



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Insituto de Matemáticas

Hacia un álgebra de Rook unipotente

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
EDUARDO JORQUERA SANDOVAL

Profesor Guía: Dr. Marcelo Flores

VALPARAÍSO
2022

Agradecimientos

Agradezco a ANID, ya que fui beneficiario de la beca de Magíster Nacional 2021, folio 22210694.

Resumen

Consideremos el grupo lineal general $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ y el monoide de matrices cuadradas $n \times n$ denotado por $M = M_n(\mathbb{F}_q)$. Sean W el subgrupo de permutaciones de G , y U el subgrupo unipotente de G . El monoide de matrices no nulas en $\{0, 1\}$ que contienen a lo sumo una entrada no nula por cada fila y en cada columna lo denotamos por $\mathcal{R} \supset W$ y es llamado monoide de Rook. \mathcal{R} tiene el mismo rol para M que W para G en términos de la descomposición en dobles clases unipotentes. De forma análoga, en esta tesis trabajamos una descomposición respecto a matrices unipotentes para M .

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	4
2.1. Teoría de nudos clásicos	4
2.1.1. Grupo de trenzas	7
2.1.2. Invariantes	12
2.2. Módulos y álgebras	14
2.3. Grupos de Coxeter	17
3. Álgebras de Hecke y descomposiciones matriciales	20
3.1. Descomposición de Bruhat	20
3.2. Grupos BN -par	24
3.3. Álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, H, \psi)$	27
3.4. Álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, B)$	28
3.5. Álgebra de Yokonuma-Hecke $Y_{d,n}(u)$	33
3.6. Álgebra de Rook $\mathcal{H}(M, B)$	35
3.6.1. La función largo en \mathcal{R}	40
3.6.2. Sistema de Tits en $M_n(\mathbb{F})$	53
4. Descomposición $M \cong UTRU$	55

Capítulo 1

Introducción

La teoría de nudos juega un rol importante en las matemáticas modernas, y los resultados más importantes yacen en los últimos 30 años [28]. Como teoría surgió a finales del siglo XVIII, una de las primeras personas en estudiarla fueron Gauss [32], Vandermonde [34], Klein [14] y Dehn [26].

Un nudo es una curva cerrada simple en \mathbb{R}^3 , es decir no se intersecta a sí misma ni tiene puntos extremos. Dos nudos K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 a sí mismo tal que $K_1 \mapsto K_2$. El problema principal en teoría de nudos es cómo clasificarlos [46], para lo que existen distintos invariantes.

Jones usó una función traza de Markov [19] en el álgebra de Temperley-Lieb para construir su invariante polinomial. En [15] y en [35] se construyó el polinomio de HOMFLY-PT, usando el mismo procedimiento pero sobre $H_n(u)$. En [20], Jones la traza de Ocneanu en $H_n(u)$.

El álgebra de Yokonuma-Hecke [?], denotada por $Y_{d,n}(u)$, es un álgebra que permite clasificar nudos y fue definida en el contexto de grupos de Chevalley. Juyumaya [22] probó que sobre ésta se puede definir una función traza de Markov. Un álgebra contenida en $Y_{d,n}(u)$ es el álgebra de lazos y trenzas (o bt-álgebra) $\varepsilon_n(u)$ [1], en la que también se puede definir una función traza de Markov.

Considerando $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ como el grupo de matrices invertibles sobre un cuerpo finito \mathbb{F}_q , B el subgrupo de matrices triangulares superiores, y a T el subgrupo de matrices diagonales. Sea $N_G(T)$ el normalizador de T en G , sabemos que $N_G(T)/T$ es isomorfo al grupo de matrices de permutaciones W , el cual también es isomorfo a S_n . En [9], Bruhat probó que $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$. De forma más general, Bruhat probó que un grupo de Lie semisimple clásico G tiene una descomposición en dobles clases, donde

B es un grupo soluble maximal y W es el grupo de Weyl de G .

Originalmente el álgebra de Iwahori-Hecke está definida por $\mathcal{H}(G, B) := e\mathbb{C}(G)e$ con $e = \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B} b \in \mathbb{C}(G)$. De forma equivalente esta álgebra puede verse como el álgebra centralizadora asociada a la representación natural de G con respecto a B . El álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, B)$ puede definirse para cualquier grupo G con un BN -par (o sistema de Tits), y se tiene que $\mathcal{H}(G, B)$ es una deformación del álgebra de grupo $\mathbb{C}(W)$, con $W = N/B \cap N$ el grupo de Weyl de G .

Ahora, si consideramos U como el subgrupo unipotente de G , el subgrupo de todas las matrices diagonales superiores en que para todo $(u_{ij}) \in U$ tenemos que $u_{ii} = 1$, se obtiene una nueva descomposición de G como la unión disjunta de dobles clases de U . En efecto, $G = \bigsqcup_{w \in N} UwU$, donde $N \cong T \rtimes W$ es el grupo de las matrices monomiales. En este contexto el álgebra centralizadora es el álgebra de Yokonuma-Hecke, denotada por $\mathcal{H}(G, U)$.

Renner [40] desarrolló una teoría en cuanto a la descomposición de Bruhat para grupos algebraicos reductivos M con grupo unitario G . Considerando a T como el toro maximal de G , $B \supset T$ un subgrupo de Borel de G , R la clausura de Zariski de $N_G(T)$ en M y $\mathcal{R} = R/T$ el monoide de órbitas. El monoide de Renner \mathcal{R} es finito y el grupo de unidades de R está dado por el grupo de Weyl de G . En [42], Solomon usó el trabajo de Renner para definir una nueva función largo y una descomposición de Bruhat para $M := M_n(\mathbb{F}_q)$. Definió un sistema de Tits en M , para luego definir el álgebra $\mathcal{H}(M, B)$ usando la descomposición $M = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{R}} B\sigma B$, donde \mathcal{R} es el monoide de matrices en $\{0, 1\}$ que tiene a lo más una entrada no nula en cada fila y en cada columna, la cual es el monoide de Rook.

En esta tesis se propone extender el trabajo de Solomon hacia un álgebra de Rook unipotente, para en el futuro poder definir $RY_n := \mathcal{H}(M, U)$. Para esto se debe hallar una descomposición análoga a Bruhat, el cual es el objetivo principal de este trabajo de tesis. En efecto, probamos que $M = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{R}_T} U\sigma U$, donde \mathcal{R}_T es el monoide de matrices en \mathbb{F}_q que tiene a lo más una entrada no nula por cada fila y por cada columna, ver Teorema 4.0.1.

Las álgebras de Iwahori-Hecke, Yokonuma-Hecke, y Rook planar ya han sido usadas para la construcción de invariantes de nudos, por esto se tiene la hipótesis que el álgebra de Rook también puede ser conducente a un nuevo invariante. Como trabajo a futuro se espera poder obtener una generalización del polinomio de Alexander usando la receta de Jones en esta nueva álgebra. La presente tesis está orientada a la

descomposición unipotente de M y al álgebra de Rook, cuya construcción será a futuro conducente a una nueva invariante polinomial de nudos.

Esta tesis consta de cuatro capítulos: en el segundo estudiamos la teoría de nudos clásicos, trenzas e invariantes; módulos, álgebras y grupos de Coxeter. En el tercero estudiamos descomposiciones matriciales, grupos BN -par, álgebras de Hecke en su forma general y $\mathcal{H}(G, B)$, $\mathcal{H}(G, U)$ y $\mathcal{H}(M, B)$. Finalmente, en el cuarto capítulo vemos la descomposición unipotente de M y conjeturas relacionadas.

Capítulo 2

Preliminares

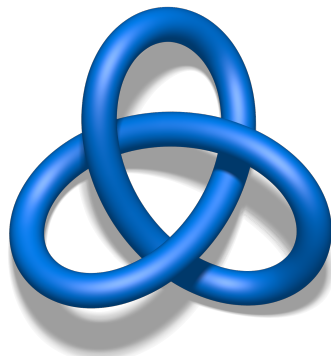
En este capítulo veremos teoría de nudos clásicos, módulos y álgebras, y grupos de Coxeter.

2.1. Teoría de nudos clásicos

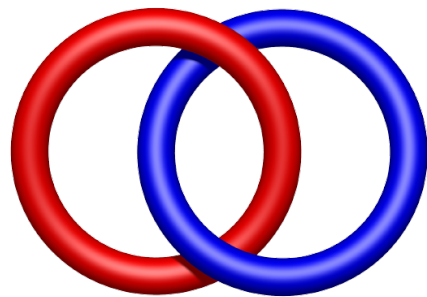
En esta sección repasaremos los conceptos principales de la teoría de nudos.

Definición 2.1.1. $K \subseteq \mathbb{R}^3$ es un nudo si existe un homeomorfismo del círculo unitario S^1 en \mathbb{R}^3 cuya imagen es K . Un link (enlace) L es la unión disjunta de nudos.

Ejemplo 2.1.1.



(a) Nudo trébol.



(b) Link de Hopf.

Definición 2.1.2. Sea $I = [0, 1]$. Una isotopía en \mathbb{R}^3 es la familia de homeomorfismos $\{F_s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\}_{s \in I}$ tal que $F_0 = id_{\mathbb{R}^3}$, donde la aplicación $\mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua con $(x, s) \mapsto F_s(x)$, donde $x \in \mathbb{R}^3$ y $s \in I$.

Definición 2.1.3. Dos links L_1 y L_2 son isotópicos si existe una isotopía que deforma L_1 en L_2 .

Definición 2.1.4. Dos enlaces son equivalentes si y sólo si son isotópicos. Si dos enlaces L_1 y L_2 satisfacen lo anterior, se denotará por $L_1 \sim L_2$.

Ejemplo 2.1.2.

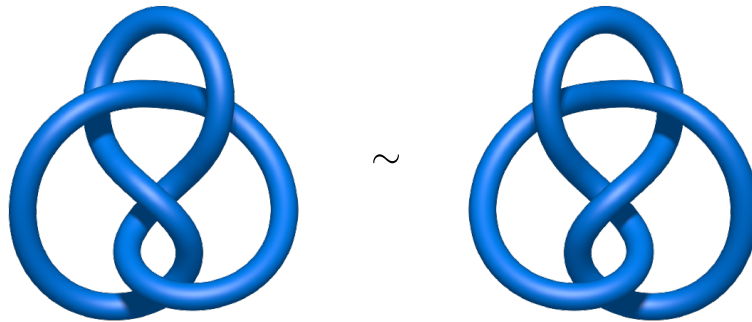


Figura 2.2: Nudo ocho y su equivalente simétrico.

Definición 2.1.5. La proyección de un nudo es llamada proyección regular si como máximo contiene dobles puntos.

Dado un link L definimos su diagrama como sigue.

Definición 2.1.6. El diagrama de un link es la proyección regular éste donde los dobles puntos se distinguen.

Ejemplo 2.1.3.

Definición 2.1.7. Un link orientado es un link donde cada componente tiene una orientación asignada, que usualmente se indica en forma de flechas.

Ejemplo 2.1.4. Ejemplos de enlaces orientados se pueden apreciar en la Figura 2.4, donde a la derecha se puede ver el enlace de Hopf orientado.

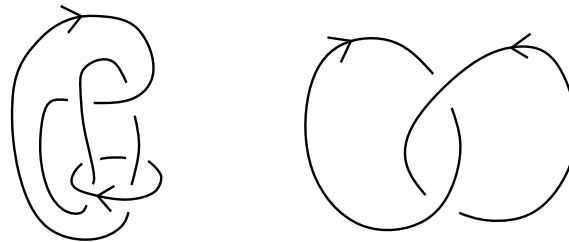
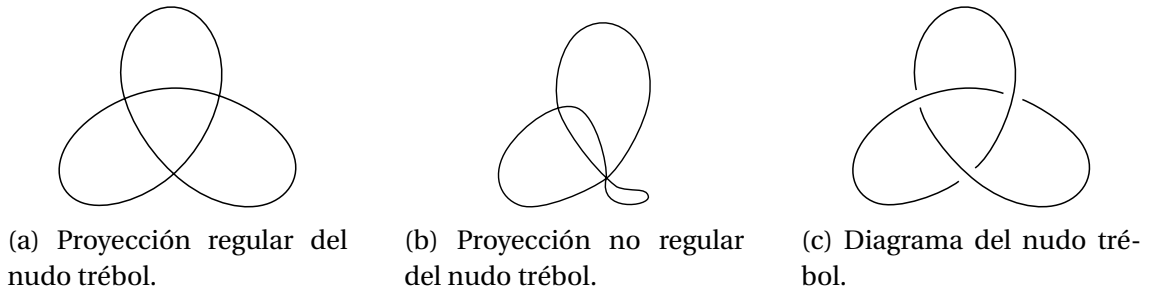


Figura 2.4: Diagramas de enlaces orientados.

Definición 2.1.8. *Los movimientos de Reidemeister [25] son movimientos locales dentro del diagrama de un link. Ver Figura 2.5.*

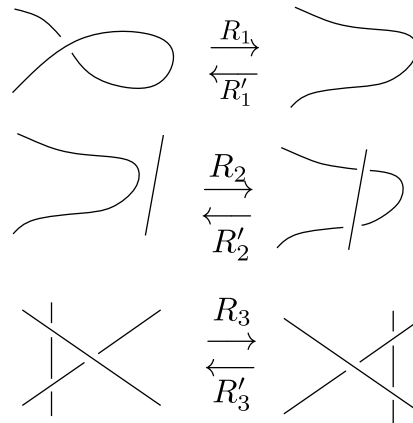


Figura 2.5: Movimientos de Reidemeister

Definición 2.1.9. *Sean L_1, L_2 links, y D_1, D_2 diagramas de L_1 y L_2 , respectivamente. Decimos que son R -equivalentes si y sólo si el D_1 puede obtenerse con una secuencia finita de movimientos de Reidemeister de D_2 . Esto lo denotamos por $D_1 \sim_R D_2$.*

Teorema 2.1.1 (ver [38]). *Si D_1 y D_2 son diagramas de K_1 y K_2 , respectivamente, entonces $K_1 \sim K_2 \iff D_1 \sim_R D_2$.*

2.1.1. Grupo de trenzas

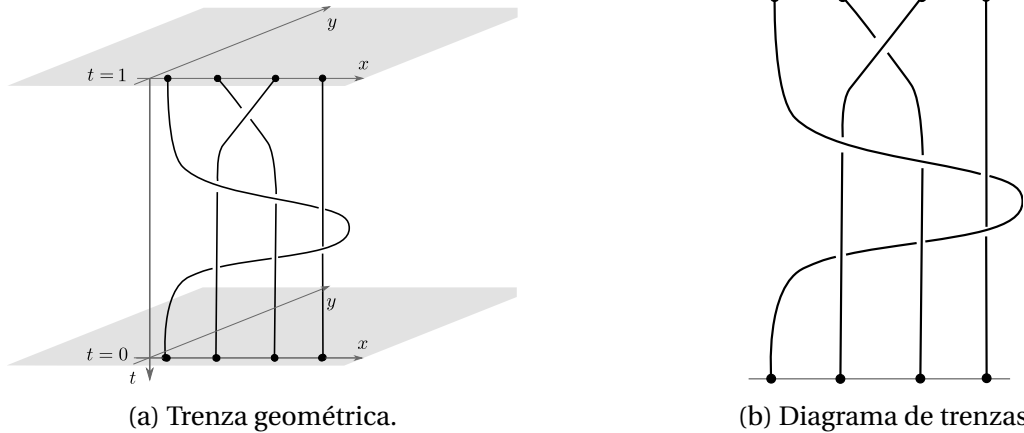
Las trenzas fueron introducidas por E. Artin en [5]. Estos objetos algebraicos están directamente relacionados con los nudos. De hecho, todo nudo puede obtenerse a partir de una trenza. Ver Teorema 2.1.3.

Definición 2.1.10. Una trenza geométrica de n hebras es la unión de n arcos disjuntos en $\mathbb{R}^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ que enlazan los puntos $(0, i, 0)$ para $i = 1, \dots, n$ con los n puntos $(0, i, 1)$ dentro del espacio $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$; tal que cada plano $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ con $t \in [0, 1]$ contiene exactamente n puntos.

Definición 2.1.11. Dos trenzas geométricas T_1 y T_2 son equivalentes si son isotópicas. En tal caso lo denotamos por $T_1 \sim T_2$.

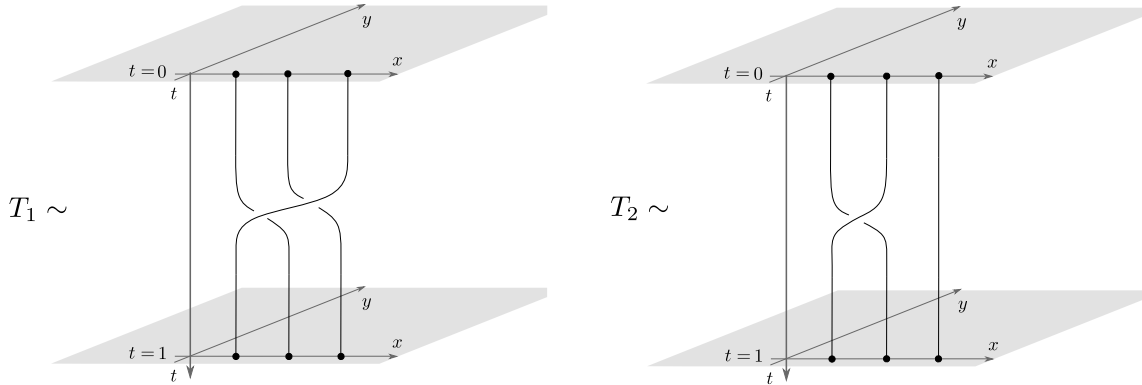
De forma análoga a los nudos podemos asociar un diagrama a cada trenza a partir de su proyección.

Ejemplo 2.1.5.

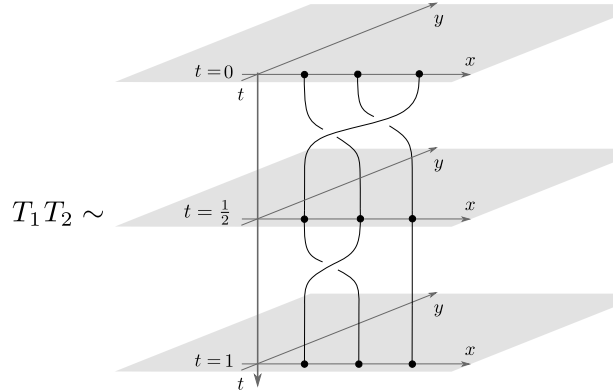


Definición 2.1.12. Sean T_1 y T_2 trenzas geométricas con el mismo número de arcos. Definimos la multiplicación de trenzas $T_1 T_2$ como $T_1^* \cup T_2^*$, con T_1^* la deformación continua de T_1 en $T_1^* \subseteq \mathbb{R}^2 \times [0, \frac{1}{2}]$ y T_2^* como la deformación continua de T_2 en $T_2^* \subseteq \mathbb{R}^2 \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Ejemplo 2.1.6.



(a) Trenzas geométricas T_1 y T_2 .



(b) Multiplicación $T_1 T_2$.

Con el producto definido anteriormente, las clases de isotopía de trenzas geométricas de n hebras forman un grupo, llamado grupo de trenzas de Artin, el cual tiene la siguiente presentación:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i - j| \geq 2, i, j = 1, \dots, n - 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n - 2 \end{array} \right\rangle. \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.1.7. Notemos que $B_1 = \{1\}$ y $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$. El grupo $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ es el grupo de trenzas no conmutativo más pequeño. Definiendo $x = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ e $y = \sigma_1 \sigma_2$ se puede obtener los generadores x, y de B_3 con la relación $x^2 = y^3$. En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \quad , \text{ multiplicando por } \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \text{ a la izquierda} \\ x^2 &= y^3 \quad . \end{aligned}$$

Ejemplo 2.1.8. Sea $\pi : B_n \rightarrow S_n$ la proyección del grupo de trenzas al grupo simétrico con $\pi(\sigma_i) = s_i$, donde s_i es la transposición $(i, i + 1)$.

Notar que $B_n \subseteq B_{n+1}$, luego podemos definir $B_\infty := \bigcup_{n \geq 1} B_n$.

Definición 2.1.13. La multiplicación de diagramas de trenzas del mismo número de hebras equivale a su concatenación, como se ve en la Figura 2.8.

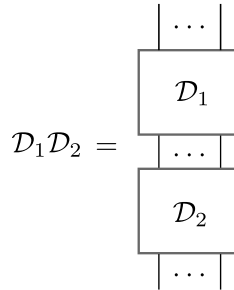


Figura 2.8: Multiplicación de diagramas de trenzas.

Observación 2.1.1. En las trenzas sólo se pueden usar R_2 y R_3 , como se ve en la Figura 2.9.

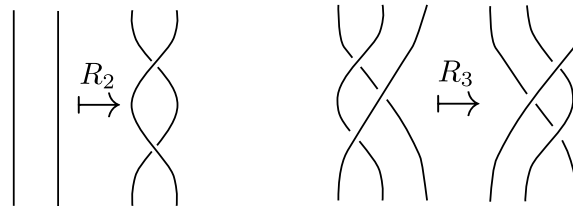


Figura 2.9: Movimientos de Reidemeister en trenzas.

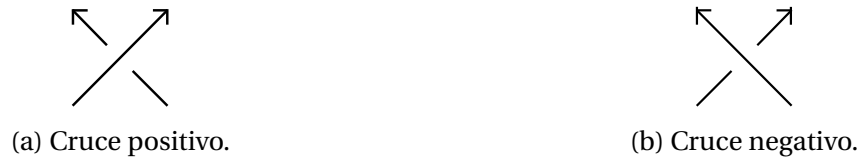
Teorema 2.1.2 (ver [24] p. 9). Dos diagramas de trenzas presentan trenzas geométricas isotópicas sí y sólo sí los diagramas son R -equivalentes.

Definición 2.1.14. La clausura de una trenza geométrica α , denotada por $\hat{\alpha}$, se obtiene de unir los puntos $(0, i, 0)$ con $(0, i, 1)$, para $i = 0, \dots, n$.

Teorema 2.1.3 (Teorema de Alexander, ver [2]). Cualquier link orientado en \mathbb{R}^3 es isotópico a la clausura de una trenza.

A continuación mostramos un algoritmo para obtener una trenza α a partir de un link $L = \hat{\alpha}$. Para esto primero definimos el signo de un cruce en un link orientado.

Definición 2.1.15. *Dado un link orientado existen dos tipos de cruces, que localmente tienen los siguientes diagramas:*



Algoritmo 1. *Dado un link L , seguiremos los siguientes pasos para obtener una trenza α tal que $\hat{\alpha} \sim L$.*

- a) *Reemplazar los cruces por dos líneas paralelas unidas con un segmento indicando el signo del cruce.*
- b) *Al terminar el proceso anterior obtendremos una unión disjunta de círculos, llamados círculos de Seifert, unidos por segmentos. Decimos que dos círculos son compatibles si tienen la misma orientación (ya sea horario ó antihorario). La cantidad de círculos de Seifert incompatibles se denota por $h(D)$.*
- c) *Dejar solo círculos compatibles (concéntricos) a partir de las acciones doblar y estirar, como se ve en la Figura 2.11.*
- d) *La trenza se obtiene al hacer un corte en el radio del círculo más grande.*

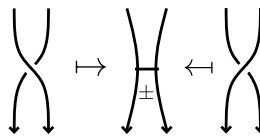


Figura 2.11: Un cruce al pasar a círculos de Seifert se diagramatiza como un línea.

Definición 2.1.16. *La acción de doblar y estirar equivalen a R_2 , y R'_2 , como puede ver en la Figura 2.12a y la misma acción en círculos de Seifert en 2.12b.*

En la Figura 2.13 se muestra un ejemplo de cómo, a partir de un nudo K , obtener el diagrama de círculos de Seifert concéntricos y con la misma orientación siguiendo el algoritmo descrito anteriormente.

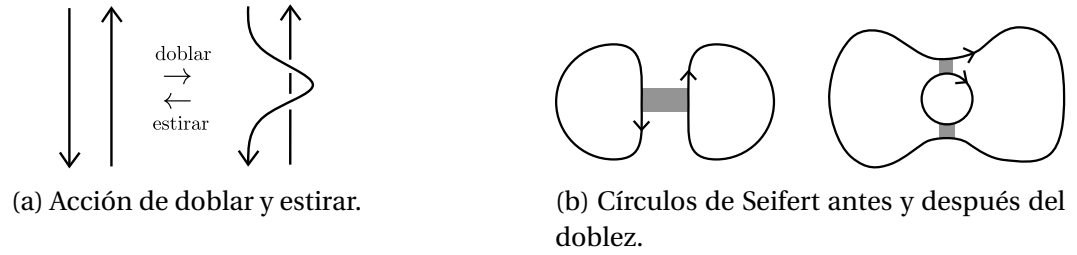


Figura 2.12: R_2 en el nudo y en círculos de Seifert localmente.

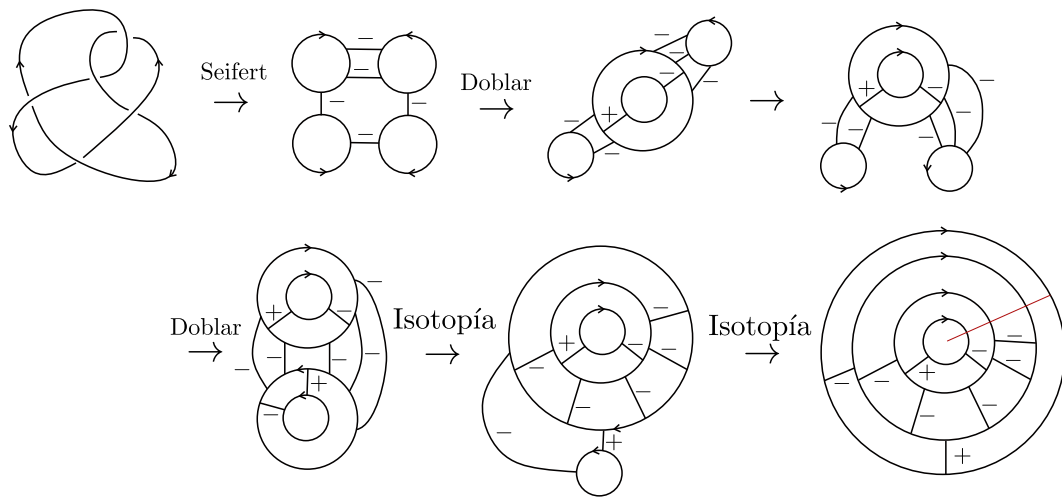


Figura 2.13: Finalmente se obtiene que $\alpha = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}$.

A continuación veremos el teorema de Markov, para esto definimos los movimientos de Markov.

Definición 2.1.17. Sean $\alpha, \beta \in B_n$ y la inclusión natural $i : B_n \hookrightarrow B_{n+1}$. Definimos el primer movimiento de Markov M_1 como la transformación $\alpha \mapsto \beta\alpha\beta^{-1}$ y el segundo movimiento de Markov M_2 como $\alpha \mapsto i(\alpha)\sigma_n^{\pm 1}$. Decimos que dos trenzas son equivalentes si están relacionadas por M_1 o M_2 en B_∞ , denotada por \sim_M .

Notemos que M_1^{-1} es nuevamente un movimiento M_1 .

Teorema 2.1.4 (Markov, ver [29]). *Dos trenzas T_1 y T_2 tienen clausuras isotópicas en \mathbb{R}^3 si y sólo si $T_1 \sim_M T_2$.*

Ejemplo 2.1.9. *Los movimientos de markov se pueden ver en la Figura 2.14a y 2.14b.*

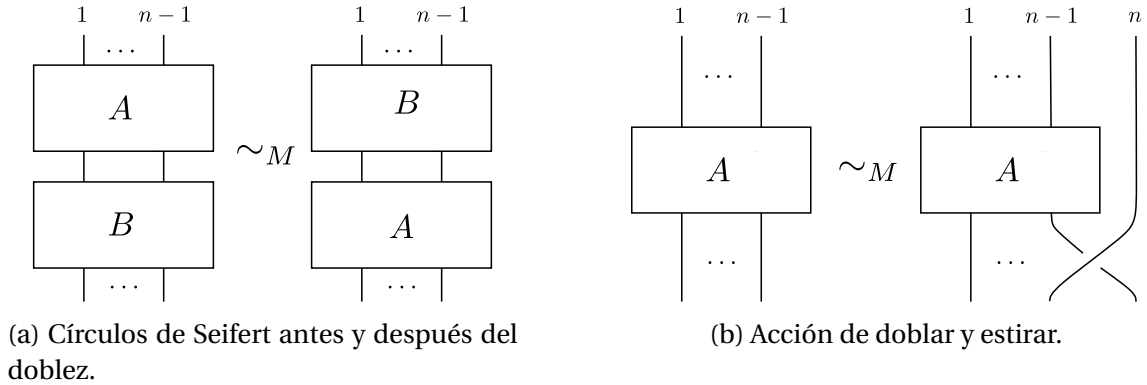


Figura 2.14

Del teorema anterior podemos notar que al clausurar ambas trenzas se obtienen links equivalentes.

2.1.2. Invariantes

Uno de los problemas importantes en la teoría de nudos es determinar clases de equivalencias de links.

Definición 2.1.18. Sea \mathcal{L} el conjunto de todos los links. Un invariante es una función $f: \mathcal{L} \rightarrow X$ tal que $L_1 \sim L_2 \implies f(L_1) = f(L_2)$.

Algunas invariantes importantes son el polinomio de Alexander-Conway, Jones, HOMFLY-PT, Kauffmann. El polinomio de Alexander-Conway es fundamental e históricamente es el primer invariante polinomial para nudos orientados en \mathbb{R}^3 . Jones construyó al polinomio homónimo usando la traza de Markov en el álgebra de Temperley-Lieb $TL_n(\lambda)$.

En esta subsección se presentará el método de Jones, también conocido como la receta de Jones. Para esto veamos como se obtiene el polinomio de HOMFLY-PT a partir del álgebra de Iwahori-Hecke y la traza de Ocneau.

Definición 2.1.19. El álgebra de Iwahori-Hecke, denotada por $H_n(u)$, es el álgebra generada por $1, h_1, \dots, h_{n-1}$ sujeta a las relaciones

1. $h_i h_j = h_j h_i$, para $|i - j| > 1$.
2. $h_i h_j h_i = h_j h_i h_j$, para $|i - j| = 1$.

$$3. h_i^2 = u + (u-1)h_i.$$

Cambiando el conjunto generador podemos obtener una presentación alternativa para $H_n(q)$ con $q := u^{1/2}$ y $\bar{h}_i := u^{-1/2}h_i$, generado por $1, \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_{n-1}$ con relaciones

1. $\bar{h}_i \bar{h}_j = \bar{h}_j \bar{h}_i$, para $|i-j| > 1$.
2. $\bar{h}_i \bar{h}_j \bar{h}_i = \bar{h}_j \bar{h}_i \bar{h}_j$, para $|i-j| = 1$.
3. $\bar{h}_i^2 = 1 + (q - q^{-1})\bar{h}_i$.

Lema 2.1.1 (ver [18]). *Todo monomio en $H_n(u)$ se escribe como combinación lineal de monomios en los cuales aparece a lo más una vez h_{n-1} .*

Definición 2.1.20. *Definimos los conjuntos T_i 's por inducción como sigue:*

- $T_1 = \{1\}$
- $T_{i+1} = \{1\} \cup h_i T_i$

Así, tenemos $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{1, h_1\}$ y $T_3 = \{1, h_2, h_2 h_1\}$. Un monomio de la forma $m_1 \cdots m_n \in H_n(u)$ con $m_i \in T_i$ se llama monomio normal. Con $\mathcal{B}_n = \{m_1 \cdots m_n \mid m_i \in T_i\}$, es fácil ver que $|\mathcal{B}_n| = n!$. Además, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1.5 (ver [20]). *El conjunto \mathcal{B}_n es una base de $H_n(u)$.*

Teorema 2.1.6 (ver [20]). *Sea z un parámetro. Luego para todo $n \geq 1$ existe una función lineal $tr_n : H_n(u) \rightarrow \mathbb{C}(z, u)$ llamada traza de Markov, lo que implica que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc}
 H_n(u) & \xrightarrow{\quad} & H_{n+1}(u) \\
 & \searrow \text{tr}_n & \swarrow \text{tr}_{n+1} \\
 & & \mathbb{C}(z, u)
 \end{array}$$

y se cumple lo siguiente:

1. $tr_n(1) = 1$.
2. $tr_n(AB) = tr_n(BA)$.
3. $tr_{n+1}(Ah_n) = z tr_n(A)$.

Ejemplo 2.1.10. *Calculemos la traza de h_1^3 :*

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(h_1^3) &= \text{tr}(h_1(1 + (u - u^{-1})h_1)) \\
 &= \text{tr}(h_1) + (u - u^{-1})\text{tr}(h_1^2) \\
 &= \text{tr}(h_1) + (u - u^{-1})\text{tr}(h_1^2) \\
 &= \text{tr}(h_1) + (u - u^{-1})\text{tr}(1 + (u - u^{-1})h_1) \\
 &= z + (u - u^{-1})(1 + (u - u^{-1})z)
 \end{aligned}$$

En la construcción del polinomio de HOMFLY-PT [33] podemos usar una función $\pi_L : \mathcal{B}_n \rightarrow H_n(u)$ con la representación dada por $\pi_L(\sigma_i) = Lh_i$, con $L = \sqrt{\lambda}$ y $\lambda = \frac{z-(u-u^{-1})}{z}$. Usamos la composición $\text{tr} \circ \pi_L$, es decir $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\pi_L} H_n(u) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{C}(z, u)$. Luego el polinomio de HOMFLY-PT es

$$\begin{aligned}
 P_{\hat{\alpha}}(\lambda, u) &:= (\text{tr} \circ \pi_L)(\alpha) \\
 &:= \left(\frac{1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}(u - u^{-1})} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\text{tr} \circ \pi)(\alpha)
 \end{aligned}$$

donde $\frac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}(u-u^{-1})}$ sirve como “normalizador” para que en el nudo trivial el polinomio sea 1; $\lambda = \frac{z+1-u}{uz}$ y $\exp(\alpha)$ es la suma de exponentes de α como palabra en los σ_i .

Ejemplo 2.1.11. *Calculemos el polinomio de Jones del nudo trébol. Recordando que $T = \widehat{\sigma_1^3}$, luego*

$$\begin{aligned}
 P_{\widehat{\sigma_1^3}}(\lambda, u) &= \left(\frac{1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}(u - u^{-1})} \right)^{n-1} \left((u^2 - u + 1) \frac{1 - u}{1 - \lambda u} \right) u(u - 1) \quad , \text{por el Ejemplo 2.1.10} \\
 &= \lambda(1 + u^2 - \lambda u^2) \quad .
 \end{aligned}$$

2.2. Módulos y álgebras

Definición 2.2.1. *Sea R un anillo con identidad 1_R . Un R -módulo izquierdo es un grupo abeliano $(M, +)$ dotado del siguiente producto escalar:*

$$\begin{aligned}
 R \times M &\rightarrow M \\
 (r, m) &\mapsto r \cdot m
 \end{aligned}$$

tal que para todo $r, s \in R$ y todo $m, n \in M$ satisfacen que

1. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$,
2. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$,
3. $r \cdot (s \cdot m) = (r \cdot s) \cdot m$,
4. $1_R \cdot m = m$.

Para un R -módulo derecho la definición es análoga con $M \times R \rightarrow M$ usando $(m, r) \mapsto m \cdot r$.

Ejemplo 2.2.1. Sea \mathbb{F} un cuerpo, luego un espacio vectorial sobre \mathbb{F} es un \mathbb{F} -módulo.

Ejemplo 2.2.2. Sea $\mathbb{F}[X]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo \mathbb{F} , y sea V un \mathbb{F} -espacio vectorial. Para cualquier función $\alpha : V \rightarrow V$, V es un $\mathbb{F}[X]$ -módulo a través de

$$g \cdot v := g(\alpha)(v) = \sum_i \lambda_i \alpha^i(v)$$

para todo $g = \sum_i \lambda_i X^i \in \mathbb{F}[X]$ y $v \in V$, donde $\alpha^i = \alpha \circ \dots \circ \alpha$ es la i -ésima composición.

Definición 2.2.2. Sea R un anillo y sea M un R -módulo. Un R -submódulo U de M es un subgrupo $(U, +)$ que es cerrado bajo la acción de R , es decir $r \cdot u \in U$ para todo $r \in R$ y $u \in U$.

Ejemplo 2.2.3. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} , luego los submódulos son los subespacios vectoriales.

Definición 2.2.3. Suponga R un anillo y M, N R -módulos. La función $\phi : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de R -módulos si para todo $m, m_1, m_2 \in M$ y $r \in R$, satisface que

1. $\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$.
2. $\phi(rm) = r\phi(m)$.

Un isomorfismo de R -módulos es un homomorfismo de R -módulos que también es biyectivo.

Teorema 2.2.1 (Teoremas del Isomorfismo). Sea R un anillo, luego lo siguiente se cumple.

1. Suponga que $\phi : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de R -módulos. Luego $\text{Ker}(\phi)$ es un R -submódulo de M y la imagen $\text{Im}(\phi)$ es un R -submódulo de N . Más aún se tiene el isomorfismo de R -módulos

$$M/\text{Ker}(\phi) \cong \text{Im}(\phi).$$

2. Suponga que U, V son submódulos de un R -módulo M , luego la suma $U + V$ y la intersección $U \cap V$ también son R -submódulos de M , es más se tiene el isomorfismo de R -módulos

$$U/(U \cap V) \cong (U + V)/V.$$

3. Sea R un R -módulo. Suponga que $U \subseteq V \subseteq M$ son R -submódulos, luego V/U es un R -submódulo de M/U y se tiene el isomorfismo de R -módulos

$$(M/U)/(V/U) \cong M/V.$$

Definición 2.2.4. Sea R un anillo conmutativo y sean E, F R -módulos. Una función bilineal $g : E \times E \rightarrow F$ es una aplicación tal que para un $x \in E$ dado, la aplicación $y \mapsto g(x, y)$ es R -lineal, y dado $y \in E$, la aplicación $x \mapsto g(x, y)$ es R -lineal. Por otro lado una R -álgebra A es un módulo con una aplicación bilineal $g : E \times E \rightarrow E$ tal que para todo $a_1, a_2 \in A$ y para todo $r \in R$ tenemos que

$$(a_1 a_2) \cdot r = a(b \cdot r) = (a \cdot r)b.$$

Si $(a_1 a_2)a_3 = a_1(a_2 a_3)$ para todo $a_1, a_2, a_3 \in A$, decimos que A es una R -álgebra asociativa.

Definición 2.2.5. Sea \mathbb{F} un cuerpo y A un \mathbb{F} -álgebra. Un subconjunto B de A se llama subálgebra (o \mathbb{F} -subálgebra) de A si se cumple que:

1. B es un \mathbb{F} -subespacio de A . Es decir, para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ y $b_1, b_2 \in B$, $\lambda b_1 + \mu b_2 \in B$.
2. B es cerrado bajo la multiplicación, osea que para todo $b_1, b_2 \in B$, $b_1 b_2 \in B$.
3. La identidad 1_A de A pertenece a B .

Definición 2.2.6. Si A es un \mathbb{F} -álgebra luego un subconjunto I es un ideal izquierdo de A , por $(I, +)$ subgrupo de $(A, +)$ tal que $ax \in I$ para todo $x \in I$, $a \in A$. Análogamente, $I \subseteq A$

es un ideal derecho de A si $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$ y $xa \in I$ para todo $x \in I, a \in A$. Un subconjunto I de A es un ideal bilátero (o ideal) si es un ideal izquierdo y derecho.

Definición 2.2.7. Sean M un \mathbb{F} -álgebra, $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ y $f : X \rightarrow B$ una función. $A(X)$ es un \mathbb{F} -álgebra libre si existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : A(X) \rightarrow M$ tal que $f = \phi \circ i$, donde $i : X \hookrightarrow A(X)$. Es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & A(X) \\ & \searrow f & \downarrow \phi \\ & & M \end{array}$$

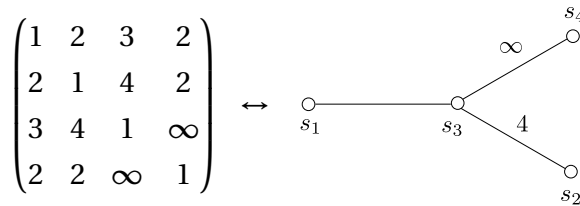
$A(X)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de palabras en X , y las relaciones $R \subseteq A(X)$ generan un ideal bilátero $\langle R \rangle$. De esta forma definimos el álgebra $\langle X|R \rangle = A(X)/\langle R \rangle$

2.3. Grupos de Coxeter

Definición 2.3.1. Sea S un conjunto. Una matriz $m : S \times S \rightarrow \{1, 2, \dots, \infty\}$ con $m(s, s') := (m_{ss'})$, es una matriz de Coxeter si satisface que $m(s, s') = m(s', s)$ y $m(s, s) = 1$.

Definición 2.3.2. Un grafo de Coxeter (o diagrama de Coxeter) es una representación gráfica de una matriz de Coxeter m donde el conjunto de nodos es S y sus aristas son pares no ordenados $\{s, s'\}$ tal que $m(s, s') \geq 3$ y los vértices con $m(s, s') \geq 4$ están etiquetados por ese número.

Ejemplo 2.3.1. La matriz de Coxeter tiene su grafo correspondiente:



Definición 2.3.3. Sea $S' = \{(s, s') \in S^2 \mid m(s, s') \neq \infty\}$. Una matriz de Coxeter m determina un grupo W con la presentación $\langle S \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \text{ para todo } (s, s') \in S' \rangle$.

Observación 2.3.1. Como $m(s, s) = 1$, luego $s^2 = 1$ para todo $s \in S$, además la relación $(s, s')^{m(s, s')} = 1$ es equivalente a:

$$\underbrace{ss'ss' \dots}_{m(s, s')} = \underbrace{s'ss'ss' \dots}_{m(s, s')}$$

En particular dos nodos distintos s y s' no son adyacentes en el grafo de Coxeter (i.e. $m(s, s') = 2$), si y sólo si s y s' conmutan.

Ejemplo 2.3.2. El grupo del ejemplo anterior generado por s_1, s_2, s_3 y s_4 tiene las siguientes relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 1 \\ s_1 s_2 = s_2 s_1 \\ s_1 s_3 s_1 = s_3 s_1 s_3 \\ s_1 s_4 = s_4 s_1 \\ s_2 s_3 s_2 s_3 = s_3 s_2 s_3 s_2 \\ s_2 s_4 = s_4 s_2 \end{array} \right.$$

Definición 2.3.4. Si un grupo W tiene una presentación como en la Definición 2.3.3, luego el par (W, S) se llama sistema de Coxeter. El grupo W es un grupo de Coxeter y S es el conjunto de generadores de Coxeter.

Teorema 2.3.1 (ver [6], pp.2). Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes:

1. Si G es un grupo y $f : S \rightarrow G$ es una función tal que

$$(f(s)f(s'))^{m(s, s')} = 1$$

para todo $(s, s') \in S'$ luego hay una única extensión de f a un homomorfismo de grupos $f : W \rightarrow G$.

2. $W \cong F/N$, donde F es el grupo libre generado por S y N el subgrupo normal generado por $\{(s s')^{m(s, s')} \mid (s, s') \in S'\}$.

Teorema 2.3.2 (ver [6], pp.4). Hay una correspondencia uno a uno entre las matrices de Coxeter y los sistemas de Coxeter, salvo isomorfismos.

Definición 2.3.5. Sea $w \in W$. El largo de w con respecto a S , denotado por $l(w)$, es el entero más pequeño $q \geq 0$ tal que w es el producto de una sucesión de q elementos de S . Una expresión reducida de w respecto a S es cualquier sucesión (s_1, \dots, s_q) de elementos de S tal que $w = s_1 \cdots s_q$ y $q = l(w)$.

Más adelante se definirá el conjunto de reflexiones para el grupo simétrico S_n . Con este fin ahora introducimos el concepto de reflexión.

Definición 2.3.6. Una reflexión en un espacio euclideo V es un operador lineal $s : V \rightarrow V$ que envía un vector no nulo a su negativo respecto a un hiperplano fijo.

De forma más abstracta, tenemos que $(s_i)^2 = 1$ porque aplicar la misma reflexión dos veces obtenemos la identidad. Como generadores del grupo de Coxeter, $s_i s_j$ es un elemento del grupo, tiene un orden m_{ij} que puede incluso ser ∞ . Entonces en cualquier grupo de reflexión se satisfacen las condiciones de un grupo de Coxeter, donde $\{s_i\}_{i \in I}$ es el conjunto de reflexiones que genera dicho grupo. Más aún, Coxeter en [12] probó que todo grupo generado por reflexiones discretas tiene una definición abstracta de la forma $s_i^2 = (s_j s_i)^{m_{ij}} = 1$.

Capítulo 3

Álgebras de Hecke y descomposiciones matriciales

En este capítulo introducimos el álgebra de Hecke y sus descomposiciones. Para la descomposición de Bruhat el lector podrá referirse a [3], en grupos BN -par ver [8], en álgebra de Hecke ver [13], para álgebra de Hecke unipotente ver [47] y para álgebra de Rook ver [42].

3.1. Descomposición de Bruhat

En adelante consideramos a \mathbb{F} un cuerpo, $G \cong GL_n(\mathbb{F})$ y B como el subgrupo de G de todas las matrices triangulares superiores invertibles, el cual también es llamado subgrupo de Borel de G .

Una matriz de permutación es una matriz cuadrada en $\{1, 0\}$ que tiene sólo una entrada no nula en cada fila y en cada columna. Por ejemplo, la matriz identidad es una matriz de permutación, y de ésta se pueden obtener todas las permutaciones intercambiando filas o columnas. Toda matriz de permutación es ortogonal, y por esto su inversa también es una matriz de permutación, que corresponde a su transpuesta. Así, las matrices de permutación son un subgrupo de G .

Proposición 3.1.1. $W \cong S_n$.

Demostración. Sea $V_n(\mathbb{F})$ un espacio vectorial n -dimensional con base estándar v_1, \dots, v_n . Si v_i multiplica a la izquierda por una matriz $M_{n \times n}$, se obtiene la i -ésima columna de

M :

$$M \cdot v_i = \begin{pmatrix} m_{1i} \\ \vdots \\ m_{ni} \end{pmatrix},$$

por lo que m envía v_i a la i -ésima columna de m .

Notar que una matriz de permutación manda v_i a un v_k , para $X = \{1, \dots, n\}$, $w \in W$, definamos $\varphi(w) : X \rightarrow X$ con $\varphi(w)(i) \mapsto k$ para $1 \leq i, k \leq n$ tal que $v_k = w \cdot v_i$. Por otro lado, sea $\varphi^{-1}(w) : X \rightarrow X$ con $\varphi^{-1}(w)(k) \mapsto i$ para $1 \leq i, j \leq n$ tal que $v_i = w^{-1} \cdot v_k$, pues $w^{-1} v_k = w^{-1} w v_i$, con $w^{-1} = w^\top$. \square

Definición 3.1.1. Sean $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Definimos $X_{ij}(\alpha) \in M_n(\mathbb{F})$ como la matriz que tiene entrada α en la posición (i, j) , 1 en la diagonal y 0 en las demás posiciones.

Ejemplo 3.1.1.

$$X_{23}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}).$$

Lema 3.1.1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y consideremos $i \neq j$, luego se cumple lo siguiente.

1. $\det X_{ij}(\alpha) = 1$. Así $X_{ij}(\alpha) \in G$.
2. Si $\alpha \neq 0$, luego $X_{ij}(\alpha) \in B \iff i < j$.
3. $X_{ij}(\alpha)X_{ij}(\beta) = X_{ij}(\alpha + \beta)$, y $X_{ij}(\alpha)^{-1} = X_{ij}(-\alpha)$.
4. El conmutador $[X_{ij}(\alpha), X_{jk}(\beta)] = X_{ik}(\alpha\beta)$ si $i \neq j \neq k$.
5. Si $w \in W$, luego $wX_{ij}(\alpha)w^{-1} = X_{w(i),w(j)}(\alpha)$.
6. $X_{ij}(\alpha)$ manda e_j a $e_j + \alpha e_i$, y fija e_k siempre que $k \neq j$.
7. Si $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, luego la i -ésima fila de $X_{ij}(\alpha)M$ es la suma de la i -ésima fila de M y α veces la j -ésima fila de M , y para $k \neq i$ la k -ésima fila de $X_{ij}(\alpha)M$ es igual a la k -ésima fila de M .

Demostración. Probaremos sólo los puntos 4, 5 y 7. Animamos al lector a verificar las demás junto con el libro Alperin y Bell [3], Capítulo 2, Lema 6.

4. Sabemos que el conmutador $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, por lo que para este caso tenemos que

$$[X_{ij}(\alpha), X_{jk}(\beta)] = X_{ij}(\alpha)X_{jk}(\beta)X_{ij}(-\alpha)X_{jk}(-\beta),$$

lo que podemos ver en la siguiente multiplicación matricial para las filas y columnas i, j, k :

$$\begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X_{ij}(\alpha\beta).$$

5. Consideremos las filas y columnas $i, j, w(i), w(j)$:

$$\begin{aligned} wX_{ij}(\alpha)w^\top &= \begin{array}{c} i \\ j \\ w(i) \\ w(j) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w^\top \\ &= \begin{array}{c} i \\ j \\ w(i) \\ w(j) \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{array}{c} i \\ j \\ w(i) \\ w(j) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X_{w(i)w(j)}(\alpha). \end{aligned}$$

7. veamos que se cumple para las filas y columnas i, j .

$$X_{ij}(\alpha)M = \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} m_{ik} \\ m_{jk} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} i \quad j \quad k \\ i \\ j \end{array} \begin{pmatrix} m_{ik} + \alpha m_{jk} \\ m_{jk} \end{pmatrix}, \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

□

Lema 3.1.2. *Sea $M \in G$. Hay un producto b de transvecciones triangulares superiores tal que para $1 \leq i \leq n$, bM tiene una k_i -ésima fila cuyas entradas en las primeras $i - 1$ columnas son nulas y tiene un elemento distinto a cero en la i -ésima columna.*

Demostración. Sea $M = (m_{ij}) \in G$, como $M^{-1} \in G$, la primera columna de M tiene al menos un elemento distinto a cero. Luego por el punto 7 del lema anterior podemos multiplicar a la izquierda por $X_{ij_1}(\alpha)$ con $i < j_1$ de tal forma que $m_{i1} = 0$ para $i \neq j_1$. Así tenemos que $X_{ij_1}(\alpha)M =: M_1$. Como $M_1^{-1} \in G$, la columna 2 de M_1 tiene algún elemento distinto a cero. Multiplicamos a la izquierda por una matriz de la forma $X_{ij_2}(\alpha)$ con $i < j_2$, tal que $X_{ij_2}(\alpha)M_1 =: M_2$ cumpla que $m_{i2} = 0$ para $i \neq j_1 \neq j_2$. Continuando este procedimiento hasta la columna n obtenemos que

$$M_n = X_{ij_{n-1}}(\alpha_{n-1}) \cdots X_{ij_1}(\alpha_1)M,$$

y multiplicando por M^{-1} por la derecha, obtenemos que

$$M_n M^{-1} = X_{ij_{n-1}}(\alpha_{n-1}) \cdots X_{ij_1}(\alpha_1) \in B.$$

□

Teorema 3.1.1. $G = BWB$.

Demostración. Sea $m \in G$, usando j_i y $b \in B$ como en el lema anterior. Sea $w \in W$ la matriz de permutación cuya j_i -ésima columna es e_i para $1 \leq i \leq n$. Luego la i -ésima fila de wbm es igual a la j_i -ésima fila de bm para $1 \leq i \leq n$, y por tanto $wbm \in B \implies m \in \subseteq BWB$. □

Lema 3.1.3. *Si $w_1, w_2 \in W$ y $b \in B$ son tales que $w_1 b w_2 \in B$, luego $w_2 = w_1^{-1}$.*

Demostración. Veamos que $w_2^{-1} w_1^{-1} = I$. Sabemos que $w_1(i) = j$ implica que la j -ésima fila de $w_1 b$ es igual a la i -ésima fila de b .

Sea k tal que $w_2(k) = i$, lo que implica que la k -ésima columna de $w_1 b w_2$ es igual a la i -ésima columna de $w_1 b$. Sea $b = (b_{ij})$, notar que $b_{ii} \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$, por lo que b_{ii} es el elemento (j, k) -ésimo de $w_1 b w_2$.

Como $w_1 b w_2 \in B$, luego $j \leq k$. Así tenemos que $w_2^{-1} w_1^{-1} \in W$ tal que para $1 \leq j \leq n$ envía e_j a e_k con $j \leq k \leq n$. Esto implica que $w_2^{-1} w_1^{-1} = I \implies w_2 = w_1^{-1}$. □

Corolario 1. Si $w, w' \in W$ y $w \neq w'$, luego $BwB \cap Bw'B = \emptyset$, y por consecuencia G es la unión disjunta de $n!$ dobles clases BwB para distintos $w \in W$.

Demostración. Sean $w, w' \in W$ tal que $BwB \cap Bw'B \neq \emptyset$. Por esto dentro de la intersección hay elementos que cumplen que $BwB = Bw'B$, en particular $w' = bw b'$, para algún $b, b' \in B$. Luego $w^{-1}b^{-1}w' \in B$, y por el lema anterior $w' = w$, por lo que tienen que ser el mismo. \square

Así, se tiene la descomposición de Bruhat

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB. \quad (3.1)$$

Implícitamente la unión disjunta implica que

$$BwB = Bw'B \implies w = w'. \quad (3.2)$$

3.2. Grupos BN -par

En 1962, Jacques Tits introdujo la noción de un grupo G con BN -par [43] y años después usó esta idea en distintos tipos de grupos [44, 7].

Sea G un grupo y $B \leq G$. Sabemos que $B \times B$ actúa en G por $(b, b') \cdot g = bgb'^{-1}$, para $b, b' \in B$. Sea $g \in G$, denotamos la órbita de g por esta acción por $C(g) = \{(b, b') \cdot g \mid (b, b') \in B \times B\} = BgB$ y son claramente dobles clases de B en G . El conjunto de todas las dobles clases es denotado por $B \backslash G / B$. Notar que dado $g, g' \in G$ se tiene que $C(g)C(g') = BgB \cup Bg'B$ es una unión de dobles clases.

Definición 3.2.1. Un grupo BN -par (o sistema de Tits) es una cuádrupla (G, B, N, S) , donde G es un grupo, B y N son subgrupos de G y S es un subconjunto de $N / (B \cap N)$, que satisfacen lo siguiente:

1. El conjunto $B \cup N$ genera G y $B \cap N$ es un subgrupo normal de N .
2. El conjunto S genera al grupo $W \cong N / (B \cap N)$ y consiste en elementos de orden 2.
3. $sBw \subset BwB \cup Bs w B$ para $s \in S$ y $w \in W$.
4. Para todo $s \in S$, $sBs \notin B$.

Usualmente W es llamado el grupo de Weyl del sistema de Tits (G, B, N, S) .

Lema 3.2.1. Sea $s_1, \dots, s_q \in S$ y sea $w \in W$, luego

$$C(s_1, \dots, s_q) \cdot C(w) \subset \bigcup_{(i_1, \dots, i_p)} C(s_1, \dots, s_p w),$$

donde (i_1, \dots, i_p) es una secuencia estrictamente creciente de enteros en el intervalo $(1, q)$.

Teorema 3.2.1. Si $G = BWB$, entonces la función de W a $B \backslash W / B$ (el conjunto de las dobles clases de G respecto a B) dada por $w \mapsto C(w)$, es una biyección.

Proposición 3.2.1. Si $l(sw) \leq l(w)$ para $s \in S$ y $w \in W$, luego $sBw \cap C(w) = \emptyset$.

Consideremos $T := B \cap N$, luego tenemos los siguientes resultados.

Teorema 3.2.2. $W \cong N/T$ es un grupo de Coxeter, y el par (W, S) es un sistema de Coxeter. Más aún, para $s \in S$ y $w \in W$ las relaciones $C(sw) = C(s) \cdot C(w)$ y $l(sw) > l(w)$ son equivalentes.

Corolario 2. Sea $w_1, \dots, w_q \in W$ y sea $w = w_1 \cdots w_q$. Si

$$l(w) = l(w_1) + \dots + l(w_q) \quad ,$$

luego

$$C(w) = C(w_1) \cdots C(w_q) \quad .$$

Ejemplo 3.2.1. Sea $G \cong GL_n(\mathbb{F})$, donde \mathbb{F} es un cuerpo arbitrario. Definamos los siguientes subgrupos:

- $B := \{(a_{ij}) \in G \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$, el grupo de las matrices triangulares superiores.
- N el grupo de las matrices monomiales.
- T el grupo de las matrices diagonales.

Una matriz monomial $M \in G$ cumple que cada fila y cada columna contiene un elemento distinto a cero.

Notar que $T = B \cap N$ y que W , el grupo de Weyl es isomorfo a S_n . En efecto, existe un homomorfismo sobreyectivo $\varphi: N \rightarrow S_n$ dado por $(n_{ij}) \mapsto 1$ si $n_{ij} \neq 0$, con $\text{Ker}(\varphi) = T = B \cap N$, por lo que $W \cong N/T \cong S_n$.

Veamos que G es un grupo BN -par. Los axiomas 1, 2 y 4 se cumplen de manera directa. Verifiquemos que se cumple el axioma 3, el cual podemos escribirlo de forma equivalente como $s_j B \subset BB' \cup Bs_j B'$, donde $B' = wBw^{-1}$ y $s_j = (j, j+1)$.

Sea G_j el subgrupo de G que estabiliza el plano generado por e_j y e_{j+1} . Esto lo podemos ver como las matrices en bloque dentro del siguiente conjunto:

$$G_j = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} I_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-j-1} \end{array} \right) \middle| A \in GL_2(\mathbb{F}) \right\}$$

por lo que $G_j \cong GL_2(\mathbb{F})$ para todo $j = 1, \dots, n-1$.

Veamos que $G_j B = B G_j$. Como $s_j \in G_j$, luego $s_j B \subset B G_j$ y resta probar que $G_j \subset (B \cap G_j)(B' \cap G_j) \cup (B \cap G_j)s_j(B' \cap G_j)$. Sea $B_2 := B \cap G_j$ el subgrupo de matrices triangulares superiores invertibles de $GL_2(\mathbb{F})$, y B_2^- su subgrupo de matrices triangulares inferiores. Veamos que

$$B' \cap G_j = \begin{cases} B_2 & \text{si } w(j) < w(j+1) \\ B_2^- & \text{si } w(j) > w(j+1) \end{cases}$$

Para el primer caso la fórmula a probar puede escribirse como $GL_2(\mathbb{F}) = B_2 \cup B_2 s B_2$ con $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, lo que es equivalente a la descomposición de Bruhat para $n = 2$. Para el segundo caso, sabemos que $GL_2(\mathbb{F}) = B_2 \cup B_2 s B_2$, luego

$$B_2^- = s B_2 s$$

$$s B_2^- = B_2 s$$

$$B_2^- s = s B_2.$$

y reemplazando en la igualdad de $GL_2(\mathbb{F})$ tenemos que

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{F}) &= B_2 \cup B_2 B_2^- s, \text{ ya que } s B_2 = B_2^- s \\ &= s B_2^- \cup B_2 B_2^- \\ &= s B_2^- \cup B_2 B_2^- \\ &= B_2 s B_2^- \cup B_2 B_2^-. \end{aligned}$$

Definición 3.2.2. *Asumamos que*

$$l(s_1 \cdots s_m) = m \quad \text{y} \quad l(s_0 s_1 \cdots s(m)) < m + 1 \quad ,$$

donde cada $s_i \in S$. Luego el axioma de intercambio consiste en que se cumpla lo siguiente para algún j con $0 \leq j \leq m - 1$:

$$s_0 s_1 \cdots s_j = s_1 s_2 \cdots s_{j+1} \quad .$$

Teorema 3.2.3. (Matsumoto, ver [30]) *Sea W un grupo finito generado por el conjunto de involuciones $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, que satisfacen el axioma de intercambio. Para cada par $i \neq j$, sea m_{ij} el orden de $s_i s_j$. Luego se cumple lo siguiente:*

$$\begin{cases} (s_i s_j)^{k_{ij}} = (s_j s_i)^{k_{ij}} & , \text{ si } m_{ij} = 2k_{ij}, \\ (s_i s_j)^{k_{ij}} s_i = (s_j s_i)^{k_{ij}} s_j & , \text{ si } m_{ij} = 2k_{ij} + 1, \end{cases}$$

Sea M un monoide con identidad e y asumiento que $\{m_1, \dots, m_n\}$ son elementos de M que satisfacen las relaciones anteriores. Luego existe una función bien definida $f : W \rightarrow M$ tal que $f(1) = e$, $f(s_i) = m_i$ para $1 \leq i \leq n$. Y si $s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ es una expresión reducida arbitraria en W , luego $f(s_{i_1} \cdots s_{i_l}) = m_{i_1} \cdots m_{i_l}$.

El teorema anterior es válido para grupos BN -par arbitrarios, también prueba que el grupo de Weyl es de Coxeter para grupos BN -par

3.3. Álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, H, \psi)$

Sea G un grupo finito, y \mathbb{F} un cuerpo.

Definición 3.3.1. *Sea A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{F} . Sea M un A -módulo izquierdo sobre \mathbb{F} . La función traza $\mu : A \rightarrow \mathbb{F}$ definida por $\mu(x) = \text{tr}(x, M)$, la traza de $x \in M$ actuando en M , es llamada caracter de A proporcionado por M .*

Si R es un anillo, el anillo de grupo $R(G)$ es el conjunto de sumas formales finitas

$$\left\{ \sum_{g \in G} \alpha_g g : \alpha_g \in R \right\}.$$

$R(G)$ es una R -álgebra por la incrustación $R \rightarrow R(G)$

Para un cuerpo \mathbb{F} la estructura de módulo de $\mathbb{F}(G)$ corresponde a un espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Si $\mu : \mathbb{F}(G) \rightarrow \mathbb{F}$ es el caracter del $\mathbb{F}(G)$ -módulo izquierdo M , luego por definición $\mu(a) = tr(a, M)$ para $a \in \mathbb{F}(G)$.

Por otro lado, restringiendo a μ a los elementos de G , obtenemos la función $\mu : G \rightarrow \mathbb{F}$, dada por $\mu(x) = tr(x, M)$ para $x \in G$. Y como los elementos de G forman una \mathbb{F} -base para $\mathbb{F}(G)$, la función traza $\mu : \mathbb{F}(G) \rightarrow \mathbb{F}$ puede ser recuperada de los valores $\{\mu(x) | x \in G\}$, por medio de la fórmula

$$\mu \left(\sum_{x \in G} \alpha_x x \right) = \sum_{x \in G} \alpha_x \mu(x) \quad ,$$

con $\alpha_x \in \mathbb{F}$. Los caracteres obtenidos de $\mathbb{F}(G)$ -módulos, vistos como funciones \mathbb{F} -valuadas en G son llamados \mathbb{F} -caracteres de G .

Definición 3.3.2. Sea $H \leq G$ y ψ un \mathbb{F} -caracter proporcionado por $\mathbb{F}He$, con $e \in \mathbb{F}(H)$. El álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, H, \psi)$ es el subálgebra $e\mathbb{F}(G)e$ de $\mathbb{F}(G)$, y la denotamos por \mathcal{H} .

El álgebra de Hecke es un álgebra semisimple con identidad e . De hecho si $\mathbb{F}(H)e \cong \mathbb{F}(H)e'$ para algún otro elemento idempotente e' , luego $\mathbb{F}(G)e \cong \mathbb{F}(G)e'$. Por esto el ideal izquierdo $\mathbb{F}(H)e$ que proporciona ψ . Un elemento idempotente e como en la definición anterior puede expresarse de la forma $e = \sum e_i$, donde e_i es la identidad de $M_{n_i}(\mathbb{F})$.

Ejemplo 3.3.1. Con $H \leq G$ y ψ el caracter trivial 1_H . Luego 1_H es proporcionado por el idempotente $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$ de $\mathbb{F}(H)$. El álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, H, 1_H) = e_H \mathbb{F}(G) e_H$ y es isomorfa al álgebra de funciones $f : G \rightarrow \mathbb{F}$ con multiplicación definida por el producto convolución $f \cdot g : G \rightarrow \mathbb{F}$ con $(f \cdot g)(x) = \sum_{y \in G} f(xy)g(y^{-1})$ con $x \in G$. Esta álgebra de funciones es constante en las (H, H) -dobles clases de G , esto se puede ver por el hecho que el subálgebra $e_H \mathbb{F}(G) e_H$ corresponde a las funciones constantes en dobles clases.

3.4. Álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, B)$

En esta sección consideraremos a G como un grupo finito con BN -par, W el grupo de Weyl de G y S el conjunto de generadores de W . Por otro lado sabemos que G tiene una descomposición de Bruhat respecto a un subgrupo de Borel B .

Denotamos el álgebra de Hecke por $\mathcal{H}_n(u) := \mathcal{H}(G, B, 1_B)$. Considerando a $S :=$

$\{s_1, \dots, s_n\}$ y (W, S) como un sistema de Coxeter, W tiene la siguiente presentación:

$$W = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n \rangle,$$

donde $\{m_{ij}\}$ son enteros positivos tales que $m_{ii} = 1$ y $m_{ij} = m_{ji}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Esto implica que para hallar representaciones $T : W \rightarrow GL(V)$ con V espacio vectorial, basta con encontrar elementos $\{T_i\}_{1 \leq i \leq n} \in GL(V)$ que satisfacen las relaciones de W : $T_i^2 = 1, (T_i T_j)^{m_{ij}} = 1$ para $1 \leq i, j \leq n$. Esto permitirá que una función con $s_i \rightarrow T_i$ para $1 \leq i \leq n$ pueda extenderse a una representación T .

El álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, B) = \mathcal{H}(G, B, 1_B)$ es un subálgebra semisimple del álgebra de grupos complejos $\mathbb{C}(G)$ definido por $e\mathbb{C}(G)e$, donde $e = \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B} b$ es idempotente en $\mathbb{C}(B)$, tal que el ideal izquierdo $\mathbb{C}(G)e$ provee la representación de la permutación $(1_B)^G$. Para analizar la estructura de $\mathcal{H}(G, B)$ examinamos su base, la que consiste en elementos

$$a_D = \frac{1}{|B|} \sum_{x \in D} x$$

con $D \in B \backslash G / B$. Como hay una biyección $w \rightarrow BwB$ de W a las dobles clases $B \backslash G / B$, denotamos la base $\{a_w\}_{w \in W}$.

Definición 3.4.1. El índice $\text{ind } w := |B : BwB \cap B|$ con $w \in N/T$.

Los parámetros de índice de G son los números $q_i = \text{ind } s_i$ para $1 \leq i \leq n$, donde $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ es el conjunto generador de W .

Sea $l(w)$ la función largo del grupo de Coxeter W . Luego tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1 (Iwahori). La multiplicación de la base de elementos

$\left\{ a_w = \frac{1}{|B|} \sum_{x \in BwB} x, w \in W \right\}$ de $\mathcal{H}(G, B)$ satisface que

$$a_{s_i} a_w = a_{s_i w} \quad \text{si } l(s_i w) > l(w)$$

y

$$a_{s_i} a_w = q_i a_{s_i w} + (q_i - 1) a_w \quad \text{si } l(s_i w) < l(w)$$

para todo $s_i \in S$ y $w \in W$.

Demostración. La multiplicación en $\mathcal{H}(G, B)$ es de la forma

$$a_u a_v = \sum_{w \in W} \mu_{uvw} a_w \quad \text{para } u, v \in W$$

donde $\mu_{uvw} = \frac{1}{|B|} |BuB \cap w(BvB)|$.

Si $l(s_i w) > l(w)$, luego $s_i B w \subseteq B s_i w B$, por lo que el producto $a_{s_i} a_w$ es provisto por las dobles clases $B s_i w B$.

Luego tenemos que $a_{s_i} a_w = \mu a_{s_i w}$, donde

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{|B|} |B s_i B \cap s_i w B w^{-1} B| \\ &= \frac{1}{|B|} |s_i B s_i B \cap w B w^{-1} B|. \end{aligned}$$

Demostremos que $\mu = 1$. Como $s_i B s_i \subset B \cup B s_i B$ y $B \subseteq w B w^{-1} B$, debemos probar que $B s_i B \cap w B w^{-1} B = \emptyset$ si $l(s_i w) > l(w)$. Asumamos que esto es falso, luego sea $w = s_{j(1)} \cdots s_{j(p)}$ para $s_{j(k)} \in S$ y $1 \leq k \leq p$ un producto de involuciones de S . Por el uso reiterado del axioma 3. de la definición de grupo BN -par, obtenemos que

$$w B w' \subseteq \bigcup B w s_{j(q_1)} \cdots s_{j(q_t)} B,$$

donde la unión es tomada de las subsucesiones del intervalo $[1, p]$

$$1 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_t \leq p.$$

Con esto, y definiendo a y como el producto de algunos factores de w^{-1} obtenemos la igualdad

$$B s_i B = B w y B,$$

lo que implica que $l(y) < l(w)$. Por la descomposición de Bruhat tenemos que

$$s_i = w y \quad \text{y} \quad w^{-1} s_i = y.$$

Luego si $l(w) = p$, $s_{j(1)} \cdots s_{j(p)}$ es un producto reducido, luego $l(w^{-1} s_i) = l(s_i w) \leq p$, lo que contradice lo que habíamos asumido, por lo que $\mu = 1$.

Luego

$$a_{s_i}^2 = q_i a_1 + (q_i - 1) a_{s_i} \quad \text{para todo } s_i \in S \quad .$$

Como $(B s_i B)(B s_i B) \subseteq B \cup B s_i B$, obtenemos que $a_{s_i}^2 = \alpha a_1 + \beta a_{s_i}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, donde

α satisface que

$$\alpha = \frac{1}{|B|} |Bs_i B \cap Bs_i B| = \text{índ } s_i = q_i.$$

No es difícil ver que $\text{índ} : \mathcal{H}(G, B) \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de álgebras, y aplicando índ a la fórmula para $(a_{s_i})^2$, además con $\alpha = q_i$ y $\text{índ} a_1 = 1$, obtenemos que

$$q_i^2 = q_i + \beta q_i.$$

Esto implica que $\beta = q_i - 1$.

Luego

$$a_{s_i} a_w = a_{s_i}^2 a_{w'} = q_i a_{w'} + (q_i - 1) a_{s_i} a_{w'} = q_i a_{s_i w} + (q_i - 1) a_w.$$

□

Corolario 3. *El álgebra de Hecke $\mathcal{H}(G, B)$ es generada por elementos $\{1 = a_1, a_{s_1}, \dots, a_{s_n}\}$ con $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Estos generadores satisfacen la siguiente relación cuadrática*

$$a_{s_i}^2 = q_i 1 + (q_i - 1) a_{s_i} \quad , \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

y las relaciones

$$\begin{aligned} (a_{s_i} a_{s_j})^{k_{ij}} &= (a_{s_j} a_{s_i})^{k_{ij}} \quad \text{si } m_{ij} = 2k_{ij}, \\ (a_{s_i} a_{s_j})^{k_{ij}} a_{s_i} &= (a_{s_j} a_{s_i})^{k_{ij}} a_{s_j} \quad \text{si } m_{ij} = 2k_{ij} + 1, \end{aligned}$$

donde m_{ij} es el orden de $s_i s_j \in W$.

Corolario 4. *Si s_i es conjugado de s_j en W , luego $q_i = q_j$.*

Teorema 3.4.2 (Iwahori [17], Matsumoto [30]). *Los generadores y relaciones del Corolario 3 definen la presentación del álgebra de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G, B)$.*

Demostración. Si A es una \mathbb{C} -álgebra asociativa que contiene elementos $\{a_1, \dots, a_n\}$ que satisfacen las relaciones del Corolario 3, luego existe un homomorfismo de álgebras $f : \mathcal{H}(G, B) \rightarrow A$ con $f(a_{s_i}) = a_i$, para $1 \leq i \leq n$. Por el Teorema 3.2.3 existe una función $f' : W \rightarrow A$ dada por $f'(s_i) = a_i$ para $1 \leq i \leq n$, y tal que

$$f'(s_{i(1)} \cdots s_{i(m)}) = a_{i(1)} \cdots a_{i(m)}$$

para todo producto reducido $s_{i(1)} \cdots s_{i(m)}$ de elementos de S . Como los elementos $\{a_w\}_{w \in W}$ forman una base para \mathcal{H} , existe una función lineal $f : \mathcal{H} \rightarrow A$ tal que $f(a_w) = f'(w)$, para $w \in W$. Luego es suficiente probar que

$$f(a_{s_i}, a_w) = f(a_{s_i})f(a_w) \quad (3.3)$$

para todo $s_i \in S$ y $w \in W$. Asumamos que $l(s_i w) > l(w)$. Luego una expresión reducida para $s_i w$ la obtenemos de una expresión reducida para w multiplicando a la izquierda por s_i , y la ecuación 3.3 es consecuencia de la definición de f , ya que $a_{s_i} a_w = a_{s_i w}$ por el teorema de Iwahori 3.4.1. Luego asumamos que $l(s_i w) < l(w)$, y sea $w' = s_i w$. Luego $l(s_i w') > l(w')$, y por la primera parte de la prueba, tenemos que

$$f(a_w) = f(a_{s_i} a_{w'}) = f(a_{s_i})f(a_{w'}),$$

ya que $a_{s_i} a_{w'} = a_w$ por 3.4.1. Por hipótesis, los elementos $f(a_{s_i})$ también satisfacen las relaciones cuadráticas en 3, donde

$$f(a_{s_i})f(a_w) = f(a_{s_i})^2 f(a_{w'}) \quad (3.4)$$

$$= q_i f(a_{w'}) + (q_i - 1) f(a_{s_i})f(a_{w'}) \quad (3.5)$$

$$= q_i f(a_{s_i w}) + (q_i - 1) f(a_w) \quad (3.6)$$

por la primera parte de la prueba nuevamente, ya que $l(s_i w') > l(w')$ y $w' = s_i w$. Por otro lado

$$a_{s_i} a_w = q_i a_{s_i w} + (q_i - 1) a_w$$

por 3.4.1. Obtenemos 3.3, en este caso por aplicar f a la última relación y comparando con la fórmula anterior. \square

Considerando G, B, N y T como en el Ejemplo 3.2.1 y W el grupo de Weyl, obtenemos el álgebra de Iwahori-Hecke (de tipo A) denotada por $H_n(u)$, es el álgebra generada por $\{1, h_1, \dots, h_{n-1}\}$ con relaciones

1. $h_i h_j = h_j h_i$ para $|i - j| > 1$.
2. $h_i h_j h_i = h_j h_i h_j$ para $|i - j| = 1$.
3. $h_i^2 = u + (u - 1)h_i$.

3.5. Álgebra de Yokonuma-Hecke $Y_{d,n}(u)$

En esta sección introduciremos el álgebra de Yokonuma Hecke $Y_{d,n}(u)$ y sus principales características. Esta álgebra fue introducida por Yokonuma en 1967 en el contexto de grupos de Chevalley como una generalización del álgebra de Iwahori-Hecke [47]. El álgebra $Y_{d,n}(u)$ es el álgebra de endomorfismos para la representación de permutación de $G := GL_n(\mathbb{F}_q)$ respecto a un subgrupo unipotente maximal U , por esto otra forma de denotar el álgebra es $\mathcal{H}(G, U)$.

Teorema 3.5.1. $G = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}_d^n \rtimes S_n} UnU$, y si $n \neq n'$ luego $UnU \neq Un'U$.

Demostración. Consideremos la descomposición de Bruhat $G = BWB$. Sabemos que $B = UT = TU$ y $TWT = WT = \mathbb{Z}_d^n \rtimes S_n$, así tenemos que

$$\begin{aligned} G &= \bigsqcup_{w \in W} BwB \\ &= \bigsqcup_{w \in W} UTwTU \\ &= \bigsqcup_{n \in TWT} UnU \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}_d^n \rtimes S_n} UnU. \end{aligned}$$

Supongamos que $n, n' \in \mathbb{Z}_d^n \rtimes S_n$ y $n' \in U(\mathbb{Z}_d^n \rtimes S_n)U$. Luego n' puede obtenerse desde n por una secuencia finita de operaciones elementales fila cuya adición sea de abajo hacia arriba y cuya adición de columnas sea de izquierda a derecha. Por esto si la primera columna de n es nula, lo mismo ocurrirá para n' . Si la primera columna de n contiene un 1 en la posición $(j_1, 1)$ luego $n'_{j_1, 1} \neq 0$, por lo que n' tiene la misma primera columna que n . De manera similar esto servirá para las columnas $2, \dots, n$. \square

Definición 3.5.1. Para $\alpha \in \mathbb{F}_{q-1}$ definimos la matriz $h_i(\alpha) := I + (\alpha - 1)E_{i,i}$ para $1 \leq i \leq n$, donde $E_{i,i}$ es la matriz en $\{0, 1\}$ que es 1 en la entrada (i, i) y 0 en las demás entradas. Y definimos $h_{i,j}(\alpha) := h_i(\alpha)h_j((-1)^{q-2}\alpha^{-1})$, para $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$.

Ejemplo 3.5.1. Para $n = q = 3$ tenemos la multiplicación matricial

$$h_{1,2} = h_1(\alpha)h_2(-\alpha^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 3.5.2. Definimos el conjunto de reflexiones en S_n como

$\tau := \{ws_i w^{-1} \mid 1 \leq i \leq n-1, w \in S_n\}$. Para elementos $t = ws_i w^{-1} \in \tau$ en S_n , definimos $X_t := \{wh_{i,i+1}(\alpha)w^{-1} \mid \alpha \in \mathbb{F}_{q-1}\}$.

Ejemplo 3.5.2. Para $q = 4$, debido a que $s_1 = Is_1I$ (con $I = \text{identidad}$), tenemos que

$$X_{s_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{F}_3 \right\}.$$

Los elementos de la base de $Y_{d,n}(u)$ son de la forma

$$H_s = \frac{1}{|U|} \sum_{x \in U} x \quad y \quad H_t = \frac{1}{|U|} \sum_{x \in U} x,$$

para $s \in S_n$ y t en el conjunto T de las matrices diagonales sobre \mathbb{F}_q .

Teorema 3.5.2. Los elementos de la base de $Y_{d,n}(u)$ satisfacen las siguientes propiedades.

1. $H_w H_{s_i} = \begin{cases} H_{ws_i} & , \text{si } l(ws_i) > l(w) \\ qH_{ws_i} + \sum_{t \in X_{s_i}} H_t & , \text{si } l(ws_i) < l(w). \end{cases}$
2. $H_w H_t = H_{wt}$.
3. $H_t H_{t'} = H_{tt'}$.
4. $H_{s_i} H_t = H_{t_{s_i}} H_{s_i}$, donde $t = (t_1, \dots, t_n)$ y $t_{s_i} = (t_{s_i(1)}, \dots, t_{s_i(n)})$.

Proposición 3.5.1. $Y_{d,n}(u)$ está generada por los elementos H_s y H_t para $s \in S_n$ y $t \in T$.

Posteriormente Juyumaya probó en [23] que $Y_{d,n}(u)$ tiene la siguiente presentación.

Teorema 3.5.3. El álgebra de Yokonuma-Hecke $Y_{d,n}(u)$ es el álgebra generada por

$g_1, \dots, g_{n-1}, t_1, \dots, t_n$ con las relaciones

$$(1) \quad g_i g_j = g_j g_i \quad , \text{ para } |i - j| > 1$$

$$(2) \quad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$$

$$(3) \quad t_i^d = 1$$

$$(4) \quad t_i t_j = t_j t_i$$

$$(5) \quad t_i g_j = g_j t_{s_j(i)} \quad , \text{ donde } s_j = (j, j+1)$$

$$(6) \quad g_i^2 = 1 - (u-1)e_i(1-g_i) \quad , \text{ donde } e_i = \sum_{r=0}^{d-1} t_i^r t_{i+1}^{-r}$$

Las relaciones (1), (2), (4) y (5) definen relaciones para grupos de trenzas framizadas clásicas $F_n := \mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, donde los t_j pueden interpretarse como ‘framizados elementales’, y la relación (3) indica que la framización de cada hebra se considera módulo d . Por esto el álgebra $Y_{d,n}(u)$ nace como un cociente del álgebra del grupo de trenzas framizadas sobre la relación (3) y la relación cuadrática (6) [21].

También podemos notar que las relaciones (1),..., (6) definen relaciones en el grupo de trenzas framizadas modulares $F_{d,n} := \mathbb{Z}_d^n \rtimes B_n$, por lo que el álgebra $Y_{d,n}(u)$ también puede verse como cociente del álgebra de grupos de trenzas framizadas modulares sobre la relación cuadrática (6).

Como se mencionó anteriormente, el álgebra $Y_{d,n}(u)$ generaliza al álgebra $\mathcal{H}_n(u)$, ya que $Y_{1,n}(u) \cong \mathcal{H}_n(u)$. Por otro lado, si $u = 1$, tenemos que $Y_{d,n}(u) \cong \mathbb{C}(\mathbb{Z}_d^n \rtimes S_n)$.

3.6. Álgebra de Rook $\mathcal{H}(M, B)$

En esta sección consideraremos el caso en que $W \cong S_n$. Para $w \in W$, una inversión es un par (w_i, w_j) que satisfacen $i < j$ y $w_i > w_j$. Sea $n(w)$ el número de inversiones de w y sea q una indeterminada. Rodrigues halló en [41] que para distintos $n(w)$ se cumple que

$$\sum_{w \in W} q^{n(w)} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + q + \dots + q^i). \quad (3.7)$$

Si $w \in W$, sea $l(w)$ el largo de w , el menor entero l tal que w puede ser escrito como una palabra de largo l en los elementos de S . Luego para todo $w \in W$

$$l(w) = n(w), \quad (3.8)$$

lo que permite reemplazar $n(w)$ por $l(w)$ en 3.7. Consideremos q como la potencia de un primo. La ecuación 3.7 puede interpretarse en términos del grupo $G \cong GL_n(\mathbb{F}_q)$. Podemos ver que el orden de G es el conteo de cada posible columna de una matriz, por lo que la primera columna puede tomar cualquier combinación de valores en \mathbb{F}_q menos la columna nula, la segunda columna puede tomar cualquier valor en \mathbb{F}_q menos los múltiplos de la primera columna, y se usa el mismo criterio para el resto de las columnas. Entonces

$$\begin{aligned} |G| &= (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}) \\ &= (q-1)^n q^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n-1} (1 + q + \cdots + q^i) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$= (q-1)^n q^{n(n-1)/2} \sum_{w \in W} q^{l(w)}, \quad (3.10)$$

donde en la última línea usamos 3.7 y que $l(w) = n(w)$.

Ahora consideremos matrices singulares. Sea $M = M_n(\mathbb{F}_q)$ el monoide de matrices $n \times n$ sobre \mathbb{F}_q . Sea $M_k \subseteq M$ el conjunto de matrices de rango k . El grupo $G \times G$ actúa transitivamente en M_k usando la multiplicación por izquierda y por derecha. Podemos calcular el orden del estabilizador del idempotente $e_k = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in M_k$ usando la fórmula 3.9 para $|G|$ y hallar

$$|M_k| = (q-1)^k q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2 [k]! \quad (3.11)$$

donde

$$[k]! = \prod_{i=1}^{k-1} (1 + q + \cdots + q^i) \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \quad (3.12)$$

son q -factoriales y q -binomiales. Como 3.11 es lo mismo que 3.9 si $k = n$, se puede hallar un análogo de 3.10 si $k < n$. La idea es hallar una función largo $\sigma \mapsto l(\sigma)$ en algún

objeto algebraico finito tal que 3.11 podamos escribirlo como

$$|M_k| = (q-1)^k q^{k(k-1)/2} \sum q^{l(\sigma)} \quad . \quad (3.13)$$

La descomposición de Bruhat ayuda a entender 3.10.

Sea $\mathcal{R} \subseteq M$ el conjunto de todas las matrices σ tal que

1. las entradas de σ están en $\{0, 1\}$.
2. σ tiene a lo sumo una entrada distinta a cero en cada fila y columna.

Notemos que

$$|\mathcal{R}| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 k! \quad (3.14)$$

es el número de maneras de ordenar k torres que no se atacan en un tablero de ajedrez de $n \times n$. El coeficiente binomial entrega la cantidad de maneras de escoger las filas y columnas que contengan las torres, y $k!$ es el número de maneras de posicionar k torres que no se atacan en un tablero de $k \times k$. Si dividimos la parte derecha de 3.11 por $(q-1)^k$ y fijamos $q = 1$, obtendremos la parte derecha de 3.14. Esto sugiere que la suma en la fórmula 3.13 debe ser tomada sobre el conjunto \mathcal{R}_k de elementos de rango k en \mathcal{R} . Notar que \mathcal{R} es un monoide, y como los elementos de \mathcal{R} tienen una correspondencia biyectiva con la ubicación de las torres en un tablero de ajedrez, se le conoce como el monoide de las torres (monoide de Rook, en adelante). Por ejemplo

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{para } n = 2.$$

El monoide de Rook juega el mismo rol para M que el grupo simétrico para G . Es un ejemplo de monoide de Renner, que será definido más adelante, así como el grupo simétrico es un ejemplo de grupo de Weyl. \mathcal{R} también ha sido estudiado bajo el nombre de semigrupo inverso simétrico en [11, 31].

Bruhat en [9] demostró que un grupo G de Lie semisimple tiene una descomposición en dobles clases como en 3.1, donde B es un subgrupo soluble maximal de G y W es el grupo de Weyl de G . Chevalley en [10] definió para cada álgebra de Lie semisimple compleja y cuerpo \mathbb{F} un grupo lineal G sobre \mathbb{F} . Los grupos de Chevalley tienen una descomposición en dobles clases de forma análoga a la descomposición de Bruhat. Esto

permitió demostrar que

$$|G| = |B| \sum_{w \in W} q^{n(w)} \quad (3.15)$$

si $G \cong GL_n(\mathbb{F}_q)$, donde B es un subgrupo de Borel, W es el grupo de Weyl y $n(w)$ es el número de raíces positivas del álgebra de Lie, que se llevan a raíces negativas por $w \in W$. En 1964 Iwahori en [17] probó que $n(w) = l(w)$ en este contexto, donde $l(w)$ es el largo de w visto como palabra en el conjunto generador de Coxeter S de reflexiones correspondiente a raíces simples. Entonces $n(w)$ puede ser reemplazado por $l(w)$ en la fórmula de Chevalley. Si $G = PSL_n(\mathbb{F}_q)$ luego W es el grupo simétrico, el $n(w)$ de Chevalley es el número de inversiones de w y $|B| = (q-1)^n q^{n(n-1)/2}$. Por esto 3.15 es en esencia 3.10.

En el contexto de grupos con (B, N) -par, una equivalencia del axioma 3 de la definición es

$$BsB \cdot BwB \subseteq BwB \cup BswB \quad \text{para todo } s \in S \text{ y } w \in W, \quad (3.16)$$

con W el grupo de Weyl de G y S el conjunto de generadores de involución para W . Sea $l(w)$ el largo de la palabra w en el conjunto generador S . Luego (W, S) es un sistema de Coxeter y 3.16 puede escribirse como

$$BsB \cdot BwB = \begin{cases} BswB & \text{si } l(sw) > l(w) \\ BswB \cup BwB & \text{si } l(sw) < l(w). \end{cases} \quad (3.17)$$

En [16] Grigor'ev consideró un análogo a la descomposición de Bruhat para ciertos submonoides M de $M_n(\mathbb{F})$, éstos son determinados por grupos G en su representación natural sobre un cuerpo \mathbb{F} . En particular si G es el grupo lineal especial $SL_n(\mathbb{F})$, luego su monoide M es $M_n(\mathbb{F})$. Pero su trabajo no lo llevó al monoide de Rook \mathcal{R} .

Renner en 1986 [40] encontró la configuración general para 3.16 en la teoría de monoides algebraicos reductivos. La teoría de monoides algebraicos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado \mathbb{F} se podría decir que es la combinación del trabajo de Renner y Putcha [36]. Waterhouse en 1982 [45] mostró que todo grupo algebraicamente conexo G con un homomorfismo no trivial en el grupo multiplicativo \mathbb{F}^\times ocurre como el grupo de unidades de un monoide algebraico M cuyas propiedades incluyen a G . Un monoide algebraico M es reductivo si su grupo G de unidades es un grupo alge-

braico reductivo conexo. Por ejemplo $M = M_n(\mathbb{F})$ es un monoide algebraico reductivo con grupo unidad $G = GL_n(\mathbb{F})$. Renner en 1985 [39] clasificó los monoides algebraicos reductivos. Las implicaciones de su trabajo para combinatoria algebraica no han sido tan exploradas.

Renner en 1986 [40] desarrolló el concepto de 'Descomposición de Bruhat' en un monoide algebraicamente reductivo M con grupo de unidades G . Sea T un toro maximal de G y sea $B \supset T$ el subgrupo de Borel de G . Sea R la clausura de Zariski del normalizador $N_G(T)$ en M y sea $\mathcal{R} = R/T$ el monoide de órbitas, el cual está bien definido, ya que $\sigma T = T\sigma$ para todo $\sigma \in \mathcal{R}$. El monoide de Renner \mathcal{R} es finito y tiene grupo de Weyl W de G como su grupo de unidades. La descomposición de Bruhat de Renner para M permite afirmar el análogo de 3.1 y 3.2 pero usando el monoide de Rook como argumento de las dobles clases. \mathcal{R} juega el mismo rol para M que el grupo de Weyl para G . Renner también mostró que M admite un 'sistema de Tits' en el sentido que se cumple que

$$BsB \cdot B\sigma B \subseteq Bs\sigma B \cup B\sigma B \quad \text{para todo } s \in S \text{ y } \sigma \in \mathcal{R}, \quad (3.18)$$

donde S es el conjunto de generadores de Coxeter para el grupo de Weyl W del grupo algebraico G . Putcha en 1989 [37] estudió el análogo a la descomposición de Bruhat de Renner en un sentido más axiomático; la configuración es un monoide en el cual el grupo de unidades admite un sistema de Tits.

Solomon propuso que si se puede hallar una función $\sigma \mapsto l(\sigma)$ en \mathcal{R} , luego 3.18 puede ser tan precisa como 3.17 y se puede seguir más allá, por ejemplo en la dirección de 3.13. Renner definió la función largo en [40] pero no satisface la condición 3.17 al reemplazar $w \in W$ con $\sigma \in \mathcal{R}$ y no satisface 3.13 con la suma sobre $\sigma \in \mathcal{R}$. Si podemos interpretar $l(\sigma)$ en términos del sistema de raíces subyacente probando un análogo de la fórmula $l(w) = n(w)$ luego podemos re-examinar para cualquier cuerpo \mathbb{F} , varios aspectos combinatorios y/o de teoría de representaciones de G , los que envuelven la función $n(w)$ y ver qué resultados hay si G es reemplazado por M .

En adelante consideramos $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ y $M = M_n(\mathbb{F}_q)$. El objetivo de esta sección es describir $\mathcal{H}(M, B)$ en el caso $M = M_n(\mathbb{F}_q)$. El anillo $\mathcal{H}(G, B)$ fue estudiado por Iwahori en [17] para el caso que G es un grupo de Chevalley finito y B un subgrupo de Borel. Se definirá la función largo $l(\sigma)$ y se le dará una fórmula en el sistema de raíces, análogamente a $l(w) = n(w)$.

3.6.1. La función largo en \mathcal{R}

Sea \mathbb{F} un cuerpo y $\mathcal{R} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ el monoide de Rook. Sea $W \subseteq GL_n(\mathbb{F})$ el grupo de matrices de permutación y sea $S = \{(12), (23), \dots, (n-1, n)\}$ el conjunto de generadores donde $(k, k+1) \in GL_n(\mathbb{F})$ intercambia los vectores de la base para \mathbb{F}^n que están indexados por k y $k+1$. No identificamos W con el grupo simétrico en $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$ porque W tendrá acciones por izquierda y por derecha en \mathbf{n} . Para $0 \leq r \leq n$, sea \mathcal{R}_k el conjunto de elementos de rango k en \mathcal{R} . Notemos que \mathcal{R}_0 es la matriz de ceros. Para evitar ambigüedad asumamos que $k \geq 0$. Un elemento $\sigma \in \mathcal{R}_k$ es de la forma

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^r E_{i_\nu j_\nu},$$

donde $I(\sigma) := \{i_1, \dots, i_k\}$ y $J(\sigma) := \{j_1, \dots, j_k\}$ son subconjuntos de \mathbf{n} de tamaño k y cada E_{ij} es una matriz unidad con 1 en la posición (i, j) y 0 en cualquier otro lado. Escribamos $i_\nu \sigma = j_\nu$ y $\sigma j_\nu = i_\nu$. Entonces

$$\sum_{i \in I(\sigma)} E_{i, i\sigma} = \sigma = \sum_{j \in J(\sigma)} E_{\sigma j, j}.$$

Las funciones $i \mapsto i\sigma$ de $I(\sigma)$ a $J(\sigma)$ y $j \mapsto \sigma j$ de $J(\sigma)$ a $I(\sigma)$ son biyectivas. Si $w \in W$ luego $I(w) = \mathbf{n} = J(w)$ y $wi = iw^{-1}$ para todo $i \in \mathbf{n}$. Como $E_{ij}^\top = E_{ji}$ tenemos que $I(\sigma) = J(\sigma^\top)$ y $J(\sigma) = I(\sigma^\top)$. También $(i\sigma)\sigma^\top = i$ para $i \in I(\sigma)$ y $\sigma^\top(\sigma j) = j$ para $j \in J(\sigma)$. El grupo $W \times W$ actúa en \mathcal{R} por

$$(w, w')\sigma = w\sigma w'^{-1} \quad \text{para } \sigma \in \mathcal{R} \text{ y } w, w' \in W.$$

Como la multiplicación izquierda (derecha) por $w \in W$ permuta las filas (columnas) de una matriz, dos elementos de \mathcal{R} están en la misma órbita $W \times W$ si y sólo si tienen el mismo rango. Por esto las órbitas $W \times W$ en \mathcal{R} son conjuntos \mathcal{R}_k para $0 \leq k \leq n$. Se definirá la función largo $l(\sigma)$ para $\sigma \in \mathcal{R}_k$ de tal manera que se cumpla

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}_k} q^{l(\sigma)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2 [k]!. \quad (3.19)$$

Notemos que ésta es la fórmula 3.13 dada sin ninguna referencia a M . Para $k = n$ se tiene 3.7 con $n(w)$ en lugar de $l(w)$. Iwahori [17] probó que $\mathcal{H}(G, B)$ es generado por

los T_s para $s \in S$ y que la multiplicación en $\mathcal{H}(G, B)$ está determinada por

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{si } l(sw) = l(w) + 1 \\ qT_{sw} + (q-1)T_w & \text{si } l(sw) = l(w) - 1. \end{cases}$$

El anillo $\mathcal{H}(M, B)$ tiene una \mathbb{Z} -base de elementos T_σ con $\sigma \in \mathcal{R}$. Está generado por TR_s para $s \in S$ junto con un elemento adicional T_ν donde $\nu \in \mathcal{R}$ es un elemento nilpotente

$$\nu = E_{12} + \cdots + E_{n-1,n}$$

y E_{ij} es la matriz de unidades. La multiplicación en $\mathcal{H}(M, B)$ es determinada por las fórmulas

$$T_s T_\sigma = \begin{cases} qT_\sigma & \text{si } l(s\sigma) = l(\sigma) \\ T_{s\sigma} & \text{si } l(s\sigma) = l(\sigma) + 1 \\ qT_{s\sigma} + (q-1)T_\sigma & \text{si } l(s\sigma) = l(\sigma) - 1 \end{cases}$$

y

$$T_\nu T_\sigma = q^{l(\sigma) - l(\nu\sigma)} T_{\nu\sigma}.$$

Hay fórmulas similares para la multiplicación derecha de T_σ por T_s y T_ν . Si R es cualquier anillo conmutativo tal que $R \subseteq K$, definamos las K -álgebras $\mathcal{H}_K(G, B) = K \otimes_R \mathcal{H}(G, B)$ y $\mathcal{H}_K(M, B) = K \otimes_R \mathcal{H}(M, B)$. El isomorfismo

$$\mathcal{H}_\mathbb{C}(G, B) \cong \mathbb{C}[W]$$

del álgebra de Iwahori-Hecke sobre \mathbb{C} con el álgebra de grupos del grupo de Weyl. Solomon prueba que

$$\mathcal{H}_\mathbb{C}(M, B) \cong \mathbb{C}[\mathcal{R}],$$

lo que conduce a una presentación de $\mathcal{H}(M, B)$ en términos de los generadores T_s y T_v de manera análoga a la presentación de Iwahori para $\mathcal{H}(G, B)$

$$\begin{aligned} T_s^2 &= q \cdot 1 + (q-1)T_s & \text{si } s \in S \\ T_s T_{s'} &= T_{s'} T_s & \text{si } ss' = s's \\ T_s T_{s'} T_s &= T_{s'} T_s T_{s'} & \text{si } ss's = s'ss' \end{aligned}$$

para $\mathcal{H}(G, B)$.

Definamos un grafo con conjunto de vértices \mathcal{R}_k como sigue. Digamos que dos vértices σ, τ son adyacentes si existe $s \in S$ con $\tau = s\sigma$ ó si existe $s \in S$ con $\tau = \sigma s$. El grafo es conexo porque S genera a W y \mathcal{R}_k es una órbita $W \times W$. Para $\tau, \sigma \in \mathcal{R}_k$ sea $d(\tau, \sigma)$ la distancia en el grafo de τ a σ . Esto está dado por

$$d(\tau, \sigma) = \text{mín} \{l(w) + l(w') \mid w, w' \in W \text{ y } \sigma = w\tau w'\}. \quad (3.20)$$

Es natural definir $l(\sigma) = d(\tau, \sigma)$ para algún τ escogido el cual luego será el único elemento en \mathcal{R}_k de largo cero. La elección correcta de τ es sugerida por 3.19, ay que debe ser cierta. Sea

$$v = E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n-1, n}. \quad (3.21)$$

Si $0 \leq k \leq n$, luego

$$v_r = v^{n-r} = E_{1, n-r+1} + E_{2, n-r+2} + \cdots + E_{r, n} \quad (3.22)$$

tiene rango k . Escogemos v_k como el elemento de rango cero y luego definimos

$$l(\sigma) = \text{mín} \{l(w) + l(w') \mid w, w' \in W \text{ y } \sigma = wv_k w'\} \quad (3.23)$$

para $\sigma \in \mathcal{R}_k$. Como consecuencia de la definición tenemos que $|l(s\sigma) - l(\sigma)| \leq 1$ y $|l(\sigma s) - l(\sigma)| \leq 1$ para $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Renner [40] definió $l(\sigma) = \text{mín} \{l(w) \mid \sigma \in wI(\mathcal{R})\}$, donde $I(\mathcal{R})$ es el conjunto de idempotentes de \mathcal{R} . Esto no es igual que 3.23 porque entrega $|I(\mathcal{R})| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ elementos de largo cero en \mathcal{R}_k .

El objetivo de esta subsección es describir en términos combinatorios $l(\sigma)$ para $\sigma \in \mathcal{R}$ y probar 3.19. Para comenzar Solomon se basa en [17] con algunos cambios de

notación. Sea

$$\Delta = \{(i, j) \in \mathbf{n} \times \mathbf{n} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\} \quad (3.24)$$

y

$$\Delta^+ = \{(i, j) \in \Delta \mid i < j\}, \quad \Delta^- = \{(i, j) \in \Delta \mid i > j\}. \quad (3.25)$$

Podemos ver a Δ como un sistema de raíces de tipo A_{n-1} y a Δ^+ y Δ^- como el conjunto de raíces positivas y negativas. Sea W actuando en Δ por $w(i, j) = (w_i, w_j)$ para $w \in W$. Si $s \in S$ es la transposición de k y $k+1$, sea $\alpha_s = (k, k+1) \in \Delta^+$ denota la raíz simple correspondiente. Luego

$$s(\Delta^+ - \{\alpha_s\}) = \Delta^+ - \{\alpha_s\}. \quad (3.26)$$

Chevalley [10] introdujo para cada $w \in W$ una partición del conjunto de raíces positivas en distintos subconjuntos: si $w \in W$ sea

$$\begin{aligned} \Psi'(w) &= \{\alpha \in \Delta^+ \mid w^{-1}\alpha \in \Delta^+\} \\ \Psi''(w) &= \{\alpha \in \Delta^+ \mid w^{-1}\alpha \in \Delta^-\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Entonces

$$\Delta^+ = \Psi'(w) \sqcup \Psi''(w). \quad (3.28)$$

Notemos que $(i, j) \in \Psi''(w)$ si y sólo si (j, i) es una inversión de la permutación $k \mapsto w_k$ de \mathbf{n} . Entonces $n(w) = |\Psi''(w)|$. 3.26 implica que la función $w \mapsto \Psi''(w)$ satisface la 'condición cocíclica':

$$\Psi''(sw) = s\Psi''(w) \cup \{\alpha_s\} \quad \text{si } \alpha_s \in \Psi'(w) \quad (3.29)$$

$$\Psi''(w) = s\Psi''(sw) \cup \{\alpha_s\} \quad \text{si } \alpha_s \in \Psi''(w), \quad (3.30)$$

donde las uniones son disjuntas y por lo tanto

$$n(sw) = \begin{cases} n(w) + 1 & \text{si } \alpha_s \in \Psi'(w) \\ n(w) - 1 & \text{si } \alpha_s \in \Psi''(w). \end{cases} \quad (3.31)$$

Análogo a 3.31 Solomon probó varias fórmulas. Para $K \subseteq \mathbf{n}$ definimos

$$\Delta_{00}(K) = \{(i, j) \in \Delta \mid i \notin K \text{ and } j \notin K\} \quad (3.32)$$

$$\Delta_{01}(K) = \{(i, j) \in \Delta \mid i \notin K \text{ and } j \in K\} \quad (3.33)$$

$$\Delta_{10}(K) = \{(i, j) \in \Delta \mid i \in K \text{ and } j \notin K\} \quad (3.34)$$

$$\Delta_{11}(K) = \{(i, j) \in \Delta \mid i \in K \text{ and } j \in K\}. \quad (3.35)$$

Entonces

$$\Delta = \Delta_{00}(K) \sqcup \Delta_{10}(K) \sqcup \Delta_{01}(K) \sqcup \Delta_{11}(K). \quad (3.36)$$

Si $a, b \in \{0, 1\}$ y $\sigma \in \mathcal{R}$, definamos los subconjuntos $\Psi_{ab}(\sigma)$ y $\Phi_{ab}(\sigma)$ de Δ por

$$\Psi_{ab}(\sigma) = \Delta_{ab}(I(\sigma)) \quad \text{y} \quad \Phi_{ab}(\sigma) = \Delta_{ab}(J(\sigma)). \quad (3.37)$$

Solomon hace la convención en cuanto a subconjuntos de Δ , que es la que usa en su investigación. Si $\Gamma \subset \Delta$, podemos escribir $\Gamma^+ = \Gamma \cap \Delta^+$. Definamos

$$\Psi'(\sigma) = \{(i, j) \in \Psi_{11}^+(\sigma) \mid (i\sigma, j\sigma) \in \Delta^+\} \quad (3.38)$$

$$\Psi''(\sigma) = \{(i, j) \in \Psi_{11}^+(\sigma) \mid (i\sigma, j\sigma) \in \Delta^-\} \quad (3.39)$$

$$\Phi'(\sigma) = \{(i, j) \in \Phi_{11}^+(\sigma) \mid (\sigma i, \sigma j) \in \Delta^+\} \quad (3.40)$$

$$\Phi''(\sigma) = \{(i, j) \in \Phi_{11}^+(\sigma) \mid (\sigma i, \sigma j) \in \Delta^-\}. \quad (3.41)$$

Si $\sigma = w \in W$ luego todos los conjuntos $\Psi_{00}(w), \Psi_{01}(w), \Psi_{10}(w), \Phi_{00}(w), \Phi_{01}(w), \Phi_{10}(w)$ son vacíos y los conjuntos $\Psi'(w), \Psi''(w)$ son como en 3.27. Como $J(\sigma) = I(\sigma^*)$, donde σ^* es σ sin las filas y columnas con entradas en $\{0\}$, tenemos que

$$\Phi_{ab}(\sigma) = \Psi_{ab}(\sigma^*) \quad \text{y} \quad \Phi_{ab}^+(\sigma) = \Psi_{ab}^+(\sigma^*) \quad (3.42)$$

para $a, b \in \{0, 1\}$. También tenemos:

$$\Phi'(\sigma) = \Psi'(\sigma^*) \quad \text{y} \quad \Phi''(\sigma) = \Psi''(\sigma^*). \quad (3.43)$$

Para cada Ψ con multiplicación a la izquierda $\sigma \mapsto s\sigma$ hay una correspondencia con Φ concerniente a la multiplicación por la derecha $\sigma \mapsto \sigma s$ la cual puede deducirse si reemplazamos σ por σ^* y usamos $(s\sigma)^* = \sigma^* s$. Por ejemplo 3.29 implica que

$$\Phi''(ws) = s\Phi''(w) \cup \{\alpha_s\} \text{ si } \alpha_s \in \Phi'(w) \quad (3.44)$$

$$\Phi''(w) = s\Phi''(ws) \cup \{\alpha_s\} \text{ si } \alpha_s \in \Phi''(w). \quad (3.45)$$

Solomon evita la dualidad (J, Ψ) y (I, Φ) , y escoge Ψ o Φ a conveniencia.

Lema 3.6.1. *La función $(i, j) \mapsto (j\sigma, i\sigma)$ es biyectiva desde $\Psi''(\sigma)$ a $\Psi''(\sigma^*)$.*

Demostración. Supongamos que $(i, j) \in \Psi''(\sigma)$. Luego $i \in I(\sigma)$, $j \in I(\sigma)$, $i < j$ y $i\sigma > j\sigma$. Entonces $j\sigma \in J(\sigma)$, $i\sigma \in J(\sigma)$, $j\sigma < i\sigma$ y $(j\sigma)\sigma^* = j > i = (i\sigma)\sigma^*$, por lo que $(j\sigma, i\sigma) \in \Psi''(\sigma^*)$. Reemplazando σ por σ^* vemos que si $(i', j') \in \Psi''(\sigma^*)$ luego $(j'\sigma^*, i'\sigma^*) \in \Psi''(\sigma^{**}) = \Psi''(\sigma)$. \square

Definición 3.6.1. *Definamos $n : \mathcal{R} \mapsto \mathbb{N}$ por $n(\sigma) = |\Psi''(\sigma)|$.*

Si $\sigma = w \in W$, esto concuerda con $n(w)$ definido al principio de la sección. Como consecuencia del Lema 3.6.1 que

$$n(\sigma^*) = m(\sigma). \quad (3.46)$$

Si $\sigma = v_k$ luego $I(\sigma) = \{1, \dots, k\}$ y $i\sigma = i + n - r$ para $i \in I(\sigma)$ entonces $\Psi''(\sigma)$ es vacío y por lo tanto $n(\sigma) = 0$. Si $w \in W$ y $n(w) = 0$ luego $w = 1$. No es cierto que $\sigma \in \mathcal{R}_k$ y $n(\sigma) = 0$ luego $\sigma = v_k$. Para superar esta dificultad Solomon introduce una segunda función $m : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}$.

Definición 3.6.2. *Si $K \subseteq \mathbf{n}$ definamos*

$$m_{01}(K) = |\Delta_{01}^+(K)| \quad \text{y} \quad m_{10}(K) = |\Delta_{10}^+(K)|.$$

Lema 3.6.2. Si K es un k -subconjunto de \mathbf{n} luego

$$m_{01}(K) = \sum_{k \in K} (k-1) - \frac{r(r-1)}{2} \quad (3.47)$$

$$m_{10}(K) = \sum_{k \in K} (n-k) - \frac{r(r-1)}{2}. \quad (3.48)$$

Demostración. Debemos probar que

$$|\Delta_{01}^+(K)| = \sum_{k \in K} (k-1) - \frac{r(r-1)}{2} \quad (3.49)$$

$$|\Delta_{10}^+(K)| = \sum_{k \in K} (n-k) - \frac{r(r-1)}{2}.$$

Escribamos $K = \{k_1, \dots, k_r\}$ donde $k_1 < \dots < k_r$. Para $1 \leq \nu \leq r$ sea

$$\Delta_{01}^\nu(K) = \{(i, j) \in \Delta_{01}^+(K) \mid j = k_\nu\}.$$

Como

$$\Delta_{01}^\nu(K) = \{(1, k_\nu), (2, k_\nu), \dots, (k_\nu - 1, k_\nu)\} - \{(k_1, k_\nu), (k_2, k_\nu), \dots, (k_{\nu-1}, k_\nu)\}$$

tenemos que $|\Delta_{01}^\nu(K)| = (k_\nu - 1) - (\nu - 1)$. Ya que $\Delta_{01}(K) = \bigsqcup_{\nu=1}^r \Delta_{01}^\nu(K)$, esto prueba que la primera fórmula. La segunda fórmula es probada de la misma manera de forma análoga. \square

Definición 3.6.3. Si $\sigma \in \mathcal{R}$, sea

$$m_{01}(\sigma) = m_{01}(I(\sigma)) = |\Psi_{01}^+(\sigma)|, \quad m_{10}(\sigma) = m_{10}(J(\sigma)) = |\Phi_{10}^+(\sigma)|$$

y sea

$$m(\sigma) = m_{01}(\sigma) + m_{10}(\sigma).$$

La definición y 3.6.2 implican que si $\sigma \in \mathcal{R}_k$ luego

$$m(\sigma) = \sum_{i \in I(\sigma)} (i-1) + \sum_{j \in J(\sigma)} (n-j) - r(r-1). \quad (3.50)$$

Como $J(\sigma) = I(\sigma^*)$, desde la Definición 3.6.3 y el Lema 3.6.2 podemos decir que $m_{01}(\sigma) + m_{10}(\sigma^*) = r(n - r)$. De manera similar, ya que $I(\sigma) = J(\sigma^*)$ tenemos que $m_{10}(\sigma) + m_{01}(\sigma^*) = r(n - r)$. Por esto si $\sigma \in \mathcal{R}_k$ (aquí usamos k en lugar de r), luego

$$m(\sigma) + m(\sigma^*) = 2k(n - k). \quad (3.51)$$

Definamos $p : \mathcal{R} \mapsto \mathbb{N}$ por $p(\sigma) = m(\sigma) + n(\sigma)$. Probaremos más adelante que $p(\sigma) = l(\sigma)$.

Lema 3.6.3. *Si $\sigma \in \mathcal{R}_k$ luego $p(\sigma) = 0$ si y sólo si $\sigma = v_k$.*

Demostración. Ya vimos que $\Psi_{01}^+(v_k) = \Phi_{10}^+(v_k) = \{\emptyset\}$. Por lo que también $\Psi''(v_k)$ es vacío. Por lo tanto $p(v_k) = 0$. Supongamos que conversamente $\sigma \in \mathcal{R}_k$ y que $p(\sigma) = 0$. Luego $m(\sigma) = 0$ y $n(\sigma) = 0$. Como $m(\sigma) = 0$ tenemos que $|\Psi_{01}^+(\sigma)| = 0 = |\Phi_{10}^+(\sigma)|$. Como $I(\sigma)$ y $J(\sigma)$ son k -subconjuntos de \mathbf{n} , desde el Lema 3.6.2 que $I(\sigma) = \{1, \dots, k\}$ y $J(\sigma) = \{n - k + 1, \dots, n\}$. Como $|\Psi''(\sigma)| = n(\sigma) = 0$, tenemos que $i\sigma < j\sigma$ para todo $1 \leq i < j \leq k$. Como $i\sigma \in J(\sigma) = \{n - k + 1, \dots, n\}$ y la función $i \mapsto i\sigma$ es biyectiva de $I(\sigma)$ a $J(\sigma)$ debemos tener que $i\sigma = n - k + i$ para $1 \leq i \leq k$. Entonces $\sigma = v_k$. \square

Considerando 3.36, 3.37 y 3.38, cada $\sigma \in \mathcal{R}$ determina una partición de Δ^+ en cinco partes:

$$\Delta^+ = \Psi_{00}^+(\sigma) \sqcup \Psi_{01}^+(\sigma) \sqcup \Psi_{10}^+(\sigma) \sqcup \Psi'(\sigma) \sqcup \Psi''(\sigma). \quad (3.52)$$

Esto reemplaza la partición en dos partes en 3.28, correspondiente a un elemento $w \in W$. Necesitamos encontrar análogos de 3.31 para los conjuntos en esta partición. Esto será probado más adelante. Si $w \in W$ luego $I(w\sigma) = wI(\sigma)$ y $I(\sigma w) = I(\sigma)$. Esto implica que para $a, b \in \{0, 1\}$,

$$\Psi_{ab}(w\sigma) = w\Psi_{ab}(\sigma) \quad \text{y} \quad \Psi_{ab}(\sigma w) = \Psi_{ab}(\sigma). \quad (3.53)$$

Lema 3.6.4. *Supongamos que $a, b \in \{0, 1\}$, $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Luego*

$$s(\Psi_{ab}^+(s) - \{\alpha_s\}) = \Psi_{ab}^+(s\sigma) - \{\alpha_s\} \quad \text{y} \quad s(\Psi''(s) - \{\alpha_s\}) = \Psi''(s\sigma) - \{\alpha_s\}. \quad (3.54)$$

Demostración. Como $\Psi_{ab}^+(\sigma) - \{\alpha_s\} = (\Delta^+ - \{\alpha_s\}) \cap \Psi_{ab}(\sigma)$, la primera afirmación proviene de 3.26 y 3.53. Supongamos que $(i, j) \in \Psi''(\sigma) - \{\alpha_s\}$. Luego $i \in I(\sigma)$, $j \in I(\sigma)$, $i < j$ e $i\sigma > j\sigma$. Entonces $si \in I(s\sigma)$, $sj \in I(s\sigma)$ y $si < sj$ porque $(i, j) \neq \{\alpha_s\}$. Como $(si)(s\sigma) = (is)(\sigma) = i\sigma > j\sigma = (js)(s\sigma) = (sj)(s\sigma)$, por consiguiente $(si, sj) \in \Psi''(s\sigma)$. Entonces $s(\Psi''(\sigma) - \{\alpha_s\}) \subseteq \Psi''(s\sigma)$ y así $s(\Psi''(\sigma) - \{\alpha_s\}) \subseteq \Psi''(s\sigma) - \{\alpha_s\}$. Y reemplazando σ por $s\sigma$ se obtiene la inclusión recíproca. \square

Lema 3.6.5. *Supongamos $a, b \in \{0, 1\}$, $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Luego*

$$\alpha_s \in \Psi_{ab}(\sigma) \iff \alpha_s \in \Psi_{ba}(s\sigma) \quad y \quad \alpha_s \in \Psi'(\sigma) \iff \alpha_s \in \Psi''(s\sigma).$$

Demostración. Para probar lo primero supongamos que por ejemplo $a = 0$ y $b = 1$. Escribamos $\alpha_s = (k, k+1)$ donde $1 \leq k \leq n-1$. Luego por 3.53

$$\begin{aligned} \alpha_s \in \Psi_{01}(\alpha) &\iff k \notin I(\sigma), \\ k+1 \in I(\sigma) &\iff sk \in I(\sigma), \\ s(k+1) \notin I(\sigma) &\iff k \in I(s\sigma) \text{ y} \\ k+1 \notin I(s\sigma) &\iff \alpha_s \in \Psi_{10}(s\sigma). \end{aligned}$$

\square

La demostración de la segunda afirmación es análoga.

Lema 3.6.6. *Supongamos que $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. Si $\alpha_s \in \Psi_{00}(\sigma)$ luego $s\sigma = \sigma$.

2. Si $\alpha_s \in \Psi_{01}(\sigma)$, luego

a) $\Psi_{01}^+(\sigma) = s\Psi_{01}^+(s\sigma) \sqcup \{\alpha_s\}$.

b) $\Psi_{10}^+(s\sigma) = s\Psi_{10}^+(\sigma) \sqcup \{\alpha_s\}$.

c) $\Psi''(s\sigma) = s\Psi''(\sigma)$

3. Si $\alpha_s \in \Psi_{10}(\sigma)$, luego

a) $\Psi_{10}^+(\sigma) = s\Psi_{10}^+(s\sigma) \sqcup \{\alpha_s\}$.

$$\text{b) } \Psi_{01}^+(s\sigma) = s\Psi_{01}(\sigma) \sqcup \{\alpha_s\}.$$

$$\text{c) } \Psi''(s\sigma) = s\Psi''(\sigma).$$

4. Si $\alpha_s \in \Psi_{11}(\sigma)$, luego

$$\text{a) } \Psi_{01}^+(s\sigma) = s\Psi_{01}^+(\sigma).$$

$$\text{b) } \Psi_{10}^+(s\sigma) = s\Psi_{10}^+(\sigma).$$

$$\text{c) } \Psi''(s\sigma) = s\Psi''(\sigma) \sqcup \{\alpha_s\} \text{ si } \alpha_s \in \Psi'(\sigma).$$

$$\text{d) } \Psi''(\sigma) = s\Psi''(s\sigma) \sqcup \{\alpha_s\} \text{ si } \alpha_s \in \Psi''(\sigma).$$

Demostración. Escribamos $\alpha_s = (k, k+1)$ donde $1 \leq k \leq n-1$. Para probar el 1. supongamos que $\alpha_s \in \Psi_{00}(\sigma)$. Luego $k \notin I(\sigma)$ y $k+1 \notin I(\sigma)$. Por esto $si = i$ para todo $i \in I(\sigma)$. Como $sE_{ij} = E_{si,j}$ para todo $i, j \in \mathbf{n}$ tenemos que $s\sigma = \sigma$. Esto prueba 1.

Podemos deducir 2.–4. desde 3.6.4, 3.6.5 y del hecho que la unión 3.52 es disjunta. Por lo tanto $\alpha_s \notin \Psi_{10}(\sigma)$, por lo que $\alpha_s \notin \Psi_{01}(s\sigma)$. Por consiguiente de 3.6.4 que $s(\Psi_{10}^+(s\sigma) - \{\alpha_s\}) = s\Psi_{10}^+(\sigma)$. Esto prueba 2.a) y 2.b).

Como $\alpha_s \in \Psi_{01}(\sigma)$, tenemos que $\alpha_s \notin \Psi_{11}(\sigma)$ y por lo tanto $\alpha_s \notin \Psi_{11}(s\sigma)$. Esto implica que $\alpha_s \notin \Psi''(\sigma)$ y $\alpha_s \notin \Psi''(s\sigma)$. Entonces 2.c) es consecuencia de 3.6.4.

Para probar 3. supongamos que $\alpha_s \in \Psi_{10}(\sigma)$. Luego $\alpha_s \in \Psi_{01}(s\sigma)$ por 3.6.5. Por tanto podemos usar 2. con $s\sigma$ en lugar de s . Esto prueba 3.

Para probar 4. supongamos que $\alpha_s \in \Psi_{11}(\sigma)$. Luego $\alpha_s \notin \Psi_{01}(\sigma)$ y $\alpha_s \notin \Psi_{10}(\sigma)$, entonces $\alpha_s \notin \Psi_{01}(s\sigma)$ y $\alpha_s \notin \Psi_{10}(s\sigma)$ por 3.6.5. Entonces 4.a) y 4.b) son consecuencia de 3.6.4. Si $\alpha_s \in \Psi'(\sigma)$, luego $\alpha_s \notin \Psi''(\sigma)$ y también $\alpha_s \in \Psi''(s\sigma)$ por 3.6.5. Así, 4.c) es consecuencia de 3.6.4. Si $\alpha_s \in \Psi''(\sigma)$, luego $\alpha_s \in \Psi''(s\sigma)$, entonces 4.d) es consecuencia de 4.c) reemplazando σ por $s\sigma$. \square

Lema 3.6.7. *Supongamos que $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Luego se cumple lo siguiente:*

$$1. \text{ Si } \alpha_s \in \Psi_{00}(\sigma), \text{ luego } s\sigma = \sigma.$$

$$2. \text{ Si } \alpha_s \in \Psi_{01}(\sigma), \text{ luego } m(s\sigma) = m(\sigma) - 1 \text{ y } n(s\sigma) = n(\sigma).$$

$$3. \text{ Si } \alpha_s \in \Psi_{10}(\sigma), \text{ luego } m(s\sigma) = m(\sigma) + 1 \text{ y } n(s\sigma) = n(\sigma).$$

$$4. \text{ Si } \alpha_s \in \Psi_{11}(\sigma), \text{ luego } m(s\sigma) = m(\sigma) \text{ y}$$

$$n(s\sigma) = \begin{cases} n(\sigma) + 1 & \text{si } \alpha_s \in \Psi'(\sigma) \\ n(\sigma) - 1 & \text{si } \alpha_s \in \Psi''(\sigma). \end{cases}$$

Demostración. A partir de 3.53 podemos ver que $m_{10}(s\sigma) = |\Psi_{10}^+(\sigma^\top s)| = |\Psi_{10}^+(\sigma^\top)| = m_{10}(\sigma)$. Por esto podemos reemplazar m por m_{01} en cada afirmación 2.–4.. Los enunciados siguen del Lema 3.6.6. Notemos que los enunciados 2.b), 2.b) y 4.b) del Lema 3.6.6 no son usados en esta prueba. \square

Corolario 5. Si $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$, luego $s\sigma = \sigma$ o $p(s\sigma) = p(\sigma) \pm 1$.

Notemos que los enunciados del Lema 3.6.7 que comparan $m(s\sigma)$ con $m(\sigma)$ pueden ser expresados en una sola fórmula: si $a, b \in \{0, 1\}$, luego

$$\alpha_s \in \Psi_{ab}(\sigma) \implies m(s\sigma) - m(\sigma) = a - b. \quad (3.55)$$

Recordemos que $\Phi_{ab}(\sigma) = \Psi_{ab}(\sigma^\top)$. Como $s\sigma^\top = (\sigma s)^\top$ y $\text{rango}(\sigma) = \text{rango}(\sigma s)$, el Lema 3.6.7 implica que si $a, b \in \{0, 1\}$, luego

$$\alpha_s \in \Phi_{ab}(\sigma) \implies m(\sigma s) - m(\sigma) = b - a. \quad (3.56)$$

Notemos que $n(\sigma^\top) = n(\sigma)$ por 3.46. También $\Phi'(\sigma) = \Psi'(\sigma^\top o p)$ y $\Phi''(\sigma) = \Psi''(\sigma^\top)$ por 3.43. Por tanto el análogo al Lema 3.6.7 para la multiplicación derecha es el siguiente lema.

Lema 3.6.8. Supongamos que $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Luego se cumple lo siguiente:

1. Si $\alpha_s \in \Phi_{00}(\sigma)$, luego $\sigma s = \sigma$.
2. Si $\alpha_s \in \Phi_{01}(\sigma)$, luego $m(\sigma s) = m(\sigma) - 1$ y $n(\sigma s) = n(\sigma)$.
3. Si $\alpha_s \in \Phi_{10}(\sigma)$, luego $m(\sigma s) = m(\sigma) + 1$ y $n(\sigma s) = n(\sigma)$.
4. Si $\alpha_s \in \Phi_{11}(\sigma)$, luego $m(\sigma s) = m(\sigma)$ y

$$n(\sigma s) = \begin{cases} n(\sigma) + 1 & \text{si } \alpha_s \in \Phi'(\sigma) \\ n(\sigma) - 1 & \text{si } \alpha_s \in \Phi''(\sigma). \end{cases}$$

Corolario 6. Si $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$, luego $\sigma s = \sigma$ o $p(\sigma s) = p(\sigma) \pm 1$.

Si $w \in W$ y $w \neq 1$, luego existe $s \in S$ tal que $n(sq) = n(w) - 1$ y existe un $s \in S$ (posiblemente diferente) tal que $n(ws) = n(w) - 1$. Esto quiere decir que podemos decrecer

$l(w) = n(w)$ a elección de la multiplicación por la izquierda ó por la multiplicación a su derecha por un elemento de S .

Lo que sucede con \mathcal{R} es más restrictivo, porque podríamos no tener una elección al multiplicar por la izquierda o por la derecha.

Lema 3.6.9. *Si $\sigma \mathcal{R}_k y \sigma \neq v_k$, luego existe $s \in S$ tal que $p(s\sigma) = p(\sigma) - 1$ ó $p(\sigma s) = p(\sigma) - 1$.*

Demostración. Primero supongamos que $I(\sigma) \neq \{1, \dots, k\} = \{i_1, \dots, i_k\}$, donde $i_1 < \dots < i_k$. Luego (i) $i_1 > 1$ o bien (ii) existe $v \in \{2, \dots, k\}$ tal que $i_v - i_{v-1} > 1$. Si ocurre (i), sea $j = i_1 - 1$. Si ocurre (ii), sea $j = i_v - 1$. Luego $j \notin I(\sigma)$ y $j + 1 \in I(\sigma)$, entonces $(j, j + 1) \in \Psi_{01}(\sigma)$. Definamos $s \in S$ por $\alpha_s = (j, j + 1)$. Por consecuencia del Lema 3.6.7.2, que $M(s\sigma) = m(\sigma) - 1$ y $n(s\sigma) = n(\sigma)$, entonces $p(s\sigma) = p(\sigma) - 1$. Por esto podemos asumir que $I(\sigma) = \{1, \dots, k\}$. Si $J(\sigma) \neq \{n - k + 1, \dots, n\}$, se tiene que por un argumento análogo usado en el Lema 3.6.8.3 que existe $s \in S$ con $p(\sigma s) = p(\sigma) - 1$. Por tanto podemos asumir que $I(\sigma) = \{1, \dots, k\}$ y que $J(\sigma) = \{n - k + 1, \dots, n\}$. Luego $\sigma = \sum_{i=1}^k E_{i, i\sigma}$, donde $\{1\sigma, \dots, k\sigma\} = \{n - k + 1, \dots, n\}$. Como $\sigma \neq v_k$, existe $j \in \{1, \dots, k - 1\}$ tal que $j\sigma > (j + 1)\sigma$. Por tanto $(j, j + 1) \in \Psi''(\sigma)$. Definamos $s \in S$ por $\alpha_s = (j, j + 1)$. Por consecuencia del Lema 3.6.7.4 tenemos que $p(s\sigma) = p(\sigma) - 1$. \square

Proposición 3.6.1. *Si $\sigma \in \mathcal{R}_k$, luego $l(\sigma) = m(\sigma) + n(\sigma)$.*

Demostración. Primero veamos que $p(\sigma) \leq l(\sigma)$ por inducción en $l(\sigma)$. Escribamos $\sigma = wv_k w'$ donde $l(2) + l(w') = l(\sigma)$. Si $l(\sigma) = 0$, luego $w = 1 = w'$, entonces $\sigma = v_k$ y por tanto $p(\sigma) = 0$ por el Lema 3.6.3. Supongamos que $l(\sigma) > 0$. Luego $l(w) > 0$ ó $l(w') > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $l(w) > 0$. Expresemos a $w = sw''$, donde $s \in S$, $w'' \in W$ y $l(w'') = l(w) - 1$. Sea $\tau = s\sigma = w''v_k w'$. Luego $l(\tau) < l(\sigma)$. Por el Corolario 5 y la hipótesis de inducción, tenemos que $p(\sigma) \leq p(\tau) + 1 \leq l(\tau) + 1 \leq l(\sigma)$.

Ahora veamos la desigualdad contraria: $l(\sigma) \leq p(\sigma)$ por inducción en $p(\sigma)$. Si $p(\sigma) = 0$, luego $\sigma = v_k$ por el Lema 3.6.3, entonces $l(\sigma) = 0$. Si $p(\sigma) > 0$, luego $\sigma \neq v_k$, entonces por el Lema 3.6.9 existe $s \in S$ tal que $p(s\sigma) < p(\sigma)$ ó $p(\sigma s) < p(\sigma)$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $p(s\sigma) < p(\sigma)$. Luego, por inducción $l(\sigma) \leq l(s\sigma) + 1 \leq p(s\sigma) + 1 \leq p(\sigma)$. \square

Corolario 7. *Supongamos que $\sigma \in \mathcal{R}$ y $s \in S$. Si $l(s\sigma) = l(\sigma)$, luego $\sigma s = \sigma$. Si $l(\sigma s) = l(\sigma)$, luego $\sigma s = \sigma$.*

Dada la Proposición 3.6.1, el caso en que $l(s\sigma) = l(\sigma) + 1$ y $l(\sigma s) = l(\sigma) - 1$ está dado por el Lema 3.6.7. De manera similar, el caso en que $l(\sigma s) = l(\sigma) + 1$ y $l(s\sigma) = l(\sigma) - 1$

está dado por el Lema 3.6.8. Notemos que aunque $l(w) = l(w^{-1})$ para todo $w \in W$, la afirmación análoga es $l(s^\top) = l(\sigma)$ para todo $\sigma \in \mathcal{R}$ es falsa. De hecho, como $n(\sigma^\top) = n(\sigma)$, el Lema 3.51 muestra que raramente tenemos que $l(\sigma^\top) = l(\sigma)$.

Teorema 3.6.1. *Sea \mathcal{R} el monoide de Rook, sea l la función largo en \mathcal{R} y sea q una indeterminada. Si $0 \leq r \leq n$, luego*

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}_k} q^{l(\sigma)} = [k]! \binom{n}{k}^2.$$

Demostración. Sea $W_k \subseteq GL_k(\mathbb{F})$ el grupo de matrices de permutación de $k \times k$. Definamos la función

$$\begin{aligned} h: \mathcal{R}_k &\rightarrow W_k \\ \sigma &\mapsto h(\sigma) = \sigma^*, \end{aligned}$$

donde σ^* se obtiene borrando las filas y columnas con entradas en $\{0\}$. Luego $n(\sigma)$ es el número $n(\sigma^*)$ de inversiones de la matriz de permutación σ^* . Para $z \in W_k$ definamos $\mathcal{R}(z) \subseteq \mathcal{R}_k$ por $\mathcal{R}(z) = \{\sigma \in \mathcal{R} \mid h(\sigma) = z\}$. Por consiguiente de la Proposición 3.6.1, tenemos que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}_k} q^{l(\sigma)} = \sum_{z \in W_k} q^{n(z)} \sum_{\sigma \in \mathcal{R}(z)} q^{m(\sigma)}. \quad (3.57)$$

Sea \mathcal{A} el conjunto de k -subconjuntos de \mathbf{n} . Para un z fijo, la función $\sigma \rightarrow (I(\sigma), J(\sigma))$ es biyectiva $\mathcal{R}_k \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Como $m(\sigma) = m_{01}(\sigma) + m_{10}(\sigma) = m_{01}(I(\sigma)) + m_{10}(J(\sigma))$, tenemos que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}(z)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{A}} q^{m_{01}(K)} \right) \left(\sum_{K \in \mathcal{A}} q^{m_{10}(K)} \right). \quad (3.58)$$

Por esto

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{R}_k} q^{l(\sigma)} = \left(\sum_{z \in W_k} q^{n(z)} \right) \left(\sum_{K \in \mathcal{A}} q^{m_{01}(K)} \right) \left(\sum_{K \in \mathcal{A}} q^{m_{10}(K)} \right). \quad (3.59)$$

El primer factor a la derecha es $[k]!$, por 3.7, reemplazando a k por n . El segundo y tercer factor a la derecha son iguales. Sea $e_k(x_1, \dots, x_n)$ la k -ésima función simétrica

elemental de indeterminadas x_1, \dots, x_n . Luego

$$\sum_{K \in \mathcal{A}} q^{m_{01}(K)} = q^{-k(k-1)/2} e_k(1, q, \dots, q^{n-1}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

donde la segunda igualdad es una identidad de Euler [27]. \square

El siguiente lema los usa Solomon para probar la existencia de $\mathcal{H}(M, B)$.

Lema 3.6.10. *Si $\sigma \in \mathcal{R}$, luego $l(v\sigma) \leq l(\sigma)$.*

Demostración. Notemos que obtenemos $v\sigma$ desde σ reemplazando la fila i por $i+1$ para $i = 1, \dots, n-1$ y reemplazando la fila n por una fila con entradas en $\{0\}$. Por tanto, si $i \in I(v\sigma)$, luego $i+1 \in I(\sigma)$. También $J(v\sigma) \subseteq J(\sigma)$. Desde 3.50 obtenemos que $m(v\sigma) \leq m(\sigma)$. Notemos que $I(v\sigma) \subseteq I(v) = \{1, \dots, n-1\}$. Si $(i, j) \in \Psi''(v\sigma)$, luego 3.38 implica que $i, j \in I(v\sigma)$ y $i < j$, y $iv\sigma > jv\sigma$. Luego $i+1 < j+1$ y $(i+1)\sigma > (j+1)\sigma$, entonces $(i+1, j+1) \in \Psi''(\sigma)$. Por lo tanto desde 3.6.1 tenemos que $n(v\sigma) = |\Psi''(v\sigma)| \leq |\Psi''(\sigma)| = n(\sigma)$. Y por consiguiente de la Proposición 3.6.1 se obtiene la afirmación del lema. \square

3.6.2. Sistema de Tits en $M_n(\mathbb{F})$

Sea \mathbb{F} un cuerpo. Sea $G = GL_n(\mathbb{F})$. Sea $T \subset G$ el grupo de matrices diagonales. Sea $U \subset G$ el grupo de matrices unitriangulares superiores y sea $B = TU$ el grupo de matrices triangulares superiores. Sea $M = M_n(\mathbb{F})$. Como M es un monoide reductivo, a partir de los resultados de Renner [40], en el caso en que \mathbb{F} es algebraicamente cerrado, M tiene una descomposición de Bruhat en que \mathcal{R} juega el mismo rol que el grupo de Weyl W para G . En el caso que $M = M_n(\mathbb{F})$, esta descomposición puede hacerse sobre cualquier cuerpo \mathbb{F} .

Solomon da una fórmula para la multiplicación de conjuntos $B\sigma B$ en términos de la función largo $l(\sigma)$ introducida anteriormente.

Proposición 3.6.2. $M = \bigsqcup_{\sigma \in T\mathcal{R}} B\sigma B$ y si $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}$ luego $B\sigma B = B\sigma' B \iff \sigma = \sigma'$.

Demostración. Sea $x_{ij}(t) = I + tE_{ij}$ para $1 \leq i \neq j \leq n$. Si $a \in M$, luego $a \mapsto x_{ij}(t)a$ suma t -veces la fila j a la fila i , y $a \mapsto ax_{ij}(t)$ suma t -veces la columna i a la columna j . Consideremos $i < j$ para que $x_{ij}(t) \in U \subseteq B$. Es decir que la suma de filas sólo se puede hacer de abajo hacia arriba y la adición de columnas de izquierda a derecha. Si todas las entradas en la primera columna son ceros, entonces se continúa con la siguiente

columna. Si la primera columna tiene una entrada que no sea nula, sea j_1 el mayor entero tal que $a_{j_1 1} \neq 0$. Pivoteamos el elemento $a_{j_1 1}$ y concluimos que existe $u_1, u_2 \in U \subseteq B$ tal que $a' = u_1 a u_2$ sólo tiene ceros en la primera columna y en la j_1 -ésima fila excepto en la posición $a'_{j_1 1}$. Si se multiplica por un elemento en T se puede hacer esta entrada igual a 1. Ahora en la segunda columna, si sólo tiene entradas nulas se pasa a la siguiente columna. Sino, sea j_2 el mayor entero tal que $a'_{j_2 2} \neq 0$. Notar que $j_2 \neq j_1$. Pivoteando en la entrada $(j_2, 2)$ de a' se concluye que existen $u'_1, u'_2 \in B$ tales que $u'_1 a' u'_2$ tiene ceros en las filas j_1, j_2 y en las primeras dos columnas, excepto por las entradas en $(j_1, 1)$ y $(j_2, 2)$, los cuales pueden ser 1 multiplicando por un elemento en T . Continuando con este procedimiento llegamos a un elemento en \mathcal{R}_k . La prueba de unicidad es similar. Supongamos que $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}_k$ y $\sigma' \in B\sigma B$. Luego σ' puede obtenerse desde σ por una secuencia finita de operaciones elementales fila cuya adición sea de abajo hacia arriba y cuya adición de columnas sea de izquierda a derecha. Por esto si la primera columna de σ es nula, lo mismo ocurrirá para σ' . Si la primera columna de σ contiene un 1 en la posición $(j_1, 1)$ luego $\sigma'_{j_1 1} \neq 0$, por lo que σ' tiene la misma primera columna que σ . De manera similar esto servirá para las columnas $2, \dots, n$. \square

Capítulo 4

Descomposición $M \cong UT\mathcal{R}U$

En [42] Solomon estudió el álgebra $\mathcal{H}(M, B)$ para el caso en que B es un subgrupo de Borel de $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$, conocida como el álgebra de Rook. En este contexto la descomposición de M en dobles clases de B es primordial. Sabemos que esta descomposición, en este caso, está parametrizada por el monoide de Rook. El objetivo de este capítulo es estudiar el álgebra análoga $\mathcal{H}(M, U)$, donde U es el subgrupo unipotente de G . Particularmente, damos un monoide que parametriza la descomposición de M en dobles clases de U , el cual es el resultado principal de este trabajo.

La razón principal para estudiar esta nueva álgebra, es su potencial uso en la construcción de invariantes polinomiales de objetos anudados, esto teniendo en cuenta la utilidad del álgebra de Iwahori-Hecke ($\mathcal{H}(G, B)$) y el álgebra de Yokonuma-Hecke ($\mathcal{H}(G, U)$) en este contexto.

Proposición 4.0.1. $\mathcal{R}_k T = T\mathcal{R}_k T = T\mathcal{R}_k$.

Veamos que $\mathcal{R}_k T = T\mathcal{R}_k T = T\mathcal{R}_k$:

Sea $N_k = \mathcal{R}_k T$ el monoide de las matrices monomiales truncadas de $n \times n$ y de rango k , y las entradas de la matriz monomial son cero ó un elemento de \mathbb{F}_q . Esto es análogo a $N = WT$ pero con la diferencia que pueden haber filas y columnas iguales a cero. Como $TN_k = T\mathcal{R}_k T$ es la multiplicación de una matriz diagonal por una matriz monomial truncada, el resultado seguirá siendo una matriz monomial con entradas cero ó un elemento de \mathbb{F}_q por cada fila y columna, pues los elementos de la diagonal de T pertenecen a \mathbb{F}_q . Por esta misma razón un elemento de N_k está en TN_k , ya que cualquier elemento $n \in \mathbb{F}_q$ de la matriz se puede descomponer como $n_1 n_2$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{F}_q$ ó $n \times 0$.

Para ver que $\mathcal{R}_k T = T \mathcal{R}_k$ basta notar que por el lado izquierdo se tiene una matriz monomial truncada al igual que el lado derecho. $\mathcal{R}_k T$ ya se sabe que son las matrices monomiales $n \times n$ truncadas de rango k y tiene elementos de \mathbb{F}_q ó cero, y esto equivale a multiplicar por una matriz diagonal por la izquierda o por la derecha.

Ejemplo 4.0.1. Consideremos las siguientes matrices

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_4, \quad t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \in T, \quad (4.1)$$

luego

$$rt = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad tr = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad trv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ag & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ch \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_k.$$

Definición 4.0.1. De forma más general, denotamos a $N = \bigcup_{k=1}^n N_k$.

Teorema 4.0.1. $M = \bigsqcup_{\sigma \in N} U\sigma U$ y si $\sigma, \sigma' \in \mathcal{R}_k$ luego $U\sigma U = U\sigma' U \iff \sigma = \sigma'$.

Demostración. Para $(i, j) \in \{(i, j) \in n \times n \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ y $t \in \mathbb{F}_q$. Sea $x_{ij}(t) = I + tE_{ij}$. Si $a = (a_{ij}) \in M$, luego $a \mapsto ax_{ij}(t)$ añade t veces la fila j a la i y $a \mapsto x_{ij}(t)a$ añade t veces la columna i a la j . Fijamos $i < j$ para que $x_{ij}(t)$ pertenezca a U . Entonces la suma de filas (columnas) es de abajo (izquierda) hacia arriba (derecha).

Usemos el siguiente proceso iterativo para cada columna. Si $a_{i1} = 0$ para $1 \leq i \leq n$, pasar a la siguiente columna. Sino, sea j_1 el mayor entero tal que $a_{j_1 1} \neq 0$, se pivotea $a_{j_1 1}$ para concluir que existe $u_1, u_2 \in U \subset B$ tal que $a^{(1)} = u_1 a u_2 = (a_{ij}^{(1)})$ cumple que $a_{i1}^{(1)} = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq n$ y $a_{j_1 1}^{(1)} = 0$ para $1 \leq k \neq 1 \leq n \iff 1 < k \leq n$ para este caso, por lo que se tiene una matriz como la siguiente (se indica la numeración de las filas a

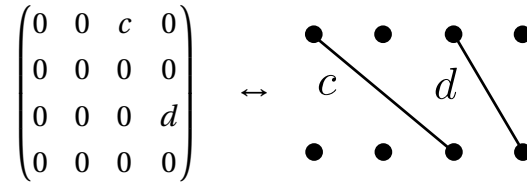
ción largo en \mathcal{R} y sea q una indeterminada. Si $0 \leq k \leq n$, luego

$$q^k \sum_{\sigma \in \mathcal{R}_k} q^{l(\sigma)} = q^k [k]! \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Podemos diagramatizar de la siguiente manera a $T\mathcal{R}_k$:

Definición 4.0.2. Sea $n \in N_k$, un diagrama de Rook unipotente es un grafo de dos filas y k vértices, tal que el vértice de arriba i está conectado con el de abajo j si y sólo si $n_{ij} \neq 0$.

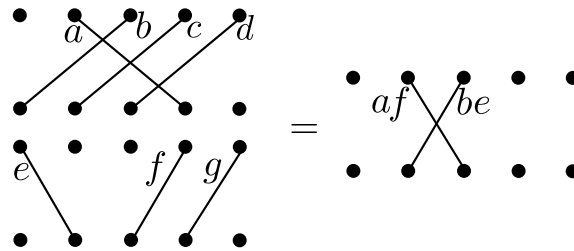
Ejemplo 4.0.2. Sea $r \in \mathcal{R}$ y $t \in T$ como en 4.1, luego su diagrama de Rook unipotente es



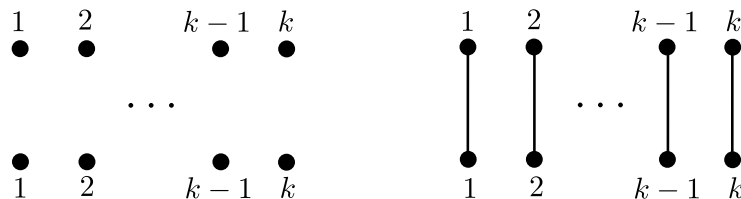
Consideremos la multiplicación de matrices en N_k

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & af & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

luego la multiplicación tiene la siguiente presentación diagramática:



Podemos hallar el diagrama de la matriz nula y de la matriz identidad en \mathcal{R}_k :



donde en el diagrama de la matriz identidad se omite la escritura de la unidad en \mathbb{F}_q .

Como trabajo futuro, se deberá definir el largo en \mathcal{N} , lo que permitirá hallar relaciones de forma análoga al trabajo de Solomon en [42] y se espera que éstas sean generalizadas.

También se espera que el álgebra tenga aplicaciones a la construcción de invariantes de objetos anudados. Bigelow en [4] recuperó el polinomio de Alexander desde el álgebra de Rook planar, una subálgebra del álgebra de Rook estudiada por Solomon. Por esto conjeturamos que una vez construido el álgebra de Rook unipotente, también podrá construirse un invariante polinomial que generaliza al polinomio de Alexander.

Bibliografía

- [1] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. An algebra involving braids and ties, 2017.
- [2] ALEXANDER, J. W. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 9, 3 (1923), 93–95.
- [3] ALPERIN, J. L., AND BELL, R. B. Group representations. In *Groups and Representations*. Springer, 1995, pp. 137–177.
- [4] BIGELOW, S., RAMOS, E., AND YI, R. The alexander and jones polynomials through representations of rook algebras. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 21, 12 (2012), 1250114.
- [5] BIRMAN, J. S. Braid groups. In *Braids, Links, and Mapping Class Groups. (AM-82), Volume 82*. Princeton University Press, 2016, pp. 1–36.
- [6] BJORNER, A., AND BRENTI, F. *Combinatorics of Coxeter groups*, vol. 231. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] BOREL, A., AND TITS, J. Groupes réductifs. *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 27 (1965), 55–151.
- [8] BOURBAKI, N. *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6*. No. partes 4-6 in *Elements de mathematique [series]*. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [9] BRUHAT, F. Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris* 238 (1954), 437–439.
- [10] CHEVALLEY, C. Sur certains groupes simples. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 7, 1-2 (1955), 14–66.

-
- [11] CLIFFORD, A. H., AND PRESTON, G. B. The algebraic theory of semigroups, vol. 1. *AMS surveys* 7 (1961), 1967.
- [12] COXETER, H. S. M. Discrete groups generated by reflections. *Annals of Mathematics* 35, 3 (1934), 588–621.
- [13] CURTIS, C., AND REINER, I. *Methods of Representation Theory: Vol.: 1. : With Applications to Finite Groups and Orders*. Pure and Applied Mathematics - Wiley. John Wiley & Sons, 1981.
- [14] FREUND, D., AND SMITH-POLDERMAN, S. Klein links and braids. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal* 14, 1 (2013), 6.
- [15] FREYD, P., YETTER, D., HOSTE, J., LICKORISH, W. B. R., MILLETT, K., AND OCNEANU, A. A new polynomial invariant of knots and links. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 12, 2 (1985), 239 – 246.
- [16] GRIGOR'EV, D. Y. An analogue of the bruhat decomposition for the closure of the cone of a chevalley group of the classical series. In *Doklady Akademii Nauk* (1981), vol. 257, Russian Academy of Sciences, pp. 1040–1044.
- [17] IWAHORI, N. On the structure of the hecke ring of a chevalley group over a finite field. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A* 10 (1964), 215–236.
- [18] IWAHORI, N., AND MATSUMOTO, H. On some bruhat decomposition and the structure of the hecke rings of p -adic chevalley groups. *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 25 (1965), 5–48.
- [19] JONES, V. *A Polynomial Invariant for Knots Via Von Neumann Algebras*. MSRI (Series). Mathematical Sciences Research Institute, 1984.
- [20] JONES, V. F. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. In *New Developments In The Theory Of Knots*. World Scientific, 1987, pp. 20–73.
- [21] JUYUMAYA, J. Markov trace on the yokonuma-hecke algebra. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 13, 01 (2002), 25–39.
- [22] JUYUMAYA, J. Markov trace on the yokonuma-hecke algebra. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 1 (02 2004).

-
- [23] JUYUMAYA, J., AND KANNAN, S. Braid relations in the yokonuma–hecke algebra. *Journal of Algebra* 239, 1 (2001), 272–297.
- [24] KASSEL, C., AND TURAEV, V. *Braid groups*, vol. 247. Springer Science & Business Media, 2008.
- [25] KAUFFMAN, L. *Knots and Physics*. World Scientific Publishing Company, 1991.
- [26] KAZEZ, W. H., AND ROBERTS, R. Fractional dehn twists in knot theory and contact topology. *Algebraic & Geometric Topology* 13, 6 (2013), 3603–3637.
- [27] MACDONALD, I. G. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford university press, 1998.
- [28] MANTUROV, V. *Knot Theory*, 2 ed. CRC, 2004.
- [29] MARKOV, A. Über die freie Äquivalenz geschlossener zöpfe. *Matematicheskij sbornik* 43, 1 (1936), 73–78.
- [30] MATSUMOTO, H. Générateurs et relations des groupes de weyl généralisés. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES* 258, 13 (1964), 3419.
- [31] MUNN, W. The characters of the symmetric inverse semigroup. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1957), vol. 53, Cambridge University Press, pp. 13–18.
- [32] NELSON, S. Unknotting virtual knots with gauss diagram forbidden moves. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 10, 06 (2001), 931–935.
- [33] POULAIN D’ANDECY, L., AND WAGNER, E. The homfly-pt polynomials of sublinks and the yokonuma–hecke algebras. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics* 148, 6 (2018), 1269–1278.
- [34] PRZYTICKI, J. H. Knot theory from vandermonde to jones. In *Proc. Mexican Nat. Congress Math* (1991), Citeseer.
- [35] PRZYTICKI, J. H., AND TRACZYK, P. Invariants of links of conway type. *Kobe Journal of Mathematics* 4 (2016), 115–139.

-
- [36] PUTCHA, M. S. *Linear algebraic monoids*, vol. 133. Cambridge University Press, 1988.
- [37] PUTCHA, M. S. Monoids on groups with bn-pairs. *Journal of Algebra* 120, 1 (1989), 139–169.
- [38] REIDEMEISTER, K. Knot theory, chelsea publ. co., n. *New York, NY, USA* (1948).
- [39] RENNER, L. E. Classification of semisimple algebraic monoids. *Transactions of the American Mathematical Society* 292, 1 (1985), 193–223.
- [40] RENNER, L. E. Analogue of the bruhat decomposition for algebraic monoids. In *Journal of Algebra* (1986), Citeseer.
- [41] RODRIGUES, O. Note sur les inversions, ou dérangements produits dans les permutations. *J. de Math* 4, 1839 (1839), 236–240.
- [42] SOLOMON, L. The bruhat decomposition, tits system and iwahori ring for the monoid of matrices over a finite field. *Geometriae Dedicata* 36, 1 (1990), 15–49.
- [43] TITS, J. Théorème de bruhat et sous-groupes paraboliques. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 254 (1962), 2910–2912.
- [44] TITS, J. Algebraic and abstract simple groups. *Annals of Mathematics* (1964), 313–329.
- [45] WATERHOUSE, W. C. The unit groups of affine algebraic monoids. *Proceedings of the American Mathematical Society* (1982), 506–508.
- [46] WILLIAM MENASCO, M. T. *Handbook of knot theory*. Elsevier Science, 2005.
- [47] YOKONUMA, T. Sur la structure des anneaux de hecke d'un groupe de chevalley fini. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 264, 8 (1967), 344.