UNIVERSIDAD DE VALPARAISO

Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Sobre la univalencia de cierta integral: el caso armónico.

Tesis presentada por **Víctor Bravo Gallardo.**

Para optar al grado de Magíster en Matemáticas.

Profesor Guía Dr. Rodrigo Hernández Reyes.

Valparaíso, 2015.

Índice general

Agradecimientos 2

Introducción 3

Resumen 4

Capítulo 1. Preliminares 5

1. **Funciones Analíticas.** 5
2. **Funciones Univalentes.** 6
3. **Funciones Armónicas Complejas.** 7

Capítulo 2. Un nuevo criterio de univalencia 11

Capítulo 3. Extensión de $\int_0^z [f'(w)]^\alpha dw$ al caso armónico 15

Bibliografía 23

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su compromiso y apoyo, especialmente a mi pareja María Fernanda y mis hijos Dante, Hans, Sebastián y Emilia por la paciencia que han tenido durante este largo proceso.

Agradezco a mi profesor Rodrigo Hernández Reyes, quien me guió y apoyó durante este proceso, por su constante motivación, por la confianza que deposita en mi, por su amistad, por compartir su conocimiento conmigo e inspirar en mi gran admiración. Su apoyo ha sido fundamental en este trabajo.

Agradezco a mis amigos y compañeros de trabajo que siempre estuvieron dándome ánimo para seguir adelante.

Valparaíso-Chile, Junio de 2015 **Víctor Bravo Gallardo**

Introducción

La clase de funciones univalentes $\mathcal{S}$, la cual consta de todas las funciones analíticas inyectivas definidas en el disco unitario $\mathbb{D}$ y cuya serie de potencia esta dada por $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ se enmarca en la denominada teoría geométrica de funciones, la cual trata de interpretar ciertos aspectos geométricos a través de resultados analíticos.

Uno de los problemas centrales en la clase $\mathcal{S}$ fue la denominada Conjetura de Bieberbach. Guiado por el ejemplo de una función extremal (la función de Koebe), Bieberbach [2] en el año 1916 probó que $|a_2| \leq 2$ y conjeturo que $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ satisface que

$$|a_n| \leq n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{S}.$$

En este sentido la clase $\mathcal{S}$ adquiere una gran importancia en la teoría geométrica de funciones, ya que los intentos de demostrar la conjetura Bieberbach permitieron que durante el siglo XX muchos matemáticos trabajaran en esta clase de funciones y de esta manera se desarrollara ampliamente esta teoría.

La pregunta que se quiere responder en este trabajo es la siguiente: dada una función f univalente en el contexto de mapeos armónicos, ¿para qué valores de α la función $f_\alpha = \displaystyle\int_0^z (f')^\alpha \, d\omega$ es univalente?. En el año 1965 Royster [16] demuestra que para $|\alpha| > \dfrac{1}{3}$ y $\alpha \neq 1$ existe $f \in \mathcal{S}$ tal que la función f_α no pertenece a la clase $\mathcal{S}$ y Pfaltzgraff [15] diez años más tarde prueba que dada cualquier función $f \in \mathcal{S}$ la respectiva $f_\alpha \in \mathcal{S}$ si $|\alpha| \leq 1/4$. Ahora bien, dado que la conjetura de Bieberbach es un problema abierto en el mundo de las funciones armónicas la pregunta que intentamos responder en este trabajo cobra sentido.

Resumen

Este trabajo se enmarca dentro de la teoría geométrica de funciones, y tiene como objetivo principal determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f_\alpha = \displaystyle\int_0^z (f')^\alpha \, d\omega$ resulta ser univalente en el contexto de mapeos armónicos.

El desarrollo de este trabajo está dividido en tres capítulos que a continuación se describen brevemente.

En el Capítulo 1 se dan a conocer las herramientas necesarias para llevar acabo este trabajo, entre las cuales podemos destacar: nociones y resultados básicos de las funciones analíticas, funciones univalentes y funciones armónicas complejas.

El Capítulo 2 comienza introduciendo algunos resultados que permiten establecer la univalencia de las funciones analíticas. Luego se destaca la extensión del criterio de Becker al caso armónico y finaliza con el Teorema 10 que establece un nuevo criterio de univalencia para funciones armónicas localmente univalentes.

El Capítulo 3 parte describiendo brevemente los resultados existentes para la función f_α en el caso analítico, luego se establece la definición de la misma en el caso armónico y se demuestran algunos resultados que en conjunto con el nuevo criterio de univalencia permiten responder de manera parcial, al igual que en el caso analítico cuales son los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la función f_α es univalente. Finalmente se muestran algunas consecuencias de este último resultado.

Capítulo 1

Preliminares

1. Funciones Analíticas.

Un función compleja f es analítica en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, si y solo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $z = x + iy$ es analítica es equivalente a que se verifiquen las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

para todo punto en el disco $\mathbb{D}$.

Algunos resultados sobre las funciones analíticas que son utilizados en este trabajo son los siguientes:

Lema 1 (Lema de Schwarz). *Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$, con $f(0) = 0$ y $|f(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$. Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. La desigualdad es estricta a no ser que f sea una rotación de la identidad, es decir, $f(z) = e^{i\theta} z$.*

Demostración. Ver [5] página 3. $\square$

Una generalización del lema de Schwarz es el siguiente:

Lema 2 (Lema de Schwarz-Pick). *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función analítica, entonces para todo $z, \zeta \in \mathbb{D}$ se verifica que:*

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{1 - \overline{f(\zeta)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - \zeta}{1 - \overline{\zeta} z} \right|. \tag{1}$$

En particular,

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \tag{2}$$

Demostración. Basta considerar $H = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$, donde $f(\alpha) = \beta$,

$$\varphi_{-\alpha}(u) = \frac{u+\alpha}{1+\overline{\alpha}u} \quad \text{y} \quad \varphi_\beta(v) = \frac{v-\beta}{1-\overline{\beta}v}$$

son automorfismos del disco. Luego aplicando el Lema de Schwarz a la función H se obtiene (1). Para obtener (2), basta que $\zeta \to z$ en (1). $\square$

Teorema 3 (Teorema de Hurwitz). *Sean Ω un dominio, $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas y supongamos que $f_n(z) \to f(z)$ uniformemente en compactos de Ω. Si $f_n(z) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \Omega$ entonces $f = 0$ en Ω o bien $f(z) \neq 0$ en Ω.*

Demostración. Ver [5] página 4. $\square$

Teorema 4. *Sean f_n funciones analíticas y univalentes en un dominio Ω, y supongamos que $f_n(z) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$, uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω. Entonces f es univalente o bien constante en Ω.*

Demostración. Ver [5] página 5. $\square$

2. Funciones Univalentes.

Definición 1. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Se dice que f es univalente en Ω si $f(z_1) \neq f(z_2)$ para todo $z_1 \neq z_2 \in \Omega$.*

Además se dice que la función f es localmente univalente en un punto z_0 si existe una vecindad del punto en la que f es univalente, lo cual equivale a decir que f' no se anula.

La clase de funciones analíticas univalentes definidas en $\mathbb{D}$ con las normalizaciones $f(0) = 0, f'(0) = 1$, recibe el nombre de clase $\mathcal{S}$, luego cada $f \in \mathcal{S}$ admite una representación en serie de potencia de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Uno de los principales problemas en la clase S fue la denominada Conjetura de Bieberbach [2]. Que guiado por el ejemplo de una función extremal definida por

$k(z) = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$, y llamada función de Koebe, Bieberbach en el año 1916 conjeturó que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $f \in \mathcal{S}$,

$$|a_n| \leq n.$$

Los intentos de demostrar la conjetura Bieberbach, permitieron un gran desarrollo en la teoría geométrica de funciones, $|a_2| \leq 2$ fue la primera en demostrarse por el propio Bieberbach, en 1923 Loewner [13] demostró que $|a_3| \leq 3$ y en 1955 Garabedian y Schiffer [7] prueban que $|a_4| \leq 4$. Sin embargo es en el año 1985 que L. De Branges demuestra la conjetura [3].

Además la mayor parte de los teoremas geométricos en la clase $\mathcal{S}$ pueden ser trasladados a cualquier dominio simplemente conexo del plano complejo con más de un punto de frontera, esto en virtud del Teorema del Mapeo de Riemann, el cual establece lo siguiente:

Teorema 5 (Mapeo de Riemann). *Sea Ω un dominio simplemente conexo el cual es un subconjunto propio de $\mathbb{C}$. Sea ζ un punto dado en Ω, entonces existe una única función f que mapea Ω conformemente en el disco $\mathbb{D}$, además $f(\zeta) = 0$ y $f'(\zeta) > 0$.*

3. Funciones Armónicas Complejas.

Una función real $u(x, y)$ es armónica si se satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Una función continua $f = u + iv$ definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es armónica compleja en Ω si u y v son funciones armónicas reales en Ω. Además si $f = u + iv$ es analítica entonces se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y entonces $\Delta u = \Delta v = 0$, es decir, toda función analítica es también armónica. Un par de funciones (u, v) que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann reciben el nombre de armónicas conjugadas.

Una función analítica y univalente es llamada un mapeo conforme dado que preserva ángulos entre curvas, este hecho caracteriza las funciones analíticas entre el conjunto de todas las funciones con primeras derivadas parciales continuas y jacobiano no nulo, porque esto implica que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen.

El Jacobiano de una función $f = u + iv$ está dado por

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Si f es analítica entonces su Jacobiano es $J_f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2$. Conocido es el resultado de que una función analítica f es localmente univalente en z si y solo si $J_f(z) \neq 0$, resultado que también es válido para funciones armónicas como lo demuestra Hans Lewy [12] en su trabajo de 1936 con el Teorema siguiente:

Teorema 6 (Teorema de Lewy). *Sea f es una función armónica definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces f es localmente univalente en Ω si y solo si $J_f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Ver [6] pag. 20. □

En vista de este teorema las funciones armónicas preservan la orientación (ver [6]) cuando $J_f(z) > 0$ con $z \in \Omega$.

Los operadores de Wirtinger que aparecen comúnmente en el análisis complejo son

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

donde $z = x + iy$. De un cálculo directo se tiene que para una función $f = u + iv$ analítica, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, luego una función f es analítica si y solo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Además el

Laplaciano de f es

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \\
&= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z},
\end{aligned}$$

y en consecuencia para una función f con segunda derivada parcial continua se tiene que f es armónica si y solo si $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ es analítica.

Si denotamos por f_z a $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ y por $f_{\overline{z}}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$, entonces el Jacobiano de la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + iy$ se escribe como $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, en efecto:

$$\begin{aligned}
J_f(z) &= |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}$$

De esta igualdad se tiene que f preserva la orientación cuando $|f_z| > |f_{\overline{z}}|$ y en tal caso se tiene que $f_z(z) \neq 0$. La función $\omega = \dfrac{f_{\overline{z}}}{f_z}$ se llama dilatación compleja de f, luego decir que f preserva la orientación es equivalente a decir que se satisface la condición $|\omega| < 1$. Consideremos ahora $f = u + iv$ una función armónica definida en un dominio simplemente conexo Ω, esta función tiene una representación única salvo por una constante, la cual es llamada representación canónica de f y está dada por $f = h + \overline{g}$ donde h y g son analíticas.

Para obtener esta representación basta notar que f_z es analítica cuando f es armónica y entonces definiendo $h' = f_z$ se tiene que h' es analítica en Ω y en consecuencia h es analítica en Ω, ahora ponemos $g = \overline{f} - \overline{h}$ y notamos que

$$g_{\overline{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0,$$

de donde obtenemos que g es analítica y finalmente $f = h + \overline{g}$.

Capítulo 2

Un nuevo criterio de univalencia

En el caso de las funciones analíticas existen diversos teoremas que permiten establecer la univalencia de estas funciones, algunos de ellos mediante el método de las cadenas de Loewner y otros que involucran el operador

$$Sf = (Pf)' - \frac{1}{2}(Pf)^2,$$

llamado derivada Schwarziana de la función localmente univalente f, donde Pf definido por

$$Pf = \frac{f''}{f'},$$

se llama derivada pre-Schwarziana de f.

Un importante criterio de univalencia para el caso de las funciones analíticas se debe al trabajo realizado por Becker en el año 1972 [1] , el cual establece lo siguiente:

Teorema 7 (Criterio de Becker). *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica con $f'(0) \neq 0$. Si*

$$(1-|z|^2)\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3}$$

entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

Cuatro años más tarde Stephan Ruscheweyh [17] realizó la siguiente extensión de este criterio:

Teorema 8. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica con $f'(0) \neq 0$. Sea $c \in \mathbb{C}$ con $|c| < 1$, $c \neq -1$. Si se verifica la condición*

$$\left|(1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)} + c|z|^2\right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

entonces f es univalente en $\mathbb{D}$.

Motivado en el trabajo R. Hernández y M. J. Martín [10] donde se define para una función armónica en su forma canónica $f = h + \overline{g}$ la derivada Schwarziana y pre-Schwarziana de f como

$$S_f = Sh + \frac{\overline{\omega}}{1-|\omega|^2}\left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega''\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}\right)^2$$

y

$$P_f = \frac{h''}{h'} - \frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2},$$

respectivamente y el siguiente Teorema que generaliza el criterio de Becker al caso armónico:

Teorema 9. *Sea $f = h + \overline{g}$ una función armónica en el disco $\mathbb{D}$ que preserva la orientación y con dilatación ω. Si para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$|zP_f(z)| + \frac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \tag{5}$$

entonces f es univalente. La constante 1 es óptima.

Este capítulo generaliza la extensión que realizó Ruscheweyh en el caso analítico al caso de funciones armónicas con dilatación ω que preservan la orientación. El siguiente Teorema establece el resultado:

Teorema 10. *Sea $f = h + \overline{g}$ una función armónica en el disco con dilatación ω, $|\omega| < 1$, $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| \leq 1$ y $c \neq -1$. Si se verifica*

$$\left|zP_f + \frac{c|z|^2}{1-|z|^2}\right| + \frac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{6}$$

Entonces f es univalente.

Demostración. Primero notamos que

$$\begin{aligned}
\left|z\frac{h''}{h'}+\frac{c|z|^2}{1-|z|^2}\right| &= \left|z\frac{h''}{h'}-\frac{z\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}+\frac{c|z|^2}{1-|z|^2}+\frac{z\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}\right| \\
&= \left|zP_f+\frac{c|z|^2}{1-|z|^2}+\frac{z\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}\right| \\
&\leq \left|zP_f+\frac{c|z|^2}{1-|z|^2}\right|+\frac{|z\overline{\omega}\omega'|}{1-|\omega|^2} \\
&\leq \left|zP_f+\frac{c|z|^2}{1-|z|^2}\right|+\frac{|z\omega'|}{1-|\omega|^2} \\
&\leq \frac{1}{1-|z|^2}
\end{aligned}$$

Luego por el Teorema 3.3.2 en [17] se tiene que h es univalente. Ahora dado $a \in \mathbb{D}$, pongamos $f_a = f + \overline{af} = h_a + \overline{g_a}$ donde $h_a = h + \overline{a}g$ y $g_a = g + ah$. Además notamos que la dilatación de f_a es

$$\omega_a = \frac{g_a'}{h_a'} = \frac{g' + ah'}{h' + \overline{a}g'} = \frac{a+\omega}{1+\overline{a}\omega} = \varphi_a \circ \omega,$$

donde $\varphi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo definido por $\varphi_a(z) = \dfrac{a+z}{1+\overline{a}z}$. Luego por la Proposición 1 en [10] y el Lema de Schwarz se tiene que

$$P_{f_a} = P_f.$$

Además, teniendo en cuenta que $\varphi_a'(z) = \dfrac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}$ podemos ver que

$$\begin{aligned}
\frac{|z\omega_a'|}{1-|\omega_a|^2} &= \frac{|z\varphi_a'(\omega)\omega'|}{1-|\varphi_a(\omega)|^2} \\
&= \frac{|z\omega'|}{1-|\omega|^2}\cdot\frac{|\varphi_a'(\omega)|(1-|\omega|^2)}{1-|\varphi_a(\omega)|^2} \\
&= \frac{|z\omega'|}{1-|\omega|^2}\cdot\frac{(1-|a|^2)(1-|\omega|^2)}{|1+\overline{a}\omega|^2-|a+\omega|^2} \\
&= \frac{|z\omega'|}{1-|\omega|^2}\cdot\frac{1-|\omega|^2-|a|^2+|a\omega|^2}{1-|\omega|^2-|a|^2+|\overline{a}\omega|^2} \\
&= \frac{|z\omega'|}{1-|\omega|^2},
\end{aligned}$$

con esto y la condición $P_{f_a} = P_f$ se tiene que f_a satisface la condición (6), es decir, $h_a = h + \overline{a}g$ es univalente para todo $a \in \mathbb{D}$. Usando ahora el Teorema de Hurwitz se tiene que la función $h + \lambda g$ es univalente para todo $|\lambda| = 1$ lo cual implica que $h + \lambda \overline{g}$ es univalente (ver [11]), en particular se tiene que f es univalente. $\square$

Capítulo 3

Extensión de $\displaystyle\int_0^z [f'(w)]^\alpha dw$ al caso armónico

En el caso analítico, para $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{S}$ se define la función

$$f_\alpha(z) \;=\; \int_0^z [f'(w)]^\alpha \, dw. \tag{7}$$

Es fácil ver que en los casos $\alpha = 0$ o bien $\alpha = 1$ las respectivas $f_0 = z$ y $f_1 = f$ pertenecen a la clase $\mathcal{S}$. Ahora bien, determinar los valores de α para los cuales la función $f_\alpha \in \mathcal{S}$ no es fácil de responder.

En el año 1965 Royster [16] demostró que si $|\alpha| > \dfrac{1}{3}$ y $\alpha \neq 1$ existe $f \in \mathcal{S}$ para el cual $f_\alpha \notin \mathcal{S}$ y Pfaltzgraff en el año 1975 [15] prueba que si $|\alpha| \leq \dfrac{1}{4}$, entonces $f_\alpha \in \mathcal{S}$. En el libro de A.W.Goodman [8] es posible encontrar resultados para algunas subclases de la clase $\mathcal{S}$ por ejemplo, si $-\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{3}{2}$ y $f \in \mathcal{C}$(convexa), entonces $f_\alpha \in \mathcal{CC}$ (close-to-convex), sin embargo el problema sigue abierto para $\dfrac{1}{4} < |\alpha| \leq \dfrac{1}{3}$.

Ahora pasamos a definir la función f_α para el caso armónico y luego se demostrarán una serie de resultados que en conjunto con el Teorema 10 permitirán determinar valores de $\alpha \in [0,1]$ para los cuales la función f_α es univalente.

Definición 2. *Sea $f = h + \overline{g}$ una función localmente univalente, para $\alpha \in [0,1]$ y $z \in \mathbb{D}$, definimos la función*

$$f_\alpha(z) \;=\; h_\alpha(z) + \overline{(h+g)_\alpha(z) - h_\alpha(z)} \tag{8}$$

donde $\phi_\alpha(z) = \displaystyle\int_0^z [\phi'(w)]^\alpha \, dw$.

Observación 1. *Como $h' \neq 0$, h_α está bien definida, además si $h' + g' = 0$, entonces $\left|\dfrac{g'}{h'}\right| = 1$, lo cual no puede ser, es decir, $(h+g)_\alpha$ está bien definida y en consecuencia lo está f_α. Además, de un cálculo directo y teniendo en cuenta que $h'(0) = 1$ y $g'(0) = 0$ se tiene que f_α satisface las siguientes condiciones:*

i) $f_0 = h_0 + \overline{g_0} = z + 0 = z$.

$ii)$ $f_1 = h_1 + \overline{g_1} = h + \overline{g} = f$.

$iii)$ $f_\alpha(0) = h_\alpha(0) + \overline{g_\alpha(0)} = 0$.

$iv)$ $\left.\dfrac{d}{dz}(f_\alpha(z))\right|_{z=0} = 1$.

La dilatación ω_α de la función f_α definida en (8) está dada por $\omega_\alpha = (1+\omega)^\alpha - 1$, en efecto:

$$\omega_\alpha = \frac{(h'+g')^\alpha - (h')^\alpha}{(h')^\alpha} = \left(1 + \frac{g'}{h'}\right)^\alpha - 1 = (1+\omega)^\alpha - 1.$$

Proposición 1. $|\omega_\alpha| < 1$ *para todo* $\alpha \in (0,1)$

Demostración. Como $\omega_\alpha = (\omega+1)^\alpha - 1$, la desigualdad $|\omega_\alpha| < 1$ es equivalente a la desigualdad $|\omega+1|^{2\alpha} - 2Re\{(\omega+1)^\alpha\} < 0$. Si ponemos $(\omega+1)^\alpha = \zeta = a + bi$, entonces

$$|\omega+1|^{2\alpha} - 2Re\{(\omega+1)^\alpha\} < 0 \Leftrightarrow |\zeta|^2 - 2Re\{\zeta\} < 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 < 1,$$

luego basta demostrar que ζ está en el disco de centro 1 y radio 1, para esto debemos probar que $|Arg\{(\omega+1)^\alpha\}| < \dfrac{\pi}{2}$ y que $|1+\omega|^\alpha < 1$.

Primero, como $|\omega| < 1$ se tiene que $(\omega+1)$ está en el disco de centro 1 y radio 1, y si $\theta = Arg\{\omega+1\}$, entonces $|\theta| = |Arg\{\omega+1\}| < \dfrac{\pi}{2}$ de donde se obtiene que $|Arg\{(\omega+1)^\alpha\}| < \dfrac{\alpha\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}$.

En segundo lugar, notamos que:

- Si $|\omega+1| < 1$, entonces $|\omega+1| \leq |\omega+1|^\alpha \leq 1$
- Si $|\omega+1| > 1$, entonces $1 \leq |\omega+1|^\alpha \leq |\omega+1|$

Finalmente $|\omega+1|^\alpha \leq \text{máx}\{1, |\omega+1|\}$ y de esto que $\zeta = (\omega+1)^\alpha = |\omega+1|^\alpha e^{i\theta\alpha}$ está en el disco de centro 1 y radio 1. $\square$

De un cálculo directo se tiene que $\dfrac{h''_\alpha}{h'_\alpha} = \alpha\dfrac{h''}{h'}$ y de esto que la derivada pre-Schwarziana de $f_\alpha(z)$ definida en (8) está dada por:

$$P_{f_\alpha} \;=\; \alpha\frac{h''}{h'} - \frac{\overline{\omega_\alpha}\omega'_\alpha}{1-|\omega_\alpha|^2}. \tag{9}$$

En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{F}$ una familia de funciones armónicas $f = h + \overline{g}$ definidas en el disco $\mathbb{D}$ que son llamadas familias afín linealmente invariantes (ver

[4] y [14]), es decir, funciones armónicas que preservan la orientación, cumplen con las normalizaciones $h(0) = g(0) = 1 - h'(0) = 0$ y son cerradas bajo las siguientes transformaciones:

i)

$$\frac{f\left(\dfrac{z+\zeta}{1+\overline{\zeta}}\right) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)h'(\zeta)}, \quad |\zeta| < 1,$$

ii)

$$\frac{f(z) - \overline{\epsilon f(z)}}{1 - \overline{\epsilon} g'(0)}, \quad |\epsilon| < 1.$$

Se define el orden de la familia $\mathcal{F}$ como el supremo entre los segundos coeficientes del desarrollo en serie de potencias de todas las $f \in \mathcal{F}$, es decir, dada $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ el orden de la familia es

$$\operatorname{Ord}(\mathcal{F}) = \sup_{f\in\mathcal{F}} |a_2(f)| = \frac{1}{2} \sup_{f\in\mathcal{F}} |h''(0)|.$$

Un ejemplo de una familia afín linealmente invariante es la clase no compacta $\mathcal{S}_H$. Si además $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H$ verifica la condición $g'(0) = 0$ se dice que f está en la clase compacta $\mathcal{S}_H^0$. Es importante notar que la clase $\mathcal{S}_H$ contiene a la clase $\mathcal{S}$ de funciones analíticas.

DEFINICIÓN 3. *La norma hiperbólica de la dilatación* $\omega = \dfrac{g'}{h'}$ *de* $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ *es*

$$\|\omega^*\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\omega'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\omega(z)|^2}.$$

OBSERVACIÓN 2. *Dada* $f = h + \overline{g}$ *la norma de su dilatación* ω *está dada por*

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\omega(z)|,$$

luego para simplificar la notación, en adelante escribiremos $\|\omega\|_\infty = \|\omega\|$.

LEMA 11. $\|\omega_\alpha^*\| \leq 2\alpha\|\omega^*\|$ *con* $\alpha \in (0,1)$.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que $\omega_\alpha^* = \dfrac{|\omega_\alpha'|(1-|z|^2)}{1-|\omega_\alpha|^2}$, donde $\omega_\alpha = (1+w)^\alpha - 1$. Luego si $z \in \mathbb{D}$ y definimos $\varphi_\alpha(z) = (1+z)^\alpha - 1$ se tiene que $\omega_\alpha = \varphi_\alpha \circ \omega$. De este modo

$$\omega_\alpha^* = \frac{|\varphi_\alpha'(\omega)||\omega'|(1-|z|^2)}{1-|\varphi_\alpha(\omega)|^2} = \frac{|\varphi_\alpha'(\omega)|(1-|\omega|^2)}{1-|\varphi_\alpha(\omega)|^2} \cdot \frac{|\omega'|(1-|z|^2)}{1-|\omega|^2}$$

de donde

$$\|\omega_\alpha^*\| \leq \|\varphi_\alpha^*\| \|\omega^*\|.$$

Basta entonces demostrar que $\|\varphi_\alpha^*\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left\{ \frac{|\varphi_\alpha'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi_\alpha(z)|^2} \right\} \leq 2\alpha$. En efecto, notamos que

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi_\alpha'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi_\alpha(z)|^2} &= \frac{\alpha|1+z|^{\alpha-1}(1-|z|^2)}{1-|(1+z)^\alpha-1|^2} \\
&= \frac{\alpha|1+z|^{\alpha-1}(1-|z|^2)}{2Re\left\{(1+z)^\alpha\right\}-|1+z|^{2\alpha}} \\
&= \frac{\alpha|1+z|^{-1}(1-|z|^2)}{2Re\left\{\left(\frac{1+z}{|1+z|}\right)^\alpha\right\}-|1+z|^\alpha}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Ahora para $z\in\mathbb{D}$ fijo y considerando $1+z=\rho e^{i\theta}$ sea

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha) &= 2Re\left\{\left(\frac{1+z}{|1+z|}\right)^\alpha\right\} - |1+z|^\alpha \\
&= 2\cos(\theta\alpha) - \rho^\alpha.
\end{aligned}$$

Además $\delta'(\alpha) = -2\operatorname{sen}(\theta\alpha)\theta - \rho^\alpha \ln(\rho)$ entonces $\delta'(0) = -\ln(\rho)$, luego si $\rho \geq 1$ entonces $\delta'(0) \leq 0$ y $\delta''(\alpha) = -2\cos(\theta\alpha)\theta^2 - \rho^\alpha \ln^2(\rho) < 0$, es decir, δ' es decreciente de donde se obtiene que $\delta'(\alpha) \leq \delta'(0) \leq 0$ y en consecuencia δ es decreciente, lo cual implica que $\delta(\alpha) \leq \delta(0) = 1$ y con esto que $\delta(\alpha) \geq \delta(1)$.

En el caso en que $\rho < 1$ se tiene que $\delta'(0) > 0$, luego, si existe $\alpha_0 \in (0,1)$ tal que $\delta'(\alpha_0) = 0$ se obtiene que $\delta(\alpha) \geq \text{mín}\{\delta(0), \delta(1)\}$.

En general se tiene que para $\alpha \in (0,1)$

$$\delta(\alpha) \geq \text{mín}\{\delta(0), \delta(1)\}. \qquad (11)$$

Ahora notamos que:

- Si $\delta(0) \leq \delta(1)$, obtenemos desde (10) y (11) que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha|1+z|^{\alpha-1}(1-|z|^2)}{1-|(1+z)^\alpha-1|} &\leq \frac{\alpha|1+z|^{-1}(1-|z|^2)}{\delta(0)} \\
&= \alpha|1+z|^{-1}(1-|z|^2) \\
&\leq \alpha(1+|z|).
\end{aligned}$$

- Si $\delta(1) \leq \delta(0)$, obtenemos desde (10) y (11) que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha|1+z|^{\alpha-1}(1-|z|^2)}{1-|(1+z)^\alpha-1|} &\leq \frac{\alpha|1+z|^{-1}(1-|z|^2)}{\delta(1)} \\
&= \frac{\alpha|1+z|^{-1}(1-|z|^2)}{2Re\left\{\dfrac{1+z}{|1+z|}\right\}-|1+z|} \\
&= \frac{\alpha(1-|z|^2)}{2Re\{(1+z)\}-|1+z|^2} \\
&= \alpha(1+|z|).
\end{aligned}$$

En general para $\alpha \in (0,1)$ y $z \in \mathbb{D}$ fijo

$$\frac{|\varphi'_\alpha(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi_\alpha(z)|^2} \leq \alpha(1+|z|),$$

y entonces

$$\|\varphi^*_\alpha\| = \sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\frac{|\varphi'_\alpha(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi_\alpha(z)|^2}\right\} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\{\alpha(1+|z|)\} = 2\alpha$$

$\square$

Si ahora denotamos por λ el orden de la familia $\mathcal{F}$, es decir,

$$\mathrm{Ord}(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}\sup_{f\in\mathcal{F}}|h''(0)| = \lambda < \infty,$$

tenemos el siguiente resultado:

LEMA 12. *Si $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ entonces* $\left|\dfrac{h''}{h'}(1-|z|^2) - 2\overline{z}\right| \leq 2\lambda + \|\omega^*\|.$

Demostración. Sea $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}$ con $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ y sea $\mathbf{f} = \frac{f - \overline{b_1 f}}{1 - |b_1|^2} = \mathbf{h} + \overline{\mathbf{g}} \in \mathcal{F}$ donde $\mathbf{h} = \frac{h - \overline{b_1} g}{1 - |b_1|^2}$ y $\mathbf{g} = \frac{g - b_1 h}{1 - |b_1|^2}$. Luego

$$\mathbf{h}'' = \frac{h'' - \overline{b_1} g''}{1 - |b_1|^2},$$

y entonces

$$\left| \frac{1}{2} \mathbf{h}''(0) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{h''(0) - \overline{b_1} g''(0)}{1 - |b_1|^2} \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} |\mathbf{h}''(0)| = \lambda.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta esta última desigualdad y que $g''(0) = \omega'(0) + \omega(0) h''(0)$ se obtiene que

$$|2a_2 - \overline{b_1}(\omega'(0) + 2a_2\omega(0))| \leq 2\lambda,$$

luego usando que $\omega(0) = b_1$ y el Lema de Schwarz-Pick para ω se obtiene que

$$|a_2| \;\; \leq \;\; \lambda + \frac{|b_1|}{2}. \tag{12}$$

Ahora bien, dado $a \in \mathbb{D}$, la función

$$\frac{f\left(\frac{a+z}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)h'(a)} = H + \overline{G} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n} \in \mathcal{F}.$$

Además notando que:

$$H'(z) = \frac{h'\left(\frac{a+z}{1+\overline{a}z}\right)\left(\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}\right)}{(1-|a|^2)h'(a)} = \frac{1}{h'(a)} \left[h'\left(\frac{a+z}{1+\overline{a}z}\right)(1+\overline{a}z)^{-2} \right],$$

y que

$$H''(z) = \frac{1}{h'(a)} \left[h''\left(\frac{a+z}{1+\overline{a}z}\right)\left(\frac{1-|a|^2}{(1+\overline{a}z)^2}\right)\left(\frac{1}{(1+\overline{a}z)^2}\right) + h'\left(\frac{a+z}{1+\overline{a}z}\right)\left(\frac{-2\overline{a}}{1+\overline{a}z}\right) \right],$$

se obtiene que

$$c_2 = \frac{H''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\left(\frac{h''(a)}{h'(a)}(1-|a|^2) - 2\overline{a} \right).$$

Finalmente reemplazando esta última igualdad en (12) se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{h''}{h'}(1-|a|^2)-2\overline{a}\right| &\leq 2\lambda+|d_1|\\ &= 2\lambda+|\omega(0)|\\ &\leq 2\lambda+\sup_{z\in\mathbb{D}}|\omega(0)|\\ &= 2\lambda+\|\omega^*\|.\end{aligned}$$

□

TEOREMA 13. *Sea $f=h+\overline{g}\in\mathcal{F}$, entonces la función armónica $f_\alpha(z)$ definida en (8) es univalente para todo $\alpha\leq\dfrac{1}{2\lambda+5\|\omega^*\|}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z\in\mathbb{D}$ y notemos que

$$\begin{aligned}\left|z(1-|z|^2)P_{f_\alpha}+c|z|^2\right|+\frac{|z\omega_\alpha'|}{1-|\omega_\alpha|^2}(1-|z|^2) &= \left|\alpha z\frac{h''}{h'}(1-|z|^2)-\frac{z\overline{\omega_\alpha}\omega_\alpha'}{1-|\omega_\alpha|^2}(1-|z|^2)+c|z|^2\right|\\ &\quad+\frac{|z\omega_\alpha'|}{1-|\omega_\alpha|^2}(1-|z|^2)\\ &\leq \left|\alpha z\frac{h''}{h'}(1-|z|^2)+c|z|^2\right|+2|\omega_\alpha^*|\\ &\leq \left|\alpha\frac{h''}{h'}(1-|z|^2)-2\alpha\overline{z}+2\alpha\overline{z}+c\overline{z}\right|+2|\omega_\alpha^*|\\ &\leq \alpha\left|\frac{h''}{h'}(1-|z|^2)-2\overline{z}\right|+|(2\alpha+c)\overline{z}|+2|\omega_\alpha^*|.\end{aligned}$$

Luego por los Lemas 11 y 12 obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|z(1-|z|^2)P_{f_\alpha}+c|z|^2\right|+\frac{|z\omega_\alpha'|}{1-|\omega_\alpha|^2}(1-|z|^2) &\leq \alpha\left(2\lambda+\sup_{z\in\mathbb{D}}|\omega(0)|\right)+4\alpha\sup_{z\in\mathbb{D}}|\omega^*(z)|+(2\alpha+c)\\ &= \alpha(2\lambda+5\|\omega^*\|)+(2\alpha+c).\end{aligned}$$

Si consideramos $c=-2\alpha\neq-1$, pues $\alpha<\dfrac{1}{2}$, entonces por el Teorema 10 se tiene que f_α es univalente para todo α tal que

$$\alpha\leq\frac{1}{2\lambda+5\|\omega^*\|}.$$

□

COROLARIO 14. *Si f es analítica y univalente en $\mathbb{D}$ y $\operatorname{Ord}(f) = \lambda < \infty$. Entonces $f_\alpha(z) = \displaystyle\int_0^z [h'(w)]^\alpha \, dw$ es univalente para todo $\alpha \leq \dfrac{1}{2\lambda}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es analítica, entonces $\omega^* = 0$ y aplicando el Teorema 13 se obtiene el resultado. □

COROLARIO 15. *Si $f \in \mathcal{S}_H^0$, entonces $f_\alpha \in \mathcal{S}_H^0$ para todo $\alpha \leq \dfrac{1}{103}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que $\operatorname{Ord}(f) \leq 49$ (ver [6]) y luego aplicar el Teorema 13. □

COROLARIO 16. *Si $f \in \mathcal{C}_H^0$, entonces $f_\alpha \in \mathcal{C}_H^0$ para todo $\alpha \leq \dfrac{1}{8}$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta notar que $\operatorname{Ord}(f) \leq \dfrac{3}{2}$ (ver [6]) y luego aplicar el Teorema 13. □

Bibliografía

[1] J. Becker, Lownersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen, J. Reine Angew. Math, 255 (1972), 23-43.

[2] L. Bieberbach. Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des einheitskreiss vermitteln. S.-B.Preuss.Akad.Wiss, pages 940-955, 1916.

[3] L. de Branges. A proof of the Bieberbach conjeture. Acta Math. 154 (1985), 137-152.

[4] J. Clunie y T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I 9(1984), 3-25.

[5] P. L. Duren, Univalent Function, Springer-Verlag New York Inc, 1983.

[6] P. L. Duren, Harmonic mappings in the plane, Cambridge University Prees, 2004.

[7] R. Garabedian and M. Schiffer, A Proof of the Bieberbach Conjecture for the Fourth Coefficient. J. Rational Mech. Anal. 4, 427-465, 1955.

[8] A. W. Goodman, Univalent Functions volume II, Mriner Publishing Company, Inc, Florida, 1983.

[9] I. Graham y G. Kohr, Geometric Function Theory In One And Higher Dimen- sions, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, 2003.

[10] R. Hernández y M. J. Martín, Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Harmonic Mappings, J. Geom. Anal. DOI 10.1007/s12220-013-9413-x. Pubished electronically on April 13th, 2013.

[11] R. Hernández y M. J. Martín, Stable geometric properties of analytic and harmonic functions, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society / Volume 155 / Issue 02 / September 2013, pp 343-359

[12] H. Lewy, On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 689-692.

[13] K. Lowner, K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. 89, 103-121, 1923.

[14] Ch. Pommerenke, Linear-invariante Familien analytischer Funktionen I, Math. Ann. 155 (1964), 108-154.

[15] J. A. Pfaltzgraff, Univalent of the integral of $f'(z)^\lambda$. Bull. London Math. Soc., 7 (1975), 254-256.

[16] W. C. Royster, On the univalence of a certain integral. Michigan Math. J., 12, pp. 385-387, (1965).

[17] S. Ruscheweyh, An extension of Becker's univalence condition, Math. Ann., 220(1976), 285-290.