



**FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CARRERA DE MATEMÁTICA**

***UN ESTUDIO DE LAS INECUACIONES LINEALES DESDE
EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO (ETM)***

**Tesis para optar al Título de Profesor de Enseñanza Media en Matemáticas, mención
Didáctica de la Matemática y al grado de Licenciado en Educación**

**Belén Arévalo Fernández
Tamara Rojas Leiva**

Profesora guía: María Inés Pezoa Reyes

Valparaíso, año 201

Agradecimientos

Agradecemos a la profesora Romina Menares quien fue piedra angular para el desarrollo del presente trabajo de investigación, ya que en un inicio fue nuestra profesora guía trabajando un semestre con nosotras, durante ese tiempo sentimos su apoyo incondicional, su siempre buena disposición para atender nuestras interrogantes, animándonos a cada instante a seguir adelante y dar lo mejor de nosotras.

A la profesora María Inés Pezoa quien confió en nosotras para seguir adelante con el presente trabajo de investigación, porque no dudó en prestar su colaboración y entregar lo mejor de sí, por brindarnos su tiempo y valiosos consejos que nos permitieron finalizar exitosamente este proceso.

A Gerardo Araya secretario de la facultad por su disponibilidad y colaboración durante todo este proceso.

A nuestras familias por su confianza, por su apoyo incondicional y su constante motivación en los momentos que más lo necesitábamos.

A Pedro Olivares por su disponibilidad y colaboración, quien de buena voluntad nos brindó ayuda cada vez que lo necesitábamos.

A todos aquellos que de una u otra manera influyeron en el desarrollo de este proceso entregándonos su apoyo en cada momento.

Índice

Capítulo 1: Antecedentes y Problemática.....	7
1.1 Descripción del problema de investigación	8
1.1.1 Antecedentes del problema	8
1.2 Investigaciones previas y justificación del problema	10
1.3 Inecuaciones Lineales en el Currículum Escolar chileno	12
1.4 Inecuaciones lineales en textos escolares	13
1.3 Objetivos de investigación.....	30
1.3.1 Objetivo general	30
1.3.2 Objetivos Específicos.....	30
Capítulo 2: Marco Teórico	31
2.1 Aproximación Epistemológica	32
2.1.1 Antecedentes Históricos.....	32
2.2 Inecuaciones como objeto matemático	33
2.2.1 Conjunto de los Números Reales	33
2.2.2 Inecuaciones	36
2.2.3 Desigualdades.....	36
2.2.4 Conjuntos en \mathbb{R}	40
1.2.5 Intervalos	42
1.2.6 Funciones.....	45
2.3 Teoría de Espacios de Trabajo Matemático.....	48
2.3.1 Paradigma geométrico.....	48
2.4 Espacio de Trabajo Geométrico.....	49
2.5 Espacio de Trabajo Matemático	51
2.5.1. Génesis Semiótica	52

2.5.2 Génesis Instrumental.....	53
2.5.3. Génesis Discursiva	54
Capítulo 3: Metodología.....	58
3.1 Ingeniería Didáctica como metodología de Investigación.....	59
3.2 Fases de la investigación.....	59
3.2.1 Análisis preliminares.....	59
3.2.2 Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas	60
3.2.3 Experimentación Propuesta de Enseñanza-Aprendizaje	88
3.2.4 Análisis a Posteriori y Evaluación	113
Capítulo 4: Conclusiones.....	115
Referencias	119
Anexos.....	122
Anexo 1: Producciones del Cuestionario, Estudiantes Universitario	123
Anexo 2: Producciones del Cuestionario, Estudiantes de Enseñanza Media	152
Anexo 3: Producciones Preguntas Adicionales al Cuestionario, Estudiantes Universitarios.....	172
Anexo 4: Producciones Preguntas adicionales al Cuestionario, Estudiantes de Enseñanza Media	181
Anexo 5: Producciones Propuesta, Binomio 1	190
Anexo 6: Dialogo Propuesta, Binomio 1	201
Anexo 7: Producciones Propuesta, Binomio 2	219
Anexo 8: Dialogo Propuesta, Binomio 2	232

Introducción

En el sistema educativo Chileno, el concepto de inecuaciones lineales es tratado en cuarto año de enseñanza media, donde los alumnos aprenden a resolver inecuaciones a través de algoritmos establecidos, por lo que el desarrollo de este conocimiento es principalmente de carácter procedimental.

La problemática que abordamos en esta investigación gira en torno al concepto de la inecuación lineal a nivel escolar donde observamos que se privilegia un tratamiento algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, pero cuidando respetar las propiedades de la desigualdad, como la multiplicación por -1 , lo cual genera dificultades para la comprensión e interpretación del conjunto solución. Nuestro interés en particular es analizar el *espacio de trabajo matemático* de los estudiantes en torno al concepto inecuación lineal para diseñar una propuesta de enseñanza que aporte a la superación de dichas dificultades.

El sustento didáctico con el que abordamos esta problemática es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), teoría que considera el trabajo matemático como el resultado de un proceso progresivo de génesis que permite la articulación interna de los planos cognitivos y epistemológicos.

La organización del trabajo sigue la siguiente estructura:

Capítulo 1. Se presentan antecedentes que describen la problemática, apoyados en investigaciones y documentos oficiales del marco curricular vigente (MINEDUC, 2009) que abordan el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. Finalmente se establecen objetivo general y específicos.

Capítulo 2. En este capítulo se presentan algunas aproximaciones epistemológicas y conceptuales de las inecuaciones lineales y se describen los elementos de la Teoría de Espacio de Trabajo Matemático.

Capítulo 3. Se presenta el contexto experimental, la descripción de la organización metodológica, en donde adoptamos elementos de la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, la cual consta de las siguientes etapas:

1. En el análisis preliminar, se realiza un estudio del concepto inecuación lineal, considerando el marco curricular vigente, programas de estudio, actividades sugeridas en los textos escolares. Además de investigaciones que dan cuenta de obstáculos y dificultades en el aprendizaje y enseñanza de este concepto y aspectos epistemológicos asociados.
2. Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, esta fase consta de dos etapas aplicación de cuestionario exploratorio y elaboración de una propuesta de enseñanza aprendizaje a partir de los resultados del instrumento exploratorio
3. Experimentación y análisis a posteriori, en esta fase se implementa la propuesta y se realiza un análisis de las producciones de los estudiantes a la luz de nuestro marco didáctico ETM.

Capítulo 4. Aborda los resultados obtenidos de acuerdo a los objetivos planteados en esta investigación.

Capítulo 1: Antecedentes y Problemática

1.1 Descripción del problema de investigación

1.1.1 Antecedentes del problema

En el **marco curricular chileno**¹, actualizado en el año 2011, las inecuaciones son tratadas solo desde el nivel de cuarto año de enseñanza media **plan común**² (17 años aproximadamente) Sin embargo dicho tema, en el plan **diferenciado**³ de tercer año de enseñanza media, está relacionado con los sistemas de inecuaciones con dos incógnitas⁴, donde identificamos un desajuste, pues según los documentos oficiales, los estudiantes de tercer año plan diferenciado no tendrían los conocimientos previos necesarios para abordar problemas relacionados con la programación lineal. Entonces nos preguntamos cómo el profesor logra realizar una transposición didáctica adecuada para abordar estos contenidos.

En los programas de estudio, el trabajo propuesto para las inecuaciones es más bien de tipo algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, pero cuidando respetar las propiedades de la desigualdad, como la multiplicación por -1. Según otras investigaciones, esto provoca que la desigualdad carezca de significado (Borello, 2010), trasladando todo el trabajo al desarrollo de la igualdad. Además, podemos observar que el desarrollo propuesto para el tema de las inecuaciones no favorece el estudio de las gráficas, al respecto solo hemos encontrado el uso del dibujo de los intervalos para encontrar el conjunto solución de una inecuación.

¹ *Dispositivo elaborado por el Ministerio de Educación que entrega los contenidos mínimos obligatorios para cada nivel escolar. Se renueva cada cierto tiempo en base a los diferentes ajuste curriculares.*

² *El Plan Común es un plan de estudio aplicado a todos los estudiantes del país*

³ *El Plan Diferenciado corresponde al programa para aquellos estudiantes que optan por profundizar en los temas matemáticos.*

⁴ *Contenido propuesto en los Programas de Estudio, dispositivo que entrega orientaciones didácticas que facilitan el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de los objetivos de aprendizaje. Tanto en la enseñanza básica como media, se individualizan por asignatura, incluyendo orientaciones que se relacionan con la metodología, la evaluación y los recursos educativos involucrados, pudiendo incluir actividades que ejemplifiquen el proceso didáctico, de manera de apoyar el proceso posterior de planificación de clases. /<http://www.cned.cl/>*

Pese a lo anterior, el trabajo con las gráficas se hace necesario cuando los estudiantes de tercer año de enseñanza media plan diferenciado trabajan el tema de *programación lineal*. Muchas veces la gráfica no solo guía, sino también da sentido a las respuestas, por lo que consideramos que el desarrollo gráfico toma un rol importante tanto en la resolución como en la argumentación de los procesos relacionados con el sistema de inecuaciones lineales.

Otro documento utilizado como apoyo para las actividades propuestas en el aula, son los textos escolares⁵, en ellos hemos encontrado que para cuarto año de enseñanza media, se trata el contenido de inecuaciones lineales tomando como conocimientos previos las ecuaciones lineales y su resolución, para posteriormente introducir los conceptos de intervalos, inecuaciones lineales y sistema de inecuaciones lineales con una incógnita. En los textos, se realiza un trabajo previo de actividades relacionadas a conjuntos numéricos, haciendo referencia a su representación por extensión y por comprensión y a sus operaciones (unión e intersección), continuando con actividades de desigualdad referidas a la interpretación de información y haciendo énfasis en sus propiedades, como sumas y multiplicaciones en ambos lados de la desigualdad, finalizando con actividades de representación de conjuntos de números reales utilizando intervalos y operaciones con intervalos.

Por otro lado, es sabido que los contenidos y el tratamiento en las pruebas estandarizadas marca una pauta para lo que los profesores realizan en el aula. En Chile existen dos pruebas estandarizadas **SIMCE**⁶ y **PSU**⁷. El tema de inecuaciones lineales es

⁵Textos producidos por editoriales, y para el caso de colegios públicos y subvencionados, estos textos son licitados por el ministerio de educación.

⁶SIMCE sistema de evaluación que la Agencia de Calidad de la Educación utiliza para evaluar los resultados de aprendizaje de los establecimientos, evaluando el logro de los contenidos y habilidades del currículo vigente, se aplica a todos los estudiantes que cursan 2°, 4°, 6° Y 8° básico como a los de II y III medio.

⁷PSU Prueba de Selección Universitaria es un test estandarizado escrito realizado en Chile desde 2003 para el proceso de admisión a la educación universitaria.

evaluado solo en PSU. Para esta prueba, hemos encontrado un ejemplo del año 2012 donde aparece la siguiente pregunta:

- ¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación $2x + 7 \leq 12 + x$?
- I) El conjunto de los números reales menores que 5
 - II) El conjunto de los números reales mayores que 5
 - III) el conjunto formado solo por el número 5.
- A) Sólo I
 - B) Sólo II
 - C) Sólo III
 - D) Sólo I y III
 - E) Sólo II y III.

Pregunta PSU 2012: Datos del DEMRE⁸

Según los análisis realizados a los resultados obtenidos en esta prueba (DEMRE, 2012), se observó que del total de los estudiantes que respondieron a dicha pregunta solo el 26% marcó la alternativa correcta, siendo considerada una pregunta difícil, con una omisión de un 48%. Dado que la alternativa A constituyó el distractor más marcado, se estima que la gran dificultad estuvo en la falta de comprensión del concepto de conjunto, ya que posiblemente quienes resolvieron la inecuación obtuvieron correctamente $x \leq 5$, marcando solo la afirmación de I) sin percatarse que el conjunto III) también satisface la inecuación.

1.2 Investigaciones previas y justificación del problema

El tema de las inecuaciones ha sido tratado en diversas investigaciones relacionadas con su enseñanza. Borello (2010), trata el problema de la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones, señalando que las inecuaciones se tratan como un tema desvinculado de las

⁸ Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) de la Universidad de Chile.

desigualdades, lo cual genera que carezcan de significado y que al momento de operarlas se trabajen inapropiadamente como una ecuación, “[...] afectando considerablemente la posibilidad que los estudiantes aprendan a resolver correctamente las inecuaciones (estamos hablando del plano de lo cognitivo)” (p.162), esto lo señala como consecuencia de “[...] consolidarse de una tradición que ve la inecuación como una “hermana” de la ecuación: un objeto parecido a la ecuación que se resuelve “casi” de la misma manera”(p.162-163).

En esta misma línea, otras investigaciones en didáctica de las matemáticas, tratan el tema de las dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones. Linchevsky y Sfard (1994) declaran que “una ecuación o desigualdad parece ser para el estudiante una cosa en sí misma, por lo que las manipulaciones formales son la única fuente de sentido” (p. 306), asumiendo que el trabajo de los estudiantes es más bien mecánico y sin dar sentido a la desigualdad. Además, señalan que “para la mayoría de los alumnos, ecuación y desigualdad parecen ser cadenas sin sentido de ciertos procedimientos bien definidos que se aplican habitualmente” (p.306).

Otra investigación que trata la enseñanza de las inecuaciones lineales, es el análisis a una secuencia de aula japonesa⁹ en la que se pretende proporcionar significado a las desigualdades. En esta clase el profesor utiliza una situación problemática que conlleva el uso de desigualdades y propone a los alumnos el desarrollo de ésta en forma individual. Obteniendo como observaciones finales “la estrecha relación entre los conceptos de desigualdad e igualdad en los estudiantes (p.146) también se observa que, entre los intentos de resolución de los enfoques de los estudiantes para el problema dado, nadie utiliza una representación gráfica cartesiana (p.146)”.

Por su parte, Alvarenga (2006) realiza una propuesta para la enseñanza de las inecuaciones, señalando que “la enseñanza-aprendizaje del concepto inecuación en los últimos años de la escuela primaria, secundaria, preparatoria y de la licenciatura debe abarcar actividades que involucren resolución en el contexto gráfico, uso de tablas, relación

⁹ *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004 (Vol 2 pp 137-166)*

con las funciones, aplicaciones prácticas, empleo de las propiedades de los reales, análisis de equivalencias e implicaciones, uso de calculadoras gráficas o computadora. La diferencia entre los niveles de su enseñanza ocurre en cuanto a la complejidad del estudio” (p.151).

En otra investigación de Borello (2007) señala que “las técnicas, mecanizaciones o fórmulas toman un papel protagónico, en vez de la comprensión e interpretación de las soluciones de una inecuación, ya que el estudio de las inecuaciones no solo abarca una ejercitación a través de algoritmos, sino que se basa en un análisis de las relaciones que se dan entre las expresiones”.

1.3 Inecuaciones Lineales en el Currículum Escolar chileno

El marco curricular vigente (última actualización 2009) está constituido por los objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios, para cada unidad de aprendizaje y cada uno de los niveles de enseñanza escolar.

Para el estudio de Inecuaciones lineales se plantean los siguientes objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios, que responden a los aprendizajes esperados para cuarto año de enseñanza media:

- **Objetivos Fundamentales:**
 - Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resulte sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.
 - Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

- **Contenidos Mínimos Obligatorios:**
 - Representación de intervalos mediante lenguaje conjuntista y uso de las operaciones con conjuntos para resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

- Resolución de problemas que implican el planteamiento de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita; representación de las situaciones usando intervalos en los reales; discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. Representación de las situaciones usando un procesador simbólico y gráfico de expresiones algebraicas.

1.4 Inecuaciones lineales en textos escolares

El texto escolar es el recurso educativo más utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Diversas investigaciones señalan que la presencia de textos escolares es uno de los factores que tienen una mayor influencia positiva en el rendimiento escolar, también se ha demostrado que “los alumnos aprenden más usando textos de estudios que sin ellos, cuando se mantienen constantes las habilidades y la calidad de los profesores”¹⁰.

Por otra parte los textos escolares “dan una forma concreta al currículo y permiten que el profesor pueda planificar sus clases [...] son una herramienta sumamente eficaz para actualizar y perfeccionar la formación del profesorado” y “a la vez, permiten a los alumnos estudiar independientemente si es necesario y paliar las deficiencias educacionales de su familia o de su escuela”¹¹.

Para conocer cómo es tratado el tema de inecuaciones lineales en la enseñanza media, hemos analizado dos textos escolares oficiales utilizados en Chile, uno de estos es Matemática para cuarto año de educación media de la editorial Santillana entregado por el MINEDUC¹² para este año 2014, el otro texto que se analizará es Matemática 4, Proyecto Bicentenario, para cuarto año de educación media editorial Santillana.

¹⁰ Fontaine, Loreto y Bárbara Eyzaguirre. “Por qué es importante el texto escolar”, *Revista Estudios Públicos* N°68, Primavera 1997, P.359.

¹¹ Fontaine, Loreto y Bárbara Eyzaguirre. “El futuro en riesgo: nuestros textos escolares”, *Revista Estudios Públicos* N°68, Primavera 1997, P.340.

¹² Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC).

Para efectos de nuestro análisis, hemos tomado en cuenta cómo es abordado el tema de inecuaciones lineales y en especial si el enfoque es gráfico y/o algebraico.

1. Matemática texto del estudiante, 4° medio. Editorial Santillana, 2014

Este texto de estudio corresponde al entregado por el MINEDUC. El tema de inecuaciones lineales es tratado en la segunda unidad de este, tomando como conocimientos previos: lenguaje algebraico, ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones lineales, conjuntos y operaciones entre conjuntos, por lo que en el texto se realiza un trabajo previo (a modo de recordatorio) de actividades que abordan dichos contenidos.

La unidad de inecuaciones lineales en el texto se organiza en cinco lecciones afines a dicho contenido que son: conjuntos, desigualdades, intervalos de números reales, propiedades de las desigualdades e inecuaciones con una incógnita. A continuación se realizará un análisis por lección.

- Lección 1: Conjuntos

Esta lección se enfoca en la representación de conjuntos por extensión y por comprensión y en sus operaciones (unión e intersección).

- Lección 2: Desigualdades

En esta lección se utiliza el siguiente ejemplo para introducir el concepto de desigualdad:

Repaso

1. ¿Qué significa el signo $<$? Da un ejemplo.
2. Escribe 3 números enteros que superen a -4 .

En la siguiente imagen se muestra la temperatura mínima y la máxima registrada en un día en Concepción.

- Utiliza alguno de los signos $<$, $>$, \leq o \geq para representar la relación de orden que hay entre los números correspondientes a las temperaturas mínima y máxima.
- Si ese día, a las 10 de la mañana la temperatura registrada era t , utiliza algunos de los signos $<$, $>$, \leq o \geq para representar la relación de orden que hay entre t y las temperaturas mínima y máxima.

Concepción – informe del día
Domingo 01

Mín: 8 °C
Máx: 11 °C

Cubierta y precipitaciones

Extracto Página 88, Texto del estudiante 4° medio

También se muestran otros ejemplos en donde se expresa información mediante desigualdades y un ejemplo de verificación de una desigualdad numérica, y luego se define formalmente el concepto de desigualdad. Posteriormente se presenta una actividad en donde los estudiantes tienen que expresar información en desigualdad, verificar la veracidad de algunas desigualdades y proponer una situación que corresponda a una desigualdad dada.

Por otra parte se introduce la desigualdad como una notación para representar conjuntos por comprensión como se evidencia en la siguiente imagen:

Tomo nota

- También se pueden usar desigualdades para representar conjuntos por comprensión; por ejemplo:

$$P = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x \leq 8\}$$

tal que

x pertenece al conjunto de los números naturales.

x es mayor que 2 y menor o igual que 8.

Extracto Página 90, Texto del estudiante 4° medio

Se exponen ejemplos desarrollados en donde se presenta un conjunto por extensión y se tiene que expresar por comprensión utilizando desigualdades y viceversa, además de un ejemplo en donde presentan dos conjuntos por comprensión y se tiene que encontrar su unión, como se muestra en la siguiente imagen:

¿Cómo hacerlo?

Representa por comprensión el conjunto $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Si te fijas, los elementos del conjunto son números primos menores o iguales que 29. Luego, lo podemos definir por comprensión de la siguiente manera:

$$B = \{x / x \text{ es primo} \wedge x \leq 29\}$$

¿Cómo hacerlo?

Representa por extensión el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 < x \leq 4\}$.

Los elementos del conjunto A son todos aquellos números enteros mayores que -5 y menores o iguales que 4 . Luego, al definirlo por extensión nos queda:

$$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

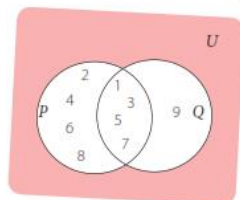
¿Cómo hacerlo?

Dados los conjuntos $P = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 8\}$ y $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determina $P \cup Q$ y $P \cap Q$.

Podemos definir el conjunto P por extensión, ya que sus elementos son los números naturales menores o iguales que 8 , es decir: $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Luego, $P \cup Q$ contiene a todos los elementos que están en P o en Q , es decir: $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Por otra parte, $P \cap Q$ contiene a todos los elementos que están en P y Q simultáneamente, es decir: $P \cap Q = \{1, 3, 5, 7\}$



Extracto Página 90, Texto del estudiante 4° medio

Finalmente se propone una actividad donde los estudiantes tienen que utilizar la desigualdad para escribir conjuntos por comprensión dados por extensión y viceversa, también se les presentan conjuntos por extensión y se les pide realizar operaciones (de intersección y unión) de esos conjuntos.

- Lección 3: Intervalos de números reales

Inicialmente se presenta una situación que tiene como finalidad evidenciar que es imposible escribir un conjunto de números reales por extensión, salvo si corresponde a números aislados. Y a partir de ello, se introduce los intervalos de números reales.

Repaso

1. Menciona 10 números reales que se encuentren entre 1,2 y 1,4.
2. ¿Cuántos números reales hay entre dos números reales dados?

Si queremos determinar todos los números enteros que cumplen la condición $-3 \leq n < 5$, podemos escribir el conjunto correspondiente, esto es:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Ahora, ¿cómo podrías representar por extensión todos los números reales que cumplen la condición $-3 \leq x < 5$? Argumenta tu respuesta.

Seguramente te diste cuenta de que escribir por extensión todos los números reales tales que cumplan $-3 \leq x < 5$ sería imposible, porque hay infinitos números. Pero existe otra manera de representar este tipo de conjuntos: usando **intervalos de números reales**.

En este caso, el conjunto se representa $[-3, 5[$. Se dice que es **cerrado** en el -3 , porque el conjunto incluye ese número, y **abierto** en el 5 , porque no lo incluye.

Extracto Página 92, Texto del estudiante 4° medio

Luego mediante ejemplos se muestra a los estudiantes la manera de representar un conjunto por comprensión mediante intervalos de números reales, y también cómo a partir del dibujo de un intervalo se puede escribir en notación de intervalo y como conjunto por comprensión, como se evidencia en la siguiente imagen:

Atención


La orientación de los corchetes nos indica si los extremos del intervalo forman parte del conjunto o no; por ejemplo:
 $] -1, 10[$ representa a todos los números n que cumplen:
 $-1 < n < 10$
 $[-1, 10]$ representa a todos los números n que cumplen:
 $-1 \leq n \leq 10$
 $[5, +\infty[$ representa a todos los números n que cumplen
 $5 \leq n$.

¿Cómo hacerlo?

Representa como un intervalo el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / 1,25 < x \leq 4,8\}$.

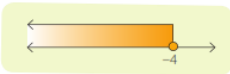
Para expresar el conjunto anterior como intervalo escribimos los números correspondientes a los extremos del intervalo, separados por una coma (o punto y coma) y un espacio, y decidimos la orientación de los corchetes, según si el intervalo es abierto o cerrado, en cada caso.

Luego, el intervalo es $]1,25;4,8]$, y su representación gráfica es la que se muestra en la imagen de la izquierda.



¿Cómo hacerlo?

Respecto de la siguiente figura, ¿qué elementos están representados? Exprésalos como un conjunto, por comprensión, y utilizando notación de intervalos.



Para expresar la representación gráfica como conjunto, identificamos los números que están identificados en la recta numérica. En este caso, corresponde a todos los números menores que -4 . Luego, como conjunto se escribe $\{x \in \mathbb{R} / x < -4\}$ y como intervalo, $] -\infty, -4[$, porque incluye al -4 .

Extracto Página 92, Texto del estudiante 4º medio.

Posteriormente se plantea una actividad en donde los estudiantes tienen que identificar elementos de un intervalo dado, expresar como notación de intervalo y dibujo en la recta real conjuntos dados por comprensión y encontrar un intervalo para ciertos números propuestos.

Tomando en consideración la manera de realizar operaciones de conjuntos (intersección y unión) se introduce las operaciones de intervalos. Mediante ejemplos se muestra a los estudiantes como realizar operaciones (intersección y unión) con intervalos de números reales.

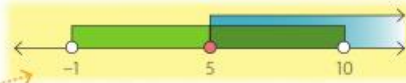


De la misma manera que pueden realizarse operaciones entre conjuntos, tales como su unión y su intersección, estas operaciones pueden extenderse a los intervalos, ya que, por definición, los intervalos son conjuntos de números reales.

En particular, nos concentraremos en la unión y la intersección de intervalos de números reales; por ejemplo, si tenemos los intervalos $A =]-1, 10[$ y $B = [5, +\infty[$ podemos determinar la unión $A \cup B$, considerando tanto los números que están entre -1 y 10 , ambos no incluidos, como los que son mayores o iguales que 5 .

En muchos casos, una buena alternativa para resolver un problema es representar la situación con un dibujo.

Observa la representación gráfica de ambos conjuntos:



En la figura anterior, representamos con color verde el conjunto A , y con azul el conjunto B . Entonces, para determinar $A \cup B$ debemos incluir todos los valores de la recta que quedaron pintados, ya sea con verde por pertenecer a A , o con azul por pertenecer a B . Finalmente podemos concluir que $A \cup B =]-1, +\infty[$.

Por otra parte, podemos determinar la intersección $A \cap B$, que corresponde a los números que pertenecen a A y B simultáneamente. En la figura anterior, $A \cap B$ son los valores de la recta que quedaron coloreados con verde y azul, es decir, $A \cap B = [5, 10[$.

¿Lo entiendes?

En el ejemplo, el número 5, ¿forma parte de $A \cap B$? ¿y el 10?, ¿por qué?

Extracto Página 94, Texto del estudiante 4° medio

Por otro lado a partir de un ejemplo en donde se intersectan dos intervalos que no tienen elementos en común se introduce el conjunto vacío. Luego se propone una actividad en donde los estudiantes determinan algunas intersecciones y uniones de intervalos y lo expresan en notación de intervalos y dibujo de intervalo en la recta real, escriben una unión o intersección según sea el caso a partir de los dibujos de intervalos en la recta real propuestos y realizan operaciones con intervalos.

- Lección 4: Propiedades de las desigualdades

Para comenzar esta lección se presenta una situación con el fin de ilustrar e introducir la propiedad de transitividad, además de mostrar que si a una desigualdad se le suma o resta un mismo número la desigualdad se mantiene. Luego lo dicho anteriormente se formaliza como se muestra en la siguiente imagen:

Tomo nota

- Propiedad de transitividad:
Si a, b y c son números reales y se cumple que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- El sentido de una desigualdad no cambia si se suma o resta un mismo número real a ambos lados de la desigualdad. Es decir:
 - si $a < b, y c \in \mathbb{R}$, entonces, $a + c < b + c$;
 - si $a < b, y c \in \mathbb{R}$, entonces $a - c < b - c$.

Extracto Página 96, Texto del estudiante 4° medio

A partir de una desigualdad numérica se muestra qué ocurre con la desigualdad cuando se multiplica (y divide) por un número real positivo y con un número real negativo, para luego formalizar lo observado.

Tomo nota

- El sentido de una desigualdad **no cambia** si se multiplica o divide un mismo número real positivo a ambos lados de la desigualdad. Es decir:
 - si $a < b, y c \in \mathbb{R}^+$, entonces $ac < bc$;
 - si $a < b, y c \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- El sentido de una desigualdad **cambia** si se multiplica o divide un mismo número real negativo a ambos lados de la desigualdad. Es decir:
 - si $a < b, y c \in \mathbb{R}^-$, entonces $ac > bc$;
 - si $a < b, y c \in \mathbb{R}^-$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Extracto Página 97, Texto del estudiante 4° medio

Por otra parte se muestra un problema de una situación real, en donde su solución es modelada a través de una desigualdad, tal y como se muestra en la imagen adjunta:



Podemos aplicar las propiedades anteriores en diversas situaciones en las que intervienen desigualdades, por ejemplo, si queremos viajar a algún lugar muy lejano es importante saber la temperatura que hay en ese lugar, para saber si es necesario llevar ropa abrigada o no. El problema es que dependiendo del lugar, la temperatura se mide con diferentes escalas; por ejemplo, en Chile la temperatura se mide en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$), mientras que en otros países, como Estados Unidos se mide en grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). La relación entre estas dos escalas está dada por la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura expresada en grados Celsius y F , en grados Fahrenheit.

Pronóstico del tiempo en la ciudad del partido

Min: 30°F
Máx: 41°F

Considera la siguiente situación: los integrantes de la selección chilena de fútbol viajarán a Estados Unidos a jugar un partido con la selección de ese país. El pronóstico del tiempo para el día del viaje es el indicado en la tabla de la izquierda. ¿Crees que deban llevar ropa abrigada?, ¿por qué?

Dado que en Chile estamos acostumbrados a medir las temperaturas usando grados Celsius, a primera vista nos será difícil decidir si ese día en Estados Unidos será caluroso o no, ya que las temperaturas están expresadas en grados Fahrenheit. Sin embargo, podemos usar las propiedades de las desigualdades para transformar las temperaturas descritas en $^{\circ}\text{F}$ a $^{\circ}\text{C}$. Observa.

Podemos representar la variación de la temperatura en el día, entre 30°F y 41°F , como $30 \leq F \leq 41$.

Para representar esta variación de temperatura en grados Celsius, podemos basarnos en la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, que muestra la relación entre $^{\circ}\text{C}$ y $^{\circ}\text{F}$. Observa.

$$\begin{aligned}
 30 &\leq F \leq 41 && \text{Restamos 32.} \\
 -2 &\leq F - 32 \leq 9 && \text{Multiplicamos por } \frac{5}{9}. \\
 -1,1 &\leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 5 && \text{Reemplazamos según la expresión } C = \frac{5}{9}(F - 32). \\
 -1,1 &\leq C \leq 5
 \end{aligned}$$

Lo anterior indica que la temperatura pronosticada para ese día en el lugar del partido será entre $-1,1^{\circ}\text{C}$ y 5°C .

Por lo tanto, los jugadores deben llevar ropa muy abrigada.

Extracto Página 98, Texto del estudiante 4° medio

Luego se presenta una actividad en donde los estudiantes refuerzan la utilización de las propiedades de las desigualdades.

Finalmente se expone la utilización de las propiedades de desigualdad en demostraciones matemáticas, para ello se presenta un caso concreto en que se pide demostrar y posteriormente se muestra el procedimiento paso a paso tal como se evidencia en la siguiente imagen.

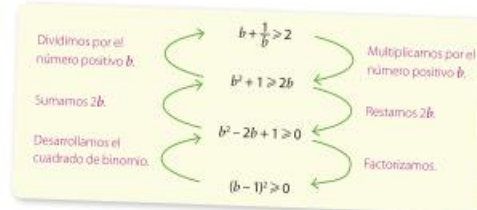
b	$\frac{1}{b}$	$b + \frac{1}{b}$
5	0,2	5,2
2,5	0,4	2,9
2	0,5	2,5
1,5	0,6	2,16
1	1	2
0,8	1,25	2,06
0,5	2	2,5

En la tabla de la izquierda asignamos distintos valores positivos a b y registramos la suma de este número con su recíproco. Si te fijas, al parecer el resultado de $b + \frac{1}{b}$ es mayor o igual que 2 para cualquier valor positivo que asignemos a b . Por lo tanto, podemos suponer que si $b > 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$b + \frac{1}{b} \geq 2$$

En este caso propusimos una conjetura, la cual es una afirmación que suponemos cierta. Sin embargo, es imposible verificar que esta desigualdad se cumple para todos los posibles valores de b . De modo que debemos demostrarla de manera general, utilizando las propiedades de las desigualdades que aprendiste en las páginas anteriores.

Para hacer tal demostración, partiremos de nuestra conjetura y usaremos las propiedades de las desigualdades hasta llegar a otra desigualdad que sea cierta:



Sabemos que la última desigualdad es cierta pues el cuadrado de un número siempre es mayor o igual que 0. Luego, si partimos por la última desigualdad y realizamos el proceso inverso, es decir, efectuando las operaciones indicadas en el lado izquierdo, llegaremos a nuestra conjetura. Luego, hemos demostrado que $b + \frac{1}{b} \geq 2$ para todo b positivo.

¿Cómo hacerlo?

Demuestra que $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$ para todos los valores reales de a y b .

Partimos por una expresión que sabemos cierta:

$(a - b)^2 \geq 0$ Desarrollamos el cuadrado de binomio.

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ Sumamos $2ab$.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ Dividimos por 2.

$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$

Por lo tanto, la conjetura es válida para todos los valores reales de a y b .

Esta desigualdad siempre se cumple, pues el cuadrado de todo número real siempre es positivo o cero.

Extracto Página 100, Texto del estudiante 4° medio

La lección termina con ejercicios de aplicación, en donde los estudiantes tienen que realizar algunas demostraciones.

- Lección 5: Inecuaciones con una incógnita

Previamente a esta lección se realizan una serie de ejercicios de selección múltiple y de desarrollo que involucra los contenidos de las lecciones anteriores.

Para comenzar esta lección se presenta una situación que se puede modelar con una inecuación lineal para introducir el concepto de inecuación lineal como se muestra en la imagen adjunta:

Repaso

1. ¿Qué es una ecuación?
2. Explica, paso a paso, cómo resolverías la ecuación $2x - 3 = 19$.

Sofía viaja en su auto a 36 km/h en un camino cuyo límite máximo de velocidad es el indicado por el letrero de la derecha.

Si Sofía aumenta su rapidez en 12 km/h, ¿sobrepasará el límite permitido?, ¿y qué pasaría si la aumenta en 18 km/h?, ¿por qué?

Muchas situaciones de la vida cotidiana las podemos modelar usando desigualdades en las que hay términos desconocidos; por ejemplo, en el problema anterior podemos llamar x a la velocidad que Sofía puede aumentar sin sobrepasar el límite. Por lo tanto, se tendría que cumplir la desigualdad:

$36 + x \leq 50$



Extracto Página 112, Texto del estudiante 4° medio

Cabe mencionar que explícitamente se hace referencia a las ecuaciones y en su procedimiento de resolución como se evidencia en la imagen anterior.

Luego se muestra una situación a modo de ejemplo en donde la solución es modelada a través de una inecuación lineal y se hace especial énfasis en las propiedades de desigualdad como se muestra a continuación:

¿Cómo hacerlo?

Si un joven es 22 años menor que su padre y 48 años menor que su abuelo, ¿a partir de qué edad la suma de los años que tienen él y su padre será mayor que la edad de su abuelo?

Si definimos como x la edad del joven, entonces la edad de su padre y su abuelo serán $x + 22$ y $x + 48$, respectivamente. Luego, planteamos la inecuación:

$$\begin{aligned}
 x + x + 22 &> x + 48 && \bullet \text{ Reducimos términos semejantes.} \\
 2x + 22 &> x + 48 && \bullet \text{ Restamos } x. \\
 x + 22 &> 48 && \bullet \text{ Restamos } 22. \\
 x &> 26
 \end{aligned}$$

En consecuencia, si el joven es mayor de 26 años, la suma de su edad con la de su padre superará la cantidad de años que tiene su abuelo.

Extracto Página 113, Texto del estudiante 4° medio

Se define formalmente una inecuación lineal y el conjunto solución, posteriormente se presenta una actividad en donde los estudiantes se les plantean algunas inecuaciones y tienen que resolverlas, también se les plantean situaciones similares a los ejemplos anteriores en donde su solución se modela a través de inecuaciones lineales.

Por otro lado se exponen situaciones cuya solución es modelada a través de inecuaciones lineales, pero esta vez se analiza la pertinencia de la solución según el contexto, como se evidencia en la siguiente imagen:

¿Cómo hacerlo?

La suma entre un número natural y su sucesor es inferior a 12. ¿Qué valores puede adoptar tal número?

Si escribimos la información como una inecuación, tenemos:

$$x + (x + 1) < 12 \text{ Reducimos los términos semejantes.}$$

$$2x + 1 < 12 \text{ Restamos 1.}$$

$$2x < 11 \text{ Dividimos por 2.}$$

$$x < 5,5$$

Pero como x es un número natural, entonces solo puede adoptar valores enteros positivos menores que 5,5. Luego: $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Extracto Página 113, Texto del estudiante 4° medio

Se presenta una actividad en donde los estudiantes tienen que desarrollar inecuaciones lineales y se les presentan situaciones como la anteriormente mencionada en donde se tiene que considerar la pertinencia de la soluciones.

2. Texto Matemática 4° Medio, 2014, Santillana Bicentenario

Este texto de estudio corresponde a una obra colectiva, creada y diseñada por el departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana, en el año 2014.

El estudio de Inecuaciones lineales es abordado en la Unidad 1 “Inecuaciones”, la cual presenta la siguiente organización de los contenidos y actividades planteadas:

1°.- Inicia el estudio de Inecuaciones lineales recordando el conjunto de los números reales, notaciones y propiedades de conjuntos.

EN SÍNTESIS

Los **conjuntos numéricos** se pueden representar por medio de un diagrama como el que se muestra a continuación.

$R = Q \cup Q^*$

N: Números naturales
Z: Números enteros
Q: Números racionales
Q*: Números irracionales
R: Números reales

Extracto página 13 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Ejemplo

Se definen los conjuntos $A = \{1, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

- La **unión** entre A y B ($A \cup B$) corresponde a todos los elementos que pertenecen a cualquiera de los conjuntos. En caso que estos se repitan se escriben solo una vez, es decir:
 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 30\}$
- La **intersección** entre A y B ($A \cap B$) corresponde a todos los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al conjunto B, es decir:
 $A \cap B = \{6, 12, 18\}$
- Al representar lo anterior utilizando un diagrama de Venn, se tiene:

John Venn (1834-1923)
 Fue un matemático y lógico británico que desarrolló los diagramas que llevan su nombre para representar las operaciones entre conjuntos.

Extracto página 15 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

2°.- Define lo que es una desigualdad y presenta ejemplos, para luego definir las propiedades de las desigualdades.

Desigualdades

Una desigualdad es una relación entre dos cantidades que representa una comparación en la que se utilizan los siguientes símbolos:

		Ejemplos
<	menor que	→ 4 < 10
>	mayor que	→ -8 > -25
≤	menor o igual que	→ 0,25 ≤ 0,78
≥	mayor o igual que	→ 50 ≥ -60

Extracto página 16 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Propiedades de las desigualdades

Las desigualdades entre números reales cumplen diferentes propiedades, las que pueden aplicarse para resolver problemas expresados mediante una o más desigualdades.

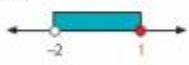
Propiedad	Ejemplo
<p>1. Si a ambos lados de una desigualdad se suma o resta un mismo número real, se obtiene otra desigualdad equivalente a la primera, que mantiene su sentido.</p> $a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c; a, b, c \in \mathbb{R}$	$5 \leq 8$ $5 - 3 \leq 8 - 3$ $2 \leq 5$
<p>2. Toda desigualdad es equivalente a la diferencia entre el miembro mayor y el menor; dicha diferencia es siempre mayor o igual que cero.</p> $a \leq b \Leftrightarrow (b - a) \geq 0; a, b \in \mathbb{R}$	$8 \geq 5$ $(8 - 5) \geq 0$ $3 \geq 0$
<p>3. Si se suman, respectivamente, los lados de dos o más desigualdades, se obtiene otra desigualdad que mantiene el sentido de las desigualdades consideradas.</p> $a \leq b, c \leq d \Leftrightarrow a + c \leq b + d; a, b, c, d \in \mathbb{R}$	$5 \leq 8, 3 \leq 6$ $5 + 3 \leq 8 + 6$ $8 \leq 14$
<p>4. Si a ambos lados de una desigualdad se multiplica o divide por un mismo número real positivo, se obtiene otra desigualdad que mantiene el sentido de la primera.</p> $a \leq b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \vee \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$	$7 \leq 9, 2 > 0$ $7 \cdot 2 \leq 9 \cdot 2$ $14 \leq 18$
<p>5. Si a ambos lados de una desigualdad se multiplica o divide por un mismo número real negativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido que el de la primera.</p> $a \leq b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \vee \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$	$5 \leq 8, -2 < 0$ $5 \cdot (-2) \geq 8 \cdot (-2)$ $-10 \geq -16$
<p>6. Si cada lado de una desigualdad de números reales positivos se transforma en su correspondiente inverso multiplicativo, se obtiene otra desigualdad de distinto sentido que el de la primera.</p> $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}; a, b \in \mathbb{R}^+$	$3 \leq 7$ $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{7}$
<p>7. Si a ambos lados de una desigualdad de números reales no negativos se le extrae su raíz cuadrada, se obtiene otra desigualdad que mantiene el sentido de la primera.</p> $a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}; a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\frac{9}{16} < 6$ $\sqrt{\frac{9}{16}} < \sqrt{36}$ $\frac{3}{4} < 6$

Extracto página 17 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

3°.- Paso seguido define lo que es un intervalo y presenta los diferentes tipos de intervalos.

Intervalos

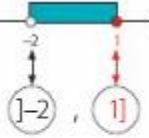
En la recta numérica se muestra la representación de todos los números reales que cumplen la condición $-2 < x \leq 1$.



Lo anterior se puede escribir utilizando un **intervalo de números reales**, que se representa por $] -2, 1]$. La relación entre la recta numérica y el intervalo es la siguiente:

Es **abierto** en -2 , porque el conjunto **no incluye** dicho número.
En la recta se representa con $($.

Es **cerrado** en 1 , porque el conjunto **incluye** dicho número.
En la recta se representa con $]$.



La **orientación** de los corchetes representa si los extremos del intervalo forman parte del conjunto o no.

Extracto página 20 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tienen los siguientes tipos de Intervalos:

Tipo de intervalo	Intervalo	Por comprensión	Representación gráfica
Abierto	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Semiabierto	$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
	$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
No acotado o infinito	$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
	$]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
	$]-\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	

Extracto página 20 "Texto Matemática 4º Medio, Santillana Bicentenario"

Luego mediante ejemplos se muestra la manera de representar intervalos, tanto gráfica como por comprensión:

Ejemplos

Al representar los intervalos de manera gráfica y por comprensión, se tiene:

1. $A =]-5, 3]$

Gráfico:

$A = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq 3\}$

2. $B =]\frac{1}{2}, +\infty[$

Gráfico:

$B = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2}\right\}$

Extracto página 21 "Texto Matemática 4º Medio, Santillana Bicentenario"

Posteriormente se introduce las operaciones de intervalos (unión e intersección), y algunas propiedades, las que por medio de un ejemplo muestran al estudiante su comprobación.

Al considerar A, B y C intervalos en \mathbb{R} , se tienen las siguientes **propiedades**:

- | | |
|--|--|
| a. $A \cup \emptyset = A$ | e. $A \cap \emptyset = \emptyset$ |
| b. $A \cup A = A$ | f. $A \cap A = A$ |
| c. $A \cup B = B \cup A$ | g. $A \cap B = B \cap A$ |
| d. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | h. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |

Extracto página 22 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Ejemplo

Considerando los intervalos $A =]-\infty, -1]$, $B = [-4, 2[$ y $C =]-2, 4[$ comprueba que

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Solución

(i)	(ii)
$(A \cap B) \cap C$	$A \cap (B \cap C)$
$=]-\infty, -1] \cap [-4, 2[\cap]-2, 4[$	$=]-\infty, -1] \cap ([-4, 2[\cap]-2, 4[)$
$= [-4, -1] \cap]-2, 4[$	$=]-\infty, -1] \cap]-2, 2[$
$=]-2, -1]$	$=]-2, -1]$

Luego, como en (i) y en (ii) se tiene el mismo intervalo, es posible comprobar que:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Extracto página 23 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

4°.- Avanzando en la estructura y organización del contenido se advierte una sesión dedicada a la resolución de ejercicios tipo PSU:

The image shows two pages from a textbook. The left page is titled "Evaluación de proceso tipo PSU" and contains four multiple-choice questions. The right page contains questions 5 through 15, also multiple-choice. The questions cover various mathematical topics including set theory, intervals, and algebraic inequalities.

Extracto páginas 26- 27 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

5°.- Define el concepto de Inecuación lineal:

Inecuaciones lineales con una incógnita

Una inecuación de primer grado con una incógnita es una desigualdad en la que intervienen números reales y una incógnita de primer grado.

En una inecuación se relacionan expresiones algebraicas con los símbolos $>$, $<$, \geq y \leq .

Ejemplos

1. $3x < 2$ 2. $z^2 + 4z + 2 \geq z^2 - 1$ 3. $\frac{y}{5} \geq \frac{3y-2}{6}$

Extracto página 28 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Luego mediante ejemplos se muestra la manera de resolver una inecuación lineal, enfatizando en que se pueden aplicar las propiedades de las desigualdades para “despejar” la incógnita. De esta manera una vez resuelta el conjunto solución se puede representar mediante un intervalo, o bien gráficamente en la recta real, como se muestra en la imagen adjunta:

Ejemplos

Resolver cada inecuación.

4. $3(x - 1) \leq x + 2$ $\left| \begin{array}{l} + \\ || \end{array} \right.$

$3(x - 1) \leq x + 2$

$3x - 3 \leq x + 2$ • Se resuelve el paréntesis.

$3x - x - 3 \leq x - x + 2$ • Se resta x en ambos lados.

$2x - 3 \leq 2$

$2x - 3 + 3 \leq 2 + 3$ • Se suma 3 en ambos lados.

$2x \leq 5$

$\frac{2x}{2} \leq \frac{5}{2}$ • Se divide por 2.

$x \leq \frac{5}{2}$

Los números que satisfacen a la inecuación corresponden a $\left\{ x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{5}{2} \right\}$, es decir, corresponden al intervalo $\left] -\infty, \frac{5}{2} \right]$. Este conjunto se puede representar de manera gráfica en la recta real de la siguiente manera:

Extracto página 28 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Paso seguido se presentan situaciones cuya solución es modelada a través de inecuaciones lineales:

Ejemplo

La diferencia entre el triple de un número y su mitad sobrepasa al mismo número aumentado en 6. ¿Qué números cumplen con esta condición?

- **Asignación de la incógnita:** x número desconocido.
- **Se plantea la inecuación:**

El triple de un número	diferencia	la mitad del número	sobrepasa	el número aumentado en 6
$3x$	-	$\frac{x}{2}$	$>$	$x + 6$

- **Se resuelve la inecuación:**

$$3x - \frac{x}{2} > x + 6$$

$$3x - \frac{x}{2} - x > 6$$

$$\frac{6x - x - 2x}{2} > 6$$

$$6x - x - 2x > 12$$

$$3x > 12$$

$$x > 4$$

- **Se responde la pregunta:**
Los números que cumplen con la condición son los mayores que 4.

Extracto página 30 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

Finalmente se analiza la existencia y pertinencia de las soluciones según el contexto, como se evidencia en la siguiente imagen:

La suma de dos números es menor que 4, y uno de ellos es el triple del otro. ¿Qué números naturales cumplen dicha condición?

- **Asignación de la incógnita:** x : primer número
 $3x$: segundo número
- **Planteamiento:** $x + 3x < 4$
- **Resolución:** $x + 3x < 4$
 $4x < 4$
 $x < 1$

Este resultado expresado gráficamente:

- **Respuesta:** debido a que los números naturales son mayores o iguales que 1, no existen números naturales que cumplan con las condiciones del problema. Por lo tanto, el problema no tiene solución.

Extracto página 32 "Texto Matemática 4° Medio, Santillana Bicentenario"

1.3 Objetivos de investigación

1.3.1 Objetivo general

Analizar el espacio de trabajo matemático de los estudiantes, a través de situaciones que involucran el concepto de inecuación lineal, para elaborar una propuesta de enseñanza-aprendizaje.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Conocer las concepciones que tienen los estudiantes de enseñanza media y nivel universitario acerca del concepto de desigualdad e inecuación lineal.
2. Analizar el tipo de tareas que se presenta a los estudiantes tanto en evaluaciones nacionales (PSU) como en los documentos oficiales: programa de estudio y textos escolares que involucran el concepto de inecuaciones lineales.
3. A partir del tipo de tareas encontradas en la revisión antes mencionada analizar el espacio de trabajo matemático de estudiantes de enseñanza media y nivel universitario respecto a las inecuaciones lineales.
4. Elaborar una propuesta de enseñanza-aprendizaje a partir de los análisis preliminares que facilite la articulación entre los planos cognitivos y epistemológico respecto al concepto inecuación lineal.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 Aproximación Epistemológica

2.1.1 Antecedentes Históricos

En la historia de la matemática se atribuye a Thomas Harriot (1560 - 1621) la creación de los símbolos algebraicos: $<$ para referirse a “menor que” y $>$ para referirse a “mayor que”, mientras que a Pierre Bouguer (1698 - 1758) se le atribuyen los símbolos: \leq para referirse a “menor o igual que” y \geq para referirse a “mayor o igual que”.

Por su parte la historia de las inecuaciones es tratada por Giorgio Bagni (2008) quien estudia el desarrollo histórico de las ecuaciones e inecuaciones con el fin de subrayar sus diferentes roles en distintos contextos socioculturales, en el cual señala que la historia de las ecuaciones es bastante rica; en muchas culturas y en diferentes partes del mundo se encontraron procesos relacionados con las ecuaciones. En el Renacimiento la denominada Regola d'Algebra (regla algebraica) era el procedimiento para la resolución de problemas aritméticos que terminaba con la solución de una ecuación algebraica.

Sin embargo la historia de las inecuaciones no es tan rica; antiguamente las desigualdades fueron expresadas por registros verbales como hace, por ejemplo, Euclides en los elementos, cuando habla de las desigualdades relativas a los elementos de un triángulo. De todas maneras, siempre la referencia era a desigualdades y no propiamente a inecuaciones.

Algunas inecuaciones se pueden conectar a la evolución histórica de las técnicas de análisis matemático, por ejemplo con maximizar y minimizar (Hairer y Wanner, citados por Bagni, 2008, p.5).

Para referirse a la matemática del siglo XX Bagni cita a Odifreddi (citado por Bagni, 2008, p.6) quien escribe:

"Una contribución a von Neumann en 1937 fue la solución a un problema que data de L. Walras en 1874: la existencia de situaciones de equilibrio en los modelos

matemáticos de la evolución del mercado, basado en la oferta y la demanda (a través de los precios y costos). Vio, en primer lugar, que un modelo se expresó por las desigualdades (como se hace hoy en día) y no las ecuaciones (como se ha hecho hasta entonces)”.

El autor observa entonces la presencia de una asimetría histórica significativa según la cual, por lo general, los matemáticos expresaban por medio de ecuaciones el problema por resolver y luego, por medio de desigualdades, fijaban las condiciones para las soluciones de dichas ecuaciones. Además, en la historia (y en la práctica didáctica), muy frecuentemente se conducía la resolución de una inecuación a la resolución de la ecuación asociada. Sin embargo, al propósito resulta necesario considerar el contexto social y cultural: la “solución concreta” ha sido muy a menudo considerada como mucho más importante de un abstracto “campo de posibilidades”. Muy frecuentemente se le ha atribuido una importancia social “significativa” a la determinación de la solución, así como nos testimonian la elaboración y el uso de los métodos prácticos y aproximados (Radford, Hairer y Wanner, citados por Bagni, 2008, p.6).

2.2 Inecuaciones como objeto matemático

2.2.1 Conjunto de los Números Reales

El conjunto de los números reales satisfacen los axiomas enumerados a continuación. Dichos axiomas se clasifican de manera natural en tres grupos a los que nos referiremos como *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden* y *axioma de completitud* (llamado también *axioma del supremo* o *axioma de continuidad*) (Apostol, 1996).

- Axiomas de cuerpo

Junto con el conjunto \mathbb{R} de los números reales admitimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación*, tales que, para cada par de números reales x e y , la *suma*

$x+y$ y el *producto* xy son números reales que satisfacen los siguientes axiomas. (En los axiomas que a continuación se exponen, x, y, z representan números reales arbitrarios)

- $(\mathbb{R}, +)$ es grupo abeliano

- Axioma 1: Conmutatividad

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$$

- Axioma 2: Asociatividad

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$$

- Axioma 3: Existencia única de elemento neutro

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$$

- Axioma 4: Existencia única de elemento inverso

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists ! x' \in \mathbb{R} - \{0\} : x + x' = x' + x = 0$$

- $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano

- Axioma 1: Conmutatividad

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx$$

- Axioma 2: Asociatividad

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(yz) = (xy)z$$

- Axioma 3: Existencia única de elemento neutro

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! 1 \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

- Axioma 4: Existencia única de elemento inverso

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists x' \in \mathbb{R} - \{0\} : x \cdot x' = x' \cdot x = 1$$

- Axioma 5: Distributividad

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$$

-Axiomas de orden

Existe una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas:

- Axioma 6: Se verifica una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$x = y \quad \text{o} \quad x < y \quad \text{o} \quad x > y$$

Esto se llama *tricotomía de la desigualdad*.

- Axioma 7: Si $x < y$, entonces, para cada z , es $x + z < y + z$
- Axioma 8: Si $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$
- Axioma 9. Si $x > y$ e $y > z$, entonces $x > z$

Nota: Un número real x se llama *positivo* si $x > 0$ y *negativo* si $x < 0$. Designaremos por \mathbb{R}^+ el conjunto de todos los números reales positivos y por \mathbb{R}^- el conjunto de todos los números reales negativos.

- Axioma del Supremo

El siguiente axioma permite probar que los números reales completan todos los espacios en una recta si fuesen representados de tal forma. Para ello es necesario definir el concepto de conjunto acotado.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $r \in \mathbb{R}$. Diremos que:

- i. r es una **cota superior** de A si y sólo si:

$$a \leq r, \quad \forall a \in A$$

Es decir, r es mayor o igual que cualquier elemento de A .

- ii. r es una **cota inferior** de A si y sólo si:

$$a \geq r, \quad \forall a \in A$$

Es decir, r es menor o igual que cualquier elemento de A .

- Si existe cota superior para un conjunto A , se dice que A es acotado superiormente.
- Si existe una cota inferior para un conjunto A , se dice que A es acotado inferiormente.
- Si A es acotado superior e inferiormente se dice que A es **acotado**.
- Si $A = \emptyset$ diremos que A es acotado.

Axioma: Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir existe un número real a tal que $a = \sup S$.

2.2.2 Inecuaciones

Inicialmente para introducir el tema de las inecuaciones se hace un estudio de las desigualdades, considerando que ellas resultan ser relaciones de marcada importancia en el campo de las matemáticas; igualmente se trae la definición de intervalos, como se quiera el conjunto solución de una inecuación es un intervalo o la unión de varios de ellos.

2.2.3 Desigualdades

Diremos que a es mayor que b ó b es menor que a si y solo si

$$a - b \in \mathbb{R}^+$$

y escribiremos esto indistintamente como

$$a > b \text{ o como } b < a. \quad (1)$$

Diremos que a es mayor o igual que b si a es mayor que b o a es igual a b , es decir,

$$a > b \vee a = b$$

Escribiremos esto indistintamente como

$$a \geq b \text{ o } b \leq a.$$

Así, se tiene

$$a \geq b \leftrightarrow a > b \text{ o } a = b$$

Análogamente, diremos que a es menor o igual que b si a es menor que b o a igual que b .
Escribiremos indistintamente en este caso

$$a \leq b \text{ o } b \geq a$$

O equivalentemente

$$a \leq b \leftrightarrow a < b \text{ o } a = b$$

De acuerdo a los axiomas de orden se puede probar fácilmente las siguientes propiedades:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

i. $a \in \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow a^2 > 0$

Demostración:

Tenemos dos casos, si $a > 0$ o si $a < 0$

Si $a > 0$, por cerradura $a \cdot a = a^2 > 0$

Si $-a > 0$, por cerradura $(-a) \cdot (-a) = a^2 > 0$

ii. $a > 0 \rightarrow a^{-1} > 0$

Demostración:

Demostración por método del absurdo. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que $a^{-1} \notin \mathbb{R}^+$, entonces por axioma 6

$$a^{-1} = 0 \quad \vee \quad -(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$$

Supongamos que $a^{-1} = 0$ entonces $a \cdot a^{-1} = 0$ pero por propiedad de inverso $a \cdot a^{-1} = 1$; esto es contradicción y por lo tanto $a^{-1} \neq 0$.

Supongamos que $-(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$. Como $a \in \mathbb{R}^+$ tenemos que por axioma 8 que $-(a^{-1}) \cdot a = -1 \in \mathbb{R}^+$ que es también una contradicción pues $1 \in \mathbb{R}^+$. Como en ambos casos obtenemos una contradicción, no se puede dar ninguna de las dos posibilidades, por lo tanto, $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$; así, se tiene que el inverso multiplicativo de un número positivo es también un número positivo.

iii. $a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$

Demostración:

Como $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$, como $b < c$, entonces $c - b \in \mathbb{R}^+$

Entonces, sumando $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$, así $c - a \in \mathbb{R}^+$

De lo anterior, $c > a$

iv. $a < b \leftrightarrow a + c < b + c$

Demostración:

Como $a < b$

$\Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$ (Definición de $<$)

$\Leftrightarrow b - a + 0 \in \mathbb{R}^+$ (Neutro aditivo)

$\Leftrightarrow b - a + c - c \in \mathbb{R}^+$ (Inverso aditivo)

$\Leftrightarrow (b + c) + (-a - c) \in \mathbb{R}^+$ (Asociatividad y conmutatividad)

$\Leftrightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$ (Distributividad)

entonces $a + c < b + c$ (Definición de $<$)

v. $a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$

Demostración:

Como $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$

Por axioma de orden y como $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $c \cdot (b - a) \in \mathbb{R}^+$

Es decir, $cb - ca \in \mathbb{R}^+$ y así $ac < bc$

vi. $a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$

Demostración:

Si $a < b$, entonces $b - a > 0$

Si $c < 0$, entonces $-c > 0$

Entonces $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$

O sea $ac - bc > 0$, entonces $ac > bc$

La relación entre a y b , $a \leq b$ se acostumbra a decir que es una **relación de orden total**

$((\mathbb{R}, +, \cdot, \leq))$ ya que cumple: $a, b, c \in \mathbb{R}$

i. Reflexividad $a \leq a$

ii. Antisimetría $a \leq b$ y $b \leq a \rightarrow a = b$

iii. Transitividad $a \geq b$ y $b \geq c \rightarrow a \geq c$

Demostración:

$$(a \geq b \text{ y } b \geq c) \leftrightarrow \{(a - b) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } (b - c) \in \mathbb{R}^+\}$$

Por axioma 1, la suma esta en \mathbb{R}^+ , por tanto $(a - c) \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow a \geq c$

iv. $a > b$ y $c < 0 \leftrightarrow ac < bc$

Demostración:

$$(a > b \text{ y } c < 0) \leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+ \text{ y } -c \in \mathbb{R}^+,$$

Por axioma 2 el producto esta en \mathbb{R}^+ , luego $(a - b)(-c) \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow$

$$(bc - ac) \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow ac < bc$$

2.2.4 Conjuntos en \mathbb{R}

Dado un conjunto de referencia U cualquiera, al que llamaremos Universo de referencia, y una función proposicional $P(x)$ definida para elementos de U , podemos obtener un nuevo conjunto A , como aquel formado por todos los elementos x de U que satisfacen la función proposicional $P(x)$.

Así podemos describir el conjunto A como:

$$A = \{x \in U / P(x)\}$$

Proposición:

- Todo conjunto es igual a si mismo. $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
- Si A y B son conjuntos y $A = B \Rightarrow B = A$
- Si A, B y C son conjuntos y $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = C$

Definición: Un conjunto B se dice que subconjunto de otro conjunto A , y se escribe $B \subset A$, si todo elemento en B , también lo es en A , es decir,

$$\forall x \in B, x \in B \Rightarrow x \in A$$

Si B es subconjunto de A también se suele decir que A incluye a B .

Definición: El conjunto vacío (denotado por \emptyset) es el conjunto que no tiene ningún elemento. Esto es: $\emptyset = \{x \in A \text{ y } x \notin A\}$

Operaciones entre conjuntos

Se define para lo que sigue al Universo U como aquel conjunto relativo que contiene a todos los conjuntos que se describen a continuación:

- La Unión de A y B , denotado por $A \cup B$, se define como:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

- La Intersección de A y B , denotado por $A \cap B$, se define como:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son disjuntos.

- El Complemento del conjunto B con el conjunto A , denotado por $A \setminus B$, es el subconjunto de A definido por:

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

- La diferencia entre el conjunto A y B , es el conjunto de elementos del conjunto A que no se encuentran en el B , y lo notamos por $(A - B)$,

$$A - B = \{x \in U : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

- La diferencia simétrica entre el conjunto A y B , es el conjunto de elementos tal que:

$$A \Delta B = \{x \in U : x \in A \underline{\vee} x \in B\}$$

Representación geométrica de los números reales

Los números reales son, a menudo, representados geoméricamente como puntos de una recta (denominada *recta real* o *eje real*). Se elige un punto para que represente el 0 y otro a la derecha del 0 para que represente el 1. Esta elección determina la escala. A cada punto de la recta real corresponde un número real y uno solo y, recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno solo.

La relación de orden admite una interpretación geométrica simple, Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y . Los números positivos están a la derecha del 0 y los números negativos están a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$ si, y solo si, x está *entre* a y b .

1.2.5 Intervalos

El conjunto de todos los puntos comprendidos entre a y b se denomina *intervalo*. A menudo es importante distinguir entre los intervalos que incluyen sus extremos y los intervalos que no los incluyen.

Clases de intervalos

1. Intervalo abierto $]a, b[$. Este intervalo en notación de conjuntos se escribe como

$$]a, b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$$

lo cual quiere decir que se consideran todos los valores de números reales entre a y b , excepto a y b .

Gráficamente, se representa como:

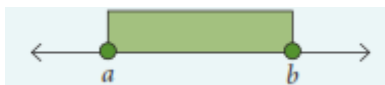


2. Intervalo cerrado $[a, b]$. En notación de conjuntos este intervalo se define como:

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\} .$$

Aquí se consideran todos los valores de números reales entre a y b , incluidos a y b .

En una recta que representa los números reales la gráfica de este intervalo es:



3. Intervalo semiabierto $[a, b[$. En notación de conjuntos este tipo de intervalos se define como:

$$[a, b[= \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

Se consideran todos los valores de números reales entre a y b , incluido a y excluido b .

Gráficamente este intervalo se representa de la siguiente forma:



4. Intervalo semiabierto $]a, b]$. En la notación de conjuntos, este intervalo se expresa como.

$$]a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

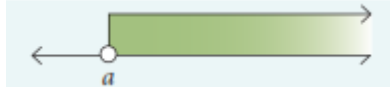
A este intervalo le corresponde la siguiente gráfica sobre la recta que representa a los números reales R :



5. Intervalo infinito $]a, \infty[$. En notación de conjuntos este intervalo se define como:

$$]a, \infty[= \{x \in R \mid x > a\}$$

$]a, \infty[$ es el conjunto formado por todos los números reales estrictamente mayores que a . En la recta numérica la gráfica es:



6. Intervalo infinito $[a, \infty[$. Hablando en términos de conjuntos:

$$[a, \infty[= \{x \in R \mid x \geq a\}$$

$[a, \infty[$ es el conjunto formado por todos los números reales estrictamente mayores que a , incluido a . En la recta numérica la gráfica es:



7. Intervalo infinito $] - \infty, b[$. De forma similar a los intervalos anteriores este nuevo intervalo se expresa en teoría de conjuntos como:

$$] - \infty, b[= \{x \in R \mid x < b\}$$

Gráficamente se ilustra así :



8. Intervalo infinito $] - \infty, b]$. De manera similar a los anteriores intervalos $] - \infty, b[$ se define como :

$$] - \infty, b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$$

Gráficamente, se presenta como :



1.2.6 Funciones

Diremos que una correspondencia de un conjunto D a un conjunto E es una función si a cada elemento x de D le corresponde un único elemento y de E . Para x de D el elemento y de E (único) es el valor (funcional) de la función que denotamos por $f(x)$ (notación que se lee " f de x "). Se dice también que $f(x)$ es la imagen de x bajo la función f .

Denotaremos una función de las siguientes formas:

$$f: D \rightarrow E$$

$$x \mapsto f(x)$$

ó

$$f: D \rightarrow E; y = f(x)$$

Definición: El conjunto D es llamado el dominio de la función ($D = Dom(f)$ o simplemente $D = Domf$), el conjunto E es llamado conjunto de llegada de la función. Un subconjunto importante de E es el conjunto llamado Recorrido de f ($Rec(f)$ o simplemente $Recf$) que es el conjunto formado por todos los valores posibles de $f(x)$, con x en D .

Así, $f: D \rightarrow E$ es una función si cumple:

1. A cada elemento $x \in D$ le corresponde un elemento $y \in E$.

$$(\forall x \in D)(\exists y \in E)(a x \text{ le corresponde } y)$$

2. y es único en E (para cada x en D)

Definición: Sea $f: D \rightarrow E$:

- f se llama inyectiva, si a elementos diferentes en D le hace corresponder elementos diferentes en E , es decir:

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

ó equivalentemente $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

- f se llama epiyectiva (o también sobreyectiva), si cada elemento de E es imagen de algún elemento de D , es decir, si el codominio coincide con el recorrido de la función.

$$\forall y \in E, \exists x \in D \mid f(x) = y$$

- f se llama biyectiva si es a la vez inyectiva y epiyectiva.

Definición: Supongamos que f y g son dos funciones y sea $D = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$, entonces se definen nuevas funciones (con dominio en D) construidas en base a operaciones entre sus imágenes respectivas:

- La suma de f y g denotada por $f + g$ y definida por:

$$\begin{aligned} f + g: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

- La diferencia de f y g denotada por $f - g$ y definida por:

$$\begin{aligned} f - g: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - g(x) \end{aligned}$$

- El producto de f y g denotada por $f \cdot g$ y definida por:

$$\begin{aligned} f \cdot g: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

- El cociente de f y g denotada por $\frac{f}{g}$ y definida por:

$$\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $D' = \{x \in D: g(x) \neq 0\}$

Definición: Sean A, B, C y D conjuntos de números reales. Sea f una función de A en B y sea g una función de C en D , es decir,

$$A \xrightarrow{f} B, C \xrightarrow{g} D$$

Si $\text{Rec}f \cap C \neq \emptyset$, es decir, el recorrido de f y el dominio de g tienen elementos en común, entonces es posible usar f y g para definir una función de $A_1 \subseteq A$ en D .

Tal función se denomina composición de g con f , y se denota por $g \circ f$ y se define por:

$$g \circ f: A_1 \rightarrow D$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

donde el $\text{Dom}(g \circ f) = A_1 = \{x \in A: f(x) \in C\}$, si $\text{Rec}f \cap \text{Dom}f \neq \emptyset$, es decir,

$$\text{Dom}(g \circ f) = A_1 = \{x \in \text{Dom}f: f(x) \in \text{Rec}f \cap \text{Dom}f\}$$

Definición: Si f es biyectiva, entonces a cada elemento y en E le corresponde un único elemento x en D tal que $y = f(x)$. Esto define una función, llamada función inversa de f :

$$f^{-1}: E \rightarrow D$$

tal que $f^{-1}(y) = x$. Se tiene entonces que: $f(f^{-1}(y)) = y$, y que $f^{-1}(f(x)) = x$, es decir, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_E$ y que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_D$. Donde Id representa la identidad.

2.3 Teoría de Espacios de Trabajo Matemático

La teoría que sustenta nuestra investigación es la iniciada por Houdement y Kuzniak (1996, 1999 y 2006) específicamente en el dominio de la Geometría, llamada paradigmas Geométricos y Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), pero luego fue ampliada por Kuzniak (2011) a los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), como una “*concha metodológica*” que considera otros dominios de las matemáticas. Específicamente, en este trabajo nos referiremos al dominio del análisis (ETM_{AN}) y del álgebra (ETM_A), ya que las inecuaciones lineales poseen una componente analítica, por los axiomas de orden y una componente algebraica puesto que se relaciona con las estructuras algebraicas.

Comenzaremos el tratamiento de esta teoría refiriéndonos a los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG) para luego referirnos a la ampliación a otros dominios de las matemáticas.

2.3.1 Paradigma geométrico

Para Kuhn paradigma son “realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica”¹³

En el ETG se identifican tres paradigmas geométricos (GI, GII y GIII) inspirados de la noción de paradigma de Kuhn, estos se definen a través de tres componentes una de carácter filosófica (Kuhn), cognitiva (Gonseth) y epistemológica que interactúan entre sí.

Geometría Natural (GI)

En esta se manifiesta una estrecha relación con la realidad, así los objetos están definidos en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo. Donde la intuición, la

¹³ Kuhn T., 1971. *La estructura de las revoluciones científicas*, BREVIARIOS, p.13

experiencia y el razonamiento deductivo actúan sobre los objetos debido a la percepción o al uso de artefactos. La geometría Euclidiana no está considerada dentro de esta geometría.

Geometría Axiomática Natural (GII)

En esta geometría se habla de figura geométrica, puesto que hay una mayor abstracción a pesar de que existe relación con la realidad, los problemas para ser resueltos no necesitan de la presencia de todos los axiomas, en este sentido es posible referirse a un sistema axiomático local, llamado Geometría Euclidiana Local. El razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático puesto en juego.

Geometría Axiomática Formalista (GIII)

Acá los objetos geométricos provienen de una axiomática elegida con toda rigurosidad y formalismo del modelo. El razonamiento de validación en este paradigma es exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente y el uso de artefactos no está permitido, de esta manera esta geometría no está relacionada con la realidad.

2.4 Espacio de Trabajo Geométrico

A partir de los paradigmas descritos, se define el Espacio de Trabajo Geométrico que es un ambiente organizado por y para el geómetra el cual puede ser eventualmente un estudiante, un profesor o cualquier individuo que se enfrente a un problema de geometría. El espacio de trabajo lo define la interacción y la dinámica que se da entre componentes cognitivas (visualización, construcción y prueba) y epistemológicas (espacio real y local, artefactos y referencial), las que (inicialmente) están conectadas en la geometría por tres modos de pensamiento intuición, experimentación y deducción. Los problemas no son parte del ETG, sino son los que lo activan y dan sentido.

Componentes epistemológicas del ETG

Un espacio real y local es la concepción por parte del estudiante respecto al modelo geométrico y presenta dos aspectos, el local y real, el primero, se refiere a que el individuo trabaja con una parte del modelo, el segundo, se refiere a que los objetos son el resultante de la abstracción del modelo a partir de la realidad.

Los artefactos, corresponde a todo lo que le permite al geómetra manipular los objetos geométricos como instrumentos de dibujo o programas informáticos con la finalidad de abordar un problema.

El referencial teórico, corresponde al conjunto basado en definiciones y propiedades que finalmente determinan el modelo geométrico.

Componentes cognitivas del ETG

Desde el punto de vista cognitivo, hay ciertos procesos que están asociados al ETG, como lo son: *visualización, construcción y prueba*.

- i. Un proceso de visualización en relación con la representación del espacio y el soporte material.
- ii. Un proceso de construcción determinado por los instrumentos utilizados (regla, compás, etc.) y las configuraciones geométricas.
- iii. Un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.

El proceso cognitivo de visualización aporta en el proceso de construcción y viceversa, a la vez, el proceso cognitivo de construcción aporta en el proceso de prueba y viceversa, pero el proceso de visualización aporta en el sentido que se relacionan, que se emplea uno cuando se hace el otro, en la prueba pero no podemos asegurar que la prueba aporta en el proceso cognitivo de la visualización. A la vez, estos procesos cognitivos están ligados a las componentes del ETG y se articulan conformando un espacio de trabajo

dinámico y cognitivo, el cual es articulado por el geómetra dependiendo de su paradigma dominante (GI, GII o GIII).

A continuación se presenta un esquema que muestra cómo se articulan las componentes del ETG:

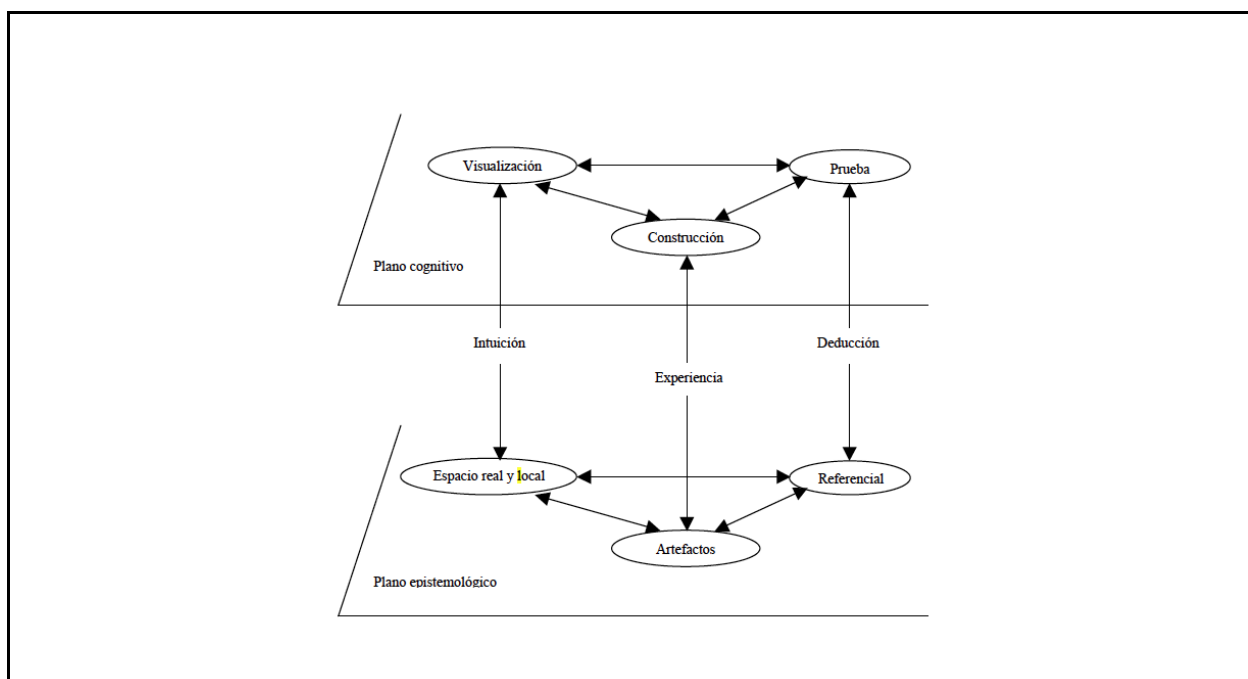


Figura 2.1: *Espacio de Trabajo Geométrico.* (Houdement&Kuzniak, 1996, 1999, 2006)

2.5 Espacio de Trabajo Matemático

En el año 2011, Kuzniak propone la ampliación del ETG al ETM (Espacio de Trabajo Matemático), donde se considera este espacio como una “concha metodológica”, desde donde se pueden definir los espacios en los otros dominios de las matemática, considerando según Kuzniak que la diferenciación de los dominios matemáticos está ligada a la naturaleza de los objetos estudiados pero más fundamentalmente también es necesario conocer los principios epistemológicos de estas diferencias.

Así podemos definir distintos espacios de trabajo: ETM_A para referirnos al ETM en el dominio del álgebra, ETM_G para el ETM en el dominio de la geometría, ETM_{AN} para referirnos al ETM en el dominio del análisis y ETM_P para referirnos al ETM en el dominio de la probabilidad, cuidando de las especificidades de cada dominio.

Específicamente, en este trabajo nos referiremos al dominio del análisis y el álgebra. Nos interesa el vínculo entre el ETM_A y el ETM_{AN} , ya que las inecuaciones lineales tienen una componente analítica, por los axiomas de orden, pero también tiene una componente algebraica porque se relaciona con las estructuras algebraicas.

Asumiendo que el trabajo en el dominio del álgebra y el análisis tienen sus propias especificidades, es que surge la necesidad de redefinir cada una de las componentes del Espacio de Trabajo Matemático, Kuzniak entonces plantea considerar en un Plano Epistemológico las componentes: Representamen (antes Espacio Real y Local), Artefactos y Referencial, y en un Plano Cognitivo las componentes: Visualización, Construcción y Prueba.

A partir de esto, se definen 3 génesis que conectan el plano epistemológico con el plano cognitivo:

2.5.1. Génesis Semiótica

Esta génesis articula la componente *Representamen* y la componente *Visualización*. Para definir la componente *Representamense* considera la perspectiva de Peirce (1978): “el representamen o signo es una cosa que representa otra cosa: un objeto” (p.3). Esta teoría la complementamos con la de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1999), quien define registro como “producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento” (p.175). Para Duval, el manejo de varios registros de representación semiótica aparece como algo fundamental para la aprehensión conceptual de un objeto matemático.

2.5.2 Génesis Instrumental

Esta génesis articula la componente *Artefacto* y la componente *Construcción*. La componente *Artefacto* en el ETM ya no considera solo los artefactos materiales clásicos (regla y compás) y no clásicos (software) sino que incorporan los artefactos simbólicos, basados en Rabardel (1995), quien especifica que un instrumento es un artefacto manejado por un individuo a través de la acción de esquemas. Así, distintos instrumentos pueden estar asociados a un mismo artefacto, diferenciados solo por la acción. Por ejemplo, una regla, que es un artefacto, puede ser usada para medir o para representar segmentos, así, tenemos entonces dos instrumentos distintos generados por el mismo artefacto: regla, con dos acciones distintas: medir y representar segmentos. En términos de la teoría de Rabardel, el artefacto se *instrumentaliza*, de ahí el nombre de *génesis instrumental*.

En esta perspectiva teórica, y para Kuzniak, los artefactos simbólicos corresponden a los algoritmos. Un ejemplo clásico de algoritmo es el de la división, donde, siguiendo pasos bien definidos, se llega a un resultado. Estos pasos se pueden computarizar, y no necesitan del uso directo de propiedades, aunque por supuesto, están fundados en ellas. Otro ejemplo son los algoritmos de la multiplicación (el “correr” los números un lugar a la izquierda cuando se multiplica por números de 2 o más cifras). En este caso, si se multiplica sin explicitar las propiedades (como la descomposición decimal del número, y la distributividad), y se usa tal algoritmo, estaríamos en presencia de un artefacto simbólico.

La componente construcción también es en un sentido más amplio que en la construcción geométrica, como se dijo, aquí ocurre un proceso de instrumentalización en donde un artefacto inerte está asociado a una acción.

2.5.3. Génesis Discursiva

Esta génesis articula la componente *Referencial Teórico* y la componente *Prueba*. Para definir la componente Prueba se considera la perspectiva de Balacheff (1987), para quien prueba es “una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado [...]”, donde la demostración, es un caso particular de estas pruebas bajo reglas de deducción matemática que se dan en el seno de la comunidad de matemáticos. Balacheff distingue dos tipos distintos de pruebas: pruebas pragmáticas y pruebas intelectuales.

Pruebas Pragmáticas:

Están ligadas a la acción y a la experiencia. En este tipo de pruebas hay presencia de saberes prácticos y las justificaciones son realizadas a través de material concreto o de representación del objeto. Dentro de este tipo de pruebas se distinguen: el empirismo naïf, el experimento crucial y el ejemplo genérico, los que se describen a continuación:

- Empirismo naïf: Se reconoce cuando la persona que valida la afirmación lo hace después de verificarla para algunos casos particulares.
- Experimento (experiencia) crucial: Se reconoce cuando la persona que valida la afirmación toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante el uso de un caso particular que reconoce como no especial.
- Ejemplo genérico: Se reconoce cuando la persona que valida justifica la afirmación considerando al objeto concreto como un representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación.

Pruebas Intelectuales:

Proviene de una forma particular de razonar, donde se articulan argumentos, o cadenas de argumentos, con una clara producción en una lengua simbólica. En este tipo de prueba hay un pasaje algebraico, se dejan de lado los objetos materiales y su relación con la experiencia material. En este tipo de prueba se distinguen: Experimento mental, Demostración y Cálculo y enunciado, los que se describen a continuación:

- Experimento mental: se reconoce cuando el razonamiento de la persona se independiza del objeto, se observa un gui3n que no tiene necesariamente la estructura de una demostraci3n.
- Demostraci3n: se reconoce cuando el razonamiento que utiliza la persona tiene la funci3n de verificar y explicar en un lenguaje reconocido por la comunidad matemática, cuyas reglas de debate se funda sobre la l3gica formal y en la deducci3n de teoremas y/o axiomas.
- Cálculo sobre enunciado: Balacheff identifica a esta prueba entre la experiencia mental y la demostraci3n, es una prueba que no tiene la característica de conformar una demostraci3n pero tampoco tienen la característica de la experiencia mental. En este tipo de pruebas no hay un uso ejemplos ni de dibujos, sino que se utiliza un razonamiento (cálculo) a partir de propiedades (enunciadas) que por lo general, no son del todo ciertas (o pseudo-teoremas) y que son tan usuales de encontrar tanto a nivel numérico como en el geométrico (Arsac et al., 1992, p. 149).

Un ejemplo concerniente es probar en geometría euclidiana que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , y afirmar lo siguiente: como un triángulo es la mitad de un rectángulo, y como la suma de los ángulos de un rectángulo mide 360° entonces la suma de los ángulos del triángulo es la mitad de 360° , es decir, " $360^\circ:2=180^\circ$ ".

A partir de estas definiciones, se conforma un espacio de trabajo matemático (ETM), donde interactúan y se articulan las tres génesis antes descritas. A continuaci3n se presenta un nuevo esquema, donde se muestran las componentes del ETM, con sus respectivas génesis:

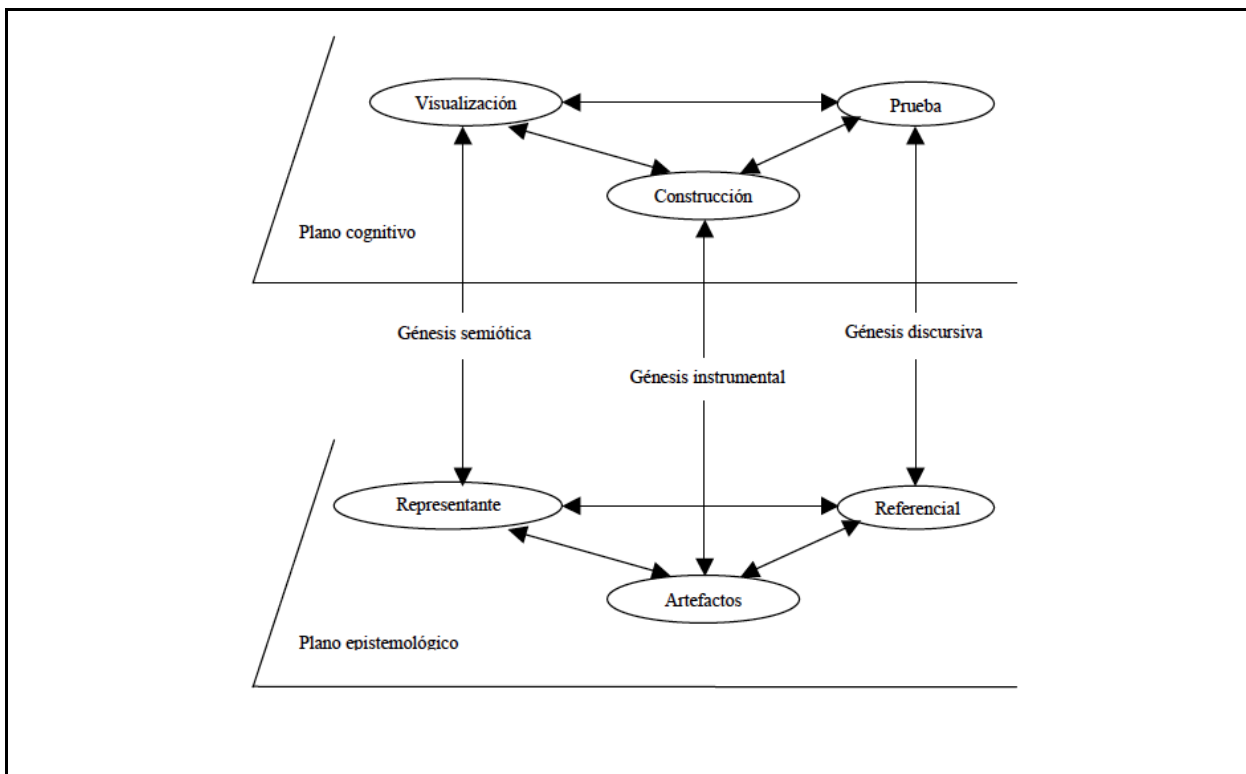


Figura 2.2: Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis. Kuzniak (2011)

A partir de la definición de las componentes, junto a las génesis que las articulan, se definen tres tipos de Espacio de Trabajo Matemático:

ETM – de referencia: Se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Se dice que el utilizador es un experto epistémico. Se puede considerar como el ETM institucional de la comunidad de los matemáticos.

ETM – idóneo: Se refiere al espacio definido en términos didácticos, es decir, en este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo.

Un utilizador natural de este ETM es el profesor.

ETM – personal: Se refiere al espacio definido por el fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas.

Un utilizador natural de este ETM es el alumno.

La teoría de los Espacios de Trabajo Matemático considera la tarea, en el sentido de Chevallard (1999). Chevallard centra el hacer matemática como actividad humana, donde es posible definir praxeologías¹⁴ como una manera de describir la práctica humana, entonces define *tarea* dentro de la actividad matemática como aquella asociada a una acción bien definida. Para Chevallard (1999), “una *tarea* (y el tipo de tareas asociado) se expresa por un verbo: *limpiar* la habitación, *desarrollar* la expresión literal dada, *dividir* un entero entre otro, *saludar* un vecino, *leer* un manual de empleo, *subir* una escalera”. Además, el autor define *Tipos de tareas* a un conjunto de tareas, por ejemplo para nosotras *resolver* una inecuación lineal es un *Tipo de tarea*, mientras que *resolver* $x-1 < 0$ es una *Tarea*, por tratarse de una inecuación específica.

“La noción de tarea o, mejor dicho, de tipo de tareas, supone un objeto relativamente preciso; *subir una escalera* es un Tipo de tarea, pero *subir*, simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas, pero calcular, simplemente, es lo que se llamará un género de tareas, que pide un determinativo” (p.2). Kuzniak (2011) afirma que la tarea no es parte del ETM, pero es la que lo activa y le da sentido.

¹⁴ *La praxeología es la metodología que estudia la estructura lógica de la acción humana (praxis). Centra su atención en el individuo, en el impulso de quien efectiva e indudablemente, actúa (individualismo metodológico), sacando de este estudio axiomas o principios elementales, sólidos e inmutables, con los cuales entender y analizar el proceso del accionar humano, estos axiomas son: el hombre actúa, prefiere unas cosas a otras, concurre a la acción para alcanzar sus siempre mudables pero, en cada momento concretos y específicos, fines, y el factor tiempo influye en su accionar. (extraído de Wikipedia; los postulados se encuentran primeramente en el tratado de economía Acción humana, elaborado por Ludwig von Mises.*

Capítulo 3: Metodología

3.1 Ingeniería Didáctica como metodología de Investigación

Nuestro trabajo se apoya en fases de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), método de investigación de corte cualitativo que se caracteriza fundamentalmente porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; y también porque se ubica en los registros de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir, basada entre la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El proceso experimental de la Ingeniería Didáctica consta de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, experimentación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

En esta investigación se desarrollan algunas de sus fases considerando nuestro objetivo general, *analizar el espacio de trabajo matemático de los estudiantes, a través de situaciones que involucran el concepto de inecuación lineal, para elaborar una propuesta de enseñanza.*

3.2 Fases de la investigación

3.2.1 Análisis preliminares

En esta fase se realiza un análisis del concepto inecuación lineal, considerando:

- Propuesta del marco curricular vigente, programas de estudio, actividades sugeridas en los textos escolares.
- Investigaciones en el ámbito de la didáctica de las matemáticas que dan cuenta de obstáculos y dificultades en el aprendizaje y enseñanza de este concepto.

- Aspectos epistemológicos y matemáticos asociados al concepto inecuación.

3.2.2 Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas

Un escenario importante para nuestra investigación es el escolar, nos interesa conocer las concepciones que tienen los estudiantes sobre el concepto inecuación lineal, los procedimientos que utilizan para resolver diferentes actividades asociadas al concepto y las dificultades y errores que se presentan.

Para la implementación de esta etapa se considera a estudiantes que han cursado al menos un curso donde se enseñe inecuaciones lineales, para esto se invita a 2 estudiantes de primer año de la carrera de Matemática y 8 estudiantes de primer año de la carrera de Informática de una Universidad estatal de la región de Valparaíso. También se considera a estudiantes de tercer año de enseñanza media, puesto que en este curso trataron el tema de inecuaciones lineales, invitando a 2 estudiantes de un liceo municipal y 6 estudiantes de un establecimiento particular subvencionado.

Cuestionario Exploratorio

El objetivo de este cuestionario exploratorio es *caracterizar el espacio de trabajo matemático personal de estudiantes en torno al concepto de inecuación lineal*. Este cuestionario se elabora considerando tipos de tareas propuestas en textos escolares, programas de estudio y de pruebas de selección universitaria (PSU).

Además con el fin de *conocer las concepciones que tienen los estudiantes respecto a los conceptos de desigualdad e inecuación lineal*, se pide a los estudiantes responder individualmente las siguientes preguntas:

- a) ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?
- b) ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

Descripción de Preguntas del Cuestionario Exploratorio

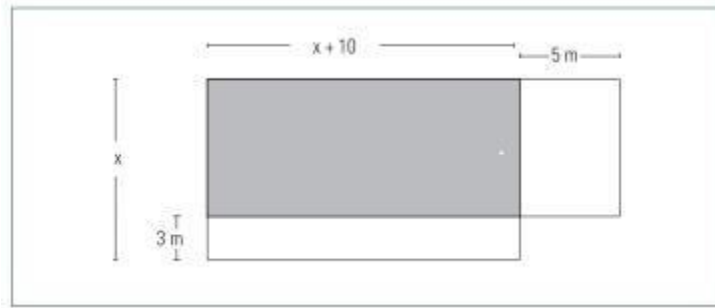
Pregunta 1 (PSU 2012): *¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación $2x + 7 \leq 12 + x$?*

- I) El conjunto de los números reales menores que 5.*
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5.*
- III) El conjunto formado solo por el número 5.*

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) Solo I y II E) Solo II y III

Mediante esta pregunta se espera conocer los procedimientos que realizan los estudiantes para obtener el conjunto solución de la inecuación lineal propuesta y de esta manera dar cuenta de qué génesis es la que se privilegia, posteriormente analizar si identifican cual(es) son los conjuntos que contienen elementos del conjunto solución obtenido al resolver la inecuación lineal, esto es de interés para nuestra investigación ya que si logran resolver la inecuación lineal correctamente pero no identifican lo mencionado anteriormente, probablemente el obstáculo que pudo presentarse es el poco manejo del concepto de conjunto, lo cual lleva a una dificultad para la comprensión de las inecuaciones lineales y para enfrentarse a situaciones de mayor complejidad.

Pregunta 2 (Propuesta ministerial): *Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.*



- a) *¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?*
- b) *¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?*
- c) *Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?*

Para esta pregunta nos interesa conocer si los estudiantes logran describir la situación presentada utilizando inecuaciones lineales para eventualmente ver los procedimientos realizados para su resolución, de esta manera dar cuenta de las génesis en que los estudiantes transitan. Por otra parte nos interesa dar cuenta si los estudiantes analizan la pertinencia de las soluciones obtenidas.

Pregunta 3 (Propuesta ministerial): *De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.*

- a) *¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?*
- b) *¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?*

Esta pregunta tiene por objetivo conocer si los estudiantes logran resolver el problema utilizando las inecuaciones lineales, poniendo especial atención en el procedimiento utilizado para resolver la inecuación lineal, para de esta manera dar cuenta de qué génesis son las que se activan.

Pregunta 4 (Propuesta ministerial):

- a) Graficar las rectas $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$
- b) En cada gráfico marcar los valores para y que corresponden al intervalo de valores para x dado por $-2 \leq x < 1$. Expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos.
- c) Comparar ambas respuestas. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el valor de y en ambos casos? ¿A qué valor de x se asocia el valor mínimo de y en cada caso?
- d) Comparar la distancia entre los valores máximo y mínimo de y que se asocian a los intervalos para x , $I_1 = [2,5]$ e $I_2 = [-2,1]$ en cada una de las rectas.
- e) Proponer un intervalo de valores para y ; determinar el intervalo correspondiente para x .

Esta pregunta es de gran interés para nuestra investigación ya que es la única pregunta en que se hace referencia a la gráfica para tratar inecuaciones lineales, en particular queremos ver en qué medida y cómo los estudiantes trabajan la gráfica de las rectas pedidas, de esta manera saber cuáles son las génesis por la que transitan los estudiantes. Por otro lado nos interesa ver si comprenden lo que se les pide en cada pregunta respectivamente.

Aplicación de Cuestionario y Análisis de Resultados

En un primer momento el cuestionario como se mencionó anteriormente fue aplicado a un total de 8 estudiantes universitarios de primer año que habían tratado inecuaciones lineales en al menos un curso, de los cuales 2 son de la carrera de Matemática que cursaron introducción al cálculo y los 6 restantes pertenecen a la carrera de Informática que cursaron cálculo I. Posteriormente, tomando en cuenta los resultados obtenidos de la pregunta 4 se decidió no considerarla para el cuestionario aplicado a los 8 estudiantes de enseñanza

media, de los cuales 2 pertenecen a un establecimiento municipal y los 6 restantes a un establecimiento subvencionado. La metodología de trabajo fue en binomios.

El rol del investigador fue de observador de la implementación de la situación, apoyándose en un registro audio visual para constatar las argumentaciones, conclusiones y las reproducciones realizadas por los estudiantes.

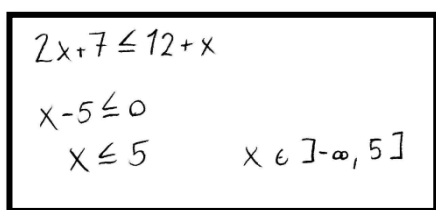
Espacio de Trabajo Matemático estudiantes Universitarios

A continuación daremos a conocer los resultados obtenidos de los estudiantes universitarios, a la luz de nuestro Marco teórico didáctico, ETM.

Llamaremos E_x a la respectiva evidencia del desarrollo.

Pregunta 1

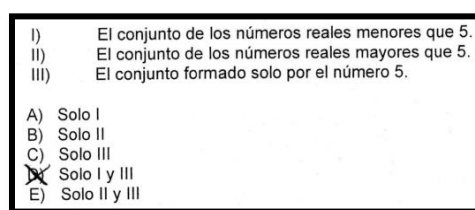
En el desarrollo de esta pregunta los binomios resuelven la inecuación mediante un *artefacto simbólico* (algoritmo) y a partir de esto obtienen el conjunto solución de la inecuación propuesta, llegando a x menor igual a 5 como se evidencia en E_1 activando así la *génesis instrumental*, luego transitan por la *génesis discursiva* al utilizar la definición de conjuntos para llegar a la alternativa correcta como se muestra en E_2 .



Handwritten mathematical work showing the solution of an inequality:

$$2x + 7 \leq 12 + x$$
$$x - 5 \leq 0$$
$$x \leq 5 \quad x \in]-\infty, 5]$$

Evidencia E_1

- 
- Handwritten multiple-choice options for the question:
- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
 - II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
 - III) El conjunto formado solo por el número 5.

 - A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) Solo I y III
 - E) Solo II y III

Evidencia E_2

Cabe destacar que solo un binomio recurrió a la representación pictórica de intervalos para llegar a la alternativa correcta transitando así por la *génesis semiótica* (evidencia E_3).

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación $2x + 7 < 12 + x^2$?

I) El conjunto de los números reales menores que 5. $\Rightarrow]-\infty, 5[$
 II) El conjunto de los números reales mayores que 5. $\Rightarrow]5, \infty[$
 III) El conjunto formado solo por el número 5. $\Rightarrow \{5\}$

A) Solo I
 B) Solo II
 C) Solo III
 D) Solo I y II
 E) Solo II y III

$2x + 7 < 12 + x^2$
 $2x - x < 12 - 7$
 $x < 5$
 $]-\infty, 5[$

Caso I
 $]-\infty, 5[\cap]-\infty, 5[$
 $]-\infty, 5[\checkmark$

Caso II
 $]5, \infty[\cap]-\infty, 5[$
 $\emptyset = \emptyset$

Caso III
 $]-\infty, 5[\cap \{5\}$
 $\{5\} \checkmark$

Evidencia E₃

Comentario:

Una de las dificultades que se presentó en uno de los binomios es que una vez obtenida la solución de la inecuación, les fue necesario recurrir a la representación de intervalos para interpretar las proposiciones que se encontraban en lenguaje natural, lo cual deja entre ver que no hay un dominio en profundidad del concepto de conjunto.

Pregunta 2

- Para el desarrollo de la tarea a) 2 de los binomios logró identificar y plantear correctamente la inecuación lineal, sin embargo no realizan un mayor análisis sobre lo que obtienen por solución como lo evidencia E₁.

a) $(x + 3)(x - 7) > (x + 10)(x)$ 45:2:2
05

$x^2 - 3x + 15x - 45 > x^2 + 10x$
 $2x > 45$
 $x > \frac{45}{2} [m]$

el valor tiene que ser mayor a $\frac{45}{2} [m]$.

Evidencia E₁

Otro de los binomios aunque identificó que el problema trataba de inecuaciones lineales no la planteó correctamente, por lo tanto no llegaron a la respuesta a pesar de usar un procedimiento correcto como lo evidencia E₂. Por otra parte el binomio restante estableció las variables a comparar, pero lo trabajó como ecuación (evidencia E₃), no logrando concluir condiciones sobre la solución.

a) $5 \cdot (X) > 3 \cdot (X+10)$
 $5x - 15 > 3x + 30$
 $2x > 30$
 $x > 15$

Las medidas del ancho del T,
deben ser superiores a $(15m)$
el largo del terreno Superior a
 $25(m)$.

Evidencia E₂

$x+15$
 $x+10$ $5m$
 x $3m$

Área = $x(x+10)$
 $x^2 + 10x$

Área = $(x-3)(x+15)$
 $x^2 + 12x - 45$

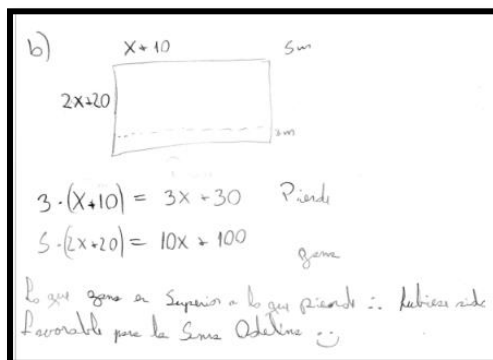
$x^2 + 10x = x^2 + 12x - 45$
 $0 = 2x - 45$
 $45 = 2x$
 $\frac{45}{2} = x$

Evidencia E₃

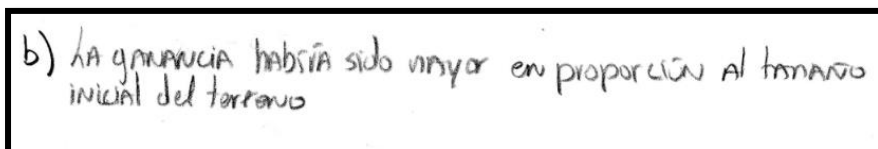
Para esta tarea inicialmente los 4 binomios activaron la *génesis semiótica* ya que se apoyaron en el registro figural para desarrollar la tarea, activando finalmente *génesis instrumental*.

- En la tarea b) solo un binomio llega a la respuesta correcta, apoyado en el registro figural privilegiando la *génesis semiótica*, luego activa débilmente la *génesis instrumental* ya que

realiza un breve trabajo algebraico solo como comprobación, como lo evidencia E₄. Los binomios restantes esbozaron una respuesta sin fundamento (evidencia E₅).

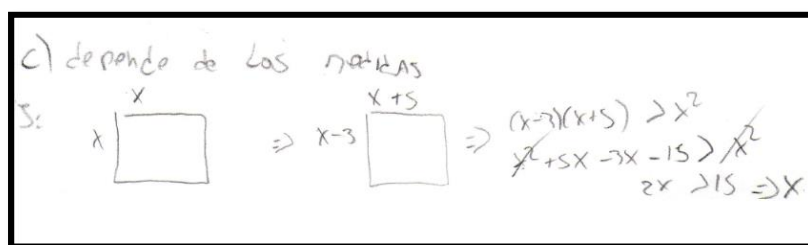


Evidencia E₄



Evidencia E₅

- Para la tarea c) solo un binomio llega a la respuesta correcta, en primera instancia representa la información en registro figural activándose débilmente la *génesis semiótica*, para posteriormente plantear la inecuación y resolverla mediante un *artefacto simbólico* (algoritmo), transitando por la *génesis instrumental*, sin embargo no realizan un mayor análisis sobre lo que obtienen por solución como lo evidencia E₆. El resto de los binomios esbozaron una respuesta sin fundamento (evidencia E₇).



Evidencia E₆

c) En el caso en que el terreno fuera cuadrado el largo que le dem, será proporcional al ancho que le quiten

Evidencia E₇

Comentario:

En la tarea *a*) una de las dificultades fue la comprensión del problema y la interpretación de las soluciones luego de la resolución de la inecuación lineal.

Para la tarea *b*) la dificultad fue que los binomios no relacionaron la tarea *a*) con la tarea *b*) dando respuesta sin utilizar una inecuación lineal sino que utilizando solamente el sentido común (evidencia E₅).

En la última tarea la dificultad fue que los binomios no relacionaron la tarea *a*) con la tarea *b*) dando respuesta sin utilizar una inecuación lineal sino que utilizando solamente el sentido común (evidencia E₇).

Pregunta 3

- Para el desarrollo de la tarea *a*) solo un binomio logró identificar y plantear correctamente la inecuación, sin embargo no realizaron un mayor análisis sobre lo que obtuvieron por solución como lo evidencia E₁.

$$\begin{array}{l}
 \text{ella } = x \qquad \text{ella } = y \\
 x \leq \frac{y+7}{2} \\
 a) \quad y = x+8 \\
 x \leq \frac{x+8+7}{2} \\
 x-7 \leq \frac{x+8}{2} \\
 2(x-7) \leq x+8 \\
 2x-14-8 \leq x \\
 x \leq 22
 \end{array}$$

Evidencia E₁

Otro de los binomios aunque identificó que el problema trataba de inecuaciones lineales no la planteó correctamente, por lo tanto no llegaron a la respuesta a pesar de usar un procedimiento correcto como lo evidencia E₂. Por otra parte uno los dos binomios restantes omitió responder, mientras que el otro establece las variables a comparar, pero lo trabaja como ecuación (evidencia E₃), sin embargo obtiene la respuesta esperada.

$$\begin{array}{l}
 a) \quad \frac{y+8}{2} + 7 < y+8 \\
 \frac{y+8+14}{2} < y+8 \quad | \cdot 2 \\
 y+22 < 2y+16 \\
 6 < y
 \end{array}$$

Evidencia E₂

Tarea 4.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, esta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?

b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?

a) Se puede casar hasta los 30
 b) No se puede por el aforismo

$R = x$ a) 5 30
 $I = \frac{x}{2} + 7$ 22

$R = 7 + 8$
 $x = \frac{x}{2} + 7 + 8$
 $x = \frac{x}{2} + 15$ $x = (x+1)2$
 $x = 2x + 2$

$x = \frac{x+30}{2}$
 $2x = x + 30$
 $x = 30$

Evidencia E₃

Para esta tarea inicialmente los 3 binomios activaron la *génesis semiótica* al pasar del registro de lenguaje natural al registro algebraico, activando finalmente *génesis instrumental*. El otro binomio restante no transitó en ninguna de las *génesis*.

- Para la tarea b) uno de los binomios logró identificar y plantear correctamente la inecuación, sin embargo no realizaron un mayor análisis sobre lo que obtuvieron por solución como lo evidencia E₄. Otro de los binomios a pesar de que logró identificar, plantear la inecuación y resolverla correctamente mediante un artefacto simbólico (algoritmo), no consideró el signo "=", por lo que su respuesta quedó incompleta (evidencia E₅). Por otra parte uno de los dos binomios restantes omitió responder, mientras que el otro esbozó su respuesta sin fundamento como se evidencia en E₆.

$$\begin{aligned}
 11 &\leq \frac{14}{2} + 7 \\
 x &\leq \frac{x}{2} + 7 \\
 2x &\leq \frac{x+14}{2} \\
 2x &\leq x+14 \\
 x &\leq 14
 \end{aligned}$$

Evidencia E₄

$$\begin{aligned}
 b) \quad x &< \frac{x}{2} + 7 \\
 2(x+7) &< x \\
 2x-14 &< x \\
 x &< 14
 \end{aligned}$$

Tiene que ser menor a 14 años para que teniendo la misma edad puedan casarse.

Evidencia E₅

b) No se puede por el algoritmo

Evidencia E₆

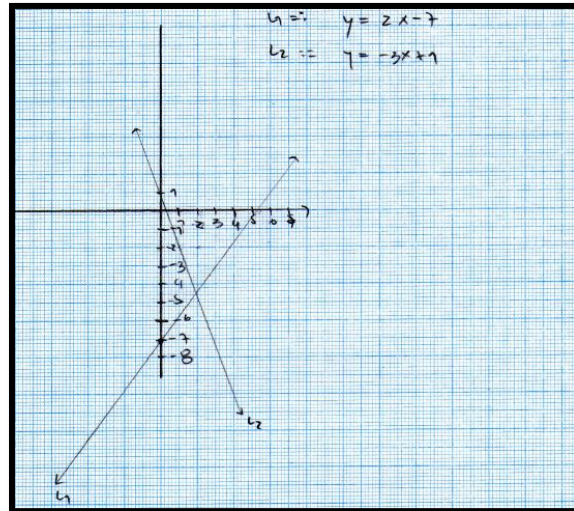
Para esta tarea inicialmente los primeros 2 binomios activaron la *génesis semiótica* al pasar del registro de lenguaje natural al registro algebraico, activando finalmente *génesis instrumental*. De los binomios restantes uno no transitó por ninguna de la *génesis* pues no emitió respuesta alguna, en cuanto al otro no se obtuvo mayor evidencia para especificar que estuvo en una u otra *génesis*.

Comentario:

Tanto como para la tarea a) y b) una de las dificultades fue la comprensión del problema y la interpretación de las soluciones luego de la resolución de la inecuación lineal.

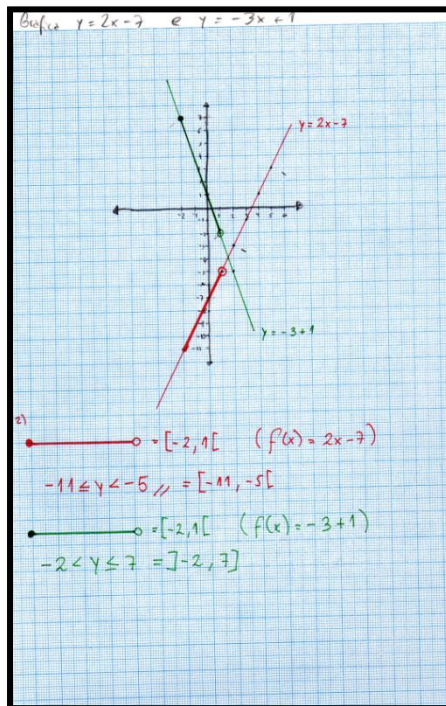
Pregunta 4

- Para la tarea a) los binomios se dieron una tabla de valores (registro tabular) activando la *génesis semiótica* posteriormente con apoyo de artefactos tales como regla, hoja milimetrada y lápiz graficaron cada recta transitando por la *génesis instrumental* como lo evidencia E₁.



Evidencia E₁

- En la tarea b) 3 de los 4 binomios transitan solo por la *génesis semiótica* ya que observando la representación gráfica, logran visualizar elementos que les permitirán desarrollarla. Posteriormente marcan en el gráfico los valores para y correspondiente al intervalo dado, como lo evidencia E₂ para luego expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos lo que se traduce solo a pasar de un registro a otro.



Evidencia E₂

Sin embargo el otro binomio no utilizó la gráfica para el desarrollo de la tarea, sino que realizaron un trabajo algorítmico pues se limitaron solo a reemplazar los valores dados para el intervalo x en ambas rectas manteniendo la desigualdades respectivas como se evidencia en E_3 obteniendo directamente los valores para y y expresado en desigualdades, por lo tanto activaron solo la *génesis instrumental*.

Handwritten work showing the substitution of x values into two linear inequalities to find the range of y .

$$\begin{aligned}
 & b) \\
 \Rightarrow & 2(-2) - 7 \leq y < 2(1) - 7 \\
 \Rightarrow & -4 - 7 \leq y < 2 - 7 \\
 \Rightarrow & \underline{-11 \leq y < -5} \\
 \\
 \Rightarrow & -3(-2) + 1 \leq y < -3(1) + 1 \\
 \Rightarrow & +6 + 1 \leq y < -3 + 1 \\
 & \underline{7 \leq y < -2}
 \end{aligned}$$

Evidencia E₃

- Para dar respuesta a la tarea $c)$ los binomios consideraron los resultados obtenidos anteriormente, sin embargo 3 de ellos no dieron una respuesta clara a lo que se les pedía y el binomio restante se acercó bastante a lo solicitado, transitando por la *génesis discursiva* puesto que recurrieron a la definición de máximo y mínimo, ya que en la primera recta reconocieron correctamente el valor mínimo que puede tomar y pero no fue así con el valor máximo, de la misma forma en la segunda recta reconocieron correctamente el valor máximo que puede tomar y pero no fue así con el valor mínimo como se evidencia en E_4 .

e) Recta 1.
 El valor máximo que puede tomar y es un número cercano a '-5' sin tomar el -5 (por la izquierda) (TAT)
 $R = 4, \bar{9}$
 El valor mínimo que puede tomar y es -11. \rightarrow se asocia con el valor -2 en 'x'
 Recta 2.
 El valor máximo que puede tomar es 7 \rightarrow se asocia con el valor mínimo de x que es -2
 El valor mínimo que puede tomar y es un número cercano a -2 sin tomar el -2 (por la derecha) (FAT)

Evidencia E4

- Para la tarea d) solo un binomio respondió correctamente (evidencia E5), transitando por la *génesis instrumental* esto es reemplazaron valores y luego restaron para hallar las distancias pedidas. Los 3 binomios restantes manifestaron no entender la pregunta cómo se evidencia en E6.

a) - PARA $2x - 7 = y$ entre el intervalo $[2, 5]$ HAY una DISTANCIA de 6 y PARA el intervalo $[-2, 1]$ HAY una DISTANCIA de 6
 - PARA $y = -2x + 1$ entre el intervalo $[2, 5]$ HAY una DISTANCIA de 9 y PARA el intervalo $[-2, 1]$ HAY 9 UNIDADES de DISTANCIA.
 Como conclusión, en cualquier recta independiente del punto z este tiene la misma distancia en X, en Y obtenemos la misma medida resultante. En el ejemplo, la distancia de X es de 3 entregando en la primera ecuación un resultado de 6 y en el segundo una solución de 9 como resultado de la distancia en Y.

Evidencia E5

d) $-2 \leq x < 1$

Compara

$2 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad -2 \leq x \leq 1$

No sabemos como hacerlo (No entendemos como hacerlo)

Evidencia E₆

- En la tarea e) 3 binomios respondieron satisfactoriamente, en primera instancia se dieron un intervalo de valores para la variable y luego tomaron los valores extremos y los reemplazaron en ambas rectas para hallar el intervalo respectivo para x, activando solo la *génesis instrumental* (evidencia E₇). El binomio restante expresó no comprender la pregunta cómo se muestra en la evidencia E₈.

e) $y = [-3, 3[$ $y = [-2, -1[$

$x = [2, 5[$ $x = [1, 4[$

Evidencia E₇

e) Al igual que en la pregunta "d)", no se especifica la función en la cual trabajar

Evidencia E₈

Comentario:

En la tarea a) pudimos identificar que uno de los binomios no logró graficar la recta correctamente, manifestando durante el procedimiento que no recordaban como graficar rectas, sin embargo, en un intento por graficar se dieron algunos puntos pero aun así no lograron realizar la tarea correctamente.

En la tarea *b*) dos de los binomios a pesar de encontrar correctamente el intervalo de valores para y , no pudieron expresarlo como desigualdades.

Al momento de determinar los valores máximo y mínimo en los intervalos semiabiertos correspondiente a la tarea *c*) los binomios presentaron dificultades, pues no identificaban si el valor correspondiente al corchete abierto a un máximo o a un mínimo según el caso, por lo cual 3 binomios lo omitieron y el binomio restante cometió el error de considerar que correspondía a un valor cercano como se evidencia en E_4 .

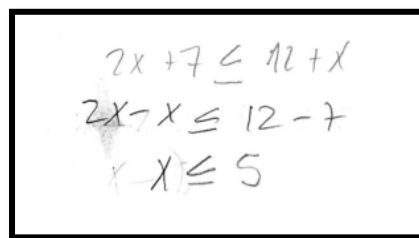
Tanto para la tarea *d*) como para la *e*) la dificultad estuvo en la falta de comprensión de la pregunta por parte de los binomios.

Espacio de Trabajo Matemático estudiantes de Enseñanza Media

A continuación daremos a conocer los resultados obtenidos de los estudiantes de enseñanza media a la luz de nuestro Marco teórico didáctico, ETM.

Pregunta 1

En el desarrollo de la actividad los binomios resuelven la inecuación mediante un *artefacto simbólico* (algoritmo) y a partir de esto obtienen el conjunto solución de la inecuación propuesta, llegando a x menor igual a 5 como se evidencia en E_1 activando así la *génesis instrumental*, luego transitan por la *génesis discursiva* al utilizar la definición de conjuntos para llegar a la alternativa correcta como se muestra en E_2 .


$$\begin{aligned}2x + 7 &\leq 12 + x \\2x - x &\leq 12 - 7 \\x - x &\leq 5\end{aligned}$$

Evidencia E₁

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación $2x + 7 \leq 12 + x$?

I) El conjunto de los números reales menores que 5. ✓
 II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
 III) El conjunto formado solo por el número 5. ✓

A) Solo I
 B) Solo II
 C) Solo III
 D) Solo I y III
 E) Solo II y III

$2x + 7 \leq 12 + x$
 $x \leq 5$

Evidencia E₂

Cabe destacar que solo un binomio recurrió a la representación pictórica de intervalos para llegar a la alternativa correcta transitando así por la *génesis semiótica* (evidencia E₂).

Comentario:

Una de las dificultades que se presentó en uno de los binomios es que una vez obtenida la solución de la inecuación, les fue necesario recurrir a la representación de intervalos para interpretar las proposiciones que se encontraban en lenguaje natural, lo cual deja entre ver que no hay un dominio en profundidad del concepto de conjunto. En uno de los binomios a pesar de llegar a la solución de la inecuación, no contestó correctamente debido a que no lograron comprender que se pregunta por los conjuntos que contienen elementos que satisfacen la inecuación seleccionando solo la afirmación de I) sin percatarse que el conjunto que está en III) contienen al 5, el cual satisface la inecuación como lo evidencia E₃.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación $2x + 7 \leq 12 + x$?

I) El conjunto de los números reales menores que 5. ✓
 II) El conjunto de los números reales mayores que 5. ✗
 III) El conjunto formado solo por el número 5. ✗

A) Solo I $x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$
 B) Solo II
 C) Solo III
 D) Solo I y III
 E) Solo II y III

Evidencia E₃

Pregunta 2

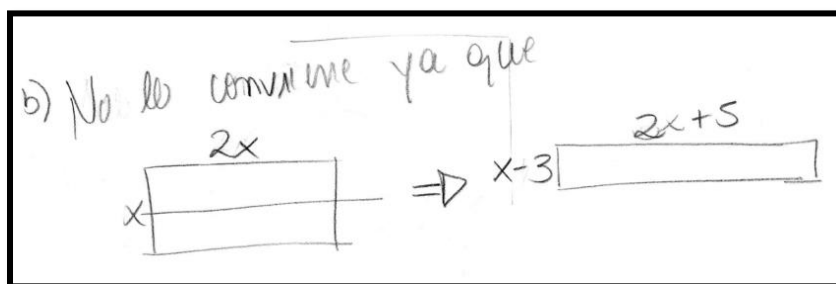
- Para el desarrollo de la tarea a) 1 de los binomios logró identificar y plantear correctamente la inecuación, sin embargo en su procedimiento presentaron un error de signo, pero su respuesta fue la esperada, como lo evidencia E₁. Otro de los binomios estableció las variables a comparar, pero lo trabajó como ecuación (evidencia E₂), por lo cual no logró una respuesta satisfactoria. En cuanto a los 2 binomios restantes sus respuestas responden solo al sentido común en base al registro figural.

$(x-3)(x+15) > x(x+10)$
 $x^2 + 15x - 3x - 45 > x^2 + 10x$
 $15x - 10x - 3x - 45 > 0$
 $-2x - 45 > 0$
 $x > \frac{45}{-2}$
 $x > 22,5 \text{ m} \rightarrow]22,5, \infty[\text{ ancho}$
 $32,5 \text{ m} \rightarrow]32,5, \infty[\text{ largo}$

Evidencia E₁

$$\begin{aligned}
 &2x-3)(x+5) > 2x^2 \\
 &2x^2+10x-3x-15 > 2x^2 \\
 &7x > 15 \\
 &x > \frac{15}{7} \rightarrow] \frac{15}{7}, \infty + [\text{"largo"} \\
 &\frac{30}{7} \rightarrow] \frac{30}{7}, \infty + [\text{"ancho"}
 \end{aligned}$$

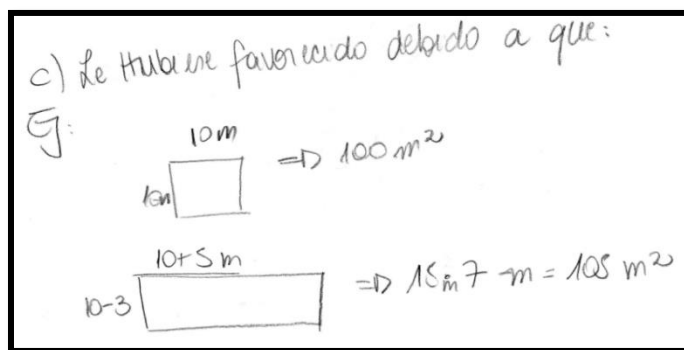
Evidencia E₃



Evidencia E₄

En esta tarea tanto los primeros binomios como el último transitaron solo por la *génesis semiótica*, mientras que el tercero inicialmente activa la *génesis semiótica* para luego mediante un *artefacto simbólico* transitar por la *génesis instrumental*.

- En el desarrollo de la tarea c) ningún binomio llegó a la respuesta esperada, 3 de esto respondieron en base al registro figural (*génesis semiótica*) y el sentido común. El binomio restante a partir de un caso particular obtuvo una respuesta errada como se evidencia en E₅ transitando por la *génesis semiótica*.



Evidencia E₅

Comentario:

Tanto como para la tarea a), b) y c) una de las principales dificultades fue la comprensión del problema e identificar que trataba de inecuaciones lineales. Cabe mencionar que para la última tarea un error cometido por uno de los binomios fue deducir que a través de un caso particular se podría dar respuesta a la tarea.

Pregunta 3

- Para el desarrollo de la tarea a) 2 de los binomios identificaron y plantearon de manera correcta la inecuación, obteniendo mediante un *artefacto simbólico* (algoritmo) la respuesta esperada como lo evidencia E₁. Otro de los binomios también identificó las variables a comparar y planteo la inecuación correctamente, pero no la desarrolló sino que la resolvió mediante el método de ensayo y error, de esta manera obtuvo la solución esperada. El binomio restante logró identificar que el problema trataba de inecuaciones lineales, sin embargo plantearon incorrectamente la inecuación, por lo tanto no llegaron a la respuesta a pesar de usar un procedimiento correcto como lo evidencia.

a)

$$X < \frac{Y}{2} + 7$$

$$X \leq \frac{X+8}{2} + 7$$

$$X \leq \frac{X+8+14}{2}$$

$$2X \leq 8+X+14$$

$$X-X \leq 8+14$$

$$X \leq 22$$

hasta que el
tuviera 30 años

$$\frac{22+8}{2} + 7$$

$$\frac{30}{2} + 7$$

$$15 + 7 = 22 //$$

Evidencia E₁

Inicialmente los primeros dos binomios y el último activan la *génesis semiótica*, ya que pasan de un registro natural a un registro algebraico, luego transitan por las génesis instrumental al desarrollar la inequación de manera algorítmica. El tercer binomio transitó solo por la *génesis semiótica*, puesto que pasaron de un registro natural a un registro algebraico.

- En la tarea b) dos de los binomios utilizaron el método de ensayo y error para obtener la solución, sin embargo solo uno de ellos obtuvo la respuesta esperada. Otro de los binomios identificó las variables posteriormente planteó una ecuación para luego darse un caso particular y así concluir una respuesta, la cual resultó ser incorrecta, como lo evidencia E₂. El binomio restante omitió.

② No se puede cumplir ya que el ~~afirmo~~ ^{afirmo} estable
ella no sobre la mitad de la edad + 7.

Ej: él y ella
20 20

$$\frac{X}{2} + 7 = Y$$

$$\frac{20}{2} + 7 = 20$$

$$10 + 7 = 20$$

$$17 = 20.$$

Evidencia E₂

Comentario:

En la tarea a) se percibe que en uno de los binomios presentó dificultad al momento de definir las variables que intervienen en la inecuación.

En la tarea b) una de las dificultades fue la comprensión del problema e identificar que trataba de inecuaciones lineales. Por otro lado se observó un binomio que cometió el error de deducir que a través de un caso particular se podría dar respuesta a la tarea.

Para las preguntas adicionales al cuestionario aplicado a los estudiantes, se presenta la siguiente tabla en donde se muestra los hallazgos más relevantes:

Preguntas	Característica de las respuestas	
	<i>Estudiantes universitarios</i>	<i>Estudiantes Enseñanza Media</i>
<i>¿Cómo defines una desigualdad?</i>	<ul style="list-style-type: none">-Dos valores distintos, donde uno es mayor al otro.-Son valores distintos.-Expresión que indica que no existe una igualdad.-Aseveración que indica que uno es distinto de otro.-Condición para que no sea igual a un resultado esperado.	<ul style="list-style-type: none">-Conjunto de valores otorgados como resultado a un ejercicio.-Cuando un número toma un valor mayor, menor o igual a otro.-Es el ejercicio que no posee una igualdad clara que su resultado es confuso.-Cuando los signos $>$, $<$, \geq y \leq o $=$ no satisfacen la igualdad de dos números.-Se define como “cosas” distintas, que no son iguales.

<p><i>¿Y una inecuación?</i></p>	<p>-Como una ecuación que verifica una desigualdad, que entrega una cantidad finita o infinita de posibles soluciones.</p> <p>-No se encuentra el valor de x, se busca el universo en donde viven los posibles valores de x.</p> <p>-Evaluación matemática donde el resultado no es estrictamente uno.</p> <p>-Se caracteriza por los símbolos ($>$, $<$, \geq y \leq) que indican una desigualdad.</p>	<p>-Es una desigualdad entre dos o más valores que entregan un resultado a la incógnita.</p> <p>-Dos o más desigualdades para formar una intercepción.</p> <p>-Sirve para descubrir puntos en el plano o en el espacio.</p> <p>-Variable representada en intervalos.</p> <p>-Se define como el intervalo que la incógnita puede tomar.</p> <p>-Desigualdad que se puede expresar como intervalo numérico.</p>
<p><i>¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.</i></p>	<p>-Agrupando valores a un lado de la desigualdad, se despeja x y se entrega la solución.</p> <p>-Al igual que las ecuaciones.</p> <p>-Casi igual que una ecuación lo único que cambia es cuando se multiplica por números negativos.</p> <p>-Indicando restricciones, realizando una tabla de signos para analizar puntos críticos y por último se unen los intervalos donde x da solución a la inecuación.</p>	<p>-Aislando la incógnita al igual que en una ecuación.</p> <p>-Casi igual que una ecuación, pero analizando un poco más lo que me dicen los signos.</p> <p>-Se resuelve despejando la incógnita como una ecuación, pero en esta se determina el conjunto solución.</p>

De lo anterior concluimos que:

- En la definición de desigualdad todos tienen la noción que se trata de “cosas distintas” pero no logran precisar con exactitud.
- La mayoría de los estudiantes no tienen una concepción clara del concepto inecuación, ya que para definirla recurren a explicar el conjunto solución haciendo hincapié en que no se obtiene un único valor sino un conjunto de valores.
- Para desarrollar una inecuación describen solo procesos algebraicos, y gran parte de los estudiantes indican explícitamente que se desarrolla “casi igual que una ecuación”.

Propuesta de Enseñanza –Aprendizaje y análisis a priori

A partir de los resultados del cuestionario se evidencia que el estudio de las inecuaciones lineales muchas veces es reducido a un algoritmo repetitivo, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, pero cuidando respetar las propiedades de la desigualdad, como la multiplicación por -1 , lo cual ocasiona que los estudiantes no tengan un mayor análisis de las soluciones en una inecuación lineal, es por ello hemos elaborado la siguiente propuesta de enseñanza-aprendizaje la cual tiene como finalidad trabajar en el análisis de inecuaciones lineales bajo un enfoque gráfico,

Su objetivo principal se centra en que los estudiantes den sentido al conjunto solución de una inecuación lineal mediante su representación gráfica, y a la luz de nuestro marco teórico ETM, se busca la activación de la *génesis discursiva*, para así favorecer la articulación entre las 3 *génesis*.

Esta propuesta de enseñanza-aprendizaje consta de dos momentos los cuales serán descritos a continuación:

Momento 1:

I) Grafique con ayuda del software GeoGebra la función $f(x)=2x-4$ y responda:

- a) ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- b) ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- c) ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- d) ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

II) En un nuevo archivo GeoGebra grafique la función $g(x)=-3x+1$ y responda:

- a) ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- b) ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- c) ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 3?
- d) ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 1$?

III) En una nuevo archivo de GeoGebra grafique las funciones $f(x)=2x-4$ y $g(x)=-3x+1$

- a) ¿Para qué valores la función $f(x) < g(x)$?
- b) ¿Para qué valores la función $g(x) \leq f(x)$?
- c) ¿Qué puede generalizar?

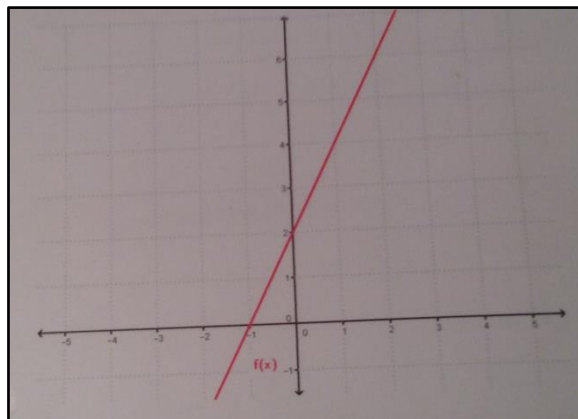
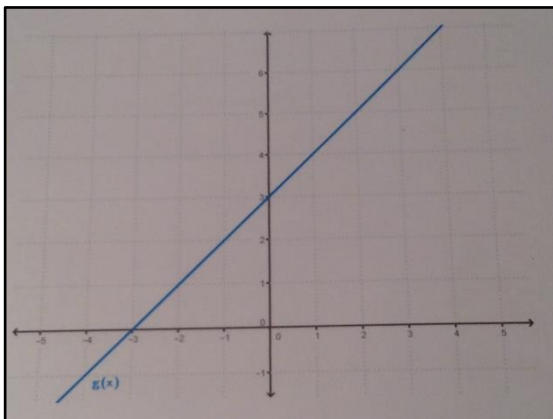
IV) ¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

- a) $-x+9 \leq -6x+29$
- b) $4x+1 > -x-4$
- c) $x+5 < 3x+7$
- d) $-3x+6 \geq x-10$

En este momento se espera que el estudiante por medio del software GeoGebra analice el comportamiento gráfico de las funciones, para posteriormente hallar el conjunto solución de una inecuación lineal a partir de la gráfica.

Momento 2:

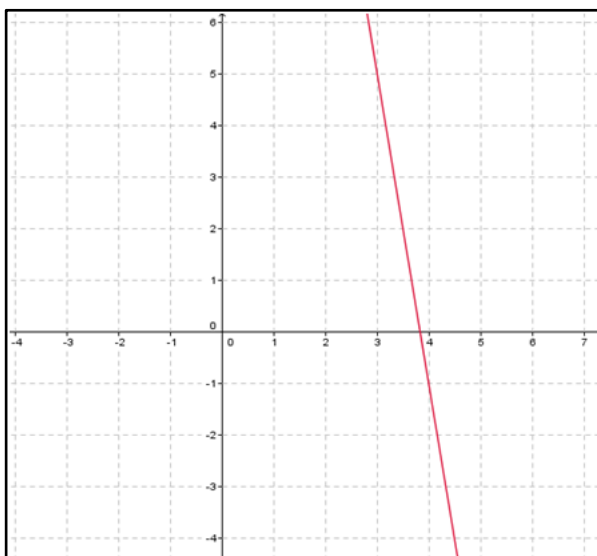
I) Dada las gráficas en mica:



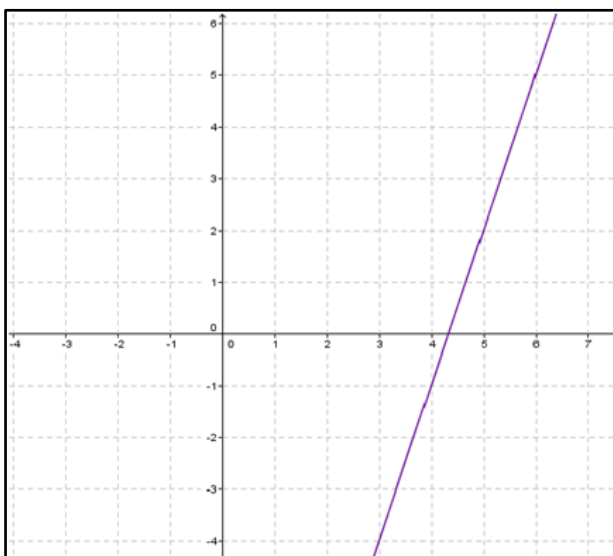
a) Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

II) Dadas las siguientes gráficas:

Gráfica $f(x)$

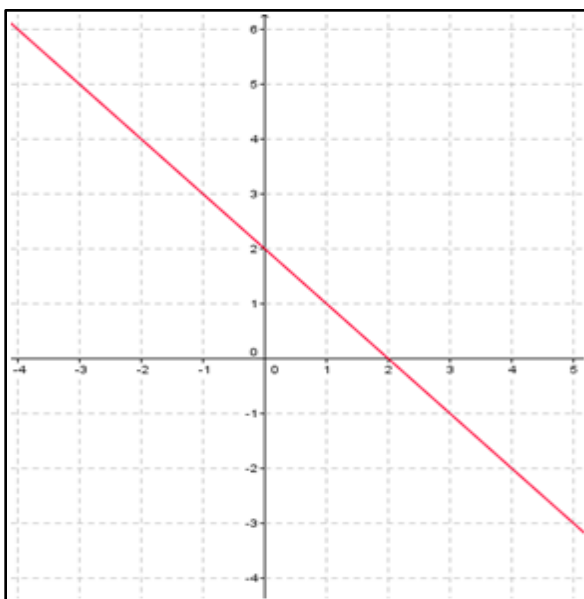


Gráfica $g(x)$

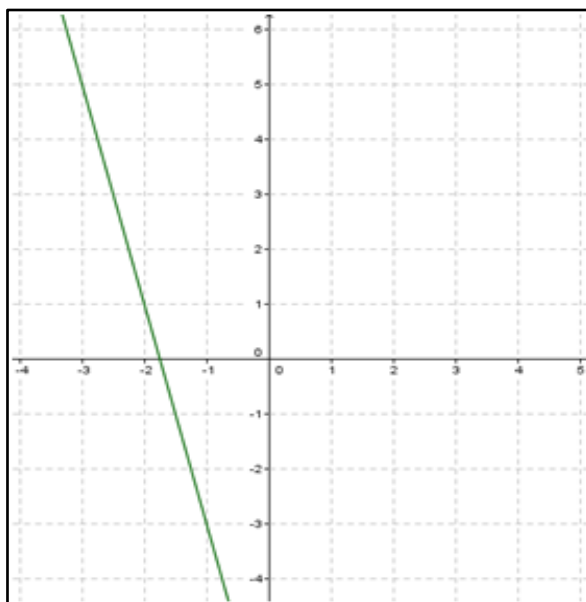


a) Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$.

Gráfica $h(x)$



Gráfica $s(x)$



b) Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$.

Este momento tiene como objetivo principal que el estudiante sea capaz de encontrar el conjunto solución de una inecuación lineal sin contar con su expresión algebraica, para ello en primera instancia se hace entrega de dos gráficas en mica por separado, con el fin de que las superpongan. Posteriormente se hace entrega de dos graficas por separado sin la posibilidad de superponerlas

3.2.3 Experimentación Propuesta de Enseñanza-Aprendizaje

La implementación de la propuesta se desarrolló en dos das distintos para cada momento respectivamente, en donde los estudiantes se tomaron el tiempo que estimaron conveniente. Esta fue aplicada a 4 estudiantes de tercer año de enseñanza media de un liceo municipal, la metodología de trabajo fue en binomios y los materiales entregados para su realización fueron:

- Notebooks: uno por pareja.

- Actividad impresa, para cada binomio.
- Lápices.
- Gráficas en mica.

El rol del investigador fue de observador de la implementación de la propuesta, apoyándose en grabación de video para constatar las argumentaciones, construcciones y reflexiones de los estudiantes, y las reproducciones realizadas por estos, además se contó con un registro de audio para elaborar registros escritos.

A continuación se describen los dos momentos para cada tarea a la que se enfrentaron los binomios:

Binomio 1

Al binomio 1 lo llamaremos B_1 y corresponde a una pareja de estudiantes e_{11} y e_{12}

Momento 1:

- **Pregunta 1**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $f(x) = 2x - 4$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de x corresponden al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

Cuando los estudiantes se ven enfrentados a la tarea 1, e_{12} lee en voz alta la pregunta a) y discuten cómo graficar la función en el software GeoGebra, posteriormente e_{12} decide realizar una tabla de valores para así graficar la recta $f(x)$.



Figura 3.1: Resolución estudiante e_{12}

En base en la tabla de valores confeccionada e_{12} señala que debe ser a partir del 3, a lo cual e_{11} rebate preguntando el por qué ya que le estaban pidiendo cuando la función toma valores positivos, finalmente e_{12} argumenta que para $x=1$ la función es -2 y en $x=3$ es 2, por lo cual la función es positiva a partir del punto (3,2), ya que en $x=2$ la función es 0 por lo tanto no podía ser desde el punto (2,0), e_{11} asiente convencido de que dicho argumento era el correcto.

Para la pregunta b) los estudiantes se apoyan en la tabla de valores confeccionada en la pregunta anterior llegando a la conclusión que a partir del punto (2,0) la función toma valores menores a 2, e_{11} argumenta que no puede ser desde $x=3$, ya que la variable y toma el valor 2.

Para la pregunta c) e_{12} comienza leyendo la pregunta en voz alta, paso seguido e_{11} observa la gráfica e indica que para que la función tome valores entre -2 y 6, x tiene que tomar valores entre 1 y 5, e_{12} lo mira con rostro confundido, por lo cual e_{11} argumenta que si se fija en la tabla de valores se evidencia que para que la función tome el valor -2 tiene que ser en $x=1$ y para que tome el valor 6, apuntando la gráfica, tiene que ser en $x=5$, e_{12} no conforme con dicha justificación le rebate que no, que se está confundiendo que x tendría que tomar valores entre el 1 y el 4, e_{11} nuevamente le indica que mire el gráfico,

que en $x = 4$ la función no toma el valor 6 sino en $x = 5$, finalmente e_{12} se convence de que e_{11} está en lo correcto.



Figura3.2: Resolución estudiante e_{11}

Para la última pregunta e_{11} señala que y es la recta, pero rápidamente e_{12} lo corrige indicando que y corresponde a la recta vertical de la gráfica, dicho eso corroboran lo que se les está preguntando, posteriormente e_{11} concluye que los valores pedidos son entre el 1 y el 5 y discuten si se incluye o no el 5. No convencida e_{12} lee nuevamente la pregunta e_{11} la interrumpe y le dice que si $x=5$ entonces $y=6$, pero e_{12} le señala que le están pidiendo los valores para y no para x , a lo que después de un rato e_{11} asiente. Finalmente ambos concluyen que el intervalo pedido es entre -10 y 8, pero estiman que como x es mayor estricto que -3 entonces el intervalo pedido no puede ser entre -10 y 8 sino entre -9 y 8 para poder incluirlo.

● **Pregunta 2**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $g(x)=-3x+1$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

En primera instancia el estudiante e_{12} lee en voz alta la pregunta a), luego e_{11} empieza a probar con $x=1$ y $x=2$ (obteniendo valores negativos para la función), por lo que e_{12} le señala que tiene que darse valores que den positivos, entonces e_{11} prueba con $x=0$ y con $x=-1$, por lo cual ambos concluyen que a partir $x=0$ la función es positiva.

Para la pregunta b) consideraron lo realizado en la pregunta anterior, por lo que inmediatamente e_{11} indica que el intervalo pedido es del 0 al infinito negativo y e_{12} reafirma lo dicho por e_{11} argumentando que con 0 es 1 y con 1 es -2.

Para el desarrollo de la pregunta c) e_{11} apoyado en la gráfica indica que cuando la función toma el valor -2 la variable x toma el valor 1, lo que e_{12} asiente y pregunta, qué pasa cuando la función toma el valor 3, e_{11} responde que los valores correspondientes son 1 y 0 por lo que e_{12} señala está equivocado pues no es el 0 sino el 0,66. Posteriormente discuten si los valores 1 y 0,66 se incluyen en el intervalo pedido, pero finalmente e_{12} es quien determina es un intervalo cerrado mientras que e_{11} no muy convencido asiente.

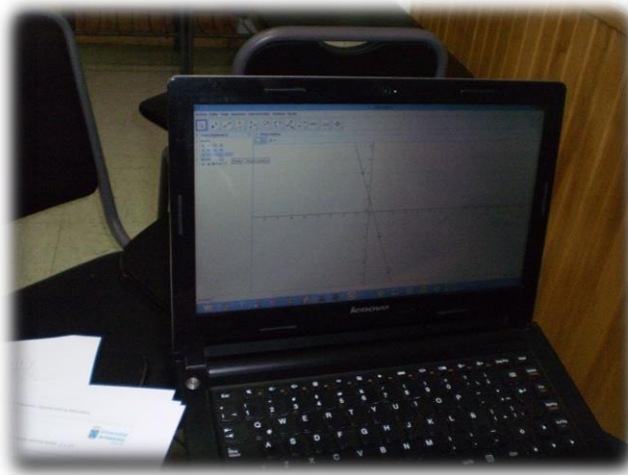


Figura 3.3: Resolución estudiante e_{11}

En un principio para la pregunta d) discuten si el intervalo pedido es del 0 al 1,33 o del 1 al 1,33, e_{11} argumenta que en $x=0$ la función vale 1, pero luego e_{12} advierte que cuando $x=0$ entonces $y=1$ haciendo énfasis en que se está preguntando para los valores de y , por lo que lee pregunta por segunda vez. e_{11} rectifica lo dicho anteriormente señalando que si $x=1$ entonces $y=-2$, por consiguiente e_{12} le pide a e_{11} que anote los valores de y para x . Posteriormente se genera otra discusión respecto del valor que toma la función cuando $x=1$, e_{11} indica que la función vale 0 mientras que e_{12} no muy convencida asiente, por lo tanto llegan a la conclusión que el intervalo pedido es del 0 al 1,33. Pero e_{11} queda con dudas y le pide a e_{12} revisar la pregunta otra vez, una vez leída la pregunta por tercera vez e_{11} señala que lo hicieron al revés y concluyen apoyados en la gráfica que el intervalo pedido es entre el -2 y 10 cerrado.

● **Pregunta 3**

En un nuevo archivo GeoGebra grafique las funciones $f(x)=2x-4$ y $g(x)=-3x+1$

- a. ¿Para qué valores la función $f(x) < g(x)$?
- b. ¿Para qué valores la función $g(x) \leq f(x)$?
- c. ¿Qué puede generalizar?

Para la pregunta a) una vez graficadas ambas rectas, e_{11} inmediatamente señala el punto de intersección (1,-2), ven el comportamiento de la función según ciertos valores específicos, luego leen la pregunta por segunda vez, e_{12} señala que es más fácil verlo en una tabla de valores debido a la dificultad de distinguir una recta de otra en el archivo GeoGebra, ante esto el investigador interviene indicando cómo colorear las rectas en GeoGebra. Posteriormente apoyándose en la gráfica e_{11} manifiesta que para todos los valores a partir del 1 al infinito negativo $g(x)$ va hacer mayor que $f(x)$, e_{12} después de un rato asiente lo dicho por e_{11} y le pregunta si el 1 se incluye o no en el intervalo.



Figura 3.4: Resolución estudiante e_{11}

Inicialmente para la pregunta b) e_{12} relaciona lo solicitado con la pregunta anterior al igual que e_{11} , quien señala de inmediato que el punto de intersección es (1,-2). De esta forma ambos concluyen que son iguales en ese punto y a partir de este al infinito positivo la función $f(x)$ es mayor.

Finalmente en la pregunta c) los alumnos concluyen que a partir del punto de intersección (1,-2) ellos saben dónde las funciones son iguales y donde una es mayor o menor que otra.

● **Pregunta 4**

¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

- a. $-x + 9 \leq -6x + 29$
- b. $4x + 1 > -x - 4$
- c. $x + 5 < 3x + 7$
- d. $-3x + 6 \geq x - 10$

Para el desarrollo de las preguntas a), b), c) y d) los estudiantes realizaron un trabajo algebraico para obtener el conjunto solución correctamente.

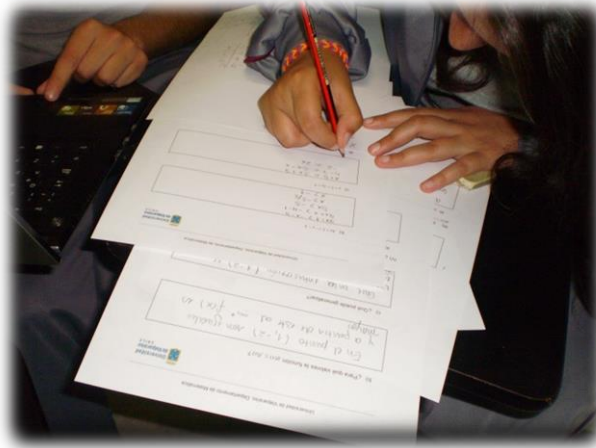


Figura 3.5: Resolución estudiante e_{12}

Momento 2:

- **Pregunta 5**

Dada las gráficas en mica

- a. Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

En el momento de hacer entrega de las gráficas en mica los estudiantes se muestran muy sorprendidos e inmediatamente superponen las gráficas para identificar el punto de intersección, una vez encontrado dicho punto determinan que para que se cumpla la relación pedida los valores tienen que estar desde el 1 hacia el infinito positivo.

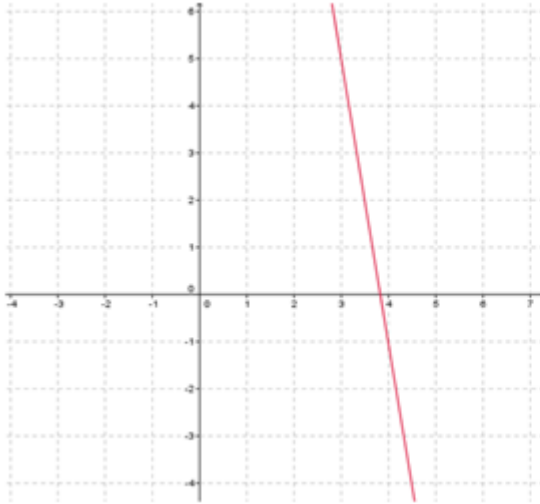


Figura 3.6: Resolución estudiantes e_{12} y e_{12}

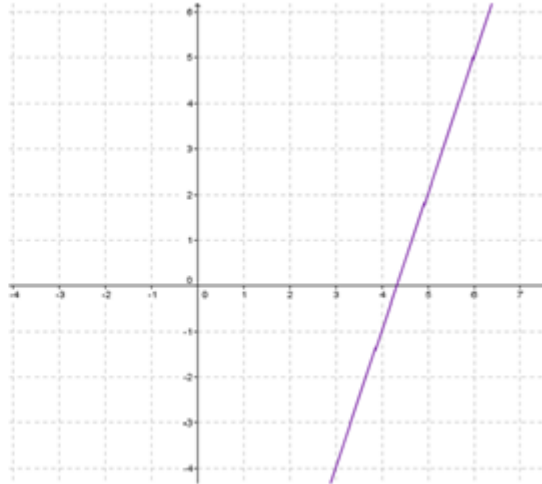
● **Pregunta 6**

Dadas las siguientes gráficas:

Gráfica $f(x)$

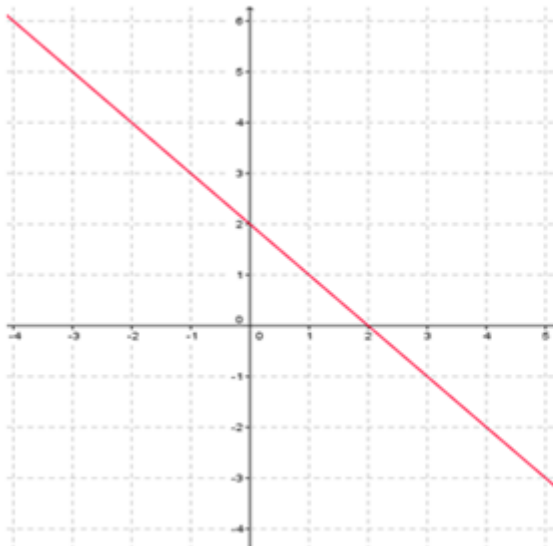


Gráfica $g(x)$

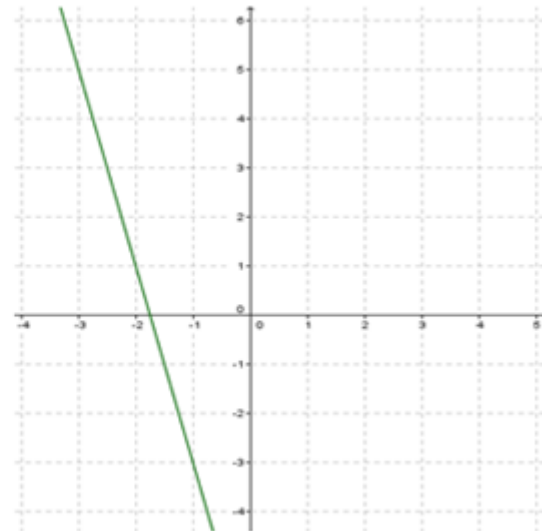


a. Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$

Gráfica $h(x)$



Gráfica $s(x)$



b. Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$

Para el desarrollo de las preguntas a) y b) los estudiantes al igual que en la pregunta anterior se dan cuenta que deben identificar primero el punto de intersección, para luego determinar para qué valores se cumple la relación.



Figura 3.7: Resolución estudiantes e_{12} y e_{12}

Binomio 2

Al binomio 2 lo llamaremos B_2 y corresponde a una pareja de estudiantes e_{21} y e_{22}

Momento 1:

- **Pregunta 1**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $f(x)=2x-4$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

En un primer momento los estudiantes leen en silencio y de manera individual la pregunta 1) y a continuación e_{21} gráfica en el software GeoGebra, luego los estudiantes identifican el punto de intersección y discuten respecto a la manera en cómo entregar la respuesta, si

escribir que $f(x)$ es mayor en el punto $(2,0)$ o a partir del valor $x=2$, finalmente e_{21} le menciona a e_{22} que se piden los valores para x por lo que e_{22} se convence y concluyen que la función es positiva a partir del valor $x=2$.

Cuando los estudiantes se ven enfrentados a la pregunta b), luego de leer en silencio y de manera individual, el estudiante e_{21} esboza la ecuación $2=2x-4$ y la resuelve de manera algorítmica colaborado por e_{22} llegando a $x=3$. Posteriormente e_{22} señala que la respuesta es: que $f(x)$ es menor en el punto $(3,2)$, pero e_{21} lo corrige diciendo que $f(x)$ es menor a partir de $x=3$.

Los estudiantes leen en silencio la pregunta c), luego ambos miran el gráfico y e_{22} le menciona que y es igual a 5, pero rápidamente e_{21} lo corrige diciendo que x es igual a 5, e_{22} lo mira con rostro confundido, por lo cual e_{21} le dice: “*Mira la función toma valores entre -2 y 6, entonces x toma valores entre -2 y 6... en -2 es 1 y en 6 está en 5*”. Finalmente e_{22} reconoce estar errado.

Para la última pregunta los estudiantes en base a la gráfica determinan que los valores que toma la función $f(x)$ en el intervalo $]-3,6]$ se encuentran entre -10 y 8 cerrado.



Figura 3.8: Resolución estudiantes e_{21}

● **Pregunta 2**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $g(x)=-3x+1$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

Inicialmente en la pregunta a) el estudiante e_{21} apunta el punto en que la función $g(x)$ comienza a ser positiva, pero al no ser dicho punto un número entero e_{21} señala que para que la función sea positiva y tiene que ser cero por lo tanto esboza la ecuación $0 = -3x + 1$ y la resuelve algebraicamente cada estudiante de manera individual concluyendo que a partir del infinito negativo hasta $\frac{1}{3}$ la función es positiva.

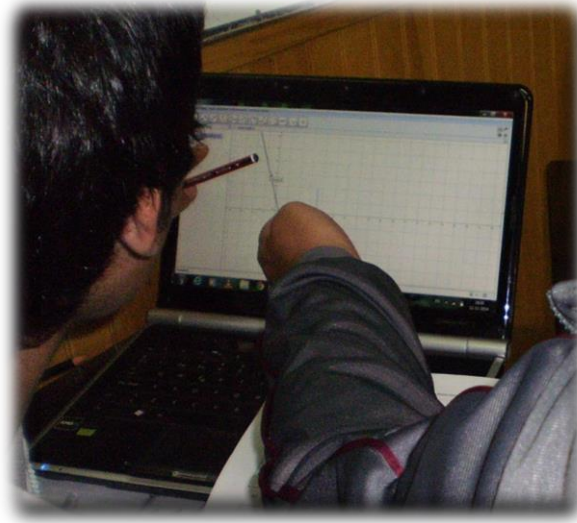


Figura 3.9: Resolución estudiantes e_{21}

Luego de leer en voz alta la pregunta b) y mirar la gráfica e_{22} señala que a partir de 1 la función es menor a 2, pero lo e_{21} corrige diciendo que se piden los valores para x por lo que esboza la ecuación $2 = -3x + 1$ y la resuelve algebraicamente con colaboración de e_{22} concluyendo que a partir del $-\frac{1}{3}$ al infinito positivo la función es menor a 2.

Para el desarrollo de la pregunta c) los estudiantes buscan en la gráfica la preimagen de -2 y 3, pero al no ser un número entero la preimagen de 3 se apoyan en el desarrollo de la pregunta anterior y resuelven mentalmente la ecuación $3 = -3x + 1$ obteniendo que el valor buscado es $-\frac{2}{3}$. Por lo tanto concluyen que para los valores que se encuentran entre $-\frac{2}{3}$ y 1 la función toma valores entre -2 y 3.

Para la última pregunta los estudiantes en base a la gráfica determinan que los valores que toma la función $g(x)$ en el intervalo $]-3, 1]$ se encuentran entre 10 y -2 cerrado.

● **Pregunta 3**

En un nuevo archivo GeoGebra grafique las funciones $f(x)=2x-4$ y $g(x)=-3x+1$

- ¿Para qué valores la función $f(x) < g(x)$?
- ¿Para qué valores la función $g(x) \leq f(x)$?
- ¿Qué puede generalizar?

Los estudiantes inicialmente grafican las rectas y leen en voz alta la pregunta a), luego e_{21} señala que la función $f(x)$ es menor a $g(x)$ desde el 10 hasta el 1 ante esto e_{22} pregunta por qué, e_{21} observa la gráfica nuevamente y concluye que del infinito negativo hasta 1 $g(x)$ es mayor a $f(x)$ a lo que e_{22} asiente.

Después de leer en voz alta la pregunta b) e_{21} apunta el punto de intersección en la gráfica señalando que ahí las rectas son iguales, e_{22} reafirma diciendo “*en 1 sé que es igual*”, por lo tanto los estudiantes concluyen que desde 1 hacia el infinito positivo $g(x)$ es menor o igual a $f(x)$.

Para la pregunta c) e_{21} toma la iniciativa escribiendo e indicando que a partir de $x=1$ la $f(x)$ es mayor a $g(x)$, e_{22} cuestiona que sea a partir de $x=1$ pero e_{21} sigue con su conclusión diciendo “*mientras que cuando $x < 1$ $f(x)$ es menor que $g(x)$* ” y rectifica lo dicho en un principio señalando que a partir de $x > 1$ la función $f(x)$ es mayor a $g(x)$ y no de $x = 1$.

● **Pregunta4**

¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

- $-x + 9 \leq -6x + 29$
- $4x + 1 > -x - 4$
- $x + 5 < 3x + 7$
- $-3x + 6 \geq x - 10$

Para la pregunta a) los estudiantes utilizan el método de ensayo y error e_{21} prueba lo que pasa cuando x vale 0 y sugiere graficar las rectas para encontrar el conjunto solución, una vez graficadas las rectas apunta al punto de intersección señalando que desde ahí una es menor que la otra por lo que prueba algebraicamente que pasa cuando x vale 4, e_{22} le indica “ahí te da 5 y 5, son igual, sí se cumple”, por lo tanto e_{21} concluye que para los valores desde el infinito negativo hasta el 5 se cumple la relación pedida, e_{22} asiente.

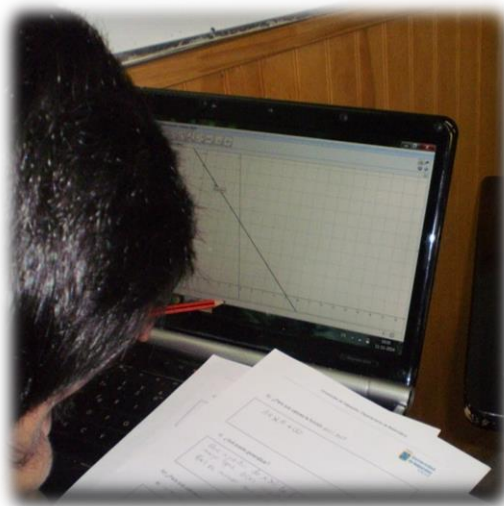


Figura 3.10: Resolución estudiantes e_{21}

En primera instancia para la pregunta b) e_{21} indica que hay que graficar, e_{22} señala que no es necesario pero que sirve para corroborar si está bien la respuesta. e_{21} con el método de ensayo y error prueba algebraicamente lo que pasa cuando $x=0$ obteniendo que con dicho valor la relación pedida se cumple, e_{22} sugiere probar con $x=-3$ obteniendo que la relación pedida no se cumple estimando que para los infinitos negativos no se cumple, pero e_{21} en base a lo observado en la gráfica prueba con $x=-1$, llegando que en $x=-1$ las rectas son iguales, entonces concluye que para los valores entre -1 hacia el infinito positivo se cumple la relación pedida.

Inicialmente para la pregunta c) e_{21} gráfica las rectas en GeoGebra e inmediatamente e_{22} le indica que pruebe si la relación pedida se cumple para $x=0$, a lo e_{21}

asiente y continúa con $x = -1$ obteniendo que con dicho valor la relación no se cumple, luego apoyado en la gráfica concluye que para los valores entre -1 hacia el infinito positivo se cumple la relación.

Para la última pregunta d) luego de graficar las recta en Geogebra e_{21} algebraicamente prueba si la relación se cumple o no con $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$ llegando a que la relación no se cumple para ninguno de dichos valores, pero se da cuenta que tenía mal escrita una recta que por eso no se cumplían y vuelve a hacer lo mismo pero esta vez con las rectas correctas, finalmente en base a su trabajo algebraico y a la gráfica concluyen que para los valores desde el infinito negativo hasta el -6 se cumple la relación pedida.

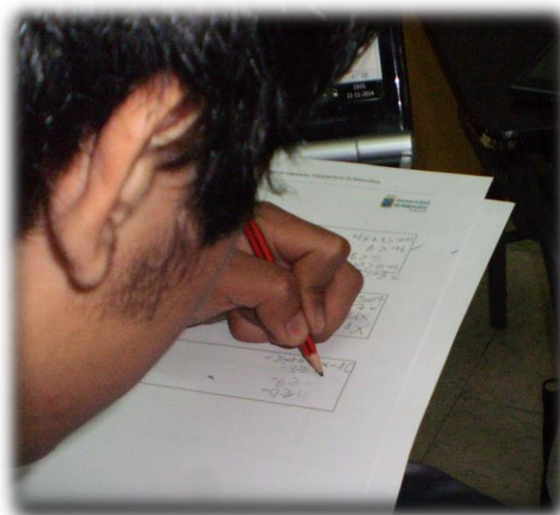


Figura 3.11: Resolución estudiantes e_{21}

Momento 2:

- **Pregunta 5**

Dada las gráficas en mica

- a) Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

Una vez entregada las gráficas en mica e_{21} sugiere que se tienen que superponer a lo que e_{22} asiente encontrando el punto de intersección (1,4) y e_{21} reconoce inmediatamente que a partir del 1 hacia el infinito positivo $g(x)$ es menor igual a $f(x)$, pero e_{22} no muy convencida le pregunta si está seguro estimando que es a partir de 4 y no de 1, ante esto e_{21} reafirma lo dicho en un principio.

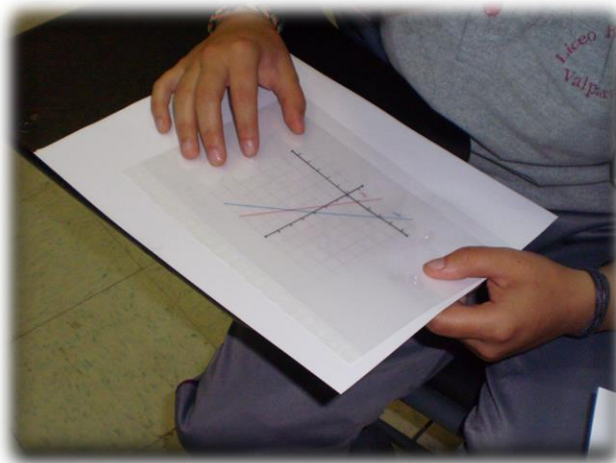
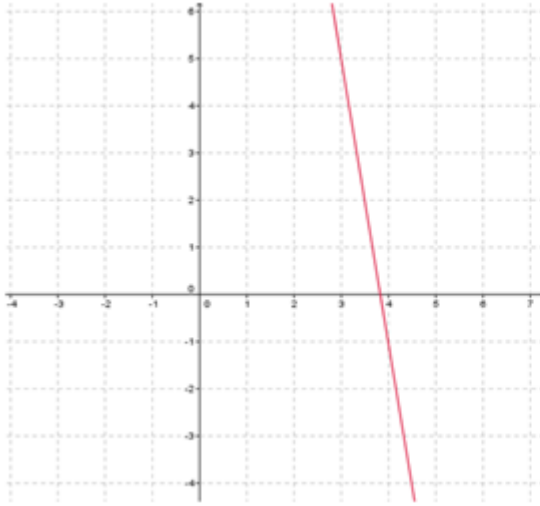


Figura 3.12: Resolución estudiantes e_{21} y e_{22}

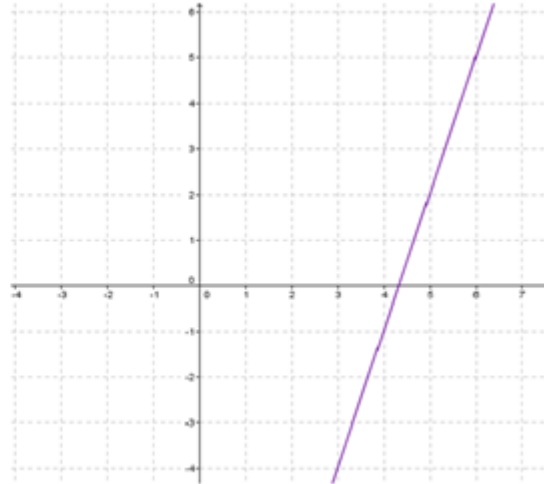
• **Pregunta 6**

Dadas las siguientes gráficas:

Gráfica $f(x)$

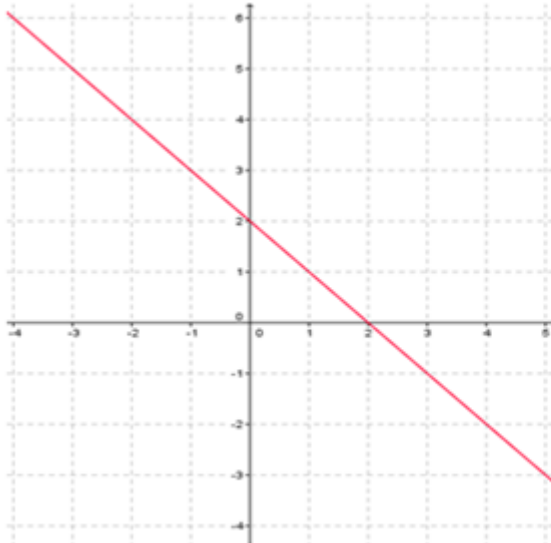


Gráfica $g(x)$

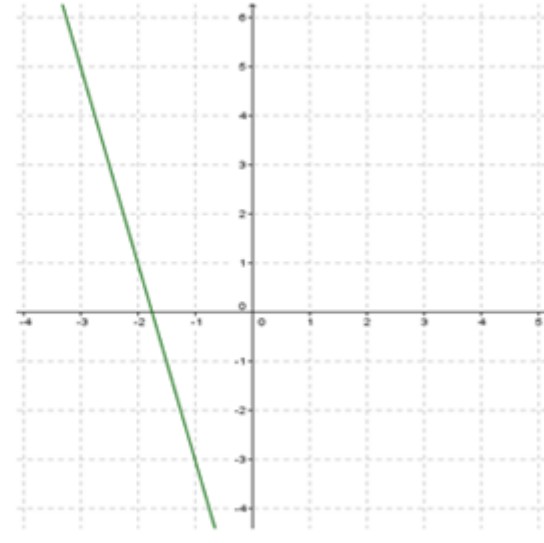


a) Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$

Gráfica $h(x)$



Gráfica $s(x)$



b) Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$

Tanto para la pregunta a) como para b) e_{21} traza una recta sobre la otra para encontrar el punto de intersección, posteriormente determina para qué valores se cumple la relación, mientras que e_{22} asiente y colabora en escribir la respuesta.

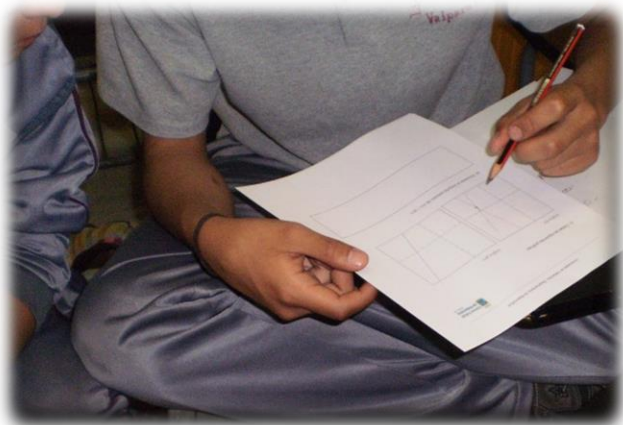


Figura 3.13: Resolución estudiantes e_{21}

Espacio de Trabajo Matemático Binomio 1

A continuación se describe el Espacio de Trabajo Matemático del Binomio 1:

Momento 1:

- **Pregunta 1**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $f(x) = 2x - 4$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de y corresponden al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

En esta tarea el estudiante e_{12} trabaja bajo un registro tabular, utilizando una tabla de valores para que puedan graficar la función activando así la *génesis semiótica*, luego e_{11} con ayuda del software GeoGebra grafica $f(x)$ activando así la *génesis instrumental*. Posteriormente dan respuesta a cada pregunta activando principalmente la *génesis semiótica*, ya que los estudiantes solo trabajan en un registro gráfico (e_{11}) y tabular (e_{12}), complementando así sus ETM-personal trabajando en conjunto.

● **Pregunta 2**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $g(x)=-3x+1$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

En esta tarea se ve activada principalmente la *génesis semiótica*, ya que el estudiante e_{11} trabaja en un registro gráfico y e_{12} en un registro tabular, visualizando lo solicitado.

● **Pregunta 3**

En un nuevo archivo GeoGebra grafique las funciones $f(x)=2x-4$ y $g(x)=-3x+1$

- ¿Para qué valores la función $f(x)<g(x)$?
- ¿Para qué valores la función $g(x)\leq f(x)$?
- ¿Qué puede generalizar?

Para el desarrollo de esta tarea los estudiantes comienzan activando la *génesis instrumental* al utilizar un artefacto no clásico (software GeoGebra) para graficar las funciones, no obstante e_{12} señala que es más fácil responder a lo solicitado apoyándose en una tabla de valores, por su parte el estudiante e_{11} continúa trabajando en un registro gráfico lo que activa fuertemente la *génesis semiótica*. Finalmente los estudiantes se perciben que a partir del punto de intersección de las rectas ellos saben dónde las funciones son iguales y dónde una es mayor o menor que otra.

● **Pregunta 4**

¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

- $-x + 9 \leq -6x + 29$
- $4x + 1 > -x - 4$
- $x + 5 < 3x + 7$
- $-3x + 6 \geq x - 10$

Para esta tarea los estudiantes activan inmediatamente la *génesis instrumental* al utilizar un artefacto simbólico para obtener el conjunto solución para el cual se cumple las relaciones anteriores.

Momento 2:

- **Pregunta 5**

Dada las gráficas en mica

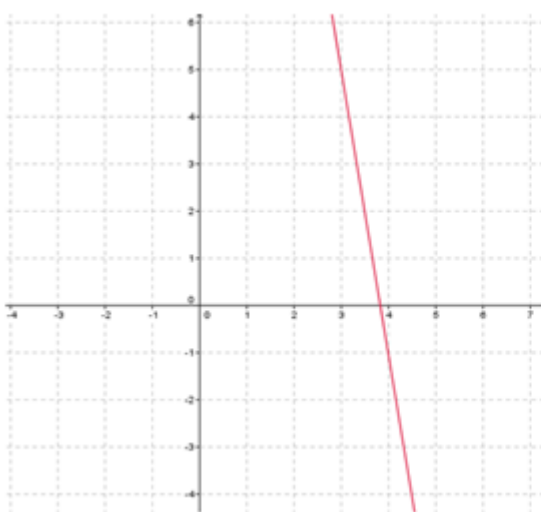
- a. Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

Al recibir las gráficas en mica los estudiantes la utilizan como un artefacto clásico e inmediatamente las superponen para identificar el punto de intersección y así determinar los valores para los cuales se cumple la relación, activando fuertemente la *génesis instrumental* y *génesis semiótica*.

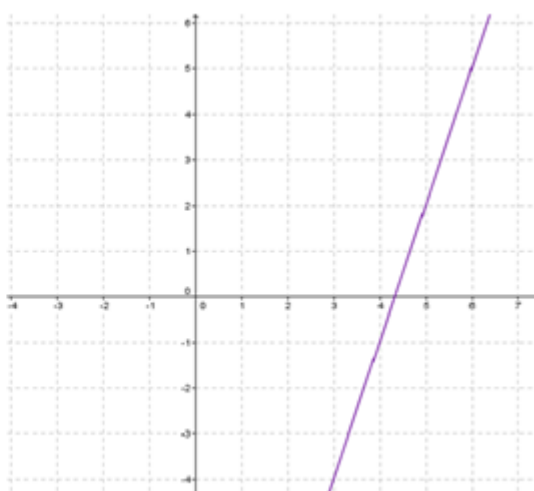
- **Pregunta 6**

Dadas las siguientes gráficas:

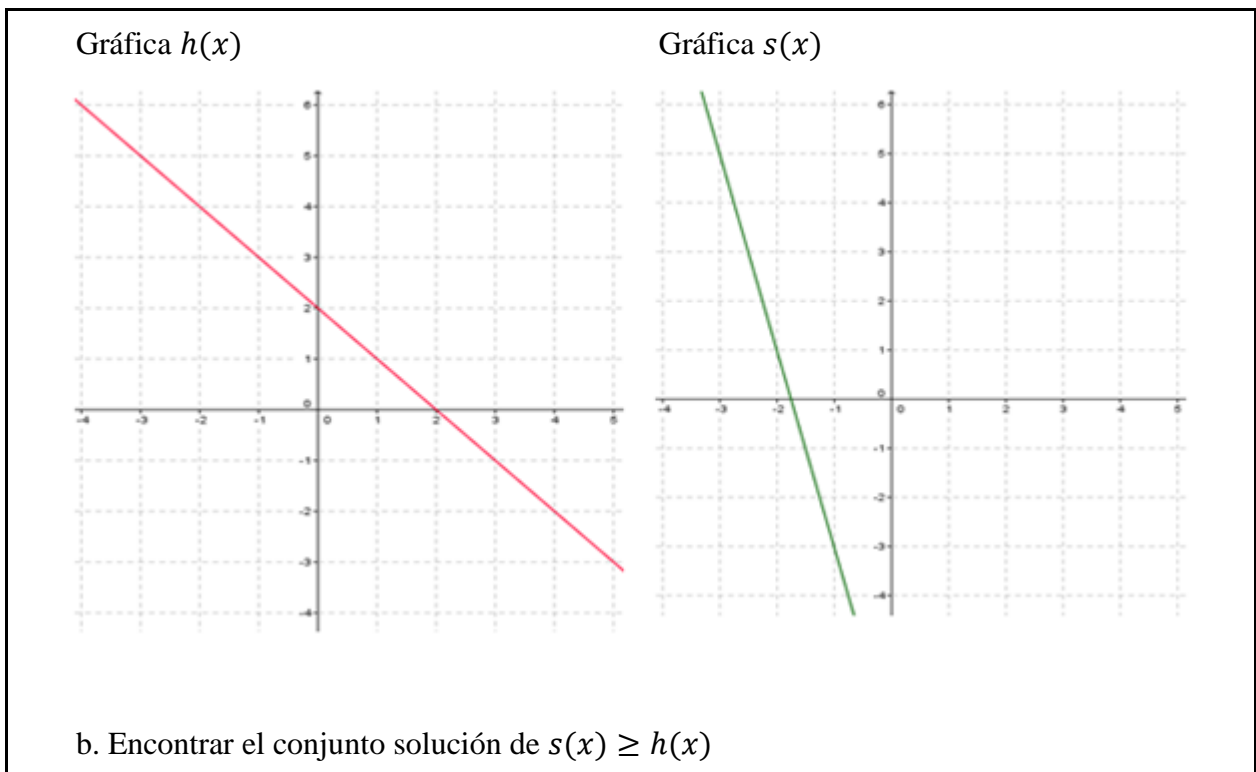
Gráfica $f(x)$



Gráfica $g(x)$



- a. Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$



En esta tarea los estudiantes visualizan ambos gráficos (*génesis semiótica*) e inmediatamente identifican el punto de intersección para luego determinar para qué valores se cumple la relación.

Espacio de Trabajo Matemático Binomio 2

A continuación se describe el Espacio de Trabajo Matemático del Binomio 2:

Momento 1:

- **Pregunta 1**

Grifique con ayuda de GeoGebra la función $f(x)=2x-4$ y responda :

- a. ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- b. ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- c. ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- d. ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

En esta primera tarea el estudiante e_{21} toma la iniciativa utilizando el software GeoGebra para graficar la función activando así la *génesis instrumental*, luego ambos estudiantes trabajan bajo un registro gráfico y registro algebraico (algoritmo simbólico) para dar respuesta a cada pregunta activando principalmente la *génesis semiótica*. Complementando así sus ETM-personal trabajando en conjunto.

- **Pregunta 2**

Grafique con ayuda de GeoGebra la función $g(x)=-3x+1$ y responda :

- ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?
- ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?
- ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?
- ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

Al igual que en la tarea anterior los estudiantes activan principalmente la *génesis semiótica* y *génesis instrumental*, al trabajar bajo un registro gráfico y artefactos simbólicos para dar respuesta a lo solicitado.

- **Pregunta 3**

En un nuevo archivo GeoGebra grafique las funciones $f(x)=2x-4$ y $g(x)=-3x+1$

- ¿Para qué valores la función $f(x)<g(x)$?
- ¿Para qué valores la función $g(x)\leq f(x)$?
- ¿Qué puede generalizar?

Para el desarrollo de esta tarea los estudiantes comienzan activando la *génesis instrumental* al utilizar un artefacto no clásico (software GeoGebra) para graficar las funciones, no obstante es el estudiante e_{21} quien toma la iniciativa trabajando bajo un registro gráfico lo que activa fuertemente la *génesis semiótica*. Finalmente los estudiantes perciben que a

partir del punto de intersección de las rectas ellos saben dónde las funciones son iguales y dónde una es mayor o menor que otra

- **Pregunta4**

¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

- a. $-x + 9 \leq -6x + 29$
- b. $4x + 1 > -x - 4$
- c. $x + 5 < 3x + 7$
- d. $-3x + 6 \geq x - 10$

Para esta tarea los estudiantes utilizan el método de ensayo y error, sin embargo e_{21} sugiere graficar las rectas en el software GeoGebra (*génesis instrumental*) señalando que no es necesario, pero sirve para justificar su respuesta por lo que es utilizado como método de prueba (*génesis discursiva*).

Momento 3:

- **Pregunta 5**

Dada las gráficas en mica

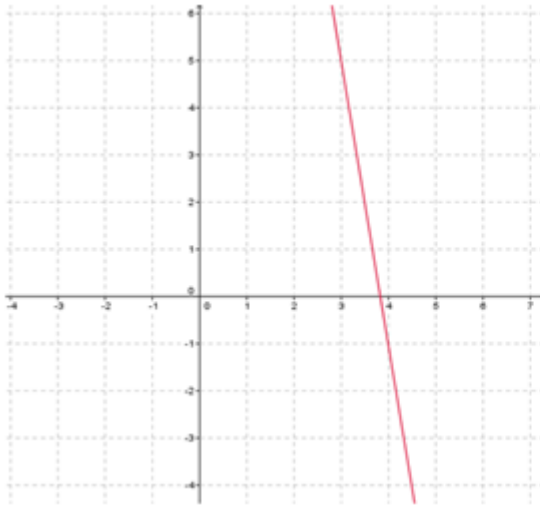
- a. Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

Al recibir las gráficas en mica los estudiantes la utilizan como un artefacto clásico e inmediatamente e_{21} sugiere que deben superponerlas para identificar el punto de intersección y así determinar los valores para los cuales se cumple la relación, de esta forma se activan fuertemente la *génesis instrumental* y *génesis semiótica*.

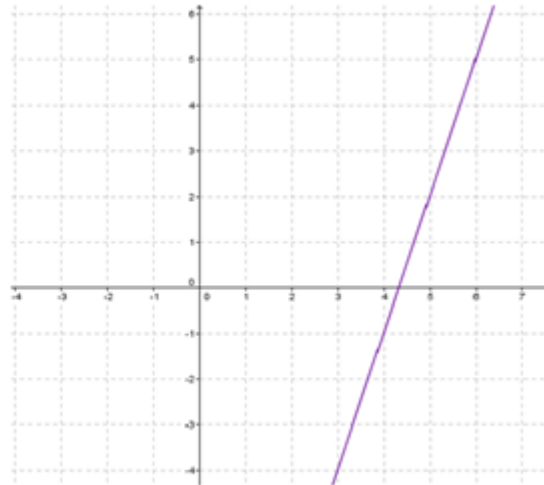
• **Pregunta 6**

Dadas las siguientes gráficas:

Gráfica $f(x)$

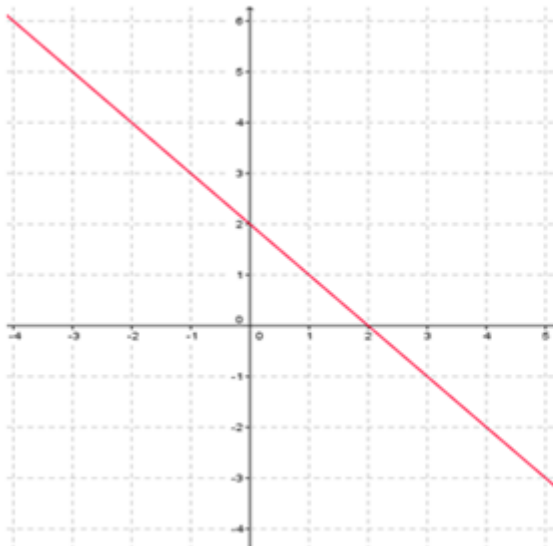


Gráfica $g(x)$

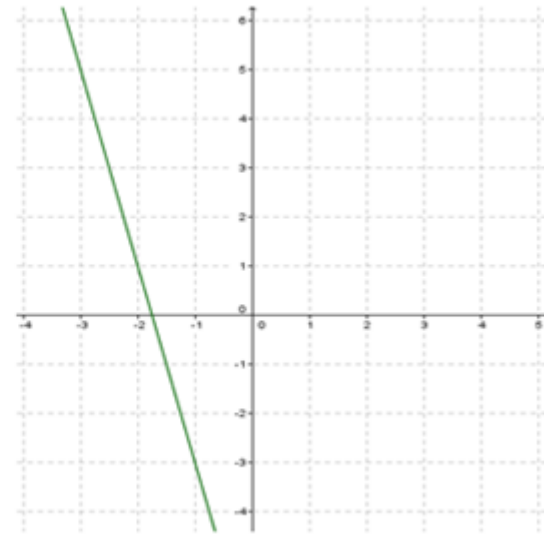


a. Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$

Gráfica $h(x)$



Gráfica $s(x)$



b. Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$

En esta tarea los estudiantes visualizan ambos gráficos (*génesis semiótica*) e inmediatamente e_{21} traza una recta sobre la otra con ayuda de artefactos clásicos para encontrar el punto de intersección, posteriormente determina para qué valores se cumple la relación, mientras que e_{22} asiente y colabora en escribir la respuesta.

3.2.4 Análisis a Posteriori y Evaluación

Momento 1

El Binomio 1 desconocía que para graficar rectas en el software GeoGebra bastaba con escribir dicha recta en la “entrada”, por lo que ellos optaron por realizar una tabla de valores para hallar puntos y de esta manera graficar las rectas en GeoGebra. En un principio utilizaron tabla de valores y la gráfica respectivamente para dar respuesta a lo pedido, pero después solo se apoyaron en la gráfica, salvo para el último ítem en donde realizaron un trabajo algebraico para encontrar lo solicitado. Por lo tanto considerando que la finalidad de este momento era que hallaran el conjunto solución a partir de la gráfica, podemos decir que se cumplió medianamente, ya que en algunas preguntas se apoyaron en tablas de valores y realizaron procedimientos algebraicos para encontrar el conjunto solución y no la gráfica.

El Binomio 2 no presentó ninguna dificultad para graficar en el software GeoGebra, apoyándose sólo en la gráfica para dar respuesta a lo solicitado salvo cuando tenían que tratar con números que no eran enteros, recurrían hacer trabajo algebraico. Por lo tanto podemos decir que se cumplió lo esperado que los estudiantes determinaran el conjunto solución a partir de la gráfica.

Momento 2

Los binomios de estudiantes cumplieron a cabalidad con el objetivo de este momento, ya que una vez entregada las gráficas en mica los estudiantes inmediatamente las superpusieron, encontrando así el conjunto solución, de igual manera para las dos preguntas restantes en las cuales no tenían la posibilidad de superponer las gráficas, no presentaron dificultades para hallar el conjunto solución.

Capítulo 4: Conclusiones

La presente investigación sustentada de un marco teórico, ETM, que apunta a potenciar distintos trabajos matemáticos que se dan, a partir de una tarea, nos permitió dar respuesta a nuestra problemática que gira en torno al concepto de inecuación lineal a nivel escolar donde observamos se privilegia un tratamiento algebraico, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, pero cuidando respetar las propiedades de la desigualdad, como la multiplicación por -1 , lo cual genera que la inecuaciones carezcan de significado, en términos teóricos, desde el ETM, se evidencia que existe una desarticulación entre las 3 génesis, potenciándose tanto la *génesis instrumental* como la *génesis semiótica*, quedando debilitada la *génesis discursiva*.

Con el objetivo de *conocer las concepciones que tienen los estudiantes de enseñanza media y nivel universitario acerca del concepto de desigualdad e inecuación lineal*, se elaboró una entrevista semiestructurada, la cual nos permitió identificar que tanto estudiantes de enseñanza media como universitarios dominan parcialmente el concepto de desigualdad, ya que lo asocian con la noción de “cosas distintas” pero no logran precisar con exactitud dicho concepto.

Por otro lado se evidenció que los estudiantes no tienen una concepción clara del concepto de inecuación lineal, ya que para dar una definición recurren a explicar el conjunto solución, haciendo énfasis en que no se obtiene un único valor sino un conjunto de valores, además relacionan fuertemente la ecuación con la inecuación lineal, indicando que esta última se resuelve “casi igual” que una ecuación cuidando de respetar las propiedades de desigualdad.

Para el objetivo *analizar el espacio de trabajo matemático de estudiantes de enseñanza media y nivel universitario respecto a las inecuaciones lineales*, se confeccionó un cuestionario considerando las actividades que se proponen en el programa de estudio, en los textos escolares oficiales de Chile, y el DEMRE. Dicho cuestionario permitió

caracterizar e identificar el trabajo matemático de los estudiantes universitarios y de enseñanza media, evidenciando que para la resolución de inecuaciones lineales los estudiantes solo realizan procedimientos algebraicos, presentando deficiencias para interpretar las soluciones obtenidas, lo cual permite inferir obstáculos referentes a la argumentación teórica, además de presentar falencias para modelar situaciones a través de inecuación lineal. Para el caso particular de la pregunta 4 del cuestionario aplicado solo a estudiantes universitarios en donde debían trabajar con gráfica de funciones, se observa que estos presentan dificultades a la hora de trabajar desigualdades a partir de su representación gráfica, pues solo un binomio logró acercarse a lo esperado.

Tomando en cuenta los resultados arrojados se evidencia que el estudio de inecuaciones lineales muchas veces es reducido a un algoritmo repetitivo, es decir, se realizan manipulaciones y operaciones algebraicas que buscan “despejar” una variable, tal como se hace para las ecuaciones, lo cual ocasiona que los estudiantes a pesar de ser capaces de encontrar el conjunto solución no consigan justificar el algoritmo utilizado y que las inecuaciones lineales carezcan de significado. Es por ello elaboramos una propuesta de enseñanza-aprendizaje bajo un enfoque gráfico (cartesiano) con el fin de dar significado a las inecuaciones lineales, además de justificar el método algebraico utilizado por los estudiantes. Desde el punto de vista del ETM, al incorporar el enfoque gráfico al trabajo algebraico, se busca la activación de la *génesis discursiva*, para así favorecer la articulación entre las 3 *génesis*.

Los resultados obtenidos de la propuesta de enseñanza-aprendizaje aplicada a estudiantes de enseñanza media fueron satisfactorios, ya que los estudiantes rápidamente comprendieron cómo obtener el conjunto solución a partir de la representación gráfica de funciones contando con las expresiones algebraicas y en otras solo el trazado de las rectas entregados en gráficos distintos, durante su desarrollo no se presentaron grandes dificultades, más bien el trabajo se dio de forma natural. Permitiendo a los estudiantes dar sentido al trabajo algebraico y a su vez dotar de significado a las inecuaciones lineales.

Al finalizar la propuesta los estudiantes manifestaron que esta forma de trabajar inecuaciones lineales con la gráfica era más entretenida y más fácil, uno de los binomios manifestó lo siguiente: “Me pareció una forma más creativa para entender inecuaciones” y que era “más fácil entenderlo”.

Considerando nuestro marco teórico didáctico, ETM, se pudo observar que los binomios transitaron por la *génesis semiótica* al trabajar bajo los registros gráfico, tabular y algebraico, por la *génesis instrumental* al hacer uso de artefactos simbólicos (algoritmos), artefactos clásicos (gráficas en mica, lápiz) y artefactos no clásicos (software GeoGebra) y por la *génesis discursiva* al utilizar la gráfica como una prueba pragmática. Lo cual evidencia que las tareas propuestas articulan las tres *génesis* dando movimiento al Espacio de Trabajo Matemático.

En concordancia con lo expuesto anteriormente creemos que para la enseñanza de inecuaciones lineales el incorporar un enfoque gráfico resulta fructuoso para el entendimiento de las inecuaciones lineales, ya que de esta manera se logra desligar del concepto de ecuación, favoreciendo el vínculo entre desigualdad e inecuación lineal al comparar funciones, y le da sentido al conjunto solución. Coincidiendo con las reflexiones de Barbosa (2003) “Es necesario proponer actividades [...] que involucren la interpretación y las resoluciones no solo algebraicas [...] sino también resoluciones gráficas que propicien el pensamiento flexible” (p.218).

Referencias

Apostol, T. M. (2006). *Análisis matemático*. Barcelona:Reverté.

Bagni, G. (2005). Equazioni e disequazioni riferimenti storici e proprietà interazionali. *La matematica e la sua didattica*, 3, 285-296. Recuperado de <http://www.syllogismos.it/education/2005-Disequazioni.pdf>

Balacheff N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, 18 (2), 147-176.

Ballester, R. et al. (2001). *Curso de cálculo*. Valencia: UPV.

Barbosa K. (2006). *Inecuaciones: Un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios*. (Tesis para obtener el grado de Doctor en ciencias en matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/barbosa_2006.pdf

Barbosa K. (2003). La enseñanza de inecuaciones lineales desde el punto de vista de la teoría apoe. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, vol. 6, número 003, pp. 199-219. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/335/33560302.pdf>

Borello M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico*. (Tesis para obtener el grado de Doctorado en matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional) Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/borello_2010.pdf

Borello M. (2007). *Relación entre las concepciones del maestro y el aprendizaje de los alumnos en el caso de las desigualdades. Un estado del arte*. (Tesis para obtener el

grado de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa). Recuperada de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/borello_2007.pdf

Breindenbach, D. et al. (1992). Development of the process of function. *Educational Studies in Mathematics*, vol.23,247-285.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos Aprendizajes Intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Éditions Peter Lang, coll. Berne: Exploration, Recherches en sciences de l'éducation*.

Guerra, M. et al. (2014). *Matemática 4, Proyecto Bicentenario*. Chile: Santillana

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Houdement, C. Kuzniak A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16(3), 289-321.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Mejía, F. & Álvarez, R. & Fernández, H. (2005). *Maemáticas previas al cálculo*. Medellín: Sello editorial.

Ministerio de Educación, (2009). Marco Curricular Enseñanza Media (Actualización 2009), Santiago, Chile.

Muñoz, G. et al. (2014). *Matemática cuarto año medio*. Chile: Santillana

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe*. Paris: Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approchecognitive des instrumentscontemporains*. París: ArmandColin.

Anexos

**Anexo 1: Producciones del Cuestionario, Estudiantes
Universitario**

Binomio 1

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

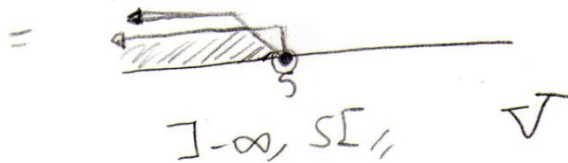
- I) El conjunto de los números reales menores que 5. $\Rightarrow]-\infty, 5[$
II) El conjunto de los números reales mayores que 5. $\Rightarrow]5, \infty[$
III) El conjunto formado solo por el número 5. $\Rightarrow \{5\}$

- A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) Solo II y III

$$\begin{aligned} 2x + 7 &\leq 12 + x \\ 2x - x &\leq 12 - 7 \\ x &\leq 5 \\ \mathbb{R} \quad]-\infty, 5] \end{aligned}$$

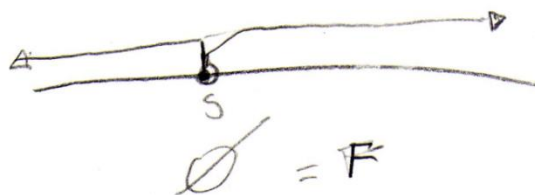
CASO I

$$]-\infty, 5] \cap]-\infty, 5[$$



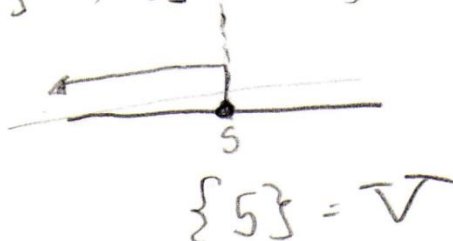
CASO II

$$]5, \infty[\cap]-\infty, 5[$$



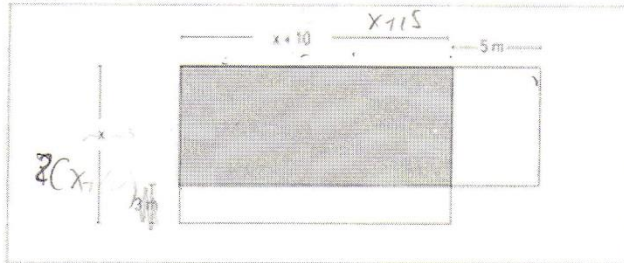
CASO III

$$]-\infty, 5] \cap \{5\}$$



Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



- ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?
- ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?
- Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

$$a) (x+15)(x-3) > (x+10)(x)$$

$$x^2 - 3x + 15x - 45 > x^2 + 10x$$

$$2x > 45$$

$$x > \frac{45}{2} \text{ [m]}$$

$$\frac{45}{2} = 22.5$$

terreno tiene que ser mayor a $\frac{45}{2}$ [m].

b) Hubiese perdido mas terreno ya que es mas grande el largo que el ancho.

c) depende de las medidas

$$Si: \begin{matrix} x \\ x \end{matrix} \Rightarrow x-3 \begin{matrix} x+5 \\ x+5 \end{matrix} \Rightarrow (x-3)(x+5) > x^2$$

$$x^2 + 5x - 3x - 15 > x^2$$

$$2x > 15 \Rightarrow x$$

Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?

$$\begin{array}{l} \text{ELLA} = x \qquad \qquad \qquad \text{EL} = y \\ \\ x \leq \frac{y+7}{2} \end{array}$$

$$a) \quad y = x + 8$$

$$x \leq \frac{x+8+7}{2}$$

$$x - 7 \leq \frac{x+8}{2}$$

$$2(x-7) \leq x+8$$

$$2x - 14 - 8 \leq x$$

$$x \leq 22$$

$$b) \quad x < \frac{x+7}{2}$$

$$2(x-7) < x$$

$$2x - 14 < x$$

$$x < 14$$

Tiene que ser menor a 14 años para que teniendo la misma edad puedan casarse.

Tarea 4.

- a) Graficar las rectas $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$
- b) En cada gráfico marcar los valores para y que corresponden al intervalo de valores para x dado por $-2 \leq x < 1$. Expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos.
- c) Comparar ambas respuestas. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el valor de y en ambos casos? ¿A qué valor de x se asocia el valor mínimo de y en cada caso?
- d) Comparar la distancia entre los valores máximo y mínimo de y que se asocian a los intervalos para x , $I_1 = [2,5]$ e $I_2 = [-2,1]$ en cada una de las rectas.
- e) Proponer un intervalo de valores para y ; determinar el intervalo correspondiente para x .

1)

$y = 2x - 7$

x	y
1	-5
2	-3

$y = 3x + 1$

x	y
1	-2
2	-5
3	-8

2)

$[-2, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ límite
Bornd

$x \longrightarrow f(x) = 2x - 7$ "Ignorar"

Recorrido:

$y = 2x - 7$
 $\frac{y + 7}{2} = x$

$y = 2x - 7$

x	y
-2	-11
1	-5

~~$-2 < x < 2$~~

$-2 < y \leq 7$

c) Recta 1.

El valor máximo que puede tomar y es un número cercano a "-5" sin tomar el -5 (por la izquierda) ($T^{\wedge}F$)

$$R = 4, \bar{9}$$

El valor mínimo que puede tomar y es -11. y se asocia con el valor -2 en "x"
Recta 2.

El valor máximo que puede tomar y es 7 y se asocia con el valor mínimo de x que es -2

El valor mínimo que puede tomar y es un número cercano a -2 sin tomar el -2 (por la derecha) ($F^{\wedge}T$)

d) $-2 \leq x < 1$

Compara

$$2 \leq x \leq 5 \quad \wedge \quad -2 \leq x \leq 1$$

No sabemos como hacerlo (No entendemos como hacerlo)

e)

x	y
2	-3
4	1

$$-3 \leq y \leq 1 \quad [-3, 1]$$

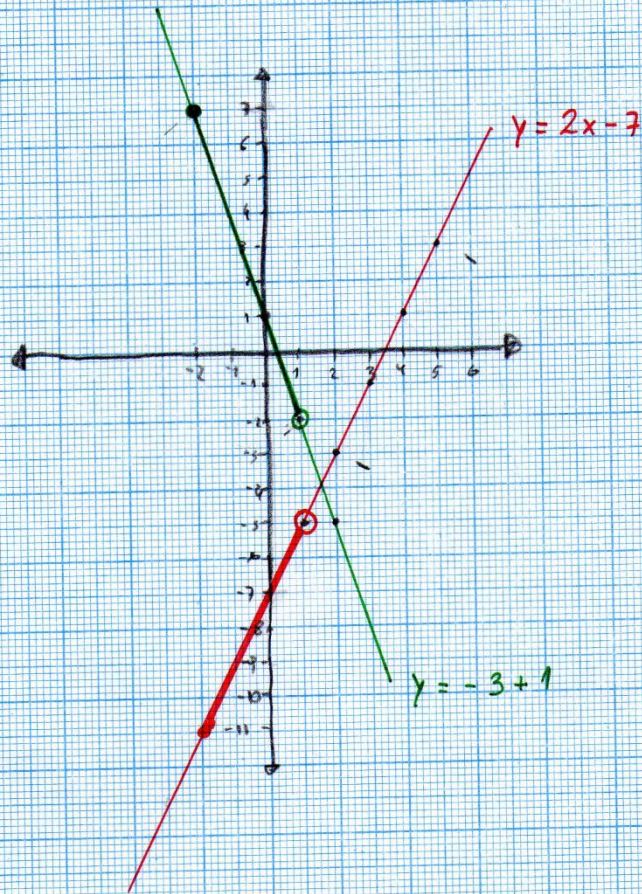
Res: $2 \leq x \leq 4 \quad [2, 4]$

x	y
1	-4
$\frac{2}{3}$	-2

$$-4 \leq y \leq -2 \quad [-4, -2]$$

$$\frac{2}{3} \leq x \leq 1 \quad [\frac{2}{3}, 1]$$

Grafica $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$



2)

$\bullet \text{---} \circ = [-2, 1[$ ($f(x) = 2x - 7$)

$-11 \leq y < -5 \text{ ,, } = [-11, -5[$

$\bullet \text{---} \circ = [-2, 1[$ ($f(x) = -3x + 1$)

$-2 < y \leq 7 =]-2, 7]$

Binomio 2

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
- III) El conjunto formado solo por el número 5.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

$$2x + 7 \leq 12 + x$$

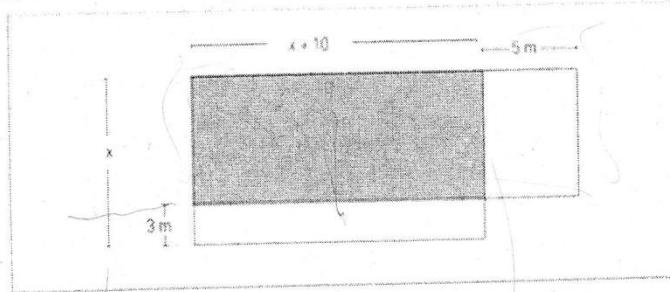
$$x - 5 \leq 0$$

$$x \leq 5$$

$$x \in]-\infty, 5]$$

Tarea 2.

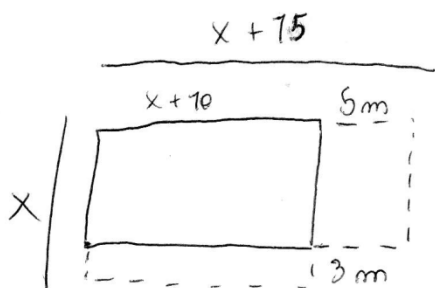
Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



- ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?
- ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?
- Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

b) Si el ancho hubiera sido el doble de el largo, al compensar el Ter
deberiamos ampliar $\frac{5x-15}{3}$ de largo
 $\frac{3}{5} = \frac{x-3}{L}$

c) En el caso en que el Terreno fuera cuadrado el largo que le
den, será proporcional al ancho que se quiten



Medidas Minimales

Amchos = x

Longg = $x+10$

a) Amchos = $x-3$

Longg = $x+15$

~~$x+10 = x-3$~~

Area $x(x+10)$
 $x^2 + 10x$

$(x-3)(x+15) \rightarrow x^2 + 15x - 3x - 45$

Area $x^2 + 12x - 45$

~~$x^2 + 10x = x^2 + 12x - 45$~~

$0 = 2x - 45$

$45 = 2x$

$\frac{45}{2} = x$

$2x + 20$

$x-3$

1) Amchos = $2x+20$

Longg = $x+10$

$(2x+20)(x+10)$

$2x^2 + 20x + 20x + 200$

$2x^2 + 40x + 200$

Area $2x^2 + 40x + 200$

Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?

a) Se puede casar hasta los 30
b) No se puede por el aforismo

$$R = x$$

a) 5

30

22

$$I = \frac{x}{2} + 7$$

$$R = 7 + 8$$

$$x = \frac{x}{2} + 7 + 8$$

$$x = \frac{x}{2} + 15 \quad x = (x+1)2$$

$$x = 2x + 2$$

$$x = \frac{x + 30}{2}$$

$$2x = x + 30$$

$$x = 30$$

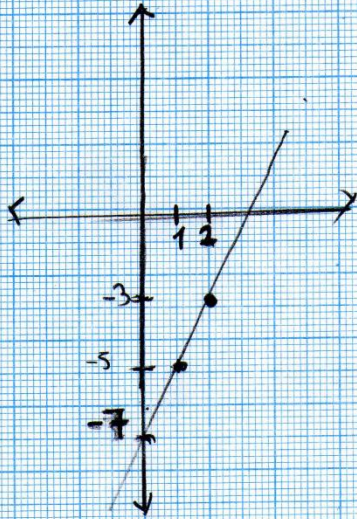
Tarea 4.

- a) Graficar las rectas $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$
- b) En cada gráfico marcar los valores para y que corresponden al intervalo de valores para x dado por $-2 \leq x < 1$. Expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos.
- c) Comparar ambas respuestas. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el valor de y en ambos casos? ¿A qué valor de x se asocia el valor mínimo de y en cada caso?
- d) Comparar la distancia entre los valores máximo y mínimo de y que se asocian a los intervalos para x , $I_1 = [2,5]$ e $I_2 = [-2,1]$ en cada una de las rectas.
- e) Proponer un intervalo de valores para y ; determinar el intervalo correspondiente para x .

$$y = 2x - 7$$
$$m = 2$$
$$y = -3x + 1$$
$$m = -3$$

- d) La pregunta no es clara, debido a que no se especifican las rectas en las cuales se deben comparar los intervalos.
- e) Al igual que en la pregunta "d)", no se especifica la función en la cual trabajar.

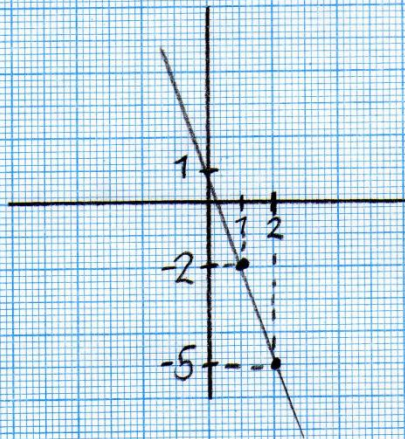
a)



b) y c) $[-2, 1[$

Si $x = -2$, $f(x) = -11$
" $x = -1$, $f(x) = -9$
" $x = 0$, $f(x) = -7$
" $x = 1$, $f(x) = -5$

$y \in [-11, -5[$



Si $x = -2$, $f(x) = 7$
" $x = -1$, $f(x) = 4$
" $x = 0$, $f(x) = 1$
" $x = 1$, $f(x) = -2$

$y \in]-2, 7]$

Binomio 3

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
 - II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
 - III) El conjunto formado solo por el número 5.
-
- A) Solo I
 - B) Solo II
 - C) Solo III
 - D) Solo I y III
 - E) Solo II y III

Tarea 1:

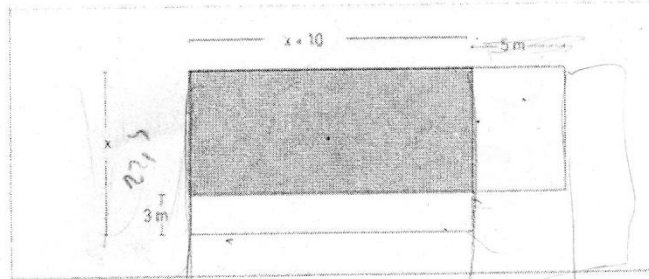
$$2x + 7 \leq 12 + x$$

$$x \leq 5$$

$$x \in]-\infty, 5]$$

Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



- ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?
- ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?
- Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

Handwritten work for the problem:

$x + 10$
 $2x$
 $x - 3(x + 10) = x(x + 10)$
 $x - 3x - 30 = x^2 + 10x$
 $-2x - 30 = x^2 + 10x$
 $0 = x^2 + 12x + 30$
 $x = -3$
 $x = -10$

Diagram of a rectangle with width 10 and length 70, with a 3m strip removed from the front.

-	-	-	-	0	+
-	0	+	-	-	+
-	-	-	0	-	+
-	-	0	+	+	+
+	-	-	-	-	+

$[-10, -3] \cup [0, 3] \cup [10, \infty[$



$$L = A$$

$$L = L + 10 \text{mts}$$

$$x(x+10) < (x-3)(x+15)$$

$$x^2 + 10x < x^2 + 15x - 3x - 45$$

$$45 < 2x$$

$$\frac{45}{2} < x$$

$$22,5$$

- A) Las medidas mínimas para que favorezcan a la Sra. Adelina corresponden a:
- ancho : 22,5 mt
 largo : 32,5 mt.
- b) La ganancia habría sido mayor en proporción al tamaño inicial del terreno
- c) El área del nuevo terreno sigue siendo mayor, por lo que le conviene.

Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?

$$M \leq \frac{H}{2} + 7$$

$$x \leq \frac{x}{2} + 7$$

$$2x \leq \frac{x+14}{2}$$

$$2x \leq x + 14$$

$$x \leq 14$$

$$50 \geq \frac{50}{2} + 7$$

$$50 \geq 25 + 7$$

$$50 \geq x = \frac{x}{2} + 7$$

$$70 \geq x + 14$$

$$\frac{x+7}{2} \geq \frac{x+7}{2}$$

$$x \geq \frac{x+14}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2x \geq x+14$$

$$x \geq 14$$

$$x+14 > 2x$$

$$14 > x$$

Tarea 4.

a) Graficar las rectas $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$

b) En cada gráfico marcar los valores para y que corresponden al intervalo de valores para x dado por $-2 \leq x < 1$. Expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos.

c) Comparar ambas respuestas. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el valor de y en ambos casos? ¿A qué valor de x se asocia el valor mínimo de y en cada caso?

d) Comparar la distancia entre los valores máximo y mínimo de y que se asocian a los intervalos para x , $I_1 = [2, 5]$ e $I_2 = [-2, 1]$ en cada una de las rectas.

e) Proponer un intervalo de valores para y ; determinar el intervalo correspondiente para x .

Handwritten work for problem 1a):

$y = 2x - 7$
 $y + 7 = 2x$
 $\frac{y + 7}{2} = x$

Handwritten work for problem 1b):

$y = 2x - 7$
 $10 = 2x$
 $5 = x$

$P_1(5, 3)$

$-2 \leq x < 1$

Handwritten work for problem 1c):

$y = 2x - 7$
 $3 = 2x - 7$
 $10 = 2x$
 $5 = x$

Handwritten work for problem 1d):

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
 $d = \sqrt{(2 - 5)^2 + (1 - 3)^2}$
 $d = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2}$
 $d = \sqrt{9 + 4}$
 $d = \sqrt{13}$
 $d = \sqrt{16} \cdot \sqrt{1}$
 $d = 4\sqrt{2}$

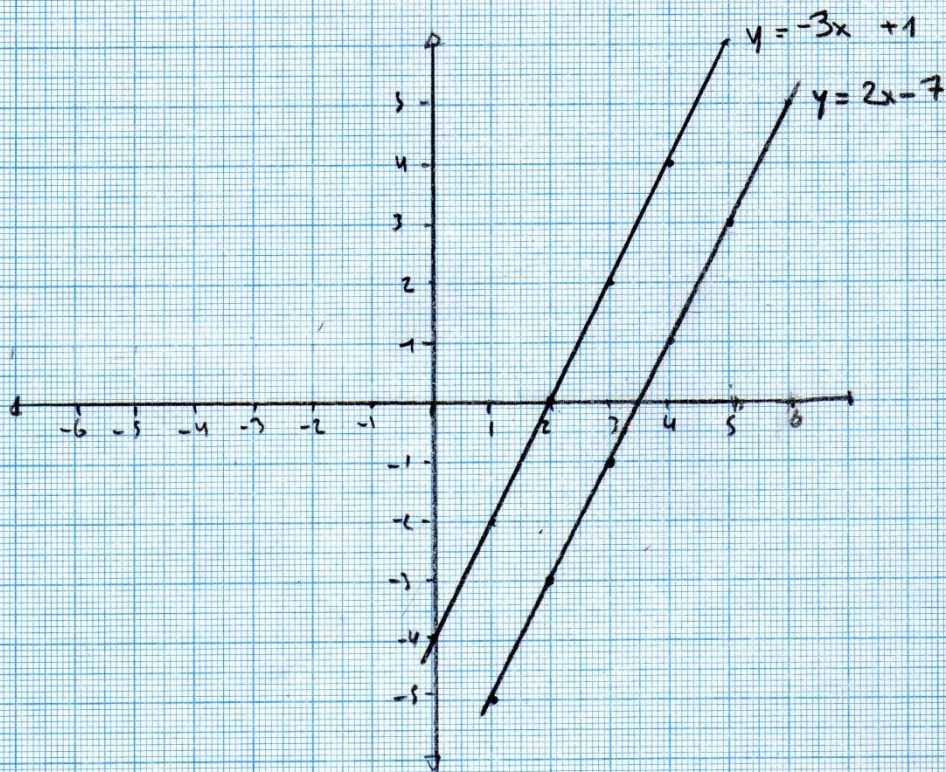
Handwritten work for problem 1e):

$y = x + 4$
 $y = 1$
 $1 = x + 4$
 $-3 = x$

Other handwritten notes and diagrams include a coordinate plane sketch, a number line for $-2 \leq x < 1$, and various algebraic manipulations.

Tarea 2

A)



b) cuando $x \in [-2, 1[$; $y \in [-11, -5[$ ← recta $y = 2x - 7$

cuando $x \in [-2, 1[$; $y \in]-2, 7]$ ← recta $y = -3x + 1$

c) recta $y = 2x - 7$; recta $y = -3x + 1$
 $x = -2$ cuando $y = -11$; $x = -2$ cuando $y = 7$

d) No entiendo.

e) $y = [-3, 3[$

$y = [-2, -11[$

$x = [2, 5[$

$x = [1, 4[$

Binomio 4

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación
 $2x + 7 \leq 12 + x$?

- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
- III) El conjunto formado solo por el número 5.

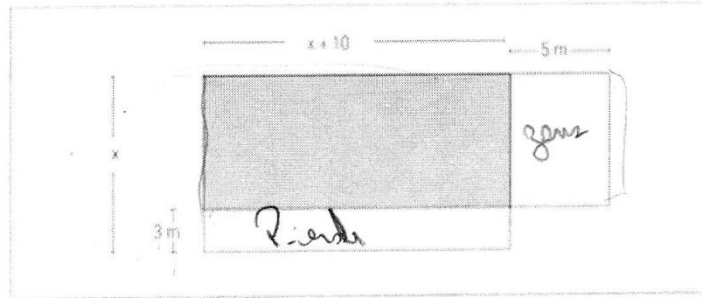
- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

$$2x + 7 \leq 12 + x$$

$$x \leq 5$$

Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



- ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?
- ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?
- Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

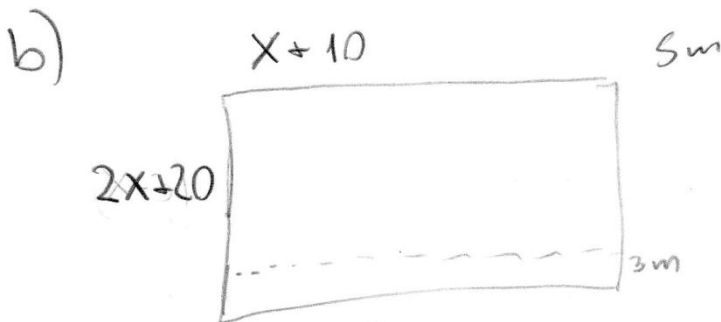
$$a) 5 \cdot (\cancel{X}) > 3 \cdot (X+10)$$

$$5X - 15 > 3X + 30$$

$$2X > 30$$

$$X > 15$$

Las medidas del ancho del T.
deberían ser superiores a $(15[m])$
el largo del terreno Superior a
 $(25[m])$.



$$3 \cdot (X+10) = 3X + 30 \quad \text{Pierde}$$

$$5 \cdot (2X+20) = 10X + 100 \quad \text{Gana}$$

Lo que gana es Superior a lo que pierde \therefore hubiese sido favorable para la Sra Adeline $\ddot{\smile}$

c) Si hubiese sido cuadrado, ganaría 2 metros

Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad?
¿Cuáles son esas edades?

$$x \geq \frac{y}{2} + 7$$

$$8 \rightarrow 16$$

$$8 + 7$$

$$15$$

$$11 \quad 19$$

$$16 \rightarrow 29$$

$$17$$

7

$$a) \frac{y+8}{2} + 7 < y+8$$

$$\frac{y+8+14}{2} < y+8 \quad | \cdot 2$$

$$y+22 < 2y+16$$

$$6 < y$$

$$4 \quad 12 \rightarrow 6$$

$$5 \quad 13 \rightarrow 7$$

$$6 \quad 14 \rightarrow 8$$

$$7 \quad 15 \rightarrow 9$$

$$8 \quad 16 \rightarrow 10$$

$$9 \quad 17 \rightarrow 11$$

$$10 \quad 18 \rightarrow 12$$

Tarea 4.

a) Graficar las rectas $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 1$

b) En cada gráfico marcar los valores para y que corresponden al intervalo de valores para x dado por $-2 \leq x < 1$. Expresarlo utilizando desigualdades y notación de intervalos.

c) Comparar ambas respuestas. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que toma el valor de y en ambos casos? ¿A qué valor de x se asocia el valor mínimo de y en cada caso?

d) Comparar la distancia entre los valores máximo y mínimo de y que se asocian a los intervalos para x , $I_1 = [2,5]$ e $I_2 = [-2,1]$ en cada una de las rectas.

e) Proponer un intervalo de valores para y ; determinar el intervalo correspondiente para x .

$$y = 2x - 7$$

$$y = -3x + 1$$

x	y
0	-7
1	-5
2	-3

x	y
0	1
1	-2
2	-5

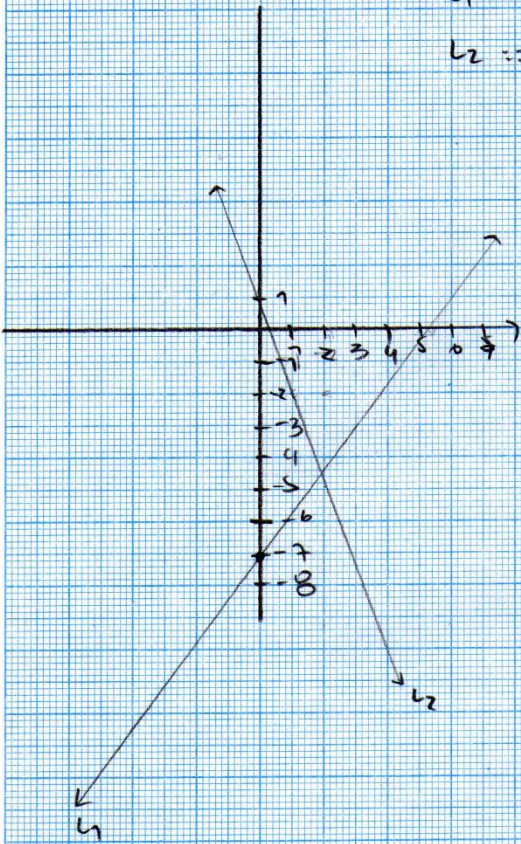
$$-2 \leq y \leq -3$$

$$7 + y = 2x$$

$$\frac{7}{2} + \frac{y}{2} = x$$

$$L_1 := y = 2x - 7$$

$$L_2 := y = -3x + 7$$



b)

$$\Rightarrow 2(-2) - 7 \leq y < 2(1) - 7$$

$$\Rightarrow -4 - 7 \leq y < 2 - 7$$

$$\Rightarrow \underline{-11 \leq y < -5}$$

$$\Rightarrow -3(-2) + 1 \leq y < -3(1) + 1$$

$$\Rightarrow +6 + 1 \leq y < -3 + 1$$

$$\underline{7 \leq y < -2}$$

c) - VALOR minimo DE y

si $x = -11$, VALOR MAXIMO DE y -2

- cuando x vale (-2) y tomo su VALOR minimo
- y cuando x vale 1 y tomo su VALOR MAXIMO

d) - PERO $2x - 7 = y$ entre el intervalo $[2, 5]$ HAY una DISTANCIA DE 6 y PERO el intervalo $[-2, 1]$ HAY una DISTANCIA DE 6

- PERO $y = -3x + 1$ entre el intervalo $[2, 5]$ HAY una DISTANCIA DE 9 y PERO el intervalo $[-2, 1]$ HAY 9 UNIDADES DE DISTANCIA.

Como Conclusión, en cualquier recta independiente del Sente z este tiene la misma distancia en X , en Y obtenemos la misma medida resultante. En el ejemplo, la distancia de X es de 3.

d) Intervalo para la recta $Y = 2x - 7$
 $-7 \leq Y \leq -3$ no entera en Intervalo para X $0 \leq X \leq 2$

Intervalo para la recta $Y = -3x + 1$
 $-5 \leq Y \leq 1$ no entera en Intervalo para X $0 \leq X \leq 2$

Comentario: Preguntas muy extensas.

Anexo 2: Producciones del Cuestionario, Estudiantes de Enseñanza Media

Binomio 1

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

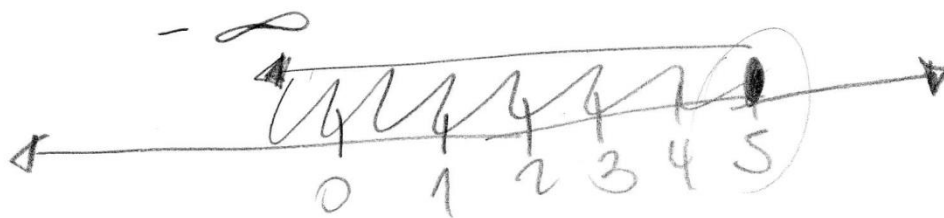
$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
- III) El conjunto formado solo por el número 5.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

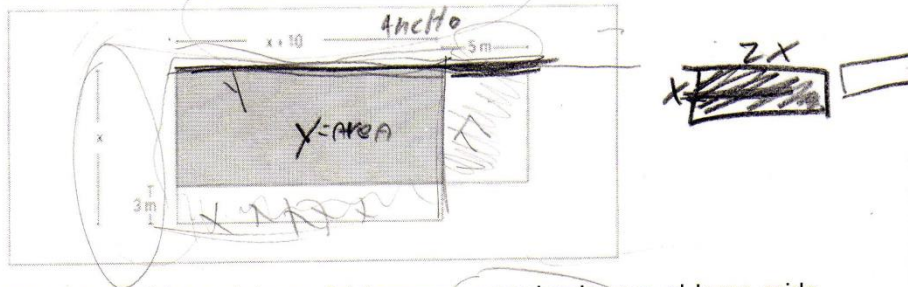
$$2x + 7 \leq 12 + x$$

$$x \leq 5$$



Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



- ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?
- ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?
- Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

$$(x + 10)x = y$$

$$x^2 + 10x = y$$

$$(x - 3)(x + 5) = y$$

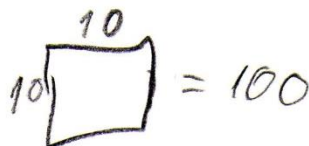
$$x^2 + 12x - 45 = y$$

$$-17 = y \quad x = 2$$

$$0 = y \quad x = 3$$

$$11 = y \quad x = 1$$

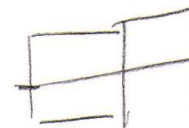
$$24 = y \quad x = 2$$



$$x^2 + 10x = y^2 + 12x - 45$$

$$45 = 2x$$

$$22,5 = x$$



a) Valores
 $x = 22,5 \text{ m}$. (ancho que favorece a la sra).
 $x+10 = 32,5 \text{ m}$ (largo original para q' salga favorecida)

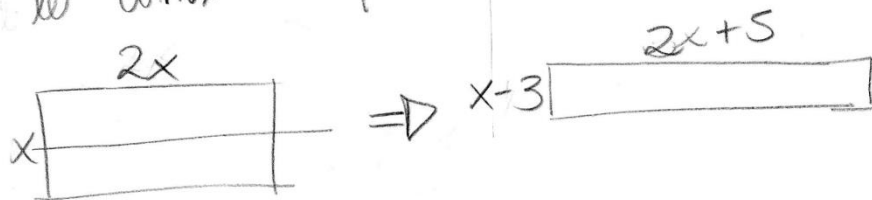
$$x = \frac{1}{3} \cdot 58,5 \rightarrow$$

19,5

22,5
18,5
38,0

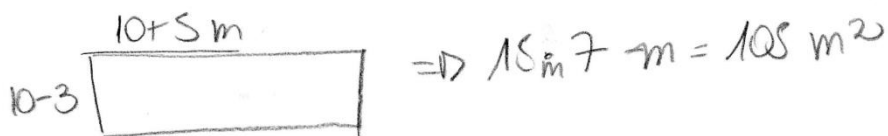
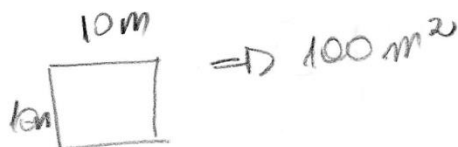
$$\frac{3}{15,5} \cdot 58,5$$

b) No le conviene ya que



c) Le hubiese favorecido debido a que:

Ej:



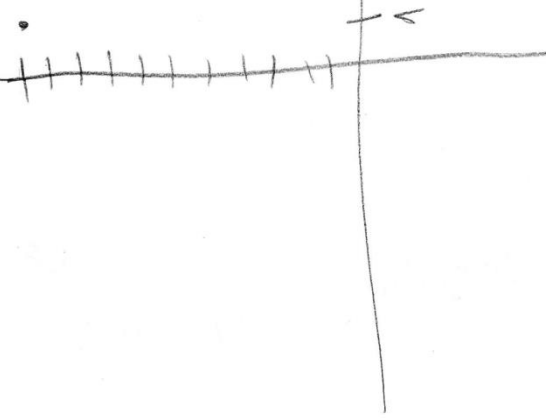
$x+10 = y \Rightarrow$ largo

$x+3 =$ ancho

$x-3 \leftarrow 2x+10$

$x < 13$

$x+3+10$



x	$x+10$	y
1	1+10	11
2	2+10	12

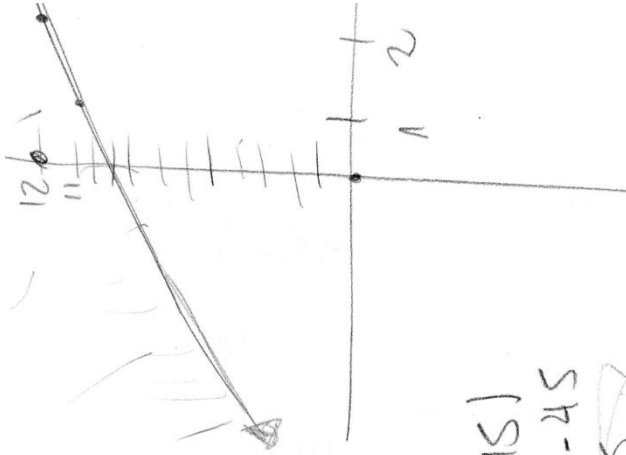
$x+10 =$

$2 \sqrt[15]{\frac{15}{x}}$

$$\frac{(x-3)(x+15)}{x^2+15x-3x-45}$$

$$\frac{x^2+12x-45}{x^2+12x-45}$$

$x =$



Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad?
¿Cuáles son esas edades?

$$\frac{x}{2} + 7 \geq y$$

$$y + 8 \leq x$$

$$22 + 8 \leq x$$
$$30 \leq x$$

$$y + 8 + 14 = 2y$$
$$22 = y$$

$$\frac{x}{2} + 7 = y$$

$$\begin{cases} x = \text{él} \\ y = \text{ella} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} + 7 = y \quad | \cdot 2$$

$$x + 14 = 2y$$

$$y + 8 = x$$

$$x - y = 14$$

$$-x + y = -8$$

$$\frac{x}{2} + 7 \leq x - 8 \quad | \cdot 2$$

$$x + 14 \leq 2x - 16$$

$$14 + 16 \leq 2x - x$$

$$30 \leq x$$

① Él debe tener 30 y ella debe tener 22.

② No se puede cumplir ya que el aferrismo establece ella no sobre la mitad de la edad + 7.

Ej: él y ella
20 20

$$\frac{x}{2} + 7 = y$$

$$\frac{20}{2} + 7 = 20$$

$$10 + 7 = 20$$

$$17 = 20.$$

Binomio 2

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

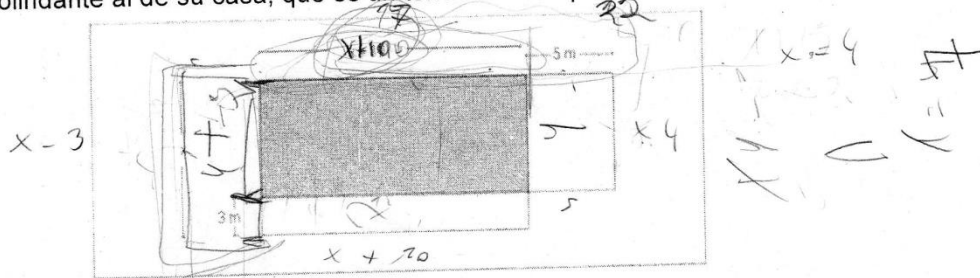
- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
- III) El conjunto formado solo por el número 5.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

$$\begin{aligned} 2x + 7 &\leq 12 + x \\ 2x - x &\leq 12 - 7 \\ x - x &\leq 5 \end{aligned}$$

Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



a) ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?

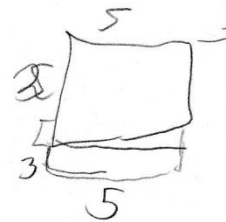
las medidas mínimas es 10 y 3.

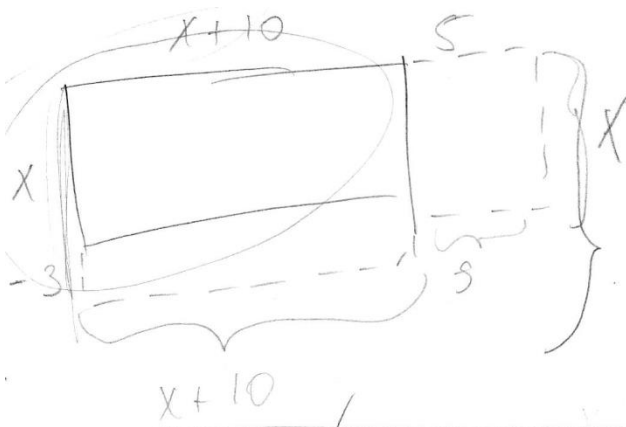
b) ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?

Tendría más terreno.

c) Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

*hubiese perdido más terreno.
no le favorecía.*





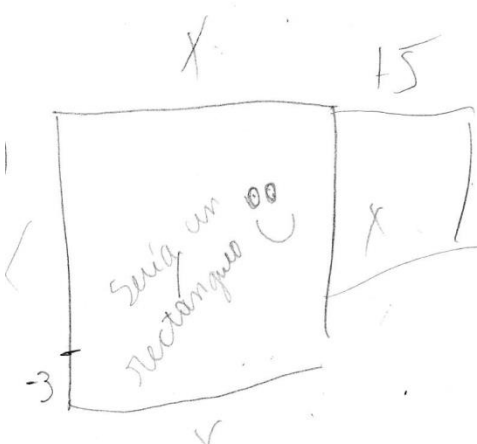
largo total	$x+15$	largo nor	$x+10$
ancho total	$x-3$	Ancho nor	x

$$A = (x+10)(x-3)$$

$$x^2 - 3x + 10x - 30$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0 \quad \Delta$$

b) $2(x+10)$ ✓



Area: $A = x(x+15)$

$$10 = 140$$

$$3 = 0 \quad x = \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 10$$

Responda a las preguntas que se le van haciendo
 Soluciones
 Matemáticas

Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades?

a)

$$X < \frac{Y + 7}{2}$$

$$X \leq \frac{X + 8 + 7}{2}$$

$$X < \frac{X + 15}{2}$$

$$2X \leq 8 + X + 14$$

$$X - X \leq 8 + 14$$

$$X \leq 22$$

hasta que el
tenga 30 años

$$\frac{22 + 7}{2}$$

$$\frac{30 + 7}{2}$$

$$15 + 7 = 22 //$$

b)

$$X = \frac{X + 8 + 7}{2}$$

$$X = 22$$

$$\frac{22 + 7}{2}$$

$$11 + 7$$

$$\frac{22 + 7}{2} = 18$$

$$\frac{30 + 7}{2} = 18$$

$$\frac{90 + 7}{2} = 20 + 7 = 27$$

$$\frac{18 + 7}{2} = 12 + 7 = 19$$

$$\frac{16}{2} + 7$$

$$8 + 7 = 15$$

$\frac{14}{2} + 7$
 $7 + 7 = 14$
 Si se pueden casar
 a la misma edad

Binomio 3

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

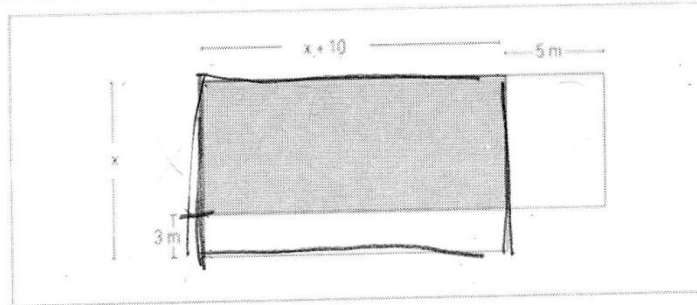
- I) El conjunto de los números reales menores que 5.
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5.
- III) El conjunto formado solo por el número 5.

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

$$\begin{aligned} (1) \quad x - 5 &\leq 0 \\ x &\leq 5 \\ &] -\infty, 5] \end{aligned}$$

Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



- ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?
- ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo?
- Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

$$(x-3)(x+15) > x(x+10)$$

$$x^2 + 15x - 3x - 45 > x^2 + 10x$$

$$15x - 10x - 3x - 45 > 0$$

$$-2x - 45 > 0$$

$$x > \frac{45}{-2}$$

$$x \geq 22,5 \text{ m} \rightarrow]22,5, \infty[\text{ ancho}$$

$$32,5 \text{ m} \rightarrow]32,5, \infty[\text{ largo}$$

Se transforma en un rectángulo y desde sus lados se alargan 2mts. con respecto al tamaño inicial

$$2x-3)(x+5) > 2x^2$$

$$2x^2 + 10x - 3x - 15 > 2x^2$$

$$7x > 15$$

$$x > \frac{15}{7} \rightarrow]\frac{15}{7}, \infty[\text{ "largo"}$$

$$\frac{30}{7} \rightarrow]\frac{30}{7}, \infty[\text{ "ancho"}$$

Las medidas mínimas que debería tener el terreno para favorecer a la vieja son menores.

Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

- a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella?
- b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad?
¿Cuáles son esas edades?

$$1) \frac{x+8}{2} + 7 \leq x+8 + 7$$

$$\frac{x+8+14}{2} \leq (x+8)$$

$$\frac{x+8+14}{2} - (x+8) \leq 0$$

$$\frac{x+8+14-2x-16}{2} \leq 0$$

$$\frac{-x+6}{2} \leq 0$$

$$-x+6 \leq 0$$

$$-x \leq -6$$

$$x \geq 6$$

$$[6, \infty[\rightarrow \text{Indice}$$

NO SABEMOS

Binomio 4

Tarea 1.

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos contiene elemento(s) que satisfacen la inecuación

$$2x + 7 \leq 12 + x?$$

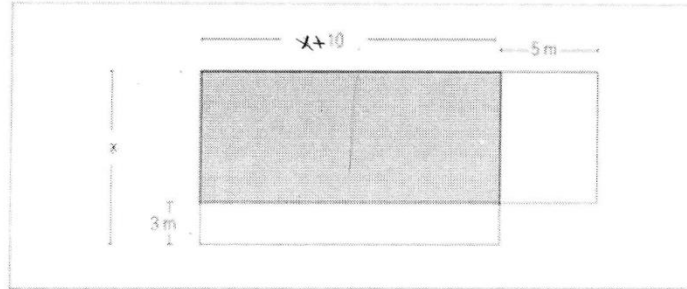
- I) El conjunto de los números reales menores que 5. ✓
- II) El conjunto de los números reales mayores que 5. ✗
- III) El conjunto formado solo por el número 5. ✗

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y III
- E) Solo II y III

$$x \leq 5 \Rightarrow]-\infty, 5]$$

Tarea 2.

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal.



a) ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina? *Ancho ≥ 4 y largo ≥ 14*

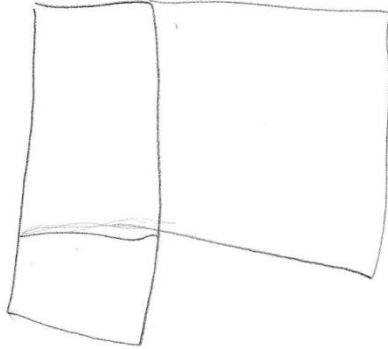
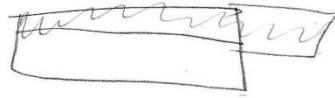
b) ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno habría sido el doble del largo? *Hubiera ganado mucho más terreno porque la que le hubieran dado serían por una distancia más la*

c) Y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?

Hubiera ganado 2 m de terreno

$$A \geq 4$$

$$L \geq 14$$



Tarea 3.

De acuerdo a un aforismo hindú, para que una relación sentimental tenga un futuro promisorio, ésta se debe formalizar cuando la edad de ella no sobrepase la mitad de la edad de él, más siete años.

a) ¿Hasta qué edad Ranhan puede casarse con Indira, si él es ocho años mayor que ella? *Hasta los 30 años.*

b) ¿Es posible que se cumpla este aforismo si ambos tienen la misma edad? ¿Cuáles son esas edades? *Si es posible, pero muestran se en el intervalo $]0, 14]$ años.*

$$x \leq \frac{y}{2} + 7$$

3 $\frac{31}{2} + 7 = 22.5$

**Anexo 3: Producciones Preguntas Adicionales al
Cuestionario, Estudiantes Universitarios**

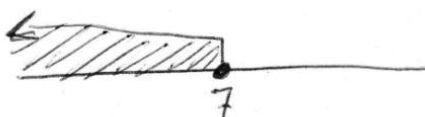
Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

1) Condición para que una variable no sea igual a un resultado esperado.
2) En una ecuación la x puede tomar valores finitos, en una inecuación la x puede tomar desde 1 valor a valores infinitos.

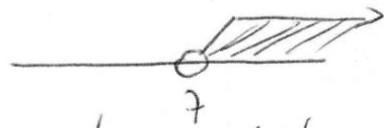
2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

~~$x - 7 < 0$~~
 $x - 7 \leq 0$
 $x \leq 7$



A number line with a solid dot at 7 and a shaded region extending to the left, representing the inequality $x \leq 7$.

$x - 7 > 0$
 $x > 7$



A number line with an open circle at 7 and a shaded region extending to the right, representing the inequality $x > 7$.

Se resuelve despejando la "x" o en el caso de las fracciones despejando todo a un lado ~~de la ecuación~~ y al otro dejando un "0"

≠



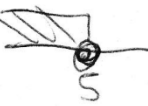

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

~~desigualdad~~
 INECUACION = ASI COMO LA ECUACION, LA INECUACION ES COMPARAR DOS O MAS ECUACIONES CUMPLIENDO QUE UNA SEA MAYOR, MENOR, MENOR IGUAL O MAYOR IGUAL A LA OTRA

desigualdad
~~INECUACION~~ : ES CUANDO UN VALOR LLAMADO "X" AL COMPARARLA CON OTRO VALOR NO SON IGUALES
 $\forall x, y \in \mathbb{R} / x \neq y$

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

<p>ES 1)</p> $4 + x > 9$ $x > 9 - 4$ $x > 5$ $]5, \infty[$ 	<p>ES 2)</p> $4 + x \geq 9$ $x \geq 9 - 4$ $x \geq 5$ $x \in [5, \infty[$ 	<p>ES 3)</p> $4 + x < 9$ $x < 9 - 4$ $x < 5$ $x \in]\infty, 5[$ 	<p>ES 4)</p> $4 + x \leq 9$ $4 + x \leq 9$ $x \leq 5$ $x \in]-\infty, 5[$ 
--	---	---	--

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Una desigualdad, es una aserción, la cual dice que uno es distinto al otro.

Una inecuación, se caracteriza por el símbolo $>$, $<$, \leq o \geq , las cuales indican desigualdad

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

Primero, definir Restricciones.

Segundo, identificar puntos críticos.

Tercero, según el símbolo de desigualdad, unir los intervalos de valores donde x , da solución a la inecuación.

Cuarto, Interceptar la solución parcial, con las restricciones.

$$x + 1 \geq 4 \quad \text{Rest, no hay}$$
$$x \geq 3$$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

- Una desigualdad la defino como algo que no es igual a otra cosa

Ej

$\star = \star$	V
$\star = \Delta$	F

← IGUAL
← DESIGUAL

- Una inecuación sería para mí como un parámetro, un tramo que existe entre un número x y el infinito o otro número cualquiera

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

- Una inecuación la resuelvo casi igual que una ecuación lo único que cambia son los signos ($\geq, <, >, \leq$)

Si ^{es que} multiplicas por (-1)

- Ej $-x + 3 \geq 1$ $\{ / -3 \}$
 $-x + \cancel{3} \cancel{-3} \geq 1 - 3$
 $-x \geq -2$ $\{ / \cdot (-1) \}$
 $x \leq 2$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

- Como una expresión que indica que no existe una igualdad entre dos componentes.
- Como una evaluación matemática donde el resultado no es estrictamente uno (o más) valores definidos, sino un rango de éstos.

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

- Indicando restricciones
- Desarrollar hasta quedar libre de sumas/restas.
- Tabla de signos.
- Intersectar solución con restricción.

$$\frac{(x^2-1)}{(x+2)} \geq 0$$

Rest:
 $x+2 \neq 0$
 $x \neq -2$
 $UR = \mathbb{R} - \{-2\}$

Resolución:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+2} \geq 0$$

Pts críticos:
 $x+1=0 \Rightarrow -1$
 $x-1=0 \Rightarrow 1$
 $x+2=0 \Rightarrow -2$

	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$(x+1)$	-	-	0+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	0+	+
$(x+2)$	-	0+	+	+	+
$(x+1)(x-2)$	+	+	-	+	+
$(x+1)(x-1)$	-	+	-	+	+
$(x+2)$	-	+	-	+	+

Solución:
 $]-2, -2[\cup [1, +\infty[$
 $]-2, -1] \cup [1, +\infty[\cap \mathbb{R} - \{-2\}$
SF:
 $]-2, -2[\cup [1, +\infty[$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

- Una desigualdad, viene a ser cuando decimos que una variable sea distinta a un valor, ej.: $x \neq 3$ (x tendrá que ser distinto a 3.)
- Una inecuación, etc.

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

- Primero anotamos las restricciones.
 - Desarrollamos la inecuación para obtener el/los x .
 - Analizamos los puntos críticos.
 - Finalmente, la solución final viene a ser la solución parcial intersección con el universo restringido.
- Ej.: $(x^2 - 4) \geq 0$ Rest.: $x^2 - 4 \geq 0$
 $x^2 \geq 4$
 $|x| \geq 2$
 $x \geq 2$
- Resol.: $(x^2 - 4) \geq 0$
 $(x+2)(x-2) \geq 0$
 $x_1 = -2 \vee x_2 = 2$
- | | | | | |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| | $-\infty$ | -2 | 2 | $+\infty$ |
| $x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| x^2-4 | $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |
- SF = $[-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Doz valores distintos, ya sean m, n donde m mayor que n o n mayor a m

Como una ecuación que verifique una desigualdad, la cual entienda una cantidad finita o infinita de posibles soluciones.

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &> 5 & / -4 & & 1^\circ \text{ Agrupamos Valores, dejando a la Derecha o Izquierda de la desigualdad (Como más acomode)} \\ 3x &> 1 & / \cdot \frac{1}{3} & & 2^\circ \text{ Eliminamos terminos con incognita} \\ x &> \frac{1}{3} & & & 2^\circ \text{ Resolvemos la } x \\ \text{Solución:} & & & & 3^\circ \text{ Entendemos la Solución} \\ S =]\frac{1}{3}, \infty[& & & & \end{aligned}$$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

- Una desigualdad, como su nombre lo dice, son valores distintos. Ej $a \neq b$

- En una inecuación no se encuentra el valor de "x", si no, se busca el "universo" en donde viven los posibles valores de "x".

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

LAS INECUACIONES AL RESOLVER LOS SE ENFRENTAN AL IGUAL QUE LAS ECUACIONES.

Ej: $4x - 5 \leq 15$
 $4x \leq 20$
 $x \leq 5$
 $S = (-\infty, 5]$

**Anexo 4: Producciones Preguntas adicionales al
Cuestionario, Estudiantes de Enseñanza Media**

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Desigualdad \Rightarrow es un conjunto de valores otorgados como resultado a un valor.

Una inecuación es una desigualdad entre dos o más valores que entregan un resultado a la incógnita.

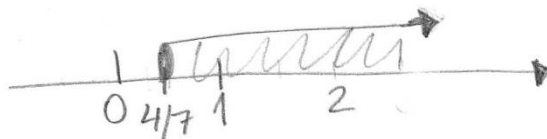
2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

$$9x + 3 \geq 7 + 2x$$

$$9x - 2x \geq 7 - 3$$

$$7x \geq 4$$

$$x \geq 4/7$$



En esta inecuación "x" toma valores desde el $4/7$ (incluyéndolo) hacia el infinito.

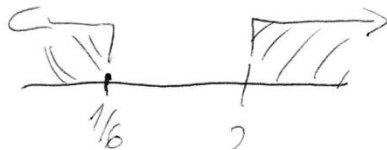
ejercicio 11

1) Desigualdad \Rightarrow cuando un numero toma un val
mayor, menor o igual otro.
decir que de un numero
contando uno ese numero asta
 $\pm \infty$

Inecuación \Rightarrow ~~es una des~~ son dos o
MAS desigualdades para
formar una intersección.

2) $2x \geq 4 \wedge 6x \leq 1$

$$x \geq 2 \wedge x \leq \frac{1}{6}$$



AQUI no se
cumple es
decir \emptyset

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Una desigualdad es el ejercicio que no posee una igualdad clara que se resulte confuso

Una inecuación sirve para descubrir puntos en el plano o en el espacio

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

$$2x + 4 > \frac{8}{4}$$

$$2x + 4 > 2$$

$$2x > 2 - 4$$

$$x > \frac{-2}{2}$$

$$x > -1$$

Se debe aislar la x
al igual que una ecuación

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

→ UNA DESIGUALDAD SON VALORES DISTINTOS
→ UNA INECUACIÓN ES EL INTERVALO QUE PUEDE TOMAR X

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

→ CASI IGUAL QUE UNA ECUACIÓN
ej: $x - 3 < 2$
 $x < 5$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Cuando los signos $\leq, <, \geq, >$ ó $=$ no satisfacen la igualdad de dos números
Ej: $25 > 30$.

En una inecuación se buscan los intervalos que al remplazar los x , cumplan una igualdad (lo palabra no es igualdad, porque $<, \leq, >$ y \geq no son igualdades, pero se me olvidó la palabra)

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

Al igual que en una ecuación, despejando los x . luego de eso, determinamos el intervalo según el result

$$3x + 25 > x - 3$$
$$2x > -28 \quad \rightarrow]-14, \infty[$$
$$x > -\frac{28}{2}$$
$$x > -14 \quad \rightarrow]-14, \infty+[$$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

• Cuando la relación entre los conceptos es $>$, $<$, \geq , \leq , es decir, mayor, mayor o igual, menor, o menor o igual.

Una variable representada en intervalos.

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

Casi igual que una ecuación, pero analizando en poco más lo que me dicen los signos.

$$3x + \frac{2}{7x} > 0$$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Se define desigualdad a cosas distintas, que no son iguales.

Una inecuación se define a el intervalo que la incógnita puede tomar

2. ¿Cómo resuelves una inecuación? Da un ejemplo.

Se resuelve despejando la incógnita como una ecuación pero en esta se determina el conjunto solución en el cual se ven los valores que puede tomar la incógnita

$$x^2 + 3x \leq 4x(x - 8) + 126$$

Entrevista Semiestructurada

1. ¿Cómo defines una desigualdad? ¿Y una inecuación?

Desigualdad es o son 2 elementos que no son iguales e inecuación es una desigualdad que se puede expresar como intervalo numérico.

2. ¿Cómo resuelves una inecuación ^{lineal}? Da un ejemplo.

Se resuelve de la misma forma que una ecuación sea despejando la incógnita.

$$\begin{aligned} \text{Ej: } \quad 2x + 12(5-x) &\leq 8 \\ 2x - 12x &\leq 8 - 60 \\ -10x &\leq -52 \\ x &\leq \frac{52}{10} \Rightarrow]-\infty, \frac{52}{10}] \end{aligned}$$

Anexo 5: Producciones Propuesta, Binomio 1

Propuesta de enseñanza y aprendizaje

Momento 1:

l) Grafique con ayuda del software GeoGebra la función $f(x) = 2x - 4$ y responda:

a) ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?

A partir de 3

x	2x-4	y
1	2-4	-2
2	4-4	0
3	6-4	2

(3, 2)

b) ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?

Cuando adquiere el valor $] -\infty, 2]$
 (visto también en la tabla anterior)

c) ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?

Para los valores intermedios
 entre $] 1, 5 [$

- d) ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

Los valores corresponden
al $[-9, 8]$

II) En un nuevo archivo Geogebra grafique la función $g(x) = -3x + 1$ y responda:

- a) ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?

a partir del 0

- b) ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?

desde $]-\infty, 0]$

c) ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 3?

$$[0,66, 1]$$

d) ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 1$?

$$[-2, 10]$$

III) En un nuevo archivo de GeoGebra grafique las funciones $f(x) = 2x - 4$ y $g(x) = -3x + 1$

a) ¿Para qué valores la función $f(x) < g(x)$?

a partir del punto $(1, -2)$ hacia
los infinitos negativos.
 $x =]-\infty, 1[$
 $y =]-\infty, -2[$

b) ¿Para qué valores la función $g(x) \leq f(x)$?

En el punto $(1, -2)$ son iguales
y a partir de este al ∞^+ $f(x)$ es
mayor.

c) ¿Qué puede generalizar?

Que en la intersección $(1, -2)$ se
encuentran en sentido opuesto, donde $f(x)$
es creciente y $g(x)$ decreciente, determinando
valores donde una es mayor que la otra.

IV) ¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

a) $-x+9 \leq -6x+29$

$$\begin{aligned} -x+9 &\leq -6x+29 \\ -x+6x &\leq 29-9 \\ 5x &\leq 20 \\ x &\leq 20/5 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

b) $4x+1 > -x-4$

$$\begin{aligned}4x+1 &> -x-4 \\4x+x &> -4-1 \\5x &> -5 \\x &> -5/5 \\x &> -1\end{aligned}$$

c) $x+5 < 3x+7$

$$\begin{aligned}x+5 &< 3x+7 \\5-7 &< 3x-x \\-2 &< 2x \\-2/2 &< x \\-1 &< x\end{aligned}$$

d) $-3x+6 \geq x-10$

$$\begin{aligned}-3x+6 &\geq x-10 \\6+10 &\geq x+3x \\16 &\geq 4x \\16/4 &\geq x \\4 &\geq x\end{aligned}$$

x	2x-4	y
1	2-4	-2
2	4-4	0
3	6-4	2

x	-3x+1	y
-1	-3+1	-2
2	-6+1	-5
0	1	1
-1	3+1	4

X	2x-4	y
1	2-4	-2
2	4-4	0
3	6-4	2

X	-3x+1	y
1	-3+1	-2
2	-6+1	-5
0	1	1
-1	3+1	4

$x \ll 1$
 $x \ll 1/4$
 $1/4 \ll x$
 $6+10 \ll x+3$
 $-3x+6 \ll x-10$

$x \ll 1$
 $x \ll 2/2$
 $2 \ll x$
 $5-7 \ll 3x-1$
 $1+5 \ll 3x+7$

$$-x + 9 \leq -6x +$$

$$-x + 6x \leq 29 - 9$$

$$5x \leq 20$$

$$x \leq 20/5$$

$$x \leq 4$$

$$4x + 1 > -x - 4$$

$$4x + x > -4 - 1$$

$$5x > -5$$

$$x > -5/5$$

$$x > -1$$

∞

Momento 2:

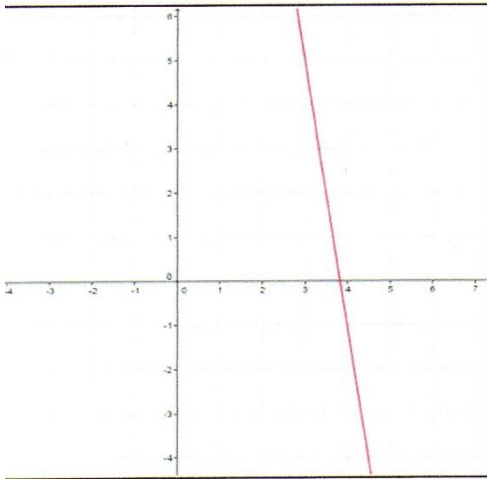
l) Dada las gráficas en mica:

a) Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

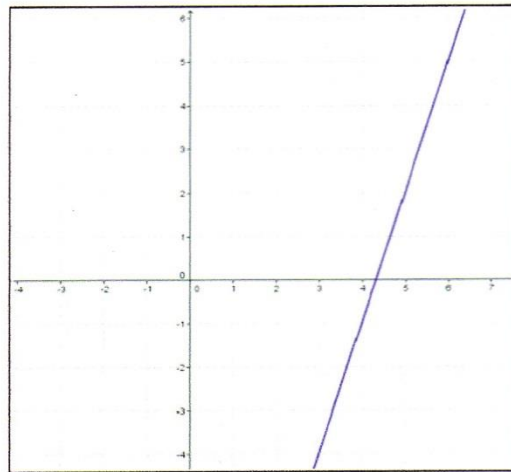
$$[1, \infty^+ [$$

II) Dadas las siguientes gráficas:

Gráfica $f(x)$



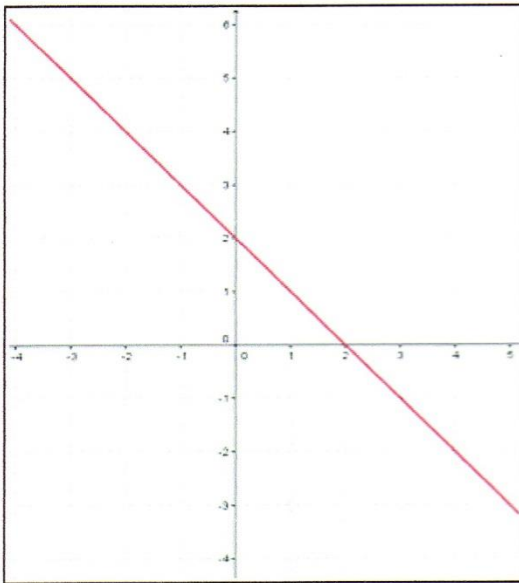
Gráfica $g(x)$



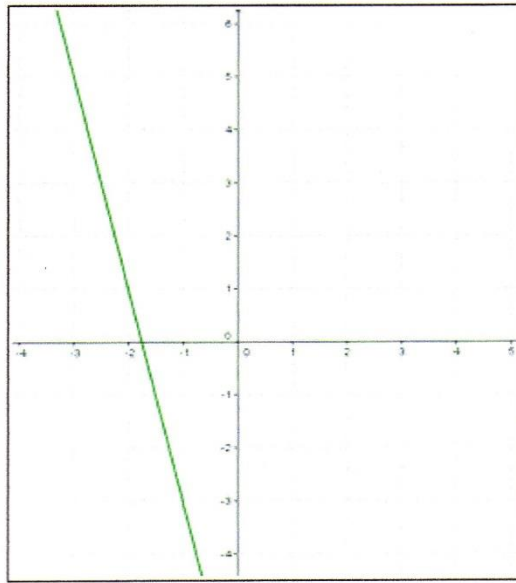
a) Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$.

$$]4, \infty+[$$

Gráfica $h(x)$



Gráfica $s(x)$



b) Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$.

$$]-\infty, -3]$$

Anexo 6: Dialogo Propuesta, Binomio 1

Momento 1:

Ítem I

Pregunta a)

[e₁₂]: ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?

[e₁₁]: Yo tengo la idea de que hay que graficar la recta así.

[e₁₂]: No, porque no sabemos los puntos.

[e₁₁]: Ya avancemos $2x + 4$ si x vale 1

[e₁₂]: No, porque ¿a partir de qué valores de x la función es positiva?

[e₁₁]: A partir de qué valores de x la función

[e₁₂]: A ver del 2, del 3

[e₁₁]: ¿Cómo es eso? a partir de qué valores de x la función es positiva

[e₁₂]: Del 3

[e₁₁]: ¿Por qué del 3?

[e₁₂]: Porque el 0 te va a dar -4, el 1 te va a dar -2

[e₁₁]: No, (2,1)

[e₁₂]: 2 por 1

[e₁₁]: (2,1), ahí está la recta!

[e₁₂]: Ah! entonces ahí es positiva

[e₁₁]: 2 por 1 menos 4 da -2, eh del (2,1) empieza a ser positivo del 3 es un valor entero

[e₁₂]: Trata de graficar ahora

[e₁₁]: Ya! si es 5 vale 1

[e₁₂]: No, si x vale 2 la función vale 0

[e₁₁]: Si x vale 1 la función vale -2

[e₁₂]: Pasa por el (3,2), no, no pasa 3 por 2 es 6 menos 4 es dos. no he dicho nada jaja

[e₁₁]: Ahí sí, esa es la respuesta.

[e₁₂]: Ya, a partir de qué valores de x la función es positiva

[e₁₁]: A partir de 3

[e₁₂]: Sí, ya hago ese cuadro

[e₁₁]: Eh, bueno por si acaso para que ejemplificamos

Pregunta b)

[e₁₂]: Ya, a partir de qué valores de x la función es menor a 2

[e₁₁]: Menor a 2, del 2

[e₁₂]: Del 2 !, porque mira

[e₁₁]: Ya del 2 para abajo. Porque el 3 pasa a ser 2, por la tabla anterior

[e₁₂]: (Escribe)

[e₁₁]: Del 2 para abajo

[e₁₂]: A los negativos

[e₁₁]: Con corchetes, incluye el dos, no perdón corchetes hacia afuera

[e₁₂]: Primero menos infinito

[e_{11}]: Corchetes hacia afuera menos infinito, eso (aplaude)

Pregunta c)

[e_{12}]: ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?

[e_{11}]: Entre -2 y 6, entre el 1 y el 5, según la tablita -2 y el 6

[e_{12}]: y el 1?

[e_{11}]: Si quieres justificar más 5-6 1-2

[e_{12}]: No te estás confundiendo, para qué valores la función toma valores entre -2 y 6

[e_{11}]: Sí, entre, entonces entre -2 y 4

[e_{12}]: Sí porque si toma el -2 estaría tomando el 1

[e_{11}]: Sí

[e_{12}]: Entonces tendría que ser entre el 1 y el 4

[e_{11}]: Sí

[e_{12}]: Pero el 4 toma el 6

[e_{11}]: No, el 5 toma el 6

[e_{12}]: Ya

[e_{11}]: Entonces ponelo de esta manera

[e_{12}]: Pero abierto o cerrado?

[e_{11}]: Abierto

[e_{12}]: Cerrado porque están en ese

[e_{11}]: Abierto y no cuentas el 1, pones 1 y 6

[e₁₂]: 1,5? Pero tendría que ser el 5 cerrado

[e₁₁]: El 5 abierto, porque es entre 5 y 6

[e₁₂]: Así

Pregunta d)

[e₁₂]: ¿Para qué valores de \square corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

[e₁₁]: y es toda la recta

[e₁₂]: No, es la vertical

[e₁₁]: ¿-3 no lo incluye?

[e₁₂]: No

[e₁₁]: Entonces del -3

[e₁₂]: Al 6 para x

[e₁₁]: Del 1 al 5, porque se incluye el 6

[e₁₂]: Ya, se incluye el 6, entonces hasta el 6

[e₁₁]: Hasta 5

[e₁₂]: Pero si incluye el 6

[e₁₁]: No llega hasta 5, 5-6

[e₁₂]: Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$

[e₁₁]: x vale 5 y vale 6

[e_{12}]: Ya! el -2, -1,0,1,2,3,4,5, ya el 6 incluye

[e_{11}]:-2, -1,0 ¿qué valores corresponde x ?, esos son los valores de y

[e_{12}]: No

[e_{11}]: Están preguntando por x no más

[e_{12}]: Ya

[e_{11}]: Es -2 en x

[e_{12}]: Es -3, abierto el -3, 6 cerrado, el otro estaba bien entonces

[e_{11}]: Sí, pero no

[e_{12}]: Ahí está el -3

[e_{11}]: Está hablando de x

[e_{12}]: Está hablando de y , a ver busca en x , del -10 sería

[e_{11}]: Del -9 al valor 6

[e_{12}]: y

[e_{11}]: Pero el 8 se incluye, no el 9 también se escribe

[e_{12}]: Ah verdad que era el 10, ah entonces pongo 9 cerrado?

[e_{11}]: Ya ahora un archivo nuevo.

Ítem II

Pregunta a)

[e_{12}]:¿A partir de qué valores de x la función $g(x)$ es positiva?, $-3x + 1$

[e_{11}]: Cuando x vale 1 y vale -2. Si x vale 2 y vale -5

[e₁₂]: Hay que darle valores positivos

[e₁₁]: El 0 da 1, el -1 da 4

[e₁₂]: ¿A partir de qué valores de x la función $g(x)$ es positiva?

[e₁₁]: Del 0

Pregunta b)

[e₁₂]: ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?

[e₁₁]: Eh del 0

[e₁₂]: A partir del 0

[e₁₁]: A partir del 0 al menos infinito

[e₁₂]: El 0 es 1 y 1 es -2

Pregunta c)

[e₁₂]: ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 3?

[e₁₁]: En $y = -2$, \square vale 1, entonces y está entre esos valores

[e₁₂]: Ahí está el -2

[e₁₁]: 1

[e₁₂]: Y ¿El 3?

[e₁₁]: Eh el tres sería ese

[e₁₂]: Ahí está el 3 (apunta gráfica)

[e₁₁]: Toma valores entre el -2 y el 3, entonces el 1 y el 0

[e₁₂]: No es 0, es 0,66

[e₁₁]: Y ninguno se incluye

[e₁₂]: ¿Cómo que ninguno se incluye? Sí incluye!

[e₁₁]: Porque están preguntando entre

[e₁₂]: Sí, incluye

[e₁₁]: Ya!

Pregunta d)

[e₁₂]: Ya ¿Qué valores de \square corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 1$?

[e₁₁]: -3 también

[e₁₂]: Estás seguro que quedó bien hecha la gráfica?

[e₁₁]: Sí es la misma función, es la misma gráfica

[e₁₂]: Sí, pero queda rara

[e₁₁]: Ya del -3 al 1

[e₁₂]: El 1 se incluye

[e₁₁]: (Gráfica)

[e₁₂]: Te pasaste

[e_{11}]: Ya ahí no más 1,33

[e_{12}]: No, del 1 me dijiste

[e_{11}]: Del 0 al 1,33... valor del 1 el 0

[e_{12}]: 0,1

[e_{11}]: Del 0 al 1,33

[e_{12}]: Del 1

[e_{11}]: Del 0

[e_{12}]: Del 1, te estoy preguntando del 1, incluye el 1 lo que no incluye es el -3

[e_{11}]: El 1 va al 0

[e_{12}]: Pero el 1 es y

[e_{11}]: Se te esta preguntando para los valores para y

[e_{12}]: Lee pregunta

[e_{11}]: En el 1 es -2

[e_{12}]: Osea en el -3... los valores de y, anota los valores de y... los de y para x... ¿El 1 en x es?

[e_{11}]: -2

[e_{12}]: No, mira es cero coma y algo

[e_{11}]: En 1 es 0

[e_{12}]: Uy! no es 0, o ¿Si?... 0 y 3

[e_{11}]: El ¿3?

[e_{12}]: 1,33

[e₁₁]: En 3 es -8

[e₁₂]: Los valores de y para $x \dots$ ¿1,33 es negativo o positivo?... positivo del 0 al 1,33...
lee la siguiente pregunta

[e₁₁]: Aun me queda una duda, porque dice que x es igual a 0

[e₁₂]: Pero... lee pregunta nuevamente

[e₁₁]: Dado por $-3 < x \leq 1$

[e₁₂]: Ah, entonces es al revés... estaba bien lo que estabas diciendo

[e₁₁]: Sí, sorry

[e₁₂]: Ya

[e₁₁]: Cuando x vale -3

[e₁₂]: x vale 10, que no lo incluye, y ¿En 1?

[e₁₁]: Cuando x vale 1... vale -2

[e₁₂]: Incluye

Ítem III

Pregunta a)

[e₁₂]: Lee pregunta... ahora los dos en el mismo gráfico

[e₁₁]: ¿Uno coma a cuánto?

[e₁₂]: (1,-2)

[e₁₁]: Ya, y ¿El otro?

[e₁₂]: 2... la otra 1, -2, 2, 5

[e₁₁]: ¿Cuál otra más?

[e₁₂]: -5

[e₁₁]: ¿0 o 1?, porque no voy a poder bajar en 1

[e₁₂]: Lee pregunta nuevamente

[e₁₁]: Eh ¿Cuanto?

[e₁₂]: Es más fácil verlo en la tabla

Investigador: Indica cómo colorear las rectas en el software GeoGebra, para que se pueda diferenciar fácilmente una recta de otra

[e₁₂]: Ya de nuevo

[e₁₁]: Todos los valores de 1 al menos $g(x)$ va hacer mayor, ese es el quiebre

[e₁₂]: Desde el -2

[e₁₁]: Desde el 1

[e₁₂]: No, desde el (2,1)

[e₁₁]: Bueno

[e₁₂]: Desde ese punto

[e₁₁]: En $x = 1$

[e₁₂]: Lee pregunta nuevamente... a partir del punto ¿Cuanto es?

[e₁₁]: Menos infinito

[e₁₂]: No (1,-2)

[e₁₁]: Si el -2 es el resultado

[e_{12}]: No, si el $(1,-2)$ es el punto... es un punto... hacia los infinitos negativos... ponerles los intervalos a todos

[e_{11}]: Sin contar al 1

[e_{12}]: Sí incluye el valor, si dice... lee pregunta nuevamente... debería incluirlo porque sí pasa por el punto

[e_{11}]: Está preguntando cual es el menor

[e_{12}]: Lo que pasa para los x y para la y

Pregunta b)

[e_{12}]: Lee pregunta... es lo mismo

[e_{11}]: En el punto $(1,-2)$... es lo mismo, evaluar

[e_{12}]: Lo estamos anotando igual

[e_{11}]: Menores o igual

[e_{12}]: Igual...

[e_{11}]: Del $(1,-2)$ al infinito...

[e_{12}]: Positivo

[e_{11}]: Sí

[e_{12}]: Son iguales en ese punto y a partir de este

[e_{11}]: Al infinito positivo

[e_{12}]: $f(x)$ es mayor

Pregunta c)

e_{12} : Lee pregunta... es una conclusión

[e_{11}]: Que la intersección es (1,-2)

[e_{12}]: Que son iguales en el punto... que a partir de un mismo punto son iguales, mayores o menores, porque a partir de ese punto yo sé hacia donde son mayores , hacia donde menores... en la intersección

[e_{11}]: A partir del (1,-2) es intersección

[e_{12}]: Escribe

[e_{11}]: Están en sentido opuesto.. $f(x)$

[e_{12}]: Y se puede determinar cuales son...

[e_{11}]: $f(x)$ es creciente y $g(x)$ es decreciente... ¿Sabes qué es eso?

[e_{12}]: Sí, la pendiente

Ítem IV

Pregunta a)

[e_{11}]: Lee pregunta

[e_{12}]: $-x + 9 \leq -6x + 29$ (Desarrolla algebraicamente)... ¿Eso es esto?

[e_{11}]: Sí

[e_{12}]: ¿Está bien?

[e_{11}]: Sí... yo creo que había que graficar

[e_{12}]: Hacerlo

[e_{11}]: No, ya no... si tú tienes el resultado listo

[e_{12}]: Es que yo soy bacan

Pregunta b)

[e_{11}]: Se hace de la misma manera... ¿Lo haces tú o lo hago yo?

[e_{12}]: Yo... ¿No habrá que hacer eso del infinito que hacíamos?

[e_{11}]: No es necesario

[e_{12}]: Pero así... por ejemplo poner el valor de infinito al no sé... a no pero hay un solo valor

[e_{11}]: Por eso

[e_{12}]: Ah no he dicho nada

[e_{11}]: Está solo x ... con dos valores es mucho masatadoso

[e_{12}]: Es más fácil, a mí me gusta

[e_{11}]: Tienes que hacer la media cosa para abajo... acá es una cosa pequeñita

Pregunta c)

[e₁₁]: Es lo mismo

[e₁₂]: Ah que fácil esto

Pregunta d)

[e₁₂]: ¿Está bien?

[e₁₁]: Sí, está bien

[e₁₂]: Terminamos... ya revisemos todo para ver si está bien... ya esta bien

[e₁₁]: Ni revisaste

[e₁₂]: No si está bien

[e₁₁]: Terminamos

Momento 2

Ítem I

Pregunta a)

[e₁₁]: Oh! que hermoso

[e_{12}]: No son iguales

[e_{11}]: ¿Se intersectan?

[e_{12}]: Sí

[e_{11}]: Se intersectan en el (1,4)

[e_{12}]: ¿Cuál es la pregunta?

[e_{11}]: Lee pregunta... que esta sea menor a esta... del 1 al infinito

[e_{12}]: Del 1 al infinito... ¿Estás seguro que es hacia el infinito positivo?

[e_{11}]: Sí

[e_{12}]: Ya la otra

Ítem II

Pregunta a)

[e_{11}]: Lee pregunta

[e_{12}]: Se intersectan

[e_{11}]: Se intersecta en (4, -1)... ambos pasan por ese punto aquí mira

[e_{12}]: El conjunto solución de $f(x) < g(x)$

[e_{11}]: Se intersectan en (4,-1)

[e_{12}]: Pero no en 4 justo

[e_{11}]: Sí, mira fijate ¿Lo ves?... nos están preguntando cuando es menor

[e₁₂]: Encontrar el conjunto solución... cuando es menor... cuando en qué punto empieza a ser menor

[e₁₁]: Sí cuándo en qué punto empieza hacer menor... no lo mismo que en el anterior

[e₁₂]: Abierto en los positivos

[e₁₁]: Eh 4 $f(x)$ menor al infinito

[e₁₂]: ¿Qué?

[e₁₁]: 4 al infinito, cuando $f(x)$ es menor del 4 al infinito

[e₁₂]: Ah ya

[e₁₁]: Listo, hermoso!

Pregunta b)

[e₁₁]: Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$, ¿En qué punto chocan? Supongo que en ese

[e₁₂]: A ver

[e₁₁]: Chocan en (-3,5)

[e₁₂]: Sí, entonces en el -3

[e₁₁]: Pero dice que $s(x) \geq h(x)$

[e₁₂]: Sí

[e₁₁]: Del menos infinito al menos 3

[e₁₂]: Listo

Comentarios Finales

[e₁₁]: Resultó más fácil

Investigador: ¿Habían trabajado inecuaciones lineales con una incógnita en gráficas?

[e₁₂]: Sí

[e₁₁]: Pero con sistemas

[e₁₂]: De las dos formas

[e₁₁]: Pero con la gráfica sola no

[e₁₂]: Es mucho más fácil con gráficas

[e₁₁]: Sí es mucho más fácil con gráfica. El método algebraico es mucho más largo el procedimiento. Con la gráfica por ejemplo aquí en la mica juntabas y tenías el punto listo.

[e₁₂]: Se ve el punto donde intersectan al tiro. Entonces buscábamos primero el punto común y se veía donde era mayor o era menor.

Anexo 7: Producciones Propuesta, Binomio 2

Propuesta de enseñanza y aprendizaje

Momento 1:

1) Grafique con ayuda del software GeoGebra la función $f(x) = 2x - 4$ y responda:

a) ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?

a partir del valor $x = 2$

b) ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?

$2 = 2x - 4$ a partir de $x = 3$
 $6 = 2x$
 $3 = x$

c) ¿Para qué valores de x la función toma valores entre -2 y 6?

todos los valores entre $x = 1$ y $x = 5$



d) ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 6$?

$$-10 < y \leq 8$$

II) En un nuevo archivo Geogebra grafique la función $g(x) = -3x + 1$ y responda:

a) ¿A partir de qué valores de x la función es positiva?

a partir de $x = -\infty$ hasta $x = 1/3$
 $] -\infty, 1/3 [$

$$y = -3x + 1$$

$$0 = -3x + 1$$

$$+ 1/3 = x$$

b) ¿A partir de qué valores de x la función es menor a 2?

a partir de $x = -1/3$ continuando en dirección a los reales positivos

$$2 = -3x + 1$$

$$1 = -3x$$

$$-1/3 = x$$

c) ¿Para qué valores de x la función toma valores entre ²⁷-2 y 3?

Para los valores de x que estén entre $-2/3$ y 1

d) ¿Qué valores de y corresponde al intervalo de valores para x dado por $-3 < x \leq 1$?

$10 > y \geq -2$

III) En un nuevo archivo de GeoGebra grafique las funciones $f(x) = 2x - 4$ y $g(x) = -3x + 1$

a) ¿Para qué valores la función $f(x) < g(x)$?

$X \in]-\infty, 1[$ $\uparrow g(x)$
 $S = -\infty < x < 1$

b) ¿Para qué valores la función $g(x) \leq f(x)$?

$$1 \leq x < +\infty$$

c) ¿Qué puede generalizar?

Que a partir de $x > 1$ la función $f(x)$ es mayor que $g(x)$ mientras que cuando $x < 1$ $f(x)$ es menor que $g(x)$.

IV) ¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

a) $-x + 9 \leq -6x + 29$

$$-\infty < x \leq 5$$

$$\begin{aligned} -x + 9 &\leq -6x + 29 \\ 9 &\leq 29 \\ -4 + 9 &\leq -24 + 29 \\ 5 &\leq 5 \quad x \end{aligned}$$



b) $4x+1 > -x-4$

$-1 < x < +\infty$	$4x+1 > -x-4$ $1 > -4$ ✓ $5 > -5$ $-4+1 > -1-4$ $-3 > -3x$
--------------------	--

c) $x+5 < 3x+7$

$7 < x < +\infty$	$x+5 < 3x+7$ $5 < 7$ ✓ $+4 < 4x$ $3 < 1x$
-------------------	--

d) $-3x+6 \geq x-10$

$-\infty < x \leq -6$	$-3x+6 \geq x-10$ $-3 \geq -7$ ✓ $-6 \geq -6$ ✓ $-9 \geq -6x$
-----------------------	--

$$-\infty < x \leq 1$$

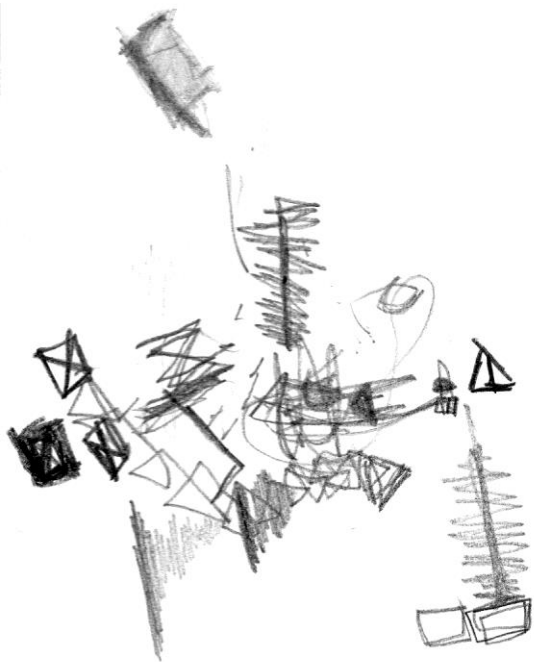
$$-\infty < x < 4$$

$$-1 < x \leq \infty$$

$$1 \leq x < \infty$$

$$4 < x < \infty$$

$$-\infty < x \leq -3$$



3/1/00-2

$$y = -3x + 1$$

$$0 = -3x + 1$$

$$+\frac{1}{3} \Rightarrow \lambda$$

$$+\frac{1}{3}$$

~~A~~

a partir de $x =$

$$|0 < y \leq -2$$

1



Momento 2:

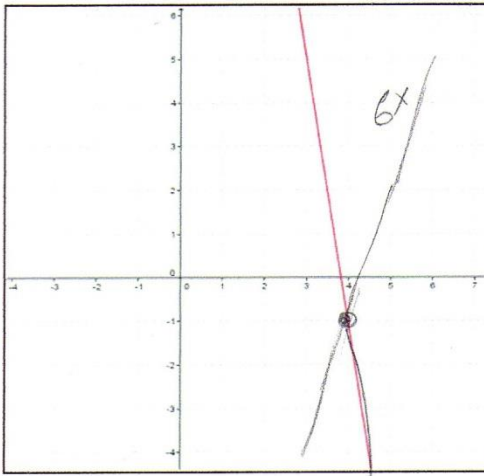
I) Dada las gráficas en mica:

a) Encontrar el conjunto de números que satisfacen $g(x) \leq f(x)$.

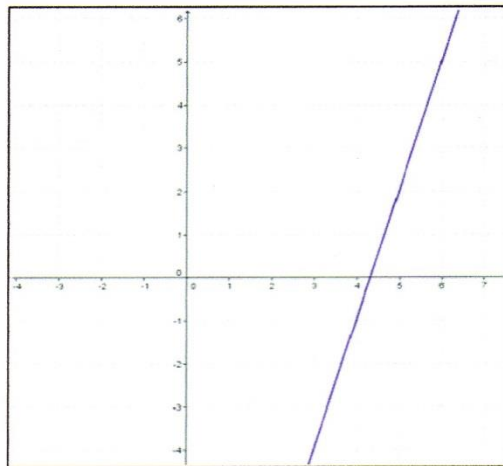
$$1 \leq x < +\infty$$

II) Dadas las siguientes gráficas:

Gráfica $f(x)$



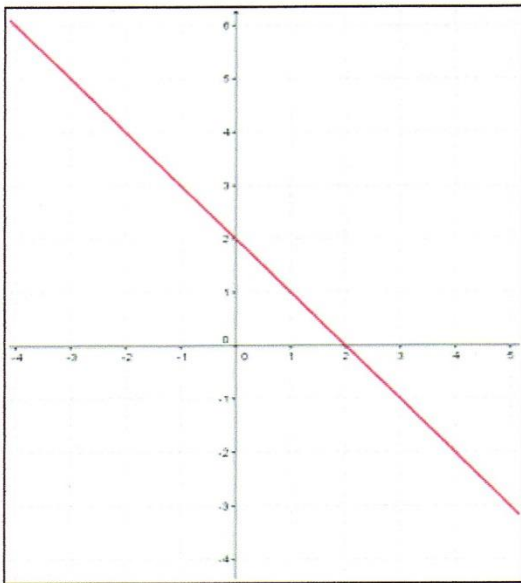
Gráfica $g(x)$



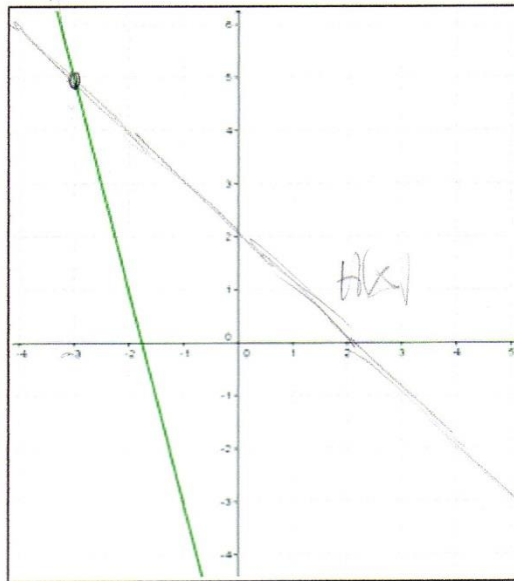
a) Encontrar el conjunto solución de $f(x) < g(x)$.

$$4 < x < +\infty$$

Gráfica $h(x)$



Gráfica $s(x)$



b) Encontrar el conjunto solución de $s(x) \geq h(x)$.

$$-\infty < x \leq -3$$

Anexo 8: Dialogo Propuesta, Binomio 2

Momento 1

Ítem I

Pregunta a)

[e₂₂]: $f(x) = 2x - 4$... desde el 2 en x

[e₂₁]: A partir del punto...

[e₂₂]: Dos coma...

[e₂₁]: Sí, (2,0)

[e₂₂]: Pero en función de x

[e₂₁]: A partir de qué valores para x ... ah! ya

[e₂₂]: Ah, entonces el 0 no

[e₂₁]:: A partir de valor $x = 2$

Pregunta b)

[e₂₂]: $2x - 4 = 2$... 6... Mmm... 3... (2,3)... no

[e₂₁]: Sí

[e₂₂]: No, (3,2)

[e₂₁]:: No... a partir de $x = 3$

Pregunta c)

[e₂₂]: Entre -2 y 6

[e₂₁]: La función en -2 y 6... te preguntan por la x

[e₂₂]: y es igual a 5

[e₂₁]: x es igual a 5

[e₂₂]: Ahí queda una poco...

[e₂₁]: Mira la función toma valores entre -2 y 6, entonces x toma valores entre -2 y 6... en -2 es 1 y en 6 está en 5

[e₂₂]: Osea que esta es x

Pregunta d)

[e₂₂]: -3 es menor a x ... osea desde aquí para acá... x es menor o igual a 6... y que valores de y toman esos

[e₂₁]: Espera... sería el menos 10 ¿Lo escribimos así?

[e₂₂]: Y menor igual a 6... es 8, eso sería, creo

Ítem II

Pregunta a)

[e₂₁]: $-3x + 1$... ahí está... desde los infinitos negativos

[e₂₂]: No mira x

[e₂₁]: A partir de qué valores de x la función es positiva

[e₂₂]: Ya... pero mira hacia donde baja

[e₂₁]: Por eso es desde todos los que están para acá, hasta ahí

[e₂₂]: Ah dale hasta donde se interseca con la recta

[e₂₁]: Desde el menos infinito... $y = -3x + 1$, para que la función sea positiva y tiene que ser 0

[e₂₂]: No, sería 1 partido en 3 positivo

[e₂₁]: Ah! ya ahora sí... pero lo podemos escribir como intervalo

[e₂₂]: Prestame una hoja $-3x + 1 = 0$... igual le podrías dar otro valor a y mmm... no

[e₂₁]: El intervalo es este

Pregunta b)

[e₂₁]: Hace la b)

[e₂₂]: Lee pregunta... a partir del uno

[e₂₁]: No... en x ... $2 = -3x + 1$

[e₂₂]: Menos un tercio

[e₂₁]: Desde

[e₂₂]: Dos

[e₂₁]: No, menos un tercio

[e₂₂]: Ah ya lo estaba viendo desde otro lado

[e₂₁]: Continuando...

Pregunta c)

[e₂₁]: Lee pregunta

[e₂₂]: -2 y 3 en x ... sería 3

[e₂₁]: No

[e₂₂]: Menos un tercio y uno

[e₂₁]: ¿De dónde sacaste menos un tercio?

[e₂₂]: Ah no, menos dos tercios... ahí sí

Pregunta d)

[e₂₂]: Lee pregunta... -3 es menor a x ... ya que sería -2 ... a ver sube un poco quiero ver hasta dónde llega

[e₂₁]: Hasta el 10

[e₂₂]: Según yo esto queda así... es 10 y acá es -2

[e₂₁]: Lee pregunta... no queda así y va hacer mayor igual a -2... acuérdate que esto está al revés

[e₂₂]: No, esta al revés tienes que seguir el orden de eso

[e₂₁]: Espérate y debe ser en 10

[e₂₂]: Debe ser mayor o menor a 10

[e₂₁]: No, al revés

[e₂₂]: Sí, ya

[e₂₁]: Menor a 10

Ítem III

Pregunta a)

[e₂₁]: ¿Para qué valores la función $f(x)$

[e₂₂]: Es menor a g ?

[e₂₁]: $-3x + 1$

[e₂₂]: Para qué valores la función $f(x)$, es menor g

[e₂₁]: Sí, eso dije

[e₂₂]: Si $2x - 4$ (hace cálculos)

[e₂₁]: Del 10 en adelante

[e₂₂]: ¿Por qué?

[e₂₁]: Desde el 10 hasta el 1, eso en y , no en x

[e₂₂]: En x o y

[e₂₁]: En x ,

[e₂₂]: Entonces si es en x , tiene que ser y

[e₂₁]: No, mira lo tengo que poner así

[e₂₂]: Ahhh!

[e₂₁]: x va a ser mayor o igual que el menos infinito

[e₂₂]: Sí

[e₂₁]: Y...

[e₂₂]: Y menor o igual que 1

[e₂₁]: No porque si ponemos el...

[e₂₂]: Ah sí en ese caso sería cerrado

Pregunta b)

[e₂₂]: ¿Para qué valores la función $g(x)$ es menor o igual a $f(x)$?, $g(x)$ era esa cierto (apunta gráfica)

[e₂₁]: Sí mira esta es g y esta f (apunta gráfica), acá va un 1

[e₂₂]: A ya! menor o igual

[e₂₁]: Acá es igual

[e₂₂]: En 1 sé que es igual

[e₂₁]: x menor o igual

[e₂₂]: Sí menor o igual, y en infinito

[e₂₁]: Tiene obligación (escribe respuesta)

Pregunta c)

[e₂₂]: ¿Qué significa generalizar?

[e₂₁]: Que a partir de $x = l$ emm...la función $f(x)$ es mayor que $g(x)$ (escribe)

[e₂₂]: Sí f de $x = l$, pero la función $g(x)$ se va para...en función de x , sería los negativos...no en función de g sería los negativos y en función de f los positivos.

[e₂₁]: (Sigue escribiendo) mientras que cuando $x < 1$ $f(x)$ es menor que $g(x)$...ahora tendría que haber puesto $x > 1$.

Ítem IV

Preguntas

[e₂₁]: ¿Para qué valores se cumplen las siguientes relaciones?

[e₂₂]: $-x + 9 \leq -6x + 29$. Hay que darle un valor a x ... que sea menor o igual

[e₂₁]: probemos con 1

[e₂₂]: $-1 + 9$ es 8

[e₂₁]: Con cero da esto, y si la graficamos?

[e₂₂]: Con el 2 también...ah es $-6x$

[e₂₁]: (Gráfica en geogebra) mira acá $f(x)$ va a ser menor que la otra... a ver con el 4, 6 por 4 es 24

[e₂₂]: Ahí te da 5 y 5, son igual, sí se cumple

[e₂₁]: Mmm...Entonces es a partir de menos infinito...eh menor o igual a x , hasta los menores o iguales a 5

[e₂₂]: Por qué menos infinito ahí?

[e₂₁]: Porque mira probé con 0 que es acá y probé con 9 que era...

[e₂₂]: Ah probaste con el 0

[e₂₁]: Sí entonces todos para acá van a dar...

Preguntab)

[e₂₁]: Ya hay que seguir graficando

[e₂₂]: Ya voy a ver con el c) y tu con el b)...aunque no es necesario graficar, pero para que veamos bien la respuesta

[e₂₁]: $-x - 4$, ya $4x + 1$ veamos el 0

[e₂₂]: Sí por 0, al tiro

[e₂₁]: Ya por 0 sería 1 es mayor que 4, ya está "listoco"

[e₂₂]: Entonces hacia atrás, ya ponele menos infinito

[e₂₁]: Dije que este era 0

[e₂₂]: Intenta con el -3

[e₂₁]: Espérame, dije que cuando valía 0

[e₂₂]: (Hace cálculos) No, no es con el menos infinito porque no se cumple con todos.

[e₂₁]: Espérate, con -1

[e₂₂]: ¡Con los demás negativos no se cumple!

[e₂₁]: : -4 más 1 mayor que 1 menos 4, esto me da -3 mayor a -3...ya x mayor o igual que el infinito porque son los positivos

[e₂₂]: Sí infinito

[e₂₁]: Sin incluir a -3, no -1

[e₂₂]: No el -3 tampoco se incluye

[e₂₁]: Eh del -1 parte

[e₂₂]: No puede ser mayor o igual a infinito, si el infinito siempre va a ser abierto

[e₂₁]: Por x mayor o igual

[e₂₂]: Cuando era mayor igual se cerraba y cuando era así no más se dejaba abierto, acuérdate que en el gráfico era así y cuando estaba mayor o igual se cerraba...esto era así y cuando esto estaba así se dejaba así no más se dejaba abierto era un sistema abierto.

[e₂₁]: Entonces quieres que diga que x es mayor que el infinito

[e₂₂]: Menor que el infinito, si estás diciendo que x es mayor a -1 y menor al infinito

[e₂₁]: ¿Seguro?

[e₂₂]: Yo “cacho” que sí

[e₂₁]: Yo digo que es menor o igual

[e₂₂]: Es que si es menor o igual, estás cerrando el sistema

[e₂₁]: Ya entonces hay que cambiar todo esto

[e₂₂]: Ahí no estoy seguro,

[e₂₁]: Yo digo que es cerrado.

[e₂₂]: Oye cuando hacíamos esos graficos ¿cómo dejábamos el infinito? infinito lo teníamos que dejar abierto...ves ¿Cómo le dejaste ahí?

[e₂₁]: ¡Ya! me ganaste, voy a tener que revisar

[e₂₂]: Sí en todo caso

[e₂₁]: ¡Ya ahora las otras!

Preguntac)

[e₂₁]: $x + 5$ menor a $3x + 7$ (gráfica en GeoGebra)

[e₂₂]: Ya prueba con el 0

[e₂₁]: Espérate, $x + 5$ menor a $3x + 7$, con 0 da 5 menor que 7 ¿el -1 cuánto sería?, sería -4 y

[e₂₂]: Y -3 y 4

[e₂₁]: Ah no sería 4, me equivoqué. Con -2

[e₂₂]: Con -2, -6

[e₂₁]: -6 más 7 es 1

[e₂₂]: Tampoco

[e₂₁]: Entonces es a partir de x (escribe la respuesta)

Preguntad)

[e₂₁]: $-3x + 6$ mayor o igual a $x - 10$ (grafica en GeoGebra)

[e₂₂]: ¿Qué valores le podemos dar a eso?

[e₂₁]: 3, 4 y 5

[e₂₂]: -3 por 3 es -9,

[e₂₁]: 3 menos 1

[e₂₂]: 2

[e₂₁]: Lo tenemos mal, 3 por 4 menos 2 más 6

[e₂₂]: Menos por menos es -6 y 4 menos 10 es 6, sí se cumple

[e₂₁]: Con 5

[e₂₂]: 3 por 5 es -15 más 6 es 9

[e₂₁]: Negativo

[e₂₂]: Y 5 menos 1 es 4, sigue inconclusa

[e₂₁]: ¡No! se tiene que cumplir alguna vez

[e₂₂]: Eh no sé

[e₂₁]: Se tiene que cumplir!

(Siguen haciendo cálculos)

[e₂₁]: ¡Ah! mira acá está el error, había puesto -1

[e₂₂]: Ah! (ríe)

[e₂₁]: Ahora...eh...3 menos 10 es -7, ya ese está bien, ahora era 4 menos 10 son -6

[e₂₂]: -6

[e₂₁]: Ahí se cumple y ahí no se cumple

[e₂₂]: No, sí se cumple a no, no se cumple

[e₂₁]: 5 menos 10

[e₂₂]: -5

[e₂₁]: Ya entonces x vale... del menos infinito menor

[e₂₂]: Mayor

[e₂₁]: Y menor igual a -6

[e₂₂]: ¡Ya!

[e₂₁]: ¡Ahí terminamos!

[e₂₂]: ¿Revisemos?

[e₂₁]: Esto está bien

[e₂₂]: Igual me quedé con dudas con eso del infinito, a ver deja revisar

[e₂₁]: No, si está bien

Momento 2

Ítem I

Preguntaa)

[e₂₁]: $g(x)$ menor o igual a $f(x)$, ah pero hay que juntarlas

[e₂₂]: chocan ahí en el punto (1,4)

[e₂₁]: $g(x)$ menor o igual a $f(x)$, osea de aquí para arriba

[e₂₂]: ¿Estás seguro? Del 4

[e₂₁]: No porque es x mayor e igual a 1 hasta el infinito positivo

Ítem II

Preguntaa)

[e₂₁]: Ya dadas las siguientes gráficas, encontrar el conjunto solución de $f(x)$ menor a $g(x)$

[e₂₂]: Estas chocan en el 4 coma y algo

[e₂₁]: Ya, $f(x)$ menor a $g(x)$ desde este punto hasta acá, entonces sería x mayor a infinito y menor que 4

Preguntab)

[e₂₁]: Encontrar el conjunto solución de $s(x)$ mayor o igual a $h(x)$

[e₂₂]: Chocan en el 5

[e₂₁]: El -3, hay que fijarse en x , este es h . Entonces del menos infinito hasta el -3, ya!

[e₂₂]: Y el 4 menor a x a infinito positivo.

Comentario Final:

[e₂₂]: Con los otros métodos es más largo, esto es mucho más fácil y tiene más colores (refiriéndose a las gráficas entregadas en mica), es más entretenido hacerlo así con la gráfica.

[e₂₁]: Me pareció una forma más creativa para entender inecuaciones

[e₂₂]: Y más fácil de entenderlo

Investigador: ¿Qué técnica usaban para encontrar cuándo una era mayor o menor? ¿en qué se fijaban?

[e₂₂]: Donde chocaban

[e₂₁]: Y lo revisamos matemáticamente, en vez de revisarlo así

Investigador: ¿Seguían usando su método algebraico?

[e₂₂]: O sea sí, pero identificando el punto también