mejor símbolo, se enriquece el avance del álgebra y además de los aportes de los matemáticos como Descartes, Steven, Oughtred, Harriot, Chuquet, los cuales introducen nuevos símbolos para las operaciones, desigualdades y notación para exponente.

El uso de símbolos para la incógnita tuvo una lenta progresión, la historia nos muestra dos etapas del símbolo para la incógnita: como número y como incógnita (algo abstracto). Pasaron muchos años para que el hombre investigara sobre conceptos abstractos; los orígenes del concepto de variable y variación, pues estás están en la necesidad de representar magnitudes físicas y su cambio con respecto al tiempo.

También es importante considerar que la historia del álgebra no es sólo una historia de símbolos, aunque en la realidad se observa que desde una cierta fase los conceptos algebraicos llegan a ser prácticamente inseparables de los símbolos, sin embargo nuestro conocimiento algebraico se construye a través de manipulaciones e investigaciones de expresiones formales y además de cambios en paralelo desde simbolismo a conversiones conceptuales. Así, desde que fue introducida la notación algebraica moderna, la historia del álgebra y la historia de los símbolos, aunque ciertamente diferentes, llegaron a estar íntimamente relacionadas, y es prácticamente imposible hablar de la historia de una de ellas sin hablar de la historia de la otra.

2.1.2 Objeto matemático

Esta investigación aborda las dificultades que se presentan en la transición de lo aritmético al lenguaje algebraico centrado en la reducción de términos semejantes, por lo tanto se estudiará el concepto de polinomio, universo donde se reconocen las expresión algebraicas como objetos no como incógnitas. Además, los polinomios son expresiones matemáticas que se forman a través de expresiones algebraicas, en donde la reducción de términos algebraicos semejantes se trabaja las propiedades que forman al anillo de polinomios.

2.1.3 Definición de Anillo y su Estructura.

El objeto matemático del presente trabajo se sustenta a partir de los planteamientos de Jiménez (2013).

Un anillo $\langle \mathbb{K}, +, \cdot \rangle$ es un conjunto $\mathbb{K}$ no vacío junto con dos operaciones internas $(+, \cdot)$ que llamamos suma y producto, definidas en $\mathbb{K}$ tales que satisfacen las siguientes propiedades:

1. **$\langle \mathbb{K}, + \rangle$ Es un Grupo Abeliano.**

Decir que $\langle \mathbb{K}, + \rangle$ es un Grupo Abeliano se refiere a que se cumplen las siguientes propiedades:

- Sea $\mathbb{K}$ es un conjunto no vació, entonces:

$(\forall a, b \in \mathbb{K})$ se tiene que $a + b \in \mathbb{K}$ y es único.

- La operación es asociativa, es decir:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{K})(a + (b + c) = (a + b) + c)$$

- Existencia de elemento $e \in \mathbb{K}$ llamado identidad en $\mathbb{K}$ tal que:

$$(\exists e \in \mathbb{K})(\forall a \in \mathbb{K})(a + e = e + a = a)$$

- Para cada $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento $a` \in \mathbb{K}$ llamado elemento inverso aditivo de a, es decir:

$$(\forall a \in \mathbb{K})(\exists a` \in \mathbb{K})(a + a` = a` + a = e)$$

- La operación es conmutativa, es decir:

$$(\forall a, b \in \mathbb{K})(a + b = b + a)$$

2. $\langle \mathbb{K}, \cdot \rangle$ Es un semigrupo con neutro.

Decir que $\langle \mathbb{K}, \cdot \rangle$ es un semigrupo con neutro significa que cumple las siguientes propiedades:

- Clausura

$(\forall a, b \in \mathbb{K})$ se tiene que $a \cdot b \in \mathbb{K}$ y es único.

- La operación es asociativa, es decir:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{K})(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$$

- Neutro.

Existe un elemento **1** en $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$, el cual llamaremos **uno**, tal que

$$(\forall\, a \in \mathbb{K}^*)(a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$$

1. Distributiva.

Para todas las a, b, c pertenecientes a $\mathbb{K}$ se cumple la **Ley Distributiva**.

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

2.1.4 Polinomio

Sea $\mathbb{K}$ igual a $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, un polinomio en la variable x con coeficientes en $\mathbb{K}$ es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \vee \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Donde $n \in \mathbb{N}$, a_i con i desde 0 hasta n son los coeficientes del polinomios y además si $a_n \neq 0$, se dice que n es el grado del polinomio.

El grado del polinomio anterior lo denotamos por

$$gr(p(x)) = n = deg(p(x)).$$

El conjunto de todos los polinomios con coeficiente en $\mathbb{K}$ lo denotamos por $\mathbb{K}[x]$, donde

$$\mathbb{K}[x] := \{p(x) / \ p(x) \ es \ un \ polinomio \ con \ coeficiente \ en \ \mathbb{K} \ \ en \ la \ variable \ x\}$$

Igualdad de Polinomios

Sean $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, entonces $p(x) = q(x)$, si y sólo si:

1. Los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tienen el mismo grado, es decir cuando $n = m$
2. Los coeficientes de los respectivos términos de los polinomios anteriores deben ser iguales.

Operaciones en Polinomios

- **Suma de polinomios.**

Sea $p(x),\ q(x) \in \mathbb{K}[x]$, tal que $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, donde se considerarán 3 casos:

1. Si $gr\big(p(x)\big) > gr\big(q(x)\big)$ entonces $n > m$ por lo tanto

$$p(x) + q(x) = (a_n x^n + \cdots + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_0)$$
$$p(x) + q(x) = (a_n x^n + \cdots + a_m x^m + \cdots + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_0)$$
$$p(x) + q(x) = a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + (a_0 + b_0)$$

2. Si $gr\big(p(x)\big) = gr\big(q(x)\big)$ entonces $n = m$ por lo tanto

$$p(x) + q(x) = (a_n x^n + \cdots + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_0)$$
$$p(x) + q(x) = (a_n x^n + \cdots + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_0)$$
$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_0 + b_0)$$

3. Si $gr\big(p(x)\big) < gr\big(q(x)\big)$ entonces $n < m$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
p(x) + q(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_0) \\
p(x) + q(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_0) \\
p(x) + q(x) &= b_m x^m + \cdots + (a_n + b_n) x^n + (a_0 + b_0)
\end{aligned}
$$

- **Producto de polinomios.**

Sea $p(x),\ q(x)\ \in \mathbb{K}[x]$, tal que $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, entonces se define:

$$
\begin{aligned}
p(x) \cdot q(x) = {} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\ ) \cdot (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\
= {} & a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{m-1} b_m) x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + \\
& a_0 b_1) x + a_0 b_0
\end{aligned}
$$

donde $gr\big(p(x) \cdot q(x)\big) \le gr\big(p(x)\big) + gr\big(q(x)\big)$

2.1.5 Anillo de Polinomio.

Sea $\mathbb{K}$ un anillo y $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de polinomios sobre $\mathbb{K}$, con las dos operaciones definidas en $\mathbb{K}[x]$, la suma de polinomios y el producto de polinomios, es $\mathbb{K}[x]$ un anillo conmutativo.

Suma en $\mathbb{K}[x]$ y Multiplicación en $\mathbb{K}[x]$.

Sea $\mathbb{K}[x]$ el anillo de polinomios se cumple:

1. $\langle \mathbb{K}[x]\,, + \rangle$ es un **Grupo Abeliano.**

Decir que $\langle \mathbb{K}[x]\,, + \rangle$ es un Grupo Abeliano se refiere a que se cumplen las siguientes propiedades:

- La operación es asociativa, es decir:

  Sean $p(x),\ q(x),\ r(x\ ) \in \mathbb{K}[x]$, entonces

$$p(x) + [q(x) + r(x)] = [p(x) + q(x)] + r(x)$$

- Neutro aditivo.

  Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. Existe $0(x) \in \mathbb{K}[x],$ función nula, donde $0(x) = 0x^m +$ ... $+ 0 = 0x^n + \cdots + 0$, entonces

$$p(x) + 0(x) = p(x)$$

- Inverso aditivo.

  Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x],$ tal que $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}[x]$, entonces existe $-p(x) = (-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0) \in \mathbb{K}[x]$
  Tal que

$$p(x) + \big(-p(x)\big) = 0(x).$$

- La operación es conmutatividad.

  Sean $p(x)\ y\ q(x) \in \mathbb{K}[x]$, tal que

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

2. $\langle \mathbb{K}[x]\,,\ \cdot \rangle$ es un **semigrupo conmutativo.**

Decir que $\langle \mathbb{K}[x]\,,\ \cdot \rangle$ es un semigrupo conmutativo se refiere a que se cumplen las siguientes propiedades:

- La operación es asociativa, es decir

Sea $p(x),\ q(x),\ r(x\ ) \in \mathbb{K}[x]$, entonces

$$p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)] = [p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x)$$

- Neutro.

Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces

$$p(x) \cdot 1 = p(x)$$

- La operación es conmutativa, es decir

Sea $p(x),\ q(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

3. Distributiva.

Sea $p(x),\ q(x),\ r(x\ ) \in \mathbb{K}[x]$, entonces

$$p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = [p(x) \cdot q(x)] + [p(x) \cdot r(x)]$$

$$[p(x) + q(x)] \cdot r(x) = [p(x) \cdot r(x)] + [q(x) \cdot r(x)]$$

2.2 Teoría de situaciones didácticas

Desde nuestra experiencia en el aula hemos evidenciado dos situaciones didácticas las cuales pueden ser observadas desde dos perspectivas, la más recurrente en el aula es la relación alumno y profesor, en la que este último es el encargado de entregar el conocimiento al alumno quien aprende lo enseñado, y la otra desde la perspectiva de Brousseau (citado en Panizza, 2004) que señala:

> "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje." (p.3)

Por lo tanto Brousseau indica que el aprendizaje es por adaptación producto de la interacción del alumno con el medio, desarrollando sus propios aprendizajes matemáticos con el medio o situaciones problemática, sin la intervención del profesor.

Ahora bien la adaptación del alumno a un medio en el procesos de aprendizaje presenta dificultades en las cuales surgen diversos errores que muchas veces son falta de conocimiento de ciertas reglas matemáticas, mal uso de fórmulas o propiedades, falsas suposiciones personales, entre otros más, pero en varias ocasiones estos errores son señales que pertenecen a otro origen y que están evidenciando a través de ese error, problemas y obstrucciones más importantes que equivocaciones, es por esto que surge la idea de **obstáculos**. (Palarea & Soccas, 1994)

Brousseau (citado en Turrubiartes, 1983) define obstáculo como la causa que conduce al error:

> “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado” (p.67).

De lo anterior, se destaca que en algunas ocasiones el error es más que un conocimiento erróneo o simples equivocaciones, ya que ese error, podría ser una señal de la existencia de un problema mayor causado por un conocimiento anterior adquirido correctamente pero que obstruye el aprendizaje de uno nuevo en otro contexto, esta situación es lo que Brousseau denomina obstáculo.

Un ejemplo de este tipo de obstáculos es cuando se estudian la adición de números enteros en el cual los alumnos resuelven mediante agrupación de números con igual signo, lo cual no necesariamente ha sido enseñado por el profesor pero los alumnos caen en cuenta de ello y construyen ese conocimiento. El cual funciona para el estudiante en ese contexto. Pero cuando trabajan en álgebra con adición de términos semejantes el agrupar términos que solo tengan igual signo, no podrá realizar la reducción de manera correcta. Esto lo evidenciamos de la siguiente forma (Fig.1)

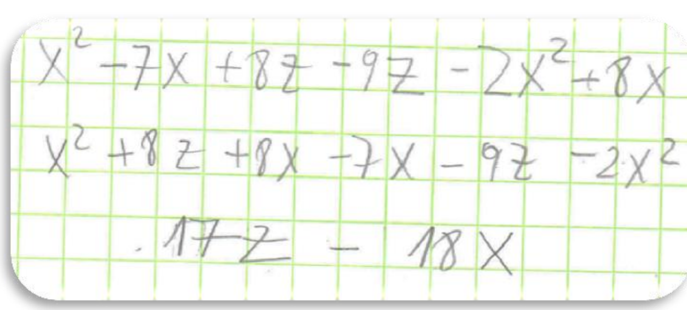


Fig.1

Brousseau clasifica tres tipos de obstáculos según su origen, obstáculo ontogénico o psicogénico debidos a las características del desarrollo del individuo, obstáculo didáctico resulta de las elecciones didácticas realizadas para establecer la situación de enseñanza; y los obstáculos epistemológicos que están intrínsecamente relacionados con el propio concepto a enseñar (Turrubiartes, 1983).

Dentro de nuestra propia experiencia en el aula, al indagar dentro del área del álgebra sobre los errores que tienen su origen en un obstáculo, hemos evidenciado errores referentes a la necesidad de clausura en expresiones algebraicas específicamente en el contexto de polinomios asociados a términos semejantes.

Algunos alumnos consideran las expresiones algebraicas como enunciados que son incompletos, por ejemplo al enfrentarse los alumnos con expresiones como $3x + 4 + 2x$, sienten que les falta algo, por lo que tienden a cerrarla y lo hacen sumando los términos ignorando la función del símbolo algebraico, asociándole un resultado de $9x$, esto se debe a conocimientos anteriores que han adquirido desde la aritmética donde el signo igual “$=$” se encuentra antes del resultado de una operación, como $3 + 4 + 2 = 9$, pero, se debe considerar que en álgebra, no siempre es posible terminar el cálculo como en aritmética, por ende los alumnos no aceptan que una expresión no arroje un número y es esto, lo que se denomina error de clausura.

De la misma manera, sucede con la expresión que se muestra a continuación, parte con errores al sumar el grado de la variable y finalmente incurre en el error de clausura, ya que intentan llegar a un resultado, que de un solo término. (Fig.2):

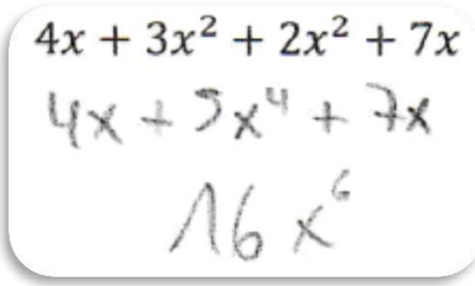


Fig.2

Otro ejemplo de este mismo caso, podría ser como el que se muestra en la (Fig3).

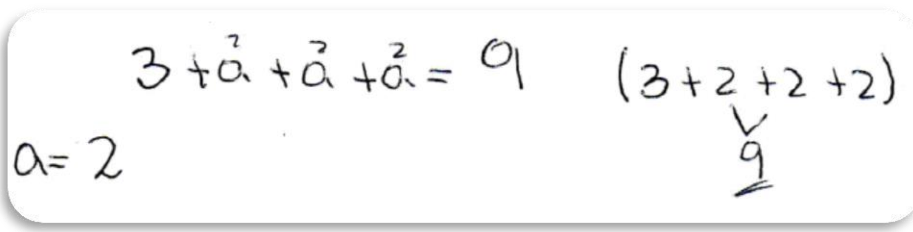


Fig.3

Los alumnos, dan como resultado el número 9, debido a que simplemente ignoran la letra, para acomodar el resultado de manera de superar la dificultad que presenta la expresión algebraica.

Es por esto, que la superación de un obstáculo, implica el diseño de actividades constituidas dentro de una situación didáctica, que permita a los alumnos conformar su propio conocimiento haciéndolos activos y consientes de cada proceso que viven, de manera que puedan evaluar, cambiar y modificar conocimientos previos, para poder tener un aprendizaje satisfactorio.

Por consiguiente, la teoría de las situaciones didácticas permite diseñar y explorar factores importantes a ser considerados por el profesor con el objetivo de utilizar un medio favorable en el proceso enseñanza-aprendizaje. Esta teoría está sustentada bajo una mirada constructivista del aprendizaje tomando en cuenta que el alumno no aprende de manera espontánea, por lo que Brousseau (citado en Fregona, 2007) destaca: “Un medio sin intenciones didácticas es incapaz de inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera”. (p.31) En este sentido, el aprendizaje por adaptación, se lleva a cabo, al interactuar con una situación didáctica, preparada intencionalmente por el profesor, para la adquisición de un determinado saber.

Ahora bien, **Situación didáctica** Brousseau (Citado en Fregona, 2007) la define de esta manera:

> “Una situación es un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado, como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable”. (p.16)

El medio didáctico se refiere a los recursos que posee el estudiante, ya sea la tarea o problema con sus instrucciones como también lápiz papel, entre otros que ha sido proporcionado intencionalmente por el profesor, con el fin de que sus alumnos adquieran un saber determinado, considerando que un individuo aprende en la medida que construye su propio conocimiento.

De lo anterior, nacen las situaciones **a-didácticas**, que se define como la puesta en práctica del estudiante frente a una situación didáctica, donde el alumno asume el problema propuesto como propio y utiliza sus conocimientos anteriores para resolverlo, sin la intervención directa del profesor

Frente a esto, Brousseau (Citado en Fregona, 2007) señala que:

> “Concepciones actuales de la enseñanza van a exigir al maestro que provoque en el alumno -por medio de la elección sensata de los "problemas" que propone- las adaptaciones deseadas. Esos problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actué, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer”.(p.31)

Por otro lado Brousseau dentro de **Teoría de las situaciones didácticas** establece la clasificación de las relaciones que experimenta el alumno al interactuar con el medio propuesto, estas son categorizadas en cuatro fases:

1) **Fase de acción**: Es una situación a-didáctica que consiste en el accionar individual de un estudiante frente a un problema interactuando con el medio, se requiere solamente la puesta en práctica de sus conocimientos previos para llegar a la resolución de problemas y así a la adquisición de conocimientos. En esta fase el estudiante puede relacionar información, evaluar el resultado de su acción, tomar decisiones acerca de sus procedimientos, juzgar estrategias, modificarlas y retroalimentarse constantemente.

2) **Fase de formulación:** Consiste en el trabajo en grupo, donde se requiere de la comunicación de otros estudiantes interactuando con el medio didáctico, el alumno intercambia con una o varias personas informaciones y comunica lo que ha encontrado con su compañero que a su vez le hace llegar información.

3) **Fase de validación**: Se produce una vez que los estudiantes ya han interactuado con el medio, es el momento donde los alumnos deben explicar las teorías ocupadas con pruebas, justificar la validez de la estrategia utilizada ante otros compañeros dando cabida a la discusión, de manera de poner en juicio el producto obtenido, con el objetivo de cerciorar si realmente está en lo correcto para luego poder formalizar el saber adquirido.

4) **Fase de institucionalización**: Es un proceso llevado a cabo por el profesor para establecer, ordenar, recapitular y oficializar el nuevo conocimiento que nació durante la actividad, con el objetivo de convertir ese conocimiento en un saber reutilizable.

En este trabajo la Teoría de Situaciones Didácticas nos permite estructurar la secuencia de aprendizaje de acuerdo a las fases anteriormente mencionadas. El objetivo de transitar por dichas fases, es que el estudiante valide el aprendizaje construido.

2.3 Ingeniería Didáctica

Como sustento metodológico utilizamos fases de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995) ya que la misma se caracteriza por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, esto es sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, y también porque se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir, basada entre la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

La ingeniería didáctica (Artigue, 1995), como metodología de investigación consta de cuatro fases: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori y validación.

Análisis Preliminar

Lo constituye el análisis de los siguientes antecedentes:

- El Curriculum escolar desde la mirada de los programas de estudio y textos escolares teniendo como objeto el estudio de adición y sustracción de expresiones algebraicas.

- Revisión de análisis e investigaciones en el ámbito de la didáctica de las matemáticas que evidencien obstáculos y dificultades de la adición y sustracción de expresiones algebraicas.

- Estudio de la adición y sustracción de expresiones algebraicas desde la construcción de la matemática.

Análisis a Priori

Dado que el objetivo de esta investigación es superar dificultades y obstáculos en la adición y sustracción de expresiones algébricas, hemos elaborado una secuencia didáctica.

Esta secuencia didáctica consta de tres situaciones, las cuales buscan que el estudiante logre un claro entendimiento del concepto de términos semejantes y por consiguiente una apropiada aplicación de este para reducir expresiones algébricas, además de otorgar diversas estrategias que le permitan resolver y razonar la adición y sustracción de términos semejantes.

Experimentación

Esta fase se aplicó el segundo semestre del año escolar 2015, a estudiantes del colegio A, compuesto por 27 alumnos. Para la implementación de la secuencia se realizaron tres tipos de experimentación. La primera y segunda situación didáctica se realizaron en 45 minutos de trabajo en equipo y 45 minutos de discusión grupal, en ellas el docente actuó como mediador. Las conclusiones de los trabajos y desarrollo fueron registrados de forma escrita. La tercera situación se realizó mediante una evaluación formal escrita, la cual tuvo una duración de 45 minutos y el docente no realizo intervenciones.

Análisis a posteriori y validación

Para la obtención de esta fase primero se analizó los resultados del cuestionario exploratorio el cual tenía como objeto identificar obstáculos y dificultades en la adición de expresiones algebraicas, posteriormente se examinó los resultados de la secuencia didáctica, para realizar una confrontación de lo obtenido, y de esta forma comprobar si el objetivo de esta investigación fue logrado.

Capítulo 3.

Experimentación

3.1 Descripción general

En este capítulo se presenta la implementación del cuestionario exploratorio, a estudiantes de dos centros escolares que designaremos como colegio A y Colegio B.

El colegio A, corresponde a un centro escolar de la región de Valparaíso y su dependencia es municipal. Los estudiantes que rindieron el cuestionario cursan 8º año de educación básica, de los cuales 10 son mujeres y 17 hombres, la edad promedio de los estudiantes es 14 años. Es importante señalar de este grupo siete estudiantes asisten al programa de integración PIE[4].

El colegio B, corresponde a un centro escolar de la región de Valparaíso, en la provincia de Petorca y su dependencia es particular subvencionado. Los estudiantes que rindieron el cuestionario cursan 1° de enseñanza media, de los cuales 12 son mujeres y 16 hombres, la edad promedio de los estudiantes es de 14 años.

3.2 Cuestionario Exploratorio

Los estudiantes del 8º año básico y 1º año medio fueron escogidos para esta muestra, ya que se encuentran en un nivel donde comienza la transición del pensamiento aritmético al algebraico. Se elaboró una secuencia de enseñanza-aprendizaje que posibilite un acercamiento mayor y mejor a la adición y sustracción de expresiones algebraicas por parte de los alumnos de estos niveles.

[4] Proyecto de integración escolar (PIE) es una estrategia inclusiva del sistema escolar cuyo propósito es entregar apoyos adicionales (en el contexto del aula común) a los estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales (NEE), sean éstas de carácter permanente o transitorio.

Este grupo de estudiantes tiene nociones previas de operación en el conjunto de los números enteros y términos semejantes, pues es un objetivo propuesto por el currículo chileno vigente, que se debe abordar en séptimo año básico, en la primera unidad de Números y Álgebra.

Para la aplicación de este cuestionario exploratorio el grupo de alumnos no recibió previa ayuda u orientación, se mencionó que no era de carácter evaluativo, que respondieran según lo que recordaran.

El cuestionario exploratorio fue confeccionado a partir de los antecedentes que se han analizado en esta investigación y pretende recoger información de los obstáculos y errores de los estudiantes de 8º enseñanza básica y 1º año de enseñanza media, cuando identifican y reducen términos semejantes.

3.2.2 Preguntas y Objetivos del Cuestionario Exploratorio

Pregunta 1: ¿Qué valores puede tomar la variable "a"?

$$3 + a + a + a$$

***Objetivo**: Analizar el sentido que asignan los estudiante a la variable de la expresión algebraica.*

(Propuesta de Enseñanza del Álgebra Elemental mediante el Modelo 3UV)

Pregunta 2: ¿Se puede reducir la siguiente expresión algebraica?

$$3x + 7$$

***Objetivo**: Analizar los términos algebraicos y reducir la expresión algebraica si es posible.*

(Guía institucional colegio B)

Pregunta 3: Identifica los términos semejantes en las listas de expresiones siguientes:

Objetivo: *Identificar el concepto que asignan los estudiantes a términos semejantes.*

(Propuesta Ministerial)

a) $3x, -3y, -4x, x, -5y$

b) $2a^3, 15y^6, -4a^3, -y^6, 8y^6$

c) $u^2x^2, u^2v, -5vu^2, 7uv^2, 5x^2u^2$

Pregunta 4: Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

Objetivo: *Reducir expresiones algebraicas mediante adición y sustracción de términos semejantes.*

(Guía institucional colegio B)

a)$a + 4a + 7a + 10a =$

b) $3(x - 7) + 2(x + 3) =$

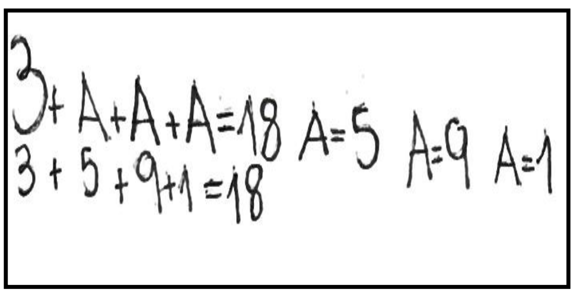
c) $4x + 3x^2 + 2x^2 + 7x =$

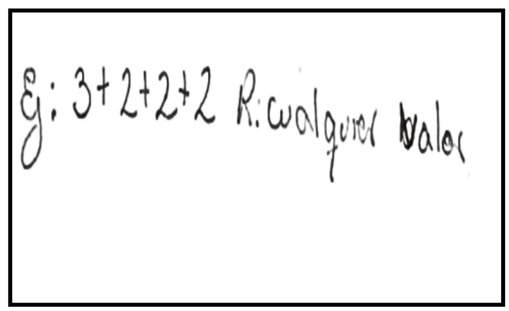
d)$z^2 + 6y^3 - 4z^2 - 5z^2 + 12y^3 + 20 + 2 =$

e) $ab + 7c^2d - 3ba + 2c^2d - 15ab + 9dc^2$

3.2.3 Resultados y Análisis

En la siguiente Tabla.2 se realizaran observaciones de los resultados obtenidos por los estudiantes de los colegios A y B, con el objeto de identificar los errores y dificultades que se presentan al trabajar en la identificación de términos semejantes y reducción de expresiones algebraicas.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 1
¿Qué valores puede tomar la variable “$\boldsymbol{a}$”?
$\boldsymbol{3+a+a+a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuestas</td></tr>
<tr><td>Colegio A


De un total 27 alumnos un 18.5% respondió correctamente esta pregunta.</td><td>Colegio B


Con respecto a la muestra de trabajo, sólo el 18% respondió correctamente de un total de 28 alumnos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observación
En esta pregunta se espera que los alumnos identifiquen que la variable “a” pueda tomar cualquier valor. Pero se observa que los alumnos le asignan diferentes números naturales a la incógnita “a” y para eso, utilizando tanteo para poder sumarlos, con la finalidad de encontrar erróneamente a esta expresión, un número concreto.</td></tr>
</table>

Pregunta 2

¿Se puede reducir la siguiente expresión algebraica?

$$3x + 4$$

Respuestas

Colegio A

$$\boxed{3x + 4 = 7}$$

Sólo un 11,7% respondió de forma correcta esta pregunta.

Colegio B

$$\boxed{3x + 4 = 7x}$$

Para esta pregunta el 14,5 % respondió de forma correcta.

Observación

En esta pregunta se espera que los estudiantes al analizar la expresión algebraica y a partir de sus conclusiones no logren la reducción que se pregunta en un inicio, pues no hay términos semejantes presentes.

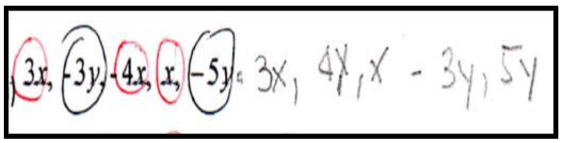
A partir de los resultados se observa que la dificultad radica en que relacionan la expresión con una suma aritmética común, pues suman una cifra numérica con un término algebraico, por consiguiente, no reconoce la incógnita como algo diferente a un número y por ende no pueden ser sumados, como se muestra en la imagen.

Pregunta 3

Identifica los términos semejantes en las listas de expresiones siguientes:

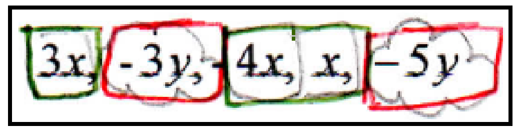
Respuestas
Ítem a

Colegio A



El porcentaje de alumnos que respondió correcto este ítem fue 87%.

Colegio B



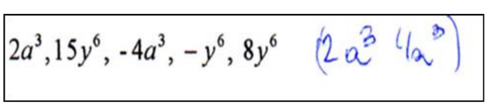
El porcentaje de respuesta correcta fue del 91%.

Observación

En esta pregunta para el primer ítem se esperaba que los estudiantes identificaran los términos semejantes, mediante variadas estrategias. En general respondieron de forma correcta, utilizando el subrayado o reescribieron los términos semejantes.

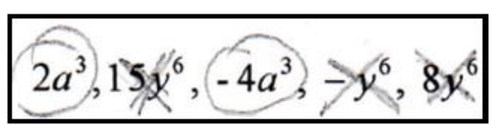
Respuestas
Ítem b

Colegio A



Para este ítem el 70% respondió de forma correcta.

Colegio B



El porcentaje de alumno que respondió correctamente este ítem fue de 93%.

Observación

El ítem b al igual que en el anterior se espera que reconozcan los términos semejantes, pero aumentando la dificultad al poner diversos exponentes a los términos algebraicos.
Los estudiantes no presentaron dificultades, una minoría perteneciente a 8º año básico solo reconoció un par de términos como se ve en la imagen.

Respuesta
Ítem c

Colegio A	**Colegio B**
$u^2x^2, u^2v, -5vu^2, 7uv^2, 5x^2u^2 = u^2x^2+5x^2u^2 = u^2v-5vu^2+7uv^2$	$u^2x^2, u^2v, -5vu^2, 7uv^2, 5x^2u^2$
En este ítem los estudiantes no lograron el objetivo propuesto, solo 23.6% contesto de forma correcta.	En este ítem a pesar de mostrar ciertas dificultades al trabajar, logran responder del total de 28 alumnos el 66,3% de manera correcta.

Observación

Para el Ítem c la complejidad fue poner términos algebraicos donde sus coeficientes literales tuvieran más de una letra y de forma desordenada.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 4

Reduce las siguientes expresiones algebraicas:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuestas
Ítem a</td></tr>
<tr><td>Colegio A

$a + 4a + 7a + 10a = 22a^4$

El porcentaje de estudiantes que respondieron de forma correcta fue 72.7%</td><td>Colegio B

$a + 4a + 7a + 10a = 22a$

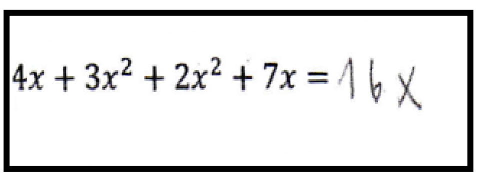
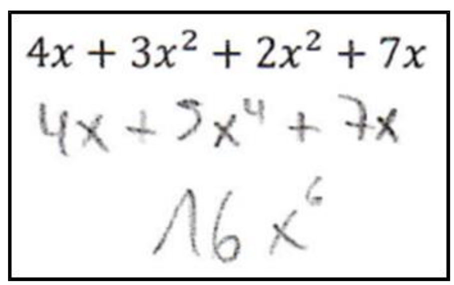
El porcentaje de alumno que respondió correctamente este ítem fue de 80,1%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observación

Para esta pregunta se esperaba que los estudiantes realizar reducción de expresiones algebraicas mediante adición y sustracción de términos semejantes. Para el primer ítem los estudiantes respondieron la gran mayoría de forma correcta y solo algunos como se observa en la imagen utilizaron de forma incorrecta propiedades de las potencias.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuestas
Ítem b</td></tr>
<tr><td>Colegio A

$3(x+7)+2(x+3)$
$3x+10+2x+5$
$5x+15$
$20x$</td><td>Colegio B

$3(x+7)+2(x+3)$
$3x+7+2x+3$
$10x+2x+3$
$12x+3$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Los resultados correctos para esta pregunta fueron 7,4 %, es decir solo dos estudiantes respondieron correctamente.</td><td>A partir de los resultados, se observa que sólo el 21,8% aproximadamente respondió correctamente, es decir un total de 6 respuestas correctas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observación

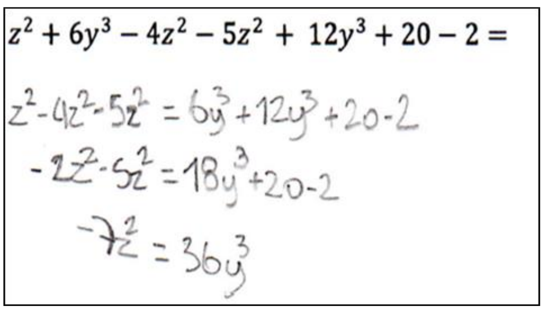
De este ítem se espera que los alumnos logren reducir la expresión algebraica, aplicando en un inicio la propiedad distributiva.
Se evidencia a través de los resultados, que hay uso incorrecto de la propiedad distributiva y errores evidente en la reducción de términos semejantes como se muestra en la imagen, pues suma términos algebraicos con cifras numéricas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuesta
Ítem c</td></tr>
<tr><td>Colegio A

Mediante lo observado solo un 10,8% respondió de forma correcta esta pregunta.</td><td>Colegio B

A partir de los resultados, se evidencia que el porcentaje que responde correctamente corresponde sólo 27,2% aproximadamente, es decir sólo 7 respuestas correcta de un total de 28 alumnos.</td></tr>
</table>

Observación

Se espera lograr en este ejercicio que los alumnos logren reducir la expresión algebraica, identificando los términos semejantes correctamente.
Se evidencia en el resultado del ejercicio errores al trabajar con términos semejantes, donde reducen incorrectamente. Además dan como respuesta un único número en vez de varios términos.

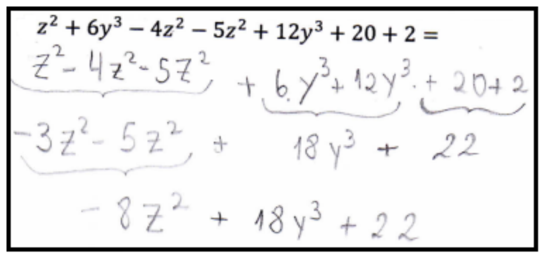
Respuesta
Ítem d

Colegio A


$z^2 + 6y^3 - 4z^2 - 5z^2 + 12y^3 + 20 - 2 =$
$z^2 - 4z^2 - 5z^2 = 6y^3 + 12y^3 + 20 - 2$
$-2z^2 - 5z^2 = 18y^3 + 20 - 2$
$-7z^2 = 36y^3$

Para este ítem el porcentaje de respuestas correctas fue 16,3%

Colegio B

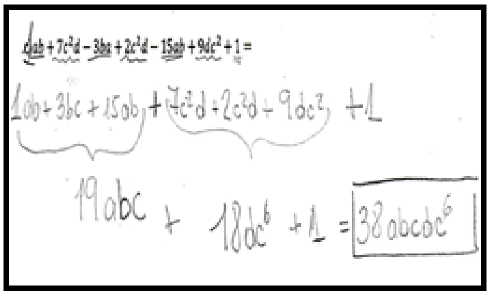

$z^2 + 6y^3 - 4z^2 - 5z^2 + 12y^3 + 20 + 2 =$
$z^2 - 4z^2 - 5z^2 + 6y^3 + 12y^3 + 20 + 2$
$-3z^2 - 5z^2 + 18y^3 + 22$
$-8z^2 + 18y^3 + 22$

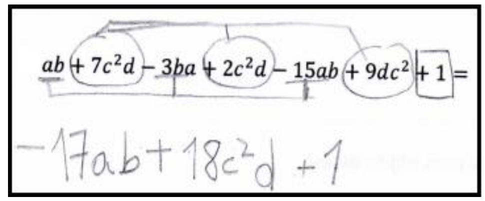
El porcentaje de alumno que respondió correctamente este ítem fue de 42,8%

Observación

El ítem d el objetivo de reducir expresiones algebraicas se aumentó su dificultad, ya que los términos algebraicos tenían exponentes.

Los alumnos de ambos colegios presentan dificultades en la reducción, pues no identificaron términos semejantes o asociaron a ecuaciones para resolver como se expone en la imagen del Colegio A. En el colegio B sólo 12 alumnos

<table>
<tr><td colspan="2">de un total de 28 respondieron de manera correcta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Respuestas
Ítem e</td></tr>
<tr><td>Colegio A


Para esta pregunta el 7,2 % respondió de forma correcta.</td>
<td>Colegio B


En esta pregunta sólo el 32,1 % respondió de manera correcta.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observación
En el último ítem se esperaba que los estudiantes redujeran cuando los términos semejantes estuvieran compuestos por más de una letra y con distintos exponentes.
Los alumnos de ambos colegios casi en su totalidad no lograron el objetivo, es más nuevamente asociaron algunos a ecuaciones o aplicaron incorrectamente las propiedades de potencias.</td></tr>
</table>

Tabla.2

3.2.4 Conclusiones de resultados cuestionario exploratorio

De los resultados obtenidos del cuestionario exploratorio expuestos anteriormente en la Tabla 1, se observa diversas dificultades por parte de los estudiantes al enfrentarse a problemas algebraicos que se repiten constantemente, tales como, problemas con la interpretación de la variable y su significado, errores en la identificación de términos semejantes y por lo tanto en la reducción de ellos, errores en la manipulación de paréntesis asociados a la propiedad distributiva, como también se evidencia la necesidad de cerrar o clausurar la expresión algebraica.

Ahora bien el análisis de los resultados, permitió evidenciar diferentes errores ligados a la adición y sustracción de expresiones algebraicas, pero nos centraremos en la necesidad que sienten los alumnos de clausurar, estos ven las expresiones algebraicas como enunciados que, a veces, son incompletos. Por lo tanto suman o restan términos que no son semejantes de manera de obtener como resultado un solo término en expresiones donde hay términos distinto, ya que sienten la necesidad de completar o de cerrar la expresión.

Es por esto, que esta dificultad toma gran relevancia, ya que se encuentra asociada directamente, con los conocimientos previos que los alumnos han adquirido correctamente en las operaciones aritméticas, estos son suma y resta de números enteros, pero que al adaptar ese conocimiento a álgebra resulta erróneo, por lo tanto al no ser superado reaparece constantemente, dificultad categorizada según Brousseau como obstáculo.

3.3 Elaboración Secuencia

Esta secuencia de aprendizaje ha sido diseñada considerando las fases de la Teoría de Situaciones didácticas, estas son: fase de acción, fase de formulación, fase de validación y fase de institucionalización.

Esta secuencia de aprendizaje tiene como objetivo general que los alumnos logren identificar y reducir términos semejantes de manera correcta, a través del manejo de material concreto por los estudiantes, para que se interioricen en los conceptos a enseñar, a partir de esta manipulación. Es importante señalar además que la utilización de material concreto propiciando una fuente de actividad creativa, significativa y educativa, logrando mantener el interés de aprender de los estudiantes. Ahora bien, acerca de las distintas dificultades que presenta el aprendizaje del álgebra, esta actividad trata específicamente de superar el error categorizado como obstáculo de la necesidad de clausurar innecesariamente expresiones algebraicas por parte de los alumnos, lo que ocasiona errores en la manipulación de términos semejantes. Lo anterior se considera una de las dificultades más relevantes que reaparece continuamente, donde no logran obtener las herramientas necesarias en esta área, obstruyendo la adquisición adecuada del álgebra.

La secuencia de aprendizaje está compuesta de tres situaciones donde se espera que alumnos se enfrenten a desafíos relacionados con la adquisición del concepto de términos semejantes en su primer acercamiento. En la primera situación se resolverán actividades lúdicamente involucradas con elementos cotidianos. En la segunda se considera como la continuación directa de la situación anterior en donde se trabajará con ayuda de material concreto para su manipulación, mientras que la tercera situación consta de preguntas que medirán el nivel de logro de las dos situaciones anteriores ya realizada por los alumnos.

El establecimiento designado para la aplicación de esta secuencia de aprendizaje, está localizado V región en la comuna de Quilpué, se caracteriza por ser un colegio municipal, donde sus estudiantes pertenecen a un contexto vulnerable , provenientes en su mayoría a la periferia de la ciudad.

Los estudiantes del Colegio A respecto a sus niveles de aprendizaje tomando como base puntajes obtenidos en los últimos SIMCE[5], se encuentran bajo con colegios similares, agregar que en la asignatura de matemáticas el nivel de aprendizaje es 39,3 % elemental y 50 % insuficiente, lo que significa que no logran demostrar consistentemente que han adquirido los conocimientos y las habilidades más elementales estipulados en el currículo vigente. En particular este curso es disruptivo, regularmente la práctica docente es de carácter expositiva, por tanto, es de nuestro interés observar si al dar un enfoque lúdico a la matemática sus aprendizajes acerca de álgebra puedan ser adquiridos de forma significativa.

A continuación se presenta las tres situaciones diseñadas con sus respectivas actividades.

[5] Agencia de Calidad de la Educación, Informe de Resultados de Aprendizaje Simce 8° Básico 2014 para Docentes y Directivos. Editado 2015.

3.3.1 Secuencia Didáctica

Situación Nº1

Objetivo: identificar términos semejantes

Tiempo estimado: 90 minutos

Materiales:

- Una hoja con las instrucciones por grupo
- Una hoja con las preguntas a responder
- Una caja por grupo con sus respectivos elementos a utilizar
- Lápices
- Una hoja de cartulina para anotar respuestas

Actividad Nº1

❖ *Instrucciones:* Responder cada pregunta a partir de los elementos que tienen en cada caja.

1. Haz una lista y anota uno por uno los objetos de la caja.
2. Piensa en una forma de ocupar menos tiempo en hacer la lista y anótalo
3. Anota tus conclusiones, lo más reducido que se pueda lograr

Actividad Nº2

❖ *Instrucciones:* Unirse de dos grupos según lo designe la profesora.

1. Observa los elementos en común y agrúpalos.
2. ¿Qué estrategia utilizaste para unir los elementos de ambos grupos? Escríbelos.
3. ¿Qué elementos se pueden unir? ¿Por qué? Anota tus conclusiones.
4. Como grupo, ¿Qué aprendieron?

Análisis a priori situación Nº1

Actividad Nº1

A continuación se presentan las posibles respuestas por parte de los alumnos de la actividad N°1.

1. Haz una lista y anota uno por uno los objetos de la caja.

Objetivo: Identificar elementos de la caja.

Estrategia 1: Los alumnos toman cada elemento de la caja y a medida que salen, anotan uno por uno cada objeto con su respectivo nombre, haciendo una lista. Otros podrían seguir la misma idea, pero antes de anotarlos, juntan todo los objetos iguales y luego los escriben ordenadamente. Como se muestra en el siguiente ejemplo:

Elementos de la caja	Elementos de la ordenados		
- Pelota	- Cole	- Pelota	- Dinosaurio
- Dinosaurio	- Cole	- Pelota	- Dinosaurio
- Cole	- Cole	- Pelota	- Dinosaurio
- Pelota	- Cole	- Pelota	- Dinosaurio
- Cole	- Cole		
- Dinosaurio			
- Dinosaurio			
- Cole			
- Pelota			
- Dinosaurio			
- Cole			
- Cole			
- Pelota			

Estrategia 2: Los alumnos juntan los elementos similares de la caja, separan los diferentes y luego hacen una lista anotando la cantidad de elementos según esa clasificación Ej: $4\ dinosaurios, 5\ coles, 4\ pelotas$

Estrategia 3: Los alumnos cuentan todos los elementos y escriben la cantidad total de objetos existentes en la caja sin importar sus diferencias.(errónea) Ej: $13\ objetos\ de\ la\ caja$

Estrategia 4: Los alumnos agrupan y hacen una lista, según los colores en común que caracteriza cada elemento en la caja, dejando de lado sus distintas naturalezas.(errónea) Ej: $3\ objetos\ rojos, 4\ objetos\ naranjos, 6\ objeto\ amarillo$

Estrategia 5: Los alumnos escriben, solo los nombres correspondiente a cada elemento de la caja obviando la cantidad que hay de cada cosa. (errónea) Ej: $dinosaurios, coles, pelotas$

2. **Piensa en una forma de ocupar menos tiempo en hacer la lista y anótalo**

Objetivo: Analizar términos semejantes y generalizar mediante abreviaciones de palabras.

Estrategia 1: Los alumnos analizan formas para encontrar una respuesta, ellos agrupan los elementos iguales y para abreviar la lista, utilizan la inicial del nombre de cada objeto. Ej: $4d, 5c, 4p$

Estrategia 2: Los alumnos dialogan para encontrar una respuesta para eso cuentan y suman los elementos parecidos que hay en la caja y los anota indicando la cantidad junto con su respectivo nombre.

Estrategia 3: Los estudiantes toman los objetos, juntan los iguales para luego sumarlos, escriben la cantidad de elementos similares y en vez de anotar su nombre completo, acortan su nombre. Ej: $4\ din, 5\ col, 4\ pel$

Estrategia 4: Los alumnos se ponen de acuerdo en cómo ocupar menos tiempo en escribir la lista, los estudiantes agrupan los objetos similares y dibujan en miniatura el objeto correspondiente indicando su cantidad.

Estrategia 5: Los estudiantes, identifican los objetos diferentes y escribe su nombre de manera reducida o anotan solo la inicial dejando de lado su cantidad, (errónea) Ej: $din, col, pel \quad o \quad d, c, p$

Estrategia 6: En el caso que en la caja existan elementos que comiencen sus nombres con la misma inicial, los alumnos en su intento por abreviar la lista, suman la cantidad de elementos que empiecen con la misma letra y los anotan.

3. **¿Podrás abreviar aún más? Anota tus conclusiones, lo más reducido que se pueda lograr**

Objetivo: Argumentar y explicar respuestas.

Estrategia 1: Los alumnos explican sus conclusiones, los que no abreviaron lo máximo posible en la pregunta anterior, podrían anotar la lista de esta manera:

Ej: $4d, 5c, 4p$

Estrategia 2: Los alumnos que ya redujeron lo más posible en la pregunta anterior, indicarán que no se puede reducir aún más.

Actividad Nº2

A continuación se presenta posibles respuestas por parte de los alumnos de la actividad N°2.

1. **Observa los elementos en común y agrúpalos.**

Objetivo: Agrupar material concreto de las dos cajas para reducir términos semejantes.

Estrategia 1: Los alumnos juntan los elementos de los dos grupos, los agrupan según su similitud, y los enlistan nuevamente, denotándolos con la inicial del nombre del objeto más la cantidad.

Estrategia 2: Los alumnos agrupan el total de elementos de los dos grupos, los clasifican para luego anotarlos con su nombre indicando la cantidad.

Estrategia 3: Los alumnos sin tomar importancia a las diferencias de los objetos, anotan solo la cantidad numérica obviando su denotación. (errónea) Ej:$50\ objetos\ en\ total$

2. **¿Qué estrategia utilizaste para unir los elementos de ambos grupos? Escríbelos.**

Objetivo: Argumentar y explicar respuestas obtenidas.

Estrategia 1: Los alumnos explican sus estrategias, esto es, cuentan y suman los elementos en común entre los dos grupos fusionados, los anotan en una lista y los demás objetos diferentes los anotan aparte.

Estrategia 2: Los alumnos escriben la forma en que llegaron a su respuesta, esto es: suman todos los elementos totales entre los dos grupos y anotan solo la cantidad sin diferenciarlos entre sí. (errónea)

Estrategia 3: Los alumnos agrupan los elementos de las dos cajas y los agrupan por colores anotándolos de esta manera sin importar ninguna otra diferencia. (errónea)

3. ¿Qué elementos se pueden unir? ¿Por qué? Anota tus conclusiones.

Objetivo: Concluir y sintetizar respuestas obtenidas.

Estrategia 1: Los alumnos podrían responder lo siguiente:

- Podemos unir solo los elementos que son iguales.
- No podemos juntar elementos diferentes porque no tienen nada en común.

***4.* Como grupo, ¿Qué aprendieron?**

Objetivo: Relacionar y generalizar las abreviaciones de palabras, con el concepto de términos semejantes.

Estrategia 1: Los alumnos podrían responder:

- Ha identificar elementos similares.
- Juntar elementos de distintos grupos que son semejantes.
- Que no debemos juntar elementos que son diferentes, pues no tienen nada en común.

Situación Nº2

Objetivo:

- Representar mediante figuras términos algebraicos.
- Reducir términos semejantes

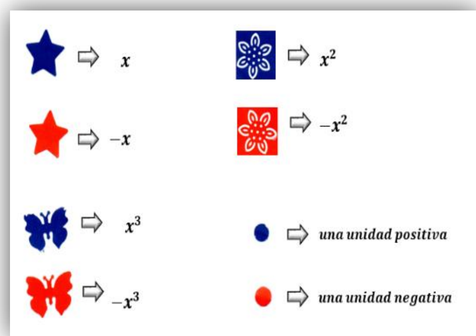
Tiempo estimado: 90 minutos

Materiales:

- Una hoja con las instrucciones por grupo
- Una hoja con las preguntas a responder
- Imagen proyectada en la pizarra
- Pegamento
- Una hoja blanca para anotar respuestas

Actividad Nº1

❖ *Instrucciones:* Responder cada pregunta a partir de los elementos que mostrará la profesora en la pizarra.



1. Representar con las figuras de cartulinas entregadas, cada expresión que se muestran a continuación y péguelas debajo de cada término según corresponda.

a) $x + 3x$

b) $4x - 2x^2 + x^2$

c) $2x^2 - 3x^3 - 4x + 1 - 2$

d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

2. ¿Qué observas con respecto a las figuras? ¿Cómo se relaciona las figuras con la expresión matemática? Anota tus conclusiones.

Actividad Nº2

❖ *Instrucciones:* Junto con tus compañeros de equipo desafía a otro grupo.

1. A través de las figuras anteriores (estrella, mariposa, flor y puntos) escribe una expresión algebraica en el papel entregado por la profesora y que el otro equipo adivine la expresión.
2. A continuación, desafía al otro grupo cambiando las hojas y adivina la expresión algebraica. ¿Adivinaron la expresión? ¡Averigüemos como le fue al otro equipo!

Actividad Nº3.

1. Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones con la ayuda las figuras (estrellas, mariposas, flores y puntos). Escriba el resultado obtenido y represéntelo pegando las figuras.

   a) $2x^2 + 3x^2 =$

   b) $x^3 - 4x^3 + x^3 =$

   c) $4x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 2 =$

2. Finalmente ¿Qué se puede concluir de las actividades anteriores?

Análisis a priori situación Nº2

Actividad N° 1

A continuación se presentan las posibles respuestas por parte de los alumnos de la actividad N°1.

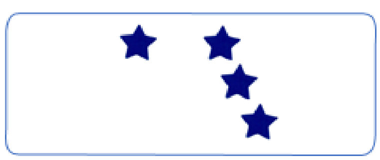
1. **Representar con las figuras de cartulinas entregadas, cada expresión que se muestran a continuación y péguelas debajo de cada término según corresponda.**

Objetivo: Representar mediante figuras términos algebraicos.

Ítem a

a) $x + 3x$

Estrategia 1: Los alumnos toman las figuras que representan los términos algebraicos e identifican correctamente cada parte de la expresión con su figura y color respectivo. Luego, pegan las figuras según la cantidad que indica la expresión. Como se observa a continuación:

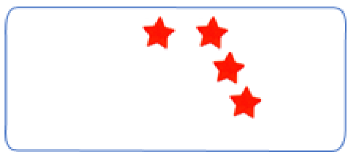


Estrategia 2: Los alumnos identifican correctamente a la letra con su figura correspondiente. Luego proceden a pegar debajo de la expresión la figura junto con el coeficiente numérico. Como se observa a continuación:

Estrategia 3: Los alumnos identifican correctamente cada figura con los términos y luego representan la expresión de manera escrita relacionándola con las figuras. Como se muestra a continuación:

Una estrella azul más tres estrellas azules.

Estrategia 4: Los alumno identifican incorrectamente las figuras con cada término, donde representan con el color contrario la expresión algebraica. Como se muestra a continuación (Errónea):



Estrategia 5: Los alumnos identifican cada término de la expresión algebraica con su figura respectiva y luego escriben la expresión que se presenta. Como se muestra a continuación:

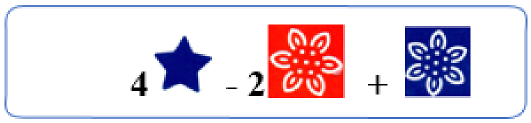
1 estrella azul 3 estrellas azules.

Ítem b

b) $4x - 2x^2 + x^2$

Estrategia 1: Los alumnos toman las figuras que representan los términos algebraicos e identifican correctamente al término con su color y figura correspondiente. Luego, pegan las figuras debajo de la expresión algebraica con la cantidad de figuras que se indican. Como se muestra a continuación:

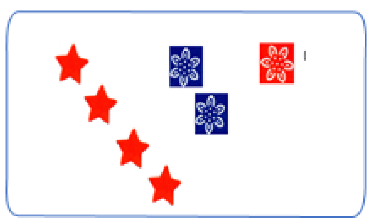
Estrategia 2: Los alumnos identifican correctamente al término algebraico con su figura y color correspondiente. A continuación, pegan debajo de la expresión la figura junto con el coeficiente numérico del término algebraico que corresponda. Como se observa a continuación:



Estrategia 3: Los alumnos identifican cada figura y color con los términos algebraicos de la expresión. Luego escriben la expresión relacionándola con las figuras. Como se muestra a continuación:

Cuatro estrellas azules menos dos flores rojas más más una flor azul.

Estrategia 4: Los alumnos representan con el color contrario la expresión algebraica. Como se muestra a continuación (Errónea):



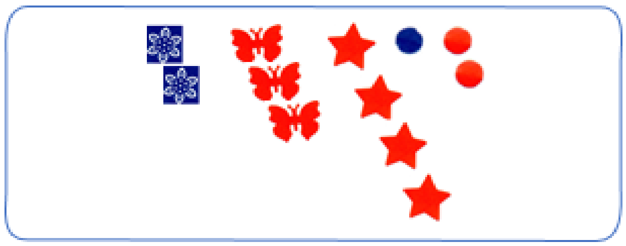
Estrategia 5: Los alumnos identifican cada término de la expresión algebraica con su figura respectiva y luego escriben la expresión que se presenta. Como se muestra a continuación:

Cuatro estrellas azules menos dos flores rojas más más una flor azul.

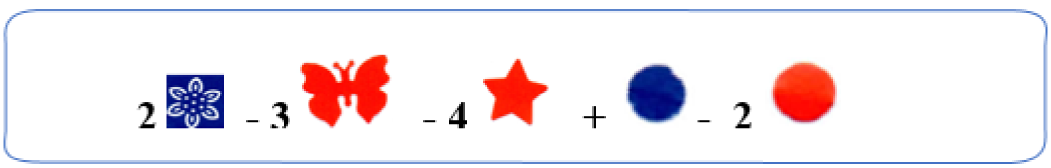
Ítem c

c) $2x^2 - 3x^3 - 4x + 1 - 2$

Estrategia 1: Los alumnos representan correctamente con el color y figura la expresión algebraica. Como se observa a continuación:



Estrategia 2: Los alumnos identifican correctamente a la letra con su figura y color correspondiente, pegando debajo de la expresión la figura junto con el coeficiente numérico. Como se observa a continuación:



Estrategia 3: Los alumnos identifican cada figura con los términos y luego escriben la expresión relacionándola con las figuras. Como se muestra a continuación:

Dos flores azules menos tres mariposas rojas menos cuatro estrellas rojas más un puntito azul menos dos puntitos rojos.

Estrategia 4: Los alumno identifican incorrectamente las figuras con cada término, donde representan con el color contrario la expresión algebraica. Como se muestra a continuación (Errónea):

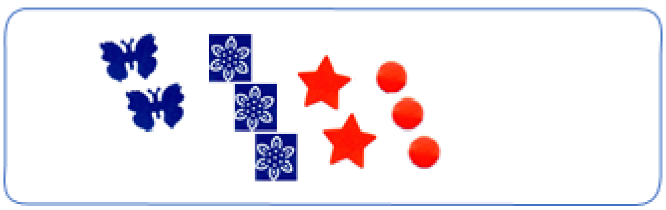
Estrategia 5: Los alumnos identifican cada término de la expresión algebraica con su figura respectiva y luego escriben la expresión que se presenta. Como se muestra a continuación:

2 flores azules 3 mariposas rojas 4 estrellas rojas 1puntito azul 2 puntitos rojos.

Ítem d

d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

Estrategia 1: Los alumnos representan correctamente con el color y figura la expresión algebraica. Como se observa a continuación:

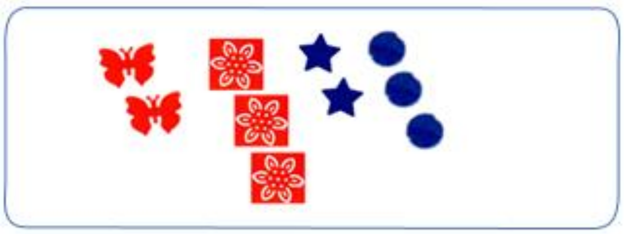


Estrategia 2: Los alumnos identifican correctamente a la variable con su figura y color correspondiente junto con el coeficiente numérico. Como se observa a continuación:

Estrategia 3: Los alumnos identifican cada figura con los términos y luego escriben la expresión relacionándola con las figuras. Como se muestra a continuación:

Tres mariposas azules más tres flores azules menos dos estrellas rojas menos tres puntitos rojos.

Estrategia 4: Los alumno identifican incorrectamente las figuras con cada término, donde representan con el color contrario la expresión algebraica. Como se muestra a continuación (Errónea):



Estrategia 5: Los alumnos identifican cada término de la expresión algebraica con su figura respectiva y luego escriben la expresión que se presenta. Como se muestra a continuación:

3 mariposas azules   3 flores azules   2 estrellas rojas   3 puntitos rojos.

2. ¿Qué observas con respecto a las figuras? ¿Cómo se relaciona las figuras con la expresión matemática? Anota tus conclusiones.

Objetivo: Argumentar y concluir las respuestas.

Estrategia 1: Los alumnos podrían responder lo siguiente:

- Se observa que hay dos tipos de figuras y que ambas se representan por dos colores diferentes, en este caso es el azul y el rojo.

- Se observa que las figuras azules son términos positivos y las figuras rojas son términos negativos.
- Se observa que cada figura representa un término que es parte de una expresión algebraica.
- Las expresiones matemáticas se representan a través de diferentes cantidades de figuras, donde el número me indica cuantas figuras debo utilizar.

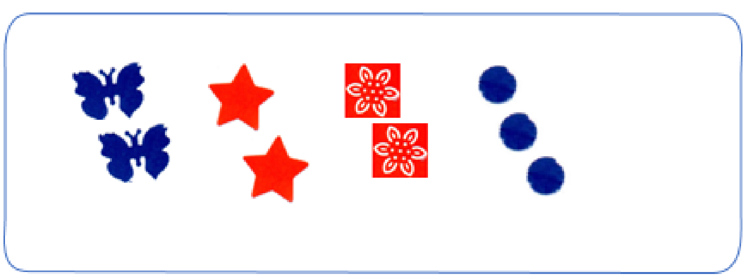
Actividad N° 2

A continuación se presenta una posible respuesta por parte de los alumnos de la actividad N° 2.

1. **A través de las figuras anteriores (estrella, mariposa, flor y puntos) escribe una expresión algebraica en el papel entregado por la profesora y que el otro equipo adivine la expresión.**

Objetivo: Representar mediante figuras términos algebraicos.

Posible ejemplo de un grupo de estudiantes:



Estrategia 1: Los alumnos identifican cada término algebraico con la figura y color correctamente. Luego, exponen frente al curso la expresión adivinada que representa las figuras entregadas por sus compañeros.

$$x^3 + x^3 - x - x - x^2 - x^2 + 1 + 1 + 1$$

Estrategia 2: Los alumnos identifican las figuras y el color con la expresión algebraica correctamente y luego reducen los términos semejantes, es decir aplican la suma y resta respetando los signos para cada término, llegando a una expresión algebraica reducida, como se muestra a continuación:

$$2x^3 - 2x{-}2x^2 + 3$$

Estrategia 3: Los alumnos representan con el color contrario cada término de la expresión algebraica.

$$-x^3 - x^3 + x + x{+}x^2{+}x^2 - 1 - 1 - 1$$

Estrategia 4: Los alumnos representan con el color contrario cada término de la expresión algebraica. Luego, reducen obteniendo una expresión algebraica errónea (Errónea).

$$-2x^3 + 2x{+}2x^2 - 3$$

Estrategia 3: Los alumnos identifican cada término algebraico con su figura y color correspondiente, pero asocian a conocimientos de potencias erróneos. Es decir, reducen término que representa una misma figura, pero luego suman incorrectamente los exponentes de una misma figura (Errónea).

$$2x^6 - 2x^2{-}2x^4 + 3$$

Actividad N° 3

A continuación se presenta posibles respuestas por parte de los alumnos de la actividad N° 3.

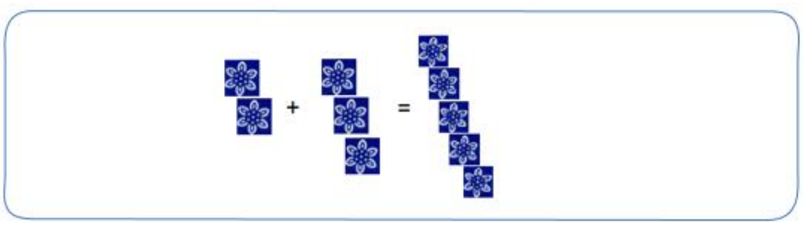
1. **Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones con la ayuda las figuras (estrellas, mariposas, flores y puntos). Escriba el resultado obtenido y represéntelo pegando las figuras.**

Objetivo: Caracterizar y reducir expresiones algebraicas de forma pictórica.

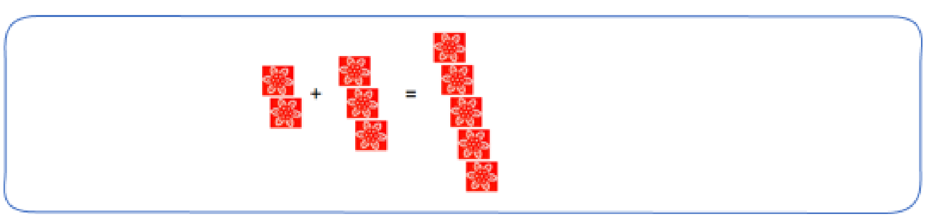
Ítem a

a) $2x^2 + 3x^2 =$

Estrategia 1: Los alumnos identifican correctamente la expresión algebraica con el color y figura correspondiente, pegando cada figura debajo de la expresión algebraica. Luego, reducen los términos semejantes y logran obtener la expresión algebraica, a través de la figura de flores azules. Como se muestra a continuación:

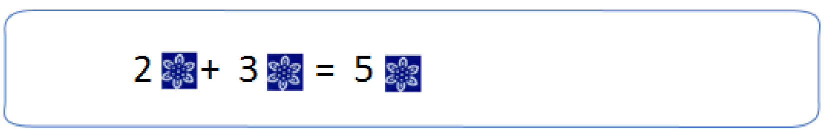


Estrategia 2: Los alumnos representan con el color contrario la expresión algebraica, identificando con la flor de color rojo cada término algebraico. Como se muestra a continuación (Errónea):

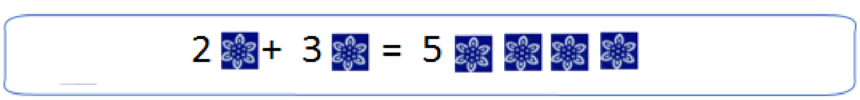


Estrategia 3: Los alumnos identifican correctamente la figura y color con la parte literal del término algebraico y representan la expresión algebraica de una manera más reducida, donde los alumnos pegan la figura junto con el coeficiente numérico.

Estrategia 4: Los alumnos identifican de manera correcta cada término algebraico con su figura y color correspondiente. Luego reducen los términos que representan la misma figura y mismo color, es decir, suma las mismas figuras de color azul y restan las mismas figuras de color rojo.



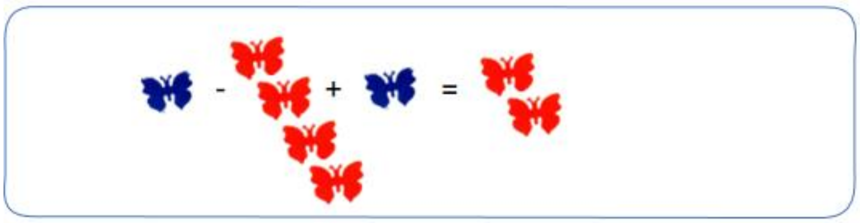
Estrategia 5: Los alumnos representan los términos algebraicos con cada figura y color correspondiente, pero al reducir la expresión se asocia a potencias de manera incorrecta. Reducen los coeficientes numéricos y además suman los exponentes de cada término algebraico, obteniendo así una expresión algebraica, como se muestra a continuación (Errónea).



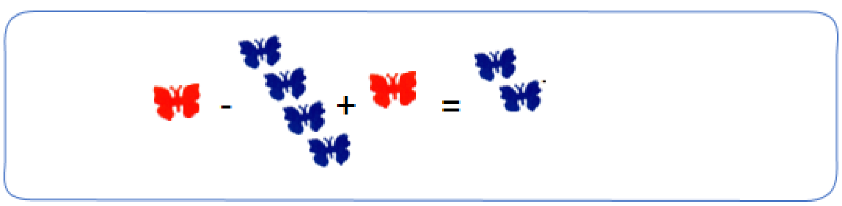
Ítem b

b) $x^3 - 4x^3 + x^3 =$

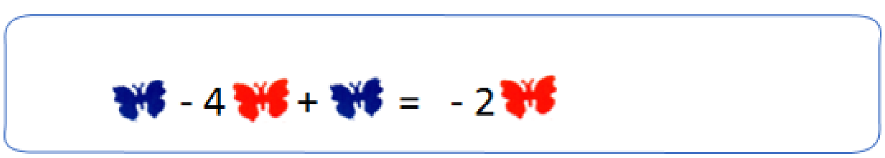
Estrategia 1: Los alumnos representan la expresión algebraica con su color y figura correspondiente.



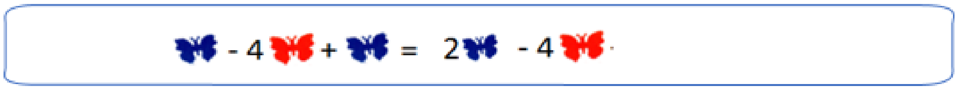
Estrategia 2: Los alumnos representan con el color contrario cada término de la expresión algebraica (Errónea).



Estrategia 3: Los alumnos representa de manera reducida la expresión algebraica, donde escriben el coeficiente numérico junto con la figura que representa la parte literal.



Estrategia 4: Los alumnos identifican de manera correcta los términos algebraico con su figura y color correspondiente y luego reducen la expresión algebraica, donde solo agrupan las mismas figuras del mismo color.

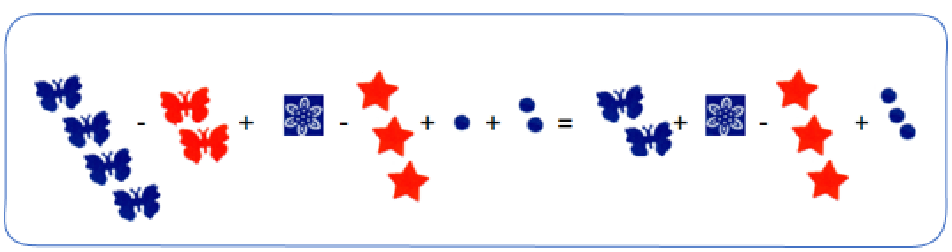


Estrategia 5: Los alumnos representan la expresión algebraica con la figura y color que corresponde, reducen los coeficientes numéricos y además suman los exponentes de cada término algebraico, obteniendo así una expresión algebraica (errónea), como se muestra a continuación.

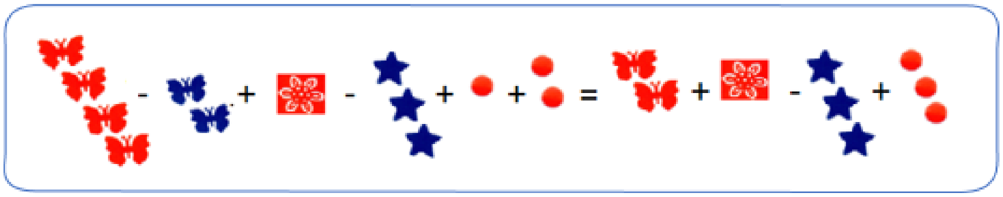
Ítem c

c) $4x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 2 =$

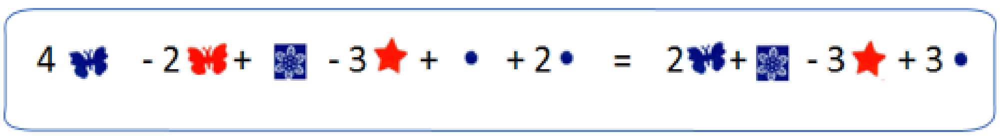
Estrategia 1: Los alumnos reducen la expresión algebraica, que se identificó con la figura y color de manera correcta.



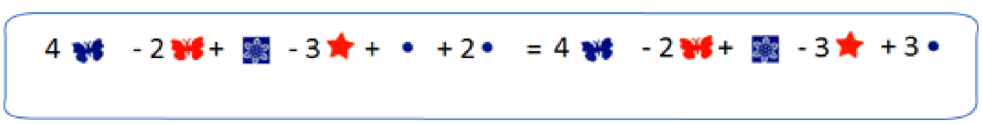
Estrategia 2: Los alumnos representan la expresión algebraica con las figuras y colores contrarios, donde se obtiene la reducción de la expresión algebraica (errónea), como se muestra a continuación.



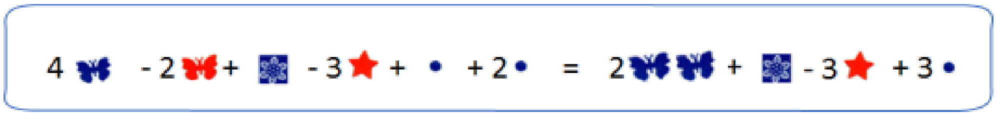
Estrategia 3: Los alumnos representa de manera reducida la expresión algebraica, donde escriben el coeficiente numérico junto con la figura que representa la parte literal.



Estrategia 4: Los alumnos identifican de manera reducida la expresión algebraica y luego reducen los términos semejantes, donde solo agrupan las mismas figuras del mismo color.



Estrategia 5: Los alumnos identifican de manera reducida la expresión algebraica y luego reducen los coeficientes numéricos, donde además suman los exponente de cada término algebraico (erróneo), como se muestra a continuación:



2. Finalmente ¿Qué se puede concluir de las actividades anteriores?

Objetivo: Discutir y concluir respuestas obtenidas.

Estrategia 1: Los alumnos podrían responder:

- Podemos sumar o restar solo las figuras iguales.
- Una expresión puede dar como resultado varios términos.
- Si las figuras en su forma no son iguales no debo juntarlas.
- Si las figuras no son iguales en su color no debo juntarlas. (Error)
- Cuando reduzco las figuras a través de la suma o resta, también debo sumar sus exponentes. (Error)

Situación Nº3

Objetivo:

- Demostrar que comprenden términos semejantes de manera pictórica y simbólica.
- Establecer diversas estrategias para reducir términos semejantes.

Tiempo Estimado: 30 Minutos.

Materiales:

- Una hoja con las preguntas a responder.
- Lápiz
- Lápices de colores
- Goma

Actividad Nº1

❖ Instrucciones: Responder cada pregunta de forma limpia y ordenada.

1. Observa las siguientes imágenes e identifica los objetos similares.

a) 

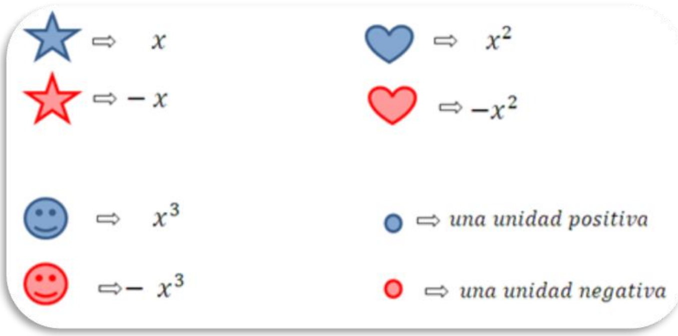
b) 

2. Identifica los términos semejantes de las siguientes listas.

a) $6b \quad 5x^2 \quad 4x^6 \quad \frac{b}{2} \quad x^2 \quad 2e$

b) 6^3 $2y$ $3y^2$ 6^2 y $5y^8$

3. Dadas las siguientes imágenes y sus representaciones, simboliza cada una de las expresiones algebraicas y redúcelas.



a) $2x^2 + 3x^2 =$

b) $x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 =$

4. Reduce los términos semejantes

a) $a + 2b + 2a + b + 2c =$

b) $6f^2 + 3f - 2f =$

c) $4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m =$

Análisis a priori situación Nº3

Actividad Nº1

A continuación se presentan las posibles respuestas por parte de los alumnos de la actividad de la actividad N°1

1. Observa las siguientes imágenes e identifica los objetos similares.

Objetivo: Identificar figuras análogas como estrategia para asociar al concepto de termino semejante.

Ítem a

Estrategia 1: Los alumnos encierran o subrayan de formas diferentes los elementos similares.

Estrategia 2: Los alumnos reagrupan las imágenes, dibujando nuevamente las figuras similares.

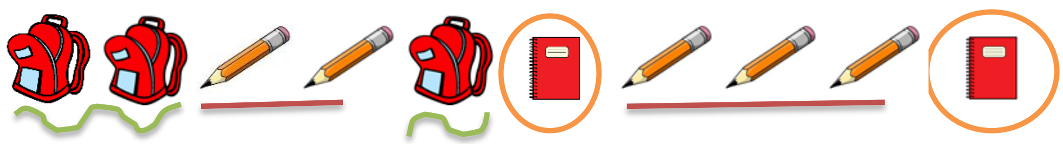
Estrategia 3*:* Escriben aquellos elementos que son similares y los contabilizan. Ej.: 5 estrellas, 5 corazones.

Estrategia 4: Los alumnos se fijan en los colores de las figuras para identificar los elementos similares (Errónea)

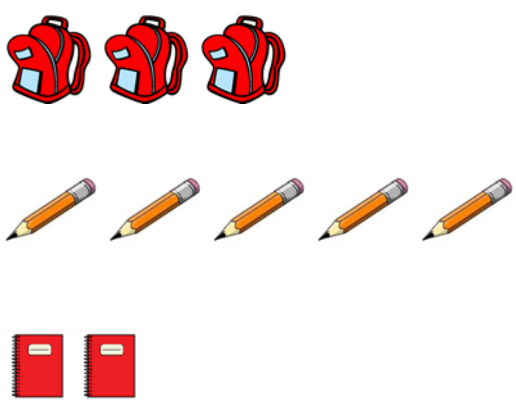
Estrategia 5: Escriben los elementos similares pero guiándose por los colores. Ej.:10 corazones y caras azules, 3 estrellas rojas.

Ítem b

Estrategia 1: Los alumnos encierran o subrayan de formas diferentes los elementos similares.



Estrategia 2: Los alumnos reagrupan las imágenes, dibujando nuevamente las figuras similares.



Estrategia 3: Escriben aquellos elementos que son similares y los contabilizan. Ej.:3 mochilas, 2 cuadernos.

Estrategia 4: Los alumnos explican que todos los elementos son similares ya que son útiles escolares (Errónea).

Estrategia 5: Los alumnos se fijan en los colores de las figuras para identificar los elementos similares (Errónea) Ej. : 5 mochilas y cuadernos rojos.

2. Identifica los términos semejantes de las siguientes listas.

Objetivo: Identificar términos semejantes.

Los ejercicios de esta pregunta fueron extraídos Texto del estudiante 7º Básico Matemática, editorial Galileo. Pág.58.(Texto entregado por el Ministerio de Educación)

Ítem a

Estrategia 1: Los alumnos encierran o subrayan los términos algebraicos semejantes:

$6b \quad 5x^2 \quad 4x^6 \quad \frac{b}{2} \quad x^2 \quad 2e$

Estrategia 2: Los alumnos agrupan los términos algebraicos reescribiendo cada uno de los grupos formados.

$6b \quad \frac{b}{2} \quad , \qquad 5x^2 \quad x^2$

Estrategia 3: Los alumnos verbalizan los términos que son semejantes, escribiendo lo siguiente :

Los únicos que tienen términos semejantes son $b\ y\ x^2$.

Ítem b

Estrategia 1: Los alumnos encierran o subrayan los términos algebraicos semejantes:

$6^3 \quad 2y \quad 3y^2 \quad 6^2 \quad y \quad 5y^8$

Estrategia 2*:* Los alumnos agrupan los términos algebraicos reescribiendo cada uno de los grupos formados.

$6^3 \;\; 6^2 \quad , \quad 2y \;\; y$

Estrategia 3: Los alumnos verbalizan los términos que son semejantes :

Los únicos que tienen términos semejantes son 6 *e* y

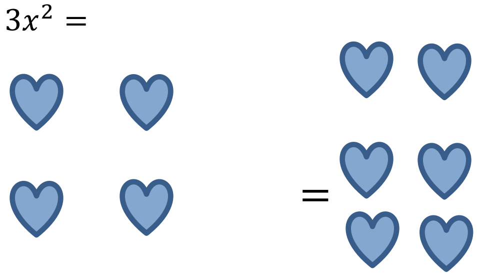
3. Dadas las siguientes imágenes y sus representaciones, simboliza cada una de las expresiones algebraicas y luego redúcelas.

Objetivo: Caracterizar y reducir expresiones algebraicas de forma pictórica.

Ítem a

Estrategia 1:

$2x^2 + 3x^2 =$



Estrategia 2:(Errónea)

$2x^2 + 3x^2 =$

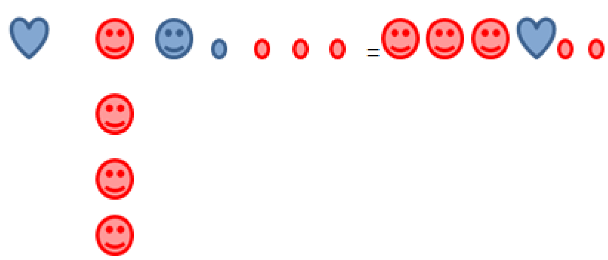
Estrategia 3: Los alumnos solo dibujan la representación del término algebraico resultante al reducir los términos algebraico.

Estrategia 4: Los alumnos dibujan la expresión algebraica con los colores contrarios que representan la negatividad del término algebraico.(Errónea)

Ítem b

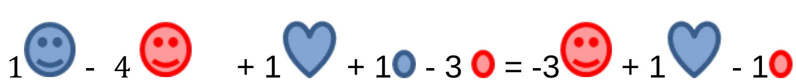
Estrategia 1:

$x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 =$



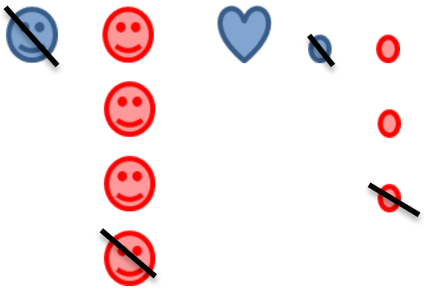
Estrategia 2: (Errónea)

$x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 =$



Estrategia 3: Los alumnos utilizan cancelación para eliminar dos o más figuras que son de igual forma pero distinto color.

$x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 = -3x^3 + x^2 - 2$



Estrategia 4: Los alumnos solo dibujan la representación del término algebraico resultante al reducir los términos algebraico.

Estrategia 5: Los alumnos dibujan la expresión algebraica con los colores contrarios que representan la negatividad del término algebraico.(Errónea)

4. Reduce los términos semejantes

Objetivo: Reducir términos semejantes en adición y sustracción de expresiones algébricas.

Los ejercicios de esta pregunta ítem a y b fueron extraídos Texto del estudiante 7º Básico Matemática, editorial Galileo. Pág.58. (Texto entregado por el Ministerio de Educación). Ítem c fue extraído Texto del estudiante Matemática 7º Básico Bicentenario. Chile, editorial Santillana. Pág.178

Ítem a

Estrategia 1: Los alumnos identifican términos semejantes y realizan la adición de forma mental, escribiendo solo el resultado final:

$a + 2b + 2a + b + 2c = 3a + 3b + 2c$

Estrategia 2:

$a + 2b + 2a + b + 2c =$

$a + 2a + 2b + b + 2c$

$3a + 3b + 2c$

Estrategia 3: Los alumnos utilizan propiedades de la adición para reducir la expresión algebraica.

$a + 2b + 2a + b + 2c =$

$(a + 2a) + (2b + b) + 2c$

$3a + 3b + 2c$

Estrategia 4:

$a + 2b + 2a + b + 2c =$

$a + 2a = 3a$

$2b + b = 3b$

$2c\ = 3a + 3b + 2c$

Estrategia 5: (Errónea)

$a + 2b + 2a + b + 2c =\ aaa\ bbb\ cc$

$a \quad b \quad a \quad b \quad c$

$\quad\ b \quad a \quad\quad\ c$

Ítem b

Estrategia 1: Los alumnos identifican términos semejantes y realizar la adición de forma mental, escribiendo solo el resultado final:

$6f^2 + 3f - 2f = 6f^2 + f$

Estrategia 2: Los alumnos utilizan propiedades de la adición para reducir la expresión algebraica.

$6f^2 + 3f - 2f =$

$6f^2 + (3f - 2f) = 6f^2 + f$

Estrategia 3:

$6f^2 + 3f - 2f = 6f^2 + f$

Ítem c

Estrategia 1: Los alumnos identifican términos semejantes y realizan la adición de forma mental, escribiendo solo el resultado final:

$4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m = 2mn + 2n - m$

Estrategia 2:

$4mn - 2mn - 3m + 2m + 2n = 2mn - m + 2n$

Estrategia 3: Los alumnos utilizan propiedades de la adición para reducir la expresión algebraica.

$(4mn - 2mn) + (-3m + 2m) + 2n = 2mn - m + 2n$

Estrategia 4:

$4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m =$

$4mn - 2mn = 2mn$

$-3m + 2m \ = \ -m$

$2n \ = 2mn - m + 2n$

Análisis a Posteriori

Situación Nº1:

La situación Nº1 consta de dos actividades y tiene como objetivo *identificar y comprender concepto de términos semejantes*, se espera que los alumnos agrupen los elementos iguales de las cajas entregadas, indicando la cantidad de objetos parecidos y le asocien un nombre diferente a cada objeto, este nombre deberán ir abreviándolo lo más posible, de manera que les permita simplificar su escritura, hasta llegar a una letra cualquiera, provocando la generalización de la situación, relacionando cada objeto, con un símbolo diferente, esto les facilitará a construir el concepto de términos semejantes, ya que todos los objetos semejantes tienen la misma denominación, para luego poder reducirlos.

La actividad N°1 se realiza en un curso de 27 alumnos, por lo que se forman 7 grupos, con 4 integrantes. A cada grupo se les entrega, las indicaciones generales a seguir, una caja de un color específico con diversos objetos en su interior, las preguntas a trabajar con una hoja de cartulina para anotar sus respuestas a dichas preguntas.

En la pregunta 1 de esta actividad los alumnos toman los objetos de las cajas correspondientes y trabajan activamente dialogando con sus compañeros y pidiendo la ayuda de su profesora respetuosamente a lo largo de toda la actividad, tomando este último, el rol de facilitador ya que no interviene directamente. De esta pregunta se espera que los alumnos identifiquen cada elemento de la caja y los anote uno por uno. De los siete grupos formados, cinco dieron sus respuestas de manera similar, esto es, señalaron los elementos de la caja indicando el número de elementos diferentes con su respectivos nombres (Fig.1), lo que resulta correcto al igual que la respuesta que dio un grupo al anotar uno por uno, cada elemento existentes en la caja, (Fig.2) mientras que un grupo, solo anotó el nombre de cada elemento, sin tomar en cuenta la cantidad de objetos diferentes (Fig.3), por lo tanto, este grupo entregó una respuesta incompleta.

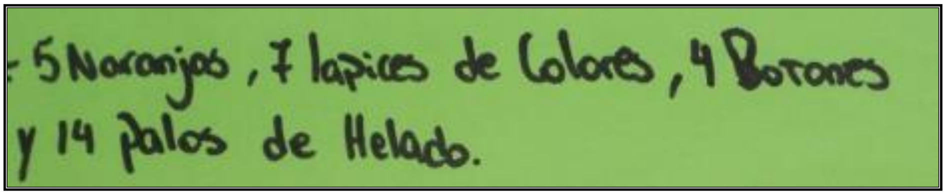


Fig.1

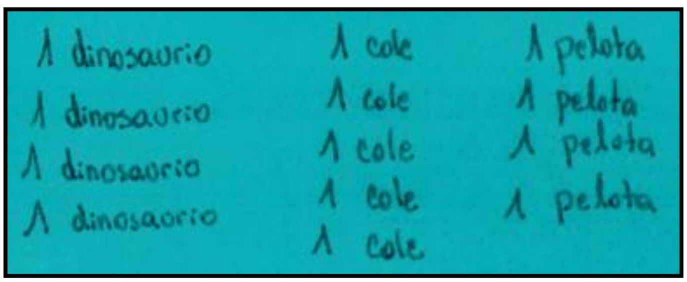


Fig.2

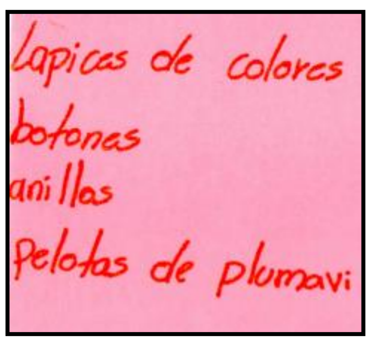


Fig.3

De lo anterior, se puede concluir que casi la totalidad de curso respondió de la manera esperada, al contrario de solo un grupo.

Con respecto a la pregunta 2 de la actividad Nº1, se espera que los alumnos analicen y encuentren una forma de hacer la lista con todos los objetos de la caja pero esta vez más reducidamente, con el fin de que se den cuenta cuales son los elementos iguales o semejantes, para luego sumarlos y generalizarlos con una sola letra, de esta manera crean intuitivamente el término algebraico. Existen estrategias diferentes, cada grupo consideró su respuesta a la pregunta anterior de la actividad para expresar sus ideas.

Un grupo, decidió anotar solo el nombre de los elementos de la caja, ya que en su respuesta anterior, daba a conocer más detalles acerca de las características de los objetos, como los diferentes colores, tamaño o materiales de estos. (Fig.4)

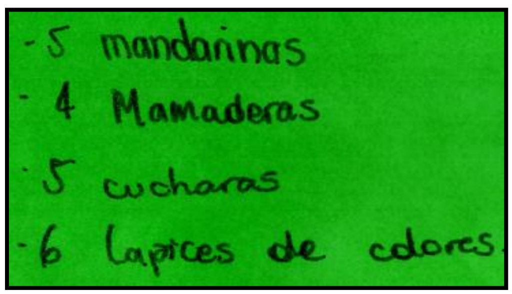


Fig.4

Otro grupo, ya que anteriormente, anotaron uno por uno cada nombre de los objetos, optaron por agruparlos más reducidamente, pero ahora de dos en dos. (Fig.5)

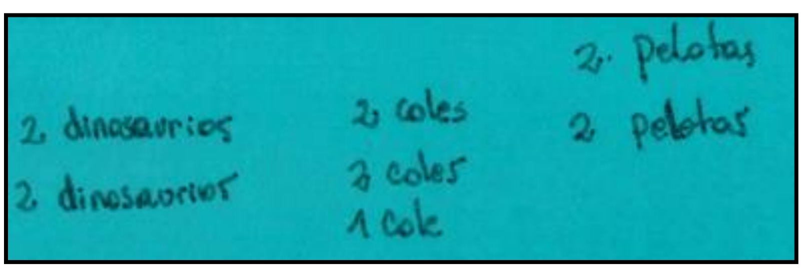


Fig.5

Los siguientes dos grupos, utilizaron la estrategia de escribir solo las iniciales de los nombres de los objetos de la caja con su respectiva cantidad. (Fig.6, Fig.7)

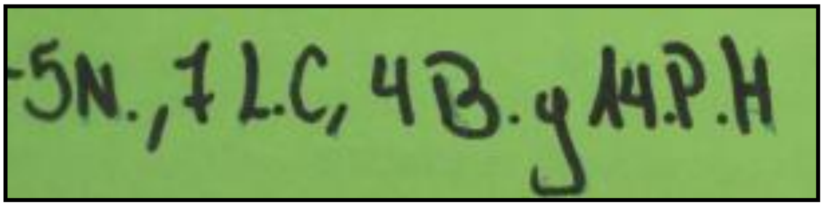


Fig. 6

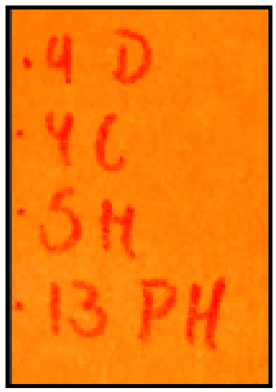


Fig.7

El siguiente grupo, para escribir más resumidamente, solo señalaron abreviaciones de los nombre de los elementos de la caja, sin importar la cantidad de objetos diferentes, por lo tanto es una respuesta inconclusa. (Fig.8)

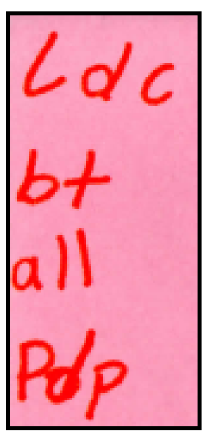


Fig.8

Ahora bien, el grupo siguiente, en su intento de escribir más reducidamente, además de utilizar solo las iniciales de los nombre de los objetos, conecta a través de la operación suma todos los elementos existentes de la caja. (Fig.9)

Fig.9

Por último, este grupo como respuesta a la pregunta anterior, indicaron correctamente los nombre de cada elemento junto con su respectiva cantidad, pero para intentar reducir más la expresión, solo colocaron los nombres de los objetos omitiendo el número de cada cosa, lo que resulta incompleta. (Fig.10)

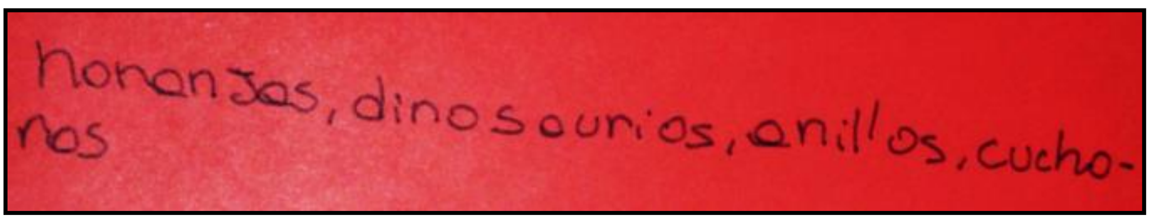


Fig.10

De estas respuestas podemos concluir, que a pesar de las diferentes estrategias utilizadas, cinco grupos acertaron correctamente, ya que de alguna manera, redujeron la lista y clasificaron los elementos. Ahora bien, cabe mencionar que los restantes dos grupos cometieron errores en sus respuestas, ya que el enunciado de la pregunta dificulta sus respuestas, esto quiere decir, que anotaron solo los nombre de la lista sin sus cantidades correspondiente, en un intento de reducir lo más posible la lista.

Cuatro grupos, en la pregunta 3 declararon que ya redujeron lo suficiente en la pregunta anterior, por lo que ya no se puede anotar más abreviado. (Fig.11), solo dos grupos reduce más de lo que ya lo había hecho (Fig.12, Fig,13), y finalmente otro grupo, para mostrar la manera de reducir aún más los objetos de cada caja, lo hace dibujando en miniatura, la representación del objeto al lado del número correspondiente a la cantidad. (Fig.14)

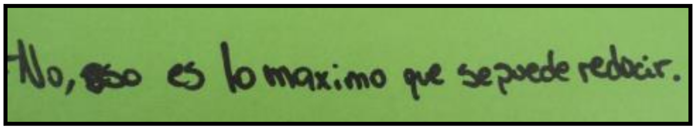


Fig.11

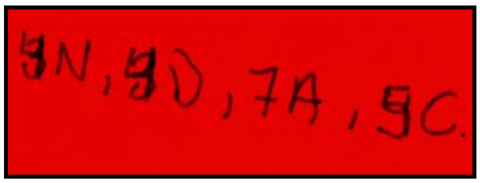


Fig.12

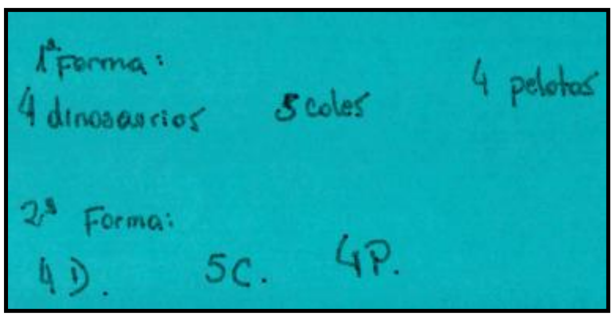


Fig.13

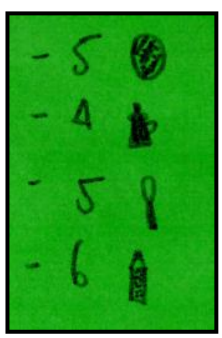


Fig.14

Al finalizar las tres preguntas de la primera parte de la actividad, la profesora solicita a un par de alumnos que indique a toda la clase, las conclusiones que llegaron como grupo.
La respuesta en voz alta de un representante de un grupo fue la siguiente:

"Nos dimos cuenta que la forma más reducida de escribir los elementos de la caja es, anotar cada inicial que representaba cada palabra, ya que se ocupa menos tiempo en anotarlas"

La mayoría de la clase, llega satisfactoriamente a lo solicitado. Todos los grupos expusieron sus resultados de manera correcta a excepción de uno, ya que en vez de anotar la inicial de cada objeto, prefirió dibujar su representación.

La modalidad de trabajo de la actividad Nº2, se lleva a cabo mediante la fusión de grupos junto con sus respectivas cajas de elementos. Se espera que agrupen los elementos de las dos cajas y sumen los similares, ejerciendo intuitivamente la reducción de términos semejantes.

En la pregunta 1 un grupo, simplemente hizo una lista de todos los elementos de los dos grupos, anotando también características adicionales al respecto (Fig.15)

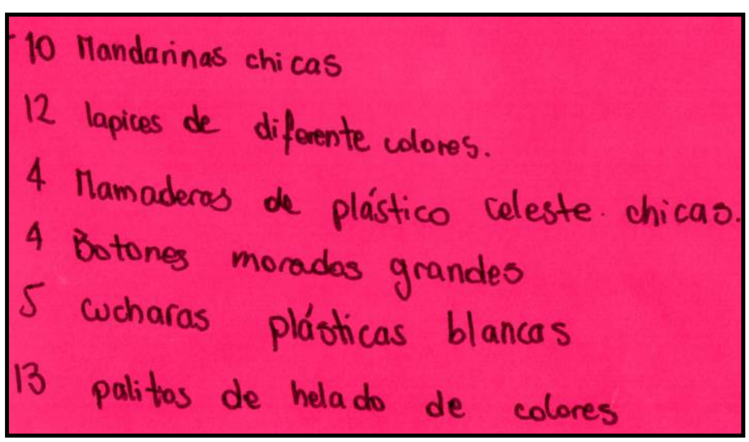


Fig.15

Otro grupo indica que unieron los elementos (Fig.16) y otro grupo sin anotarlos en su hoja de respuesta, los agrupa físicamente, e indican que unieron todos los elementos que son iguales. (Fig.17)

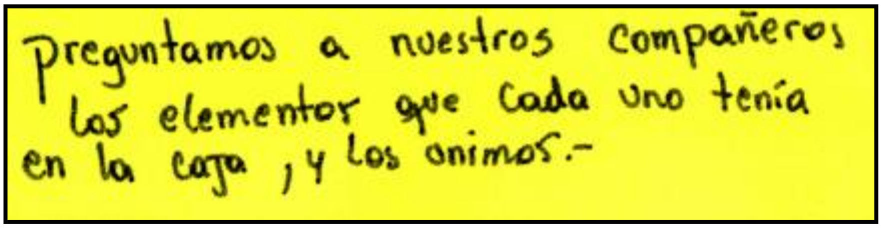

preguntamos a nuestros compañeros los elementor que cada uno tenía en la caja , y los onimos.-

Fig.16

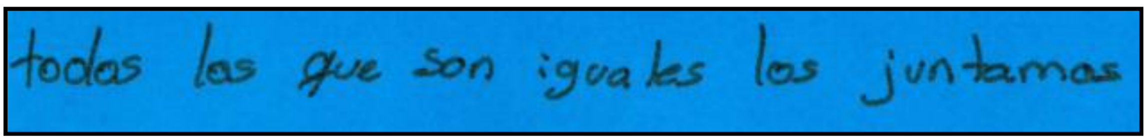

todas las que son iguales los juntamos

Fig.17

De las respuestas anteriores, se destaca que la totalidad del curso cumplió con el objetivo propuesto para esta actividad.

Ahora bien, de las preguntas dos, tres y cuatro de la actividad Nº2 todos los grupos, señalaron correctamente que para unir los elementos de ambos grupos, solo se podían unir o sumar los elementos que coincidían a los dos grupos. Se espera que cada grupo logre relacionar las abreviaciones de palabras, con el concepto de términos semejantes intuitivamente, es decir, que logre descubrir que solo pueden reducir los elementos parecidos porque son semejantes.

Cada grupo, aprendió que no se pueden juntar figuras que son diferentes, incluso un grupo declara que, solo se pueden sumar elementos que son iguales o que tienen algo en común. Como se muestra a continuación en las (Fig.18, Fig.19, Fig.20)

Obtubimos más elementos de los que teniamos, aun que algunos no se pudieron unir por que no coincidian, pero otras sí ya que nuestras compañeros tambien las tenian

Fig.18

Pudimos juntar los lapices y las pelotas por que eran los mismos materiales y la misma figura y no pudimos juntar los botones y las coles por que un grupo no tenia casi todos los materiales iguales

Fig.19

Aprendimos que no pudimos sumar cosas que no estaban en común.

Fig.20

Cuando todos los grupos han finalizado, se disponen a pasar adelante a leer sus conclusiones, la profesora anota lo más importante en la pizarra y a modo resumen, explica la manera correcta en que se debe operar, también, la profesora señala que en esta actividad han trabajado con un nuevo concepto, este es Términos semejantes, y destaca que solo deben juntar o sumar solo si son parecidos o semejantes. (Fig.21)

De todo lo anterior, se evidencia el logro del cumplimiento de la dos actividades, de la situación Nº1.

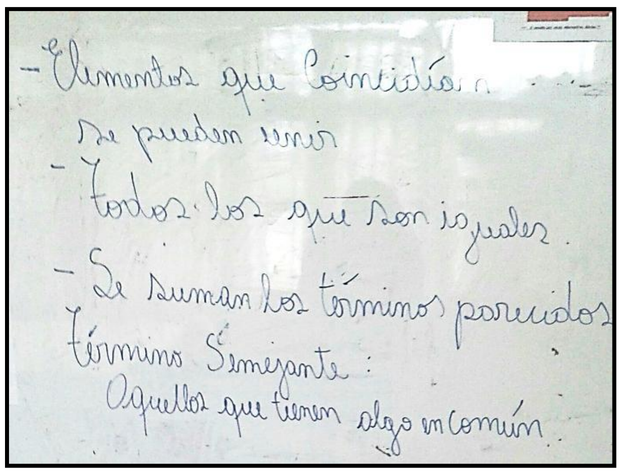


Fig.21

Situación Nº2:

A continuación se presentan resultados obtenidos del trabajo de los alumnos al enfrentarse con la situación N°2 y se mostrarán evidencias importantes.

La situación N°2 consta de tres actividades cada una con su objetivo. En las dos primeras actividades el objetivo era *Representar mediante figuras términos algebraicos,* donde en la primera era a través de la identificación de las figuras en expresiones algebraicas y en la siguiente era a través de un desafío grupal, donde los alumnos representan mediante las figuras una expresión algebraica y otro grupo elegido debe adivinar la expresión representada de manera pictórica.

En la actividad Nº1 tanto en ítem a, b, c y d los estudiantes respondieron satisfactoriamente en la representación de los términos algebraicos y la mayoría de los grupos utilizó la estrategia N° 1, donde identifican correctamente cada parte de la expresión algebraica con su figura y color respectivo, como se muestra a continuación:

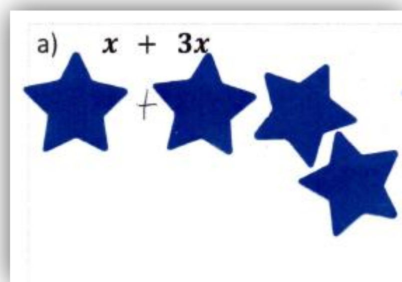


Fig. 1

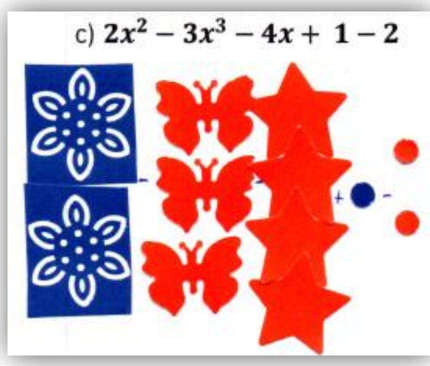


Fig. 2

Cabe mencionar que un grupo no logró el objetivo de la actividad, donde representa de manera incorrecta la expresión algebraica, representando parte de ella con figura de otro color. (Fig 3.)

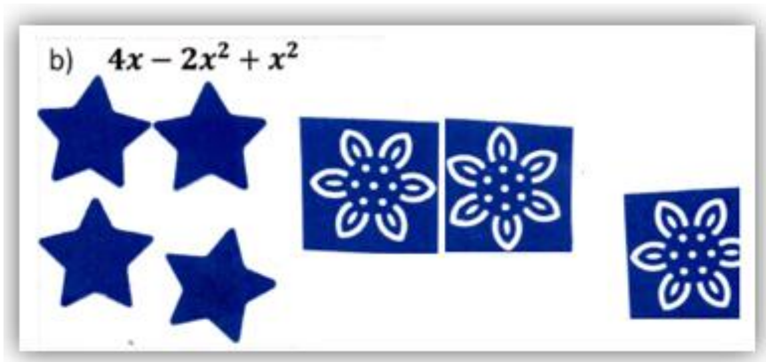


Fig. 3

La parte dos de la actividad 1 tiene como objetivo *Argumentar y concluir las respuestas* de la actividad anterior, se observa que los alumnos logran identificar las figuras que representan los términos algebraicos como positivos por el color azul y negativo por el color rojo, como se muestra a continuación:

1) Estan ordenadas y diferenciadas por color, forma, positivo y negativo

2) Por los distintos colores que tienen uno es positivo y el otro negativo -

Fig. 4

Por lo tanto se concluye de lo anterior que el objetivo de representar mediantes figuras la expresión algebraica fue logrado en su mayoría, a diferencia de un grupo que respondió incorrectamente.

En la actividad Nº2, el desafío grupal que tiene como objetivo representar mediante figuras las expresiones algebraicas, se realiza de manera participativa y buen clima de aprendizaje. A partir de los resultados obtenidos se observa que gran parte de los estudiantes adivinan de manera correcta la expresión algebraica representada a través de las figuras, utilizando la estrategia N°1, donde identifican cada término algebraico con la figura y color correctamente (Fig. 5)

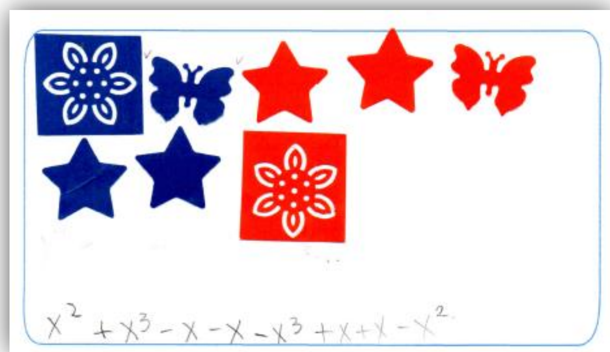


Fig. 5

Un segundo grupo utilizó la estrategia N°2, donde los alumnos identificaron las figuras y el color con la expresión algebraica correctamente y luego reducen los términos semejantes, representando así una expresión algebraica más reducida (Fig. 6).

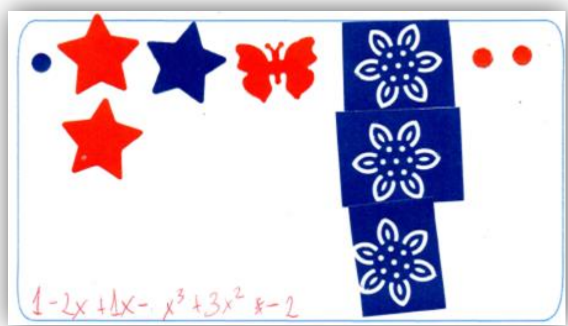


Fig. 6

A partir del análisis anterior se concluye que el objetivo de representar mediantes figuras una expresión algebraica se cumplió por gran parte del curso y que el clima de desafió entre grupos que se generó, actúo como un mayor facilitador de aprendizaje. Además, se observa que los dos grupos que no lograron adivinar la expresión, se debió a la ansiedad que les generó la actividad propuesta.

La tercera actividad tiene como objetivo *Caracterizar y reducir expresiones algebraicas de forma pictórica,* en donde deben representar las expresiones algebraicas a través de la figuras y luego reducir los términos semejantes que representa cada figura.

El desarrollo de la actividad se realiza con una mayor dificultad, pues los alumnos afirman estar agotados y debido al tiempo y al desorden seis grupos del total de nueve desarrollan correctamente la última actividad de la situación Nº2. En la actividad Nº3 tanto el ítem a, b y c los seis grupos respondieron satisfactoriamente en la representación y reducción de los términos algebraicos a través de las figuras, utilizando la estrategia N° 1, donde identifican correctamente cada término de la expresión algebraica con su figura y color respectivo y luego logran reducir la expresión algebraica, como se observa a continuación

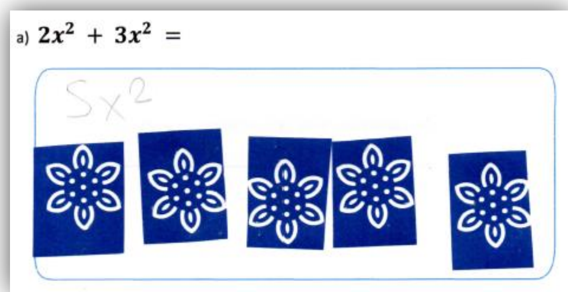


Fig. 7

A partir de los resultados en la reducción loa alumnos trabajan manipulando el material concreto y al tener la respuesta pegan las figuras representando solo el resultado reducido, como se observa en la Fig.9. En otros casos trabajaron mentalmente el resultado representando con las figuras correctamente la expresión algebraica, como se observa en la Fig. 7 y Fig. 8.

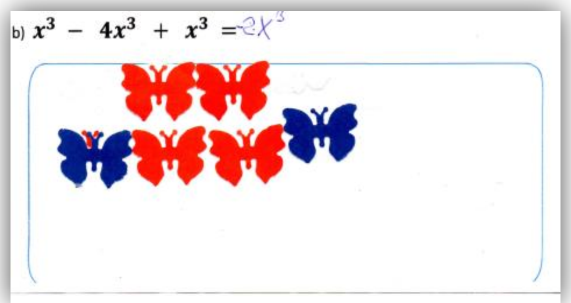


Fig. 8

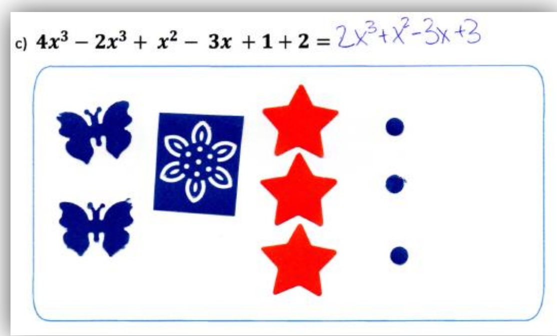


Fig. 9

Además se observa que un grupo se queda sólo en la representación a través de las figuras y no logrando reducir la expresión algebraica (Fig. 10). Y tres grupos que no logran alcanzar el objetivo de la actividad, pues indican que la actividad es muy larga y se sienten agotados (Fig. 11)

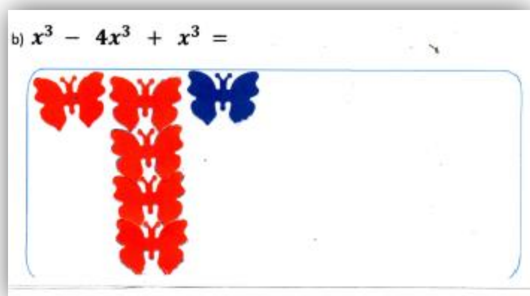


Fig. 10

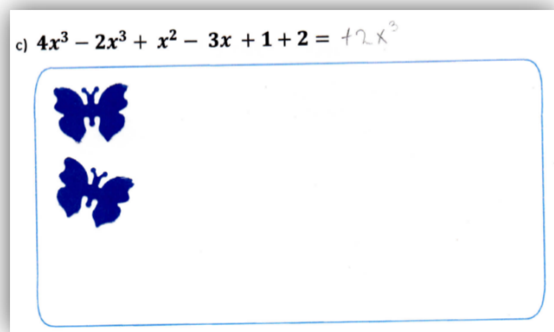


Fig. 11

De esta respuesta podemos concluir, que a pesar de las dificultades que se presentaron en la tercera actividad de la situación N°2, seis grupos acertaron correctamente, mientras que los restantes tres grupos cometieron errores en sus respuestas o simplemente no respondieron.

La parte dos de la actividad Nº3 tiene como objetivo *Discutir y concluir respuestas obtenidas* de la actividad anterior *y* se observa que de los nueve grupos que realizaron la actividad los mismos 6 grupos concluyeron que sólo se puede sumar o restar las figuras que son exactamente iguales y que depende del color el signo del término algebraico.

Finalmente se concluye que gran parte de los alumnos lograron representar mediante figuras términos algebraicos, pues se evidencia que la actividad N°1 y N°2 se desarrolla con mayor facilidad obteniendo así mayor existo. Y se observa además que el desarrollo de la actividad N°3 se realiza con dificultad, pues los alumnos esta cansados y debido al tiempo se genera desorden, y es así como 6 grupos del total de 9 logra trabajar de una mejor manera.

Situación Nº3:

A continuación se presentan los resultados obtenidos por parte de los alumnos al enfrentarse con a la tercera situación didáctica de la secuencia de aprendizaje y se mostrará las evidencias más relevantes.

La situación Nº3 consta de 4 preguntas, el objetivo de esta es evaluar si los estudiantes lograron comprender el concepto de termino semejante y reducirlos con lo aprendido en la situación Nº1 y Nº2. Para esto primeramente se realizó una pregunta con contenidos vistos en las situaciones anteriores y luego la pregunta que se realizan constantemente en las distintas herramientas evaluativas.

En la situación Nº3 el objetivo en las dos primeras preguntas era identificar, en una de ellas imágenes similares y en la otra términos semejantes. En la primera pregunta en ninguno de los dos ítem los alumnos presentaron dificultades resulto fácil para ellos y pocos estudiantes realizaron consultas. En la pregunta dos los estudiantes manifestaron complejidades, pues aun algunos preguntaban si eran semejantes los términos que tenían distinto exponente pero igual coeficiente literal.

En su mayoría los estudiantes respondieron de forma correcta ambas preguntas 1 y 2, por lo tanto el objetivo de identificar términos semejantes fue logrado a cabalidad se puede observar en las siguiente respuesta (Fig.1).

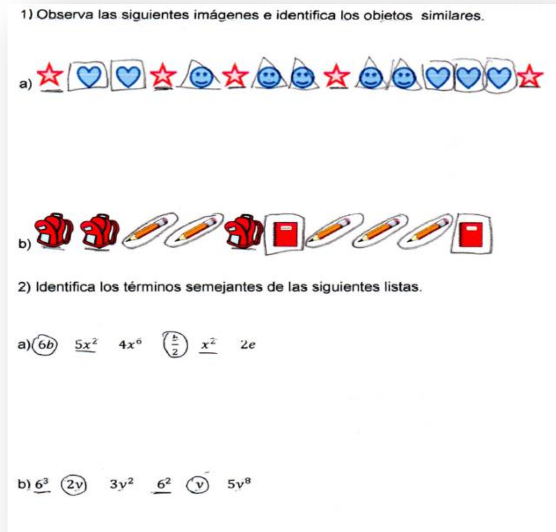


Fig.1

La pregunta 3 gran parte de los estudiantes respondieron de forma correcta y rápida , logrando representar cada termino con la caracterización dada , uno de los problemas fue que no tenían lápices de dos colores , pero se les dio la posibilidad de utilizar dos colores distintos a los sugeridos. Por lo tanto podemos decir que se cumplió lo que se esperaba por parte de los estudiantes representaron y realizaron reducción de términos semejantes (Fig.2.).

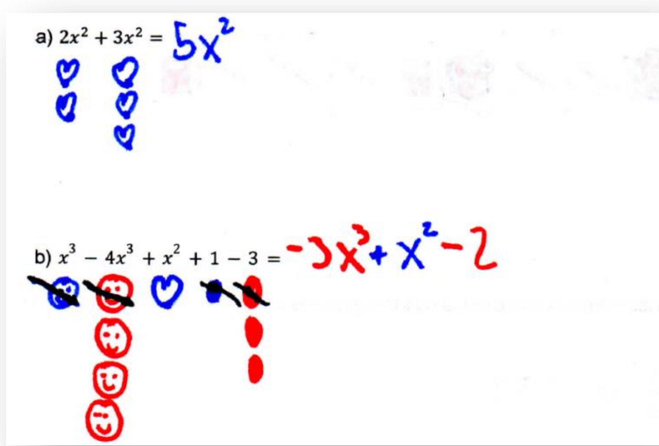
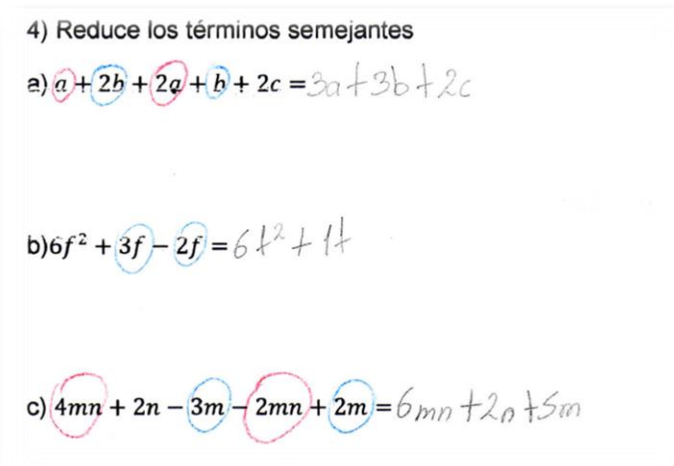


Fig.2

Para la pregunta 4 tanto en ítem a y b los estudiantes respondieron satisfactoriamente en la reducción, una parte mayoritaria utilizo como estrategia el subrayado o encerrar de diversas formas los términos semejantes para posteriormente reducirlos. En el ítem c aunque utilizaron la misma estrategia la generalidad de los alumnos respondió de forma incorrecta, ya que cuando realizaron la adición en los números enteros en su resultado no respetaron el signo (Fig.3).


4) Reduce los términos semejantes

a) $a + 2b + 2a + b + 2c =$ 3a+3b+2c

b) $6f^2 + 3f - 2f =$ 6f² + 1f

c) $4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m =$ 6mn + 2n + 5m

Fig.3

Por lo tanto el objetivo de reducir términos semejantes esta medianamente logrado, ya que se debe reforzar la adición y sustracción de números enteros para una mayor facilidad al realizar reducción de expresiones algebraicas.

3.5 Reformulación

A continuación se presenta la reformulación de la secuencia de aprendizaje que fue aplicada. Al observar los resultados obtenidos en la secuencia se realizaron modificaciones para evitar posibles dificultades en la adquisición del concepto de término semejante.

Situación Nº1

Objetivo: identificar y comprender términos semejantes

Actividad Nº1

- *Instrucciones:* Responder cada pregunta a partir de los elementos que tienen en cada caja.

1. Haz una lista y anota uno por uno los objetos de la caja según su categoría.
2. De la lista anterior, indica la cantidad de elementos que hay de cada categoría.
3. Anota tus conclusiones, lo más reducido que se pueda lograr

Actividad Nº2

- *Instrucciones:* Unirse de dos grupos según lo designe la profesora.

1. Observa los elementos en común y agrúpalos según su categoría.
2. ¿Qué estrategia utilizaste para unir los elementos de ambos grupos? Escríbelos.
3. ¿Qué elementos se pueden unir? ¿Por qué? Anota tus conclusiones.
4. Como grupo, ¿Qué aprendieron?

Esta situación, consta de dos actividades, en la que se espera que los alumnos identifiquen los elementos de la caja y los anoten solo según su categoría, para luego poder agruparlos y de esta manera lograr generalizar la situación, relacionando cada objeto con una letra diferente ayudando a la adquisición del concepto de términos semejantes y su correcta reducción. Es por este motivo, que en esta reformulación, la pregunta Nº1 y Nº2 de la primera actividad y la pregunta Nº1 de la segunda actividad, sufren modificaciones, con el propósito de brindarle al estudiante más detalles acerca de cómo debe realizar la lista de los objetos correctamente, debido que no especificaba como debían identificar los alumnos los objetos, lo que podría ocasionar dificultades en el estudiante ordenando los objetos por función, color, categoría o forma, debido a esto se puntualizó reconocer los objetos similares solo por su categoría.

Ahora bien, acerca de la pregunta Nº2 de la primera actividad referente a la indicación de abreviar lo más posible los elementos de la caja y tomando en cuenta los análisis de los resultados posteriores a la aplicación, se decide cambiar el enunciado de esta pregunta, para evitar inducir a los alumnos en sus respuestas, así como también evitar la dificultad de que estos, en su intento de reducir lo más posible la lista anteriormente hecha, anoten solo el nombre de los objetos sin sus respectivas cantidades.

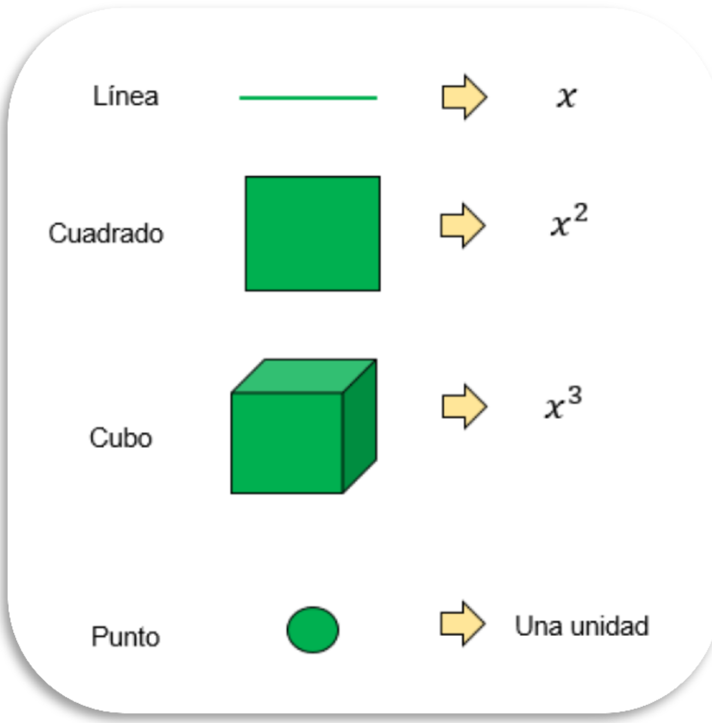
Situación 2.

Objetivo:

- Representar mediante figuras términos algebraicos.
- Reducir términos semejantes.

Actividad N° 1

❖ *Instrucciones:* Responder cada pregunta a partir de las figuras que se observa en la siguiente imagen.



1. Representar con las figuras que se observan anteriormente, cada término de la expresión algebraica según corresponda.

a) $x + 3x =$

b) $4x - 2x^2 + x^2$

c) $2x^2 - 3x^3 - 4x + 1 - 2$

d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

2. ¿Qué observas con respecto a las figuras? ¿Cómo se relaciona las figuras con la expresión matemática? Anota tus conclusiones.

Actividad Nº2

❖ *Instrucciones:* Junto con tus compañeros de equipo desafía a otro grupo.

3. A través de las figuras anteriores (punto, línea, cuadro y cubo) escribe una expresión algebraica en el papel entregado por la profesora y que el otro equipo adivine la expresión.

A continuación, desafía al otro grupo cambiando las hojas y adivina la expresión algebraica. ¿Adivinaron la expresión?. ¡Averigüemos como le fue al otro equipo!

Actividad Nº3.

3. Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones con la ayuda las figuras (punto, línea, cuadrado y cubos). Escriba el resultado obtenido y represéntelo pegando las figuras.

d) $2x^2 + 3x^2 =$

e) $x^3 - 4x^3 + x^3 =$

f) $4x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 2 =$

Finalmente ¿Qué se puede concluir de las actividades anteriores?

En la reformulación de la Situación N°2 se evidencia que los cambios se relacionan con las figuras que representan los términos algebraicos, por ende se modificó el recuadro de figuras, ya que, las figuras anteriores (mariposa, flor, estrella) al ser distintas, perdía el sentido de lo que significa un término semejantes, debido a que están totalmente aisladas una con otras, es por esto que se opta por utilizar figuras geométrica relacionadas entre sí siguiendo una secuencia. Las nuevas figuras del cuadro son, línea que representa a la "x", cuadrado que representaba "x^2" y cubo que representa "x^3". Estas nuevas figuras fueron elegidas porque una está determina a la otra, es decir, a medida que aumenta el grado de la variable aumenta la dimensión de la figuras de su representación también aumenta. Como se muestra a continuación (Fig.1)

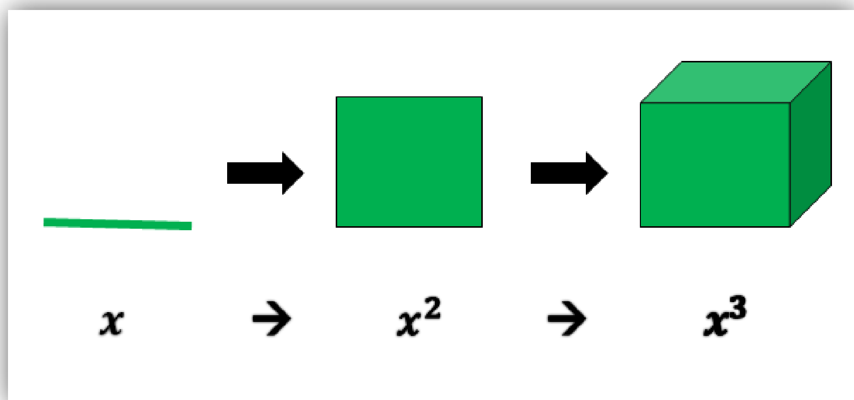


Fig.1

También se destaca que, en esta reformulación ya no se les pedirá a los alumnos que discriminen entre figura roja y azul pues las figuras solo tendrán un color y su representación será sin signo, ya que al escribir la expresión algebraica se podría producir ciertas dificultades con los inversos aditivos que representaba la figura.

Situación Nº3

Objetivo:

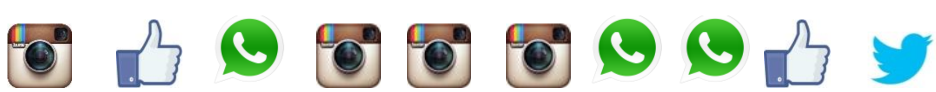
- Demostrar que comprenden términos semejantes de manera pictórica y simbólica.
- Establecer diversas estrategias para reducir términos semejantes.

Tiempo Estimado: 30 Minutos.

Actividad Nº1

❖ Instrucciones: Responder cada pregunta de forma limpia y ordenada.

1. Observa las siguientes imágenes e identifica los objetos similares según su categoría.

a) 

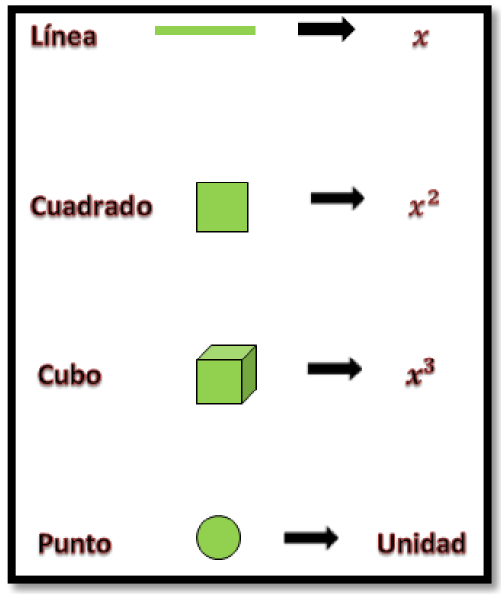
b) 

2. Identifica los términos semejantes de las siguientes listas.

a) $6b \quad 5x^2 \quad 4x^3 \quad \frac{b}{2} \quad x^2 \quad 2e$

b) $6^3 \quad 2y \quad 3y^2 \quad 6^2 \quad y \quad 5y^3$

3. Dadas las siguientes imágenes y sus representaciones, simboliza cada una de las expresiones algebraicas y redúcelas.



a) $2x^2 + 3x^2 =$

b) $x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 =$

4. Reduce los términos semejantes

a) $a + 2b + 2a + b + 2c =$

b) $6f^2 + 3f - 2f =$

c) $4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m =$

La reformulación de esta situación Nº3, está basada en las modificación realizadas en la dos situaciones anteriores, modificando pregunta Nº1 referentes a la forma en que deben identificar los objetos, estos es, mediante categorías. En el pregunta Nº2 se fundamenta en la restructuración del recuadro de representaciones ya explicado anteriormente en la situación Nº2.

Capítulo 4.
Conclusiones

4.1 Conclusiones

El propósito central de esta tesis fue obtener evidencias que permitieran dar respuestas a nuestro objetivo general y objetivos específicos planteados:

El objetivo general de este trabajo es:

“Elaborar una secuencia de aprendizaje para la adición y sustracción de términos semejantes, en estudiantes de Séptimo Básico”

El cual se cumplió, pues con la ayuda de la Teoría de Situaciones Didácticas y los aportes de la ingeniería didáctica, se diseñó la secuencia de aprendizaje y luego se aplicó a estudiantes de Séptimo Básico, realizando los análisis a priori y a posteriori correspondientes.

Según el análisis del cuestionario exploratorio aplicado previamente, se evidenciaron diversos errores y dificultades que cometen los estudiantes relacionados con el significado de la variable, en la manipulación de paréntesis asociados a la propiedad distributiva y finalmente errores en la identificación y reducción de términos semejantes donde se centra nuestro trabajo. Esto nos permitió indagar en nuestro primer objetivo específico relacionado con la identificación de los obstáculos, descritos por Brousseau, evidenciados en los estudiantes acerca de la necesidad de cerrar o clausurar una expresión algebraica que perciben como incompleta.

En relación al Objetivo Específico “Identificar obstáculos asociados a actividades que involucran términos semejantes”, la aplicación de la secuencia de aprendizaje, contribuyó en la superación de dificultades que se presentan en el aprendizaje del concepto de términos semejantes, especialmente en el error de reducir a un solo término la adición y sustracción de dos o más términos que no son semejantes. Esto se aprecia tanto en la actividad 1 como en la actividad 2, pues los alumnos trabajaron activamente de forma grupal poniendo en práctica sus conocimientos previos (operaciones aritméticas: suma y resta de números enteros).

El trabajo en material concreto propicio, que en una primera instancia validaran el concepto de términos semejantes concluyendo los siguientes razonamientos "Elementos que coincidan se pueden unir" o "Todos los que son iguales", lo que ayudó a que los estudiantes desarrollaran la abstracción y así lograr la generalización al álgebra, es decir, pasar por la transición de la aritmética a álgebra de manera lúdica, para un aprendizaje correcto. Por último la actividad 3 de la secuencia, el trabajo lúdico matemático favoreció que los estudiantes pudieran reducir de manera correcta los términos semejantes, ya que concluyeron que solo se pueden sumar o restar términos parecidos, por lo tanto ya no existía por parte de los alumnos la necesidad de clausurar la expresión algebraica.

Ahora bien al analizar los resultados posteriores a la secuencia realizada a los estudiantes, y como reflexión acerca de nuestro trabajo didáctico, consideramos otros factores que permitirán mejorar la secuencia propuesta, por lo tanto se propone una reformulación a las actividades con el objetivo de evitar posibles obstrucciones en su aplicación, que facilitará al alumno una mejor abstracción del concepto de términos semejantes y reducción de expresiones algebraicas.

El segundo Objetivo específico "Analizar la propuesta del Marco curricular escolar chileno vigente en relación a los ejes Patrones y Álgebra; Álgebra y funciones a partir de la organización curricular", nos permitió conocer cómo se presenta el concepto de términos semejantes en la adición y sustracción de expresiones algebraicas para los estudiantes de Séptimo Básico. Además, las actividades que presenta el programa de estudio de Séptimo básico contribuyeron a la creación de ejercicios en nuestra secuencia de aprendizaje.

Como reflexión final, podemos decir que a lo largo de la educación escolar los estudiantes tienden a mecanizar técnicas y algoritmos en el desarrollo de los ejercicios, esto es debido a que los estudiantes carecen de argumentos para enfrentar y relacionar sus conocimientos, por esto es, que como docentes, debemos reflexionar sobre la utilidad y eficacia que tienen las actividades que planteamos a nuestros estudiantes para la formación de nuevos saberes, así como también el tratamiento que le damos a los diversos contenidos que trabajamos en nuestras aulas.

Bibliografía

Agencia de Calidad de la Educación. (2015).Informe de Resultados de Aprendizaje SIMCE 8° Básico 2014 para Docentes y Directivos.

Artigue, M. (1995).Ingeniería Didáctica .En P. Gómez (Ed).*Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la innovación en la enseñanza y aprendizaje y el aprendizaje de las Matemáticas.* México Grupo Editorial Iberoamérica Pág. 36-49.

Bennet, J., Burger, E., Chard, D., Hall, E., Kennedy, P., Renfron, F., …… Waits, S.(2014)Texto del Estudiante 7ºBasico Matemática. Chile: Editorial Galileo. Pág.58-61.

Cardona. (2007).*Desarrollando el Pensamiento Algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas.* Honduras: Universidad Pedagógica Nacional.

Diccionario de la lengua española. (2012). Recuperado el 16 de Mayo de 2014, de http://lema.rae.es/drae/?val=%C3%A4lgebra.

Esquinas. (2009). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: Del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docentes. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Díaz. (2010). *Texto del estudiante Matemática 7º Básico Bicentenario*. Chile: Editorial Santillana. Pág.177-178.

Fregona. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Garriga. (2011). *El lenguaje algebraico: Un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria.* Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

González. (2012). *De Lenguaje Natural al Lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basado en el Planteamiento y Resolución de problemas.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Jiménez. (2013). Aritmética. Tercera Versión. Chile. Pág. 163-165.

Jiménez. (2013). Matemáticas Generales. Segunda Versión. Chile. Pág. 115-117.

MINEDUC. (2013). Bases Curriculares Matemática 7º Básico a 2º medio.

MINEDUC. (2014). *Matemática, Programa de estudio, Séptimo Año Básico. Implementación 2015.*

Palarea, & Socas. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *I Seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas*, Pág.91-98.

Panizza. (2004). *Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas*. Recuperado el 26 de junio de 2015, de http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Sacher, H. (2013). *Actividades: Establecer estrategias para reducir términos semejantes.* [online] Curriculumenlineamineduc. Disponible en: http:www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-202291_recurso_pdf.pdf [Ingreso: 19 Sep.2015]

Socas, M. M. & Paralea, M. M. (1996). El uso de sistemas con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. Pág.48

Turrubiartes. (1983). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. En G. Brousseau. México.

Anexos

Cuestionario Exploratorio

CUESTIONARIO EXPLORATORIO

Instrucción: Realizar el cuestionario individualmente

Responda y justifique cada pregunta según el conocimiento que usted posee.

1. ¿Qué valores puede tomar la variable “a”?

a) $3 + a + a + a$

2. ¿Qué valores puede tomar la incógnita?

a) 3x + 4

3. Identifica los términos semejantes en las listas de expresiones siguientes:

a) $3x,\ -3y, -4x,\ x,\ -5y$

b) $2a^3, 15y^6,\ -4a^3,\ -y^6,\ 8y^6$

c) $u^2x^2,\ u^2v,\ -5vu^2,\ 7uv^2,\ 5x^2u^2$

4. Reduce las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a + 4a + 7a + 10a =$

b) $3(x - 7) + 2(x + 3) =$

c) $4x + 3x^2 + 2x^2 + 7x =$

d) $z^2 + 6y^3 - 4z^2 - 5z^2 + 12y^3 + 20 + 2 =$

e) $ab + 7c^2d - 3ba + 2c^2d - 15ab + 9dc^2 + 1 =$

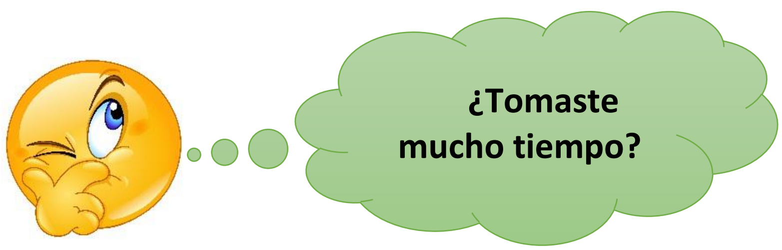
Situación Nº1 (Actividad)

PRIMERA ACTIVIDAD.

- Responder cada pregunta a partir de los elementos que tienen en cada caja.
- Leer las instrucciones entregadas por la profesora.

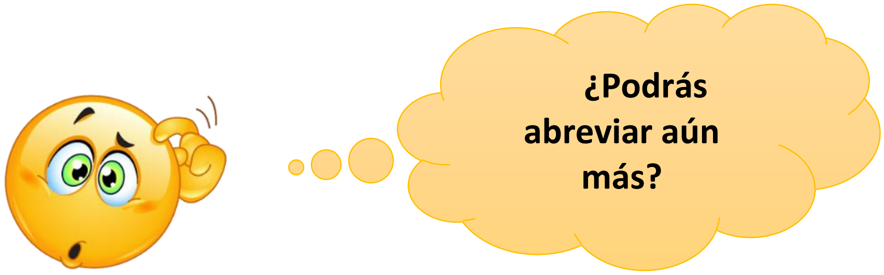
1. Haz una lista y anota uno por uno los objetos de la caja.

Desarrollo:



2. Piensa en una forma de ocupar menos tiempo en hacer la lista y anótalo.

Desarrollo:



3. Anota tus conclusiones, lo más reducido que se pueda lograr.

__**Desarrollo:**__

SEGUNDA ACTIVIDAD.

- ❖ Responder cada pregunta a partir los elementos que tiene cada grupo en las cajas.
- ❖ Leer las instrucciones entregada por la profesora.

1. Observa los elementos en común y agrúpalos.

Desarrollo:

2. ¿Qué estrategia utilizaste para unir los elementos de ambos grupos? Escríbelos.

Desarrollo:

3. ¿Qué elementos se pueden unir? ¿Por qué?. Anota tus conclusiones.

Desarrollo:

Situación Nº2 (Actividad)

PRIMERA ACTIVIDAD.

- Responder cada pregunta a partir de los elementos que mostrará la profesora.
- Leer las instrucciones entregadas por la profesora.

1. Representar con las figuras de cartulinas entregadas, cada expresión que se muestran a continuación y péguelas debajo de cada término según corresponda.
   (OBSERVA LA IMAGEN PROYECTADA POR LA PROFESORA EN LA PIZARRA)

a) $x + 3x$	**b)** $4x - 2x^2 + x^2$
c) $2x^2 - 3x^3 - 4x + 1 - 2$	**d)** $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

¿Qué observas con respecto a las figuras?

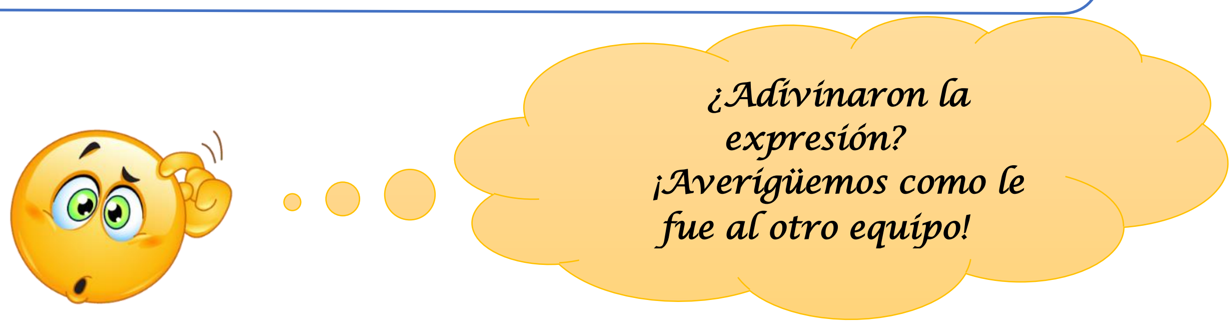
¿Cómo se relaciona las figuras con la expresión matemática?

Anota tus conclusiones

SEGUNDA ACTIVIDAD.

1. **Junto con tus compañeros de equipo desafía a otro grupo.**

❖ A través de las figuras anteriores (estrella, mariposa, flor y puntos) escribe una expresión algebraica en el papel entregado por la profesora y que el otro equipo adivine la expresión.



❖ **A continuación, desafía al otro grupo cambiando las hojas y adivina la expresión algebraica.**

TERCERA ACTIVIDAD.

1. Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones con la ayuda las figuras (estrellas, mariposas, flores y puntos). Escriba el resultado obtenido y represéntelo pegando las figuras.

a) $2x^2 + 3x^2 =$

b) $x^3 - 4x^3 + x^3 =$

c) $4x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 2 =$

Finalmente ¿Qué se puede concluir de las actividades anteriores?

Situación Nº3 (Actividad)

Actividad

1) Observa las siguientes imágenes e identifica los objetos similares.

a) 

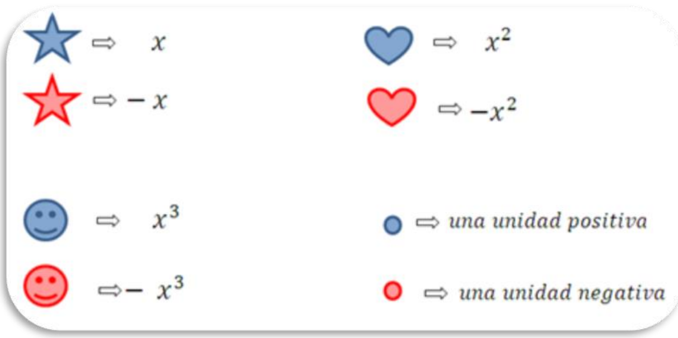
b) 

2) Identifica los términos semejantes de las siguientes listas.

a) $6b \quad 5x^2 \quad 4x^6 \quad \frac{b}{2} \quad x^2 \quad 2e$

b) $6^3 \quad 2y \quad 3y^2 \quad 6^2 \quad y \quad 5y^8$

3) Dadas las siguientes imágenes y sus representaciones, simboliza cada una de las expresiones algebraicas y luego redúcelas.



a) $2x^2 + 3x^2 =$

b) $x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 =$

4) Reduce los términos semejantes

a) $a + 2b + 2a + b + 2c =$

b)$6f^2 + 3f - 2f =$

c) $4mn + 2n - 3m - 2mn + 2m =$

Planificaciones

Planificación Situación Nº1

Unidad/contenido	**Unidad 1: " Números y Álgebra "**
O. Aprendizaje de la clase.	Identificar y Comprender términos semejantes.
Actitudes	Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas. Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico. Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa.
Habilidades	Identificar Descubrir Deducir Reducir Resolver
Indicadores de logro	Identifican y comprenden términos semejantes.

TIEMPO		**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**
Minutos	**INICIO**	➢ La docente saluda a los estudiantes ➢ Indica el Objetivos de Aprendizaje de la clase: " Identificar y comprender el concepto de términos semejantes mediante material concreto"
Minutos	**DESARROLLO**	➢ La docente entrega las indicaciones para trabajar en la actividad del día de hoy. ➢ Indica que el curso debe separase en seis grupos, donde deberán trabajar en equipo y que cada tiempo de la actividad será guiada por la profesora. ➢ La clase consta de dos actividades; ambas directamente relacionadas y la entrega de una caja con ciertos elementos. ➢ En cada actividad se hará entrega de dos hojas que deberán ir respondiendo a partir de cada pregunta y además cada hoja consta de sus respectivas instrucciones.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

Primera Actividad

Responder cada pregunta a partir de los elementos que tienen en cada caja.

1. Haz una lista y anota uno por uno los objetos de la caja.
2. Piensa en una forma de ocupar menos tiempo en hacer la lista y anótalo
3. Anota tus conclusiones, lo más reducido que se pueda lograr.

- ➢ Luego de trabajar la primera actividad y obtener las conclusiones pertinentes, se inicia una segunda actividad.
- ➢ La docente indica que se deberán juntar de a dos grupos para realizar la segunda actividad. Los grupos que trabajarán juntos depende totalmente de la organización con anterioridad de la docente.

Segunda Actividad.

Responder cada pregunta a partir los elementos que tiene cada grupo en las cajas.

1. Observa los elementos en común y agrúpalos.
2. Qué estrategia utilizaste para unir los elementos de ambos grupos? Escríbelos.
3. ¿Qué elementos se pueden unir? ¿Por qué? Anota tus conclusiones.
4. Como grupo ¿Qué aprendieron?

- ➢ Al finalizar la última actividad de la clase, la docente comienza a preguntar a cada grupo sobre las conclusiones obtenidas.

</td></tr>
<tr><td>minutos</td><td>CIERRE</td><td>➢ La docente a partir de las conclusiones presentadas por cada grupo, institucionaliza el contenido trabajado en la clase, identificándolo como: Reducción de términos semejantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES DE EVALUACION</td><td>A través las actividades al finalizar el desarrollo de la clase, se revisan mediante preguntas las conclusiones obtenidas por cada grupo, con respecto al indicador de logro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">RECURSOS EDUCATIVOS</td><td>➢ Cajas
➢ Elementos que posee cada caja
➢ Lápiz
➢ Goma
➢ Hojas de respuestas entregadas por la docente.</td></tr>
</table>

Planificación Situación Nº2

Unidad/contenido		**Unidad 1: " Números y Álgebra "**
O. Aprendizaje de la clase.		Representar y reducir términos semejantes.
Actitudes		Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas. Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico. Expresar y escuchar ideas de forma respetuosa.
Habilidades		Identificar Deducir Reducir Resolver
Indicadores de logro		Representan y reducen términos semejantes.
TIEMPO	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
Minutos	**INICIO**	➢ La docente saluda a los estudiantes ➢ Indica el Objetivos de Aprendizaje de la clase: "Reducir términos semejantes de manera pictórica "
Minutos	**DESARROLLO**	➢ La docente entrega las indicaciones para trabajar en la actividad del día de hoy. ➢ Indica que el curso debe separase en nueve grupos, donde deberán trabajar en equipo y que cada tiempo de la actividad será guiada por la profesora. ➢ La clase consta de tres actividades; ambas directamente relacionadas y la entrega de un sobre con 4 figuras de cartulina distintas de color rojo y azul. ➢ En cada actividad se hará entrega de una hojas que deberán ir respondiendo a partir de cada pregunta y además cada hoja consta de sus respectivas instrucciones. **<u>Primera Actividad</u>** 1. Representar con las figuras de cartulinas entregadas, cada expresión que se muestran a continuación y péguelas debajo de cada término según corresponda. **(OBSERVA LA IMAGEN PROYECTADA POR LA PROFESORA EN LA PIZARRA)** a) $x + 3x$ b) $4x - 2x^2 + x^2$

c) $2x^2 - 3x^3 - 4x + 1 - 2$ d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

¿Qué observas con respecto a las figuras?
¿Cómo se relaciona las figuras con la expresión matemática?
Anota tus conclusiones

- Luego de trabajar la primera actividad y obtener las conclusiones pertinentes, se inicia una segunda actividad.
- La docente indica que se deberán juntar de a dos grupos para realizar la segunda actividad. Los grupos que trabajarán juntos depende totalmente de la organización con anterioridad de la docente.

Segunda Actividad.

1. **Junto con tus compañeros de equipo desafía a otro grupo.**

   - A través de las figuras anteriores (estrella, mariposa, flor y puntos) escribe una expresión algebraica en el papel entregado por la profesora y que el otro equipo adivine la expresión.

- Luego de trabajar la segunda actividad y obtener las conclusiones pertinentes, se inicia la actividad final.

Tercera Actividad.

1. Reduzca los términos semejantes de las siguientes expresiones con la ayuda las figuras (estrellas, mariposas, flores y puntos). Escriba el resultado obtenido y represéntelo pegando las figuras.

a) $2x^2 + 3x^2 =$

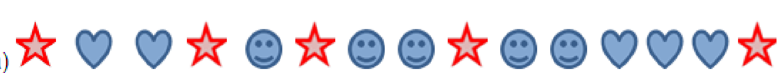
b) $x^3 - 4x^3 + x^3 =$

c) $4x^3 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1 + 2 =$

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Finalmente ¿Qué se puede concluir de las actividades anteriores?

➢ Al finalizar la última actividad de la clase, la docente comienza a preguntar a cada grupo sobre las conclusiones obtenidas.</td></tr>
<tr><td>minutos</td><td>CIERRE</td><td>➢ La docente a partir de las conclusiones presentadas por cada grupo, institucionaliza el contenido trabajado en la clase, identificándolo como: Reducción de términos semejantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES DE EVALUACION</td><td>A través las actividades al finalizar el desarrollo de la clase, se revisan mediante preguntas las conclusiones obtenidas por cada grupo, con respecto al indicador de logro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">RECURSOS EDUCATIVOS</td><td>➢ Sobres
➢ Figuras de cartulina
➢ Pegamento
➢ Lápiz
➢ Goma
➢ Hojas de respuestas entregadas por la docente.
➢ Data</td></tr>
</table>

Planificación Situación Nº3

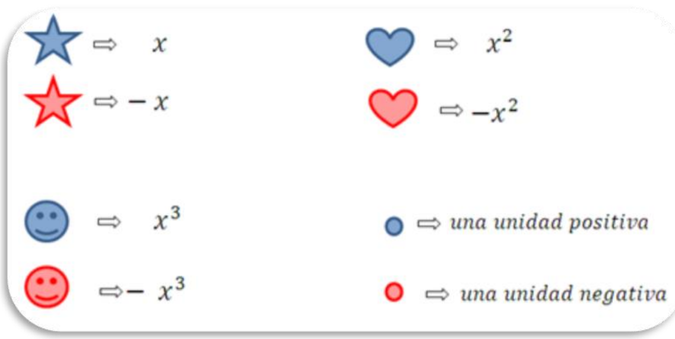
Unidad/contenido		**Unidad 1: “ Números y Álgebra ”**
O. Aprendizaje de la clase.		Evaluar aprendizajes de términos semejantes.
Actitudes		Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas. Manifestar un estilo de trabajo ordenado y metódico. .
Habilidades		Identificar Descubrir Deducir Reducir Resolver
Indicadores de logro		Identifican y comprenden términos semejantes.
TIEMPO	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
Minutos	**INICIO**	➢ La docente saluda a los estudiantes ➢ Indica el Objetivos de Aprendizaje de la clase: “Evaluar aprendizajes de términos semejantes” ejercitados en dos situaciones en clases anteriores.
30 Minutos	**DESARROLLO**	➢ La docente entrega la actividad y da indicaciones para trabajar en la actividad del día de hoy. ➢ Indica que se trabajaran individualmente. ➢ Se leen las instrucciones de la prueba y la forma de contestarla. **Actividad Nº3** 1. Observa las siguientes imágenes e identifica los objetos similares. a)  b) 

2) Identifica los términos semejantes de las siguientes listas.

a) $6b \quad 5x^2 \quad 4x^6 \quad \frac{b}{2} \quad x^2 \quad 2e$

b) $6^3 \quad 2y \quad 3y^2 \quad 6^2 \quad y \quad 5y^8$

3) Dadas las siguientes imágenes y sus representaciones, simboliza cada una de las expresiones algebraicas y luego redúcelas.



a) $2x^2 + 3x^2 =$

b) $x^3 - 4x^3 + x^2 + 1 - 3 =$

4) Reduce los términos semejantes

a) $a + 2b + 2a + b + 2c =$

b)$6f^2 + 3f - 2f =$

minutos	**CIERRE**	➢ Se retiran la actividad para su revisión.
RECURSOS EDUCATIVOS		➢ Actividad impresa ➢ Lápiz ➢ Goma

Entrevista Semiformal

Es de nuestro interés recabar observaciones con respecto a nuestra secuencia didáctica, es por esto que se realizó una entrevista a la sicopedagoga del colegio A, la cual asistió a la situación 1 y 2 de la secuencia.

Pregunta 1: ¿Cuál es su función durante las clases de matemática?

Psicopedagoga: "*En la sala de clase ayudo a los alumnos que poseen dificultades de aprendizaje, hay un grupo seleccionado de alumnos pero a su vez se da atención a la diversidad del curso, que radica en los contenidos que ellos tienen deficientes o los enunciados que a veces no entienden o los procedimientos que no logran automatizar por lo cual uno actúa como mediador en sus aprendizajes"*

Pregunta 2: ¿Asiste normalmente a las clases de matemática?

Psicopedagoga: *"Asisto un periodo de 90 minutos una vez a la semana en la asignatura de matemática"*

Pregunta 3: ¿Cuáles son las características de las clases de matemática regularmente?

Psicopedagoga: *"La clases de partida siempre existe un objetivo claro conocido por los alumnos, son clase en ocasiones expositivas y en otras expositivas y explicación en las cuales el docente explica el contenido y después siempre termina realizando ejercicios para ver si logran los objetivo. Hay clase también que son audiovisuales que existe material de power point donde hay distintos "*

Pregunta 4: Con respecto a la secuencia didáctica aplicada al curso, ¿Usted notó diferencias de lo que se hace usualmente durante la clase?

Psicopedagoga: *"o sea existe una diferencias notables a las clase tradicionales que se realizan en la asignatura, debido a que al manipular diversos materiales y a su vez en forma visual la información. El hecho de que los niños hubieran manipulado diversos materiales que ya no sea solo la clase expositiva, sea ocupando todos los canales de procesamiento de la información hace que los niños logren transferir a otro contexto los aprendizajes adquiridos a su vez sean más significativos para ellos"*

Pregunta 5: Desde su perspectiva vio una mayor comprensión de los alumnos al trabajar con material concreto.

Psicopedagoga: *"Se vio mucho más compresión de los alumnos, aparte que la disposición era distinta en ocasiones hubo más silencio de lo habitual donde ellos querían saber, ¿para qué? se iba ocupar el material entonces estaban atentos a todas las indicaciones que el docente daba. Yo creo que se logró el objetivo propuesto y a su vez también lograron internalizar el contenido que el docente entrego así que eso "*

Pregunta 6: ¿Cuál de las dos actividades a las cuales asistió considera que se cumplió el objetivo propuesto a cabalidad?

Psicopedagoga: *"La primera actividad encontré que el hecho que ellos manipularan y crearan logró el objetivo con mayor rapidez esa es mi percepción, tomando en cuenta el nivel de los alumnos que están en el colegio yo creo que en otra situación quizás la segunda se habría logrado el objetivo a cabalidad pero, acorde al contexto que estamos insertos la primera logró el objetivo más claramente"*

Pregunta 7: Nos daría alguna sugerencia para las actividades.

Psicopedagoga: *"No sé según lo que recuerdo el tiempo estaba bueno lograban hacer las actividades por completo de hecho hubo tiempo hasta para reflexión y la cantidad de preguntas era óptima la primera era de aplicación, la segunda también y la última era un cierre"*