



UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

**ESTRUCTURA DE CONTACTO Y
SUPERFICIES MINIMALES INMERSAS**

**Tesis para optar el grado de
Licenciado en Matemáticas**

Tutor: Ph.D. Julio César Rodríguez.

GONZALO ESTEBAN MANZANO FLORES

Valparaíso–Chile

2014

Dedicatoria:

A mi familia y mi novia.

A mis amigos.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por brindarme la fortaleza para culminar ésta etapa de mi vida.

Mi más sincero agradecimiento a mi profesor guía Ph.D. Julio César Rodríguez, por su gran paciencia, amistad y apoyo constante en el desarrollo de esta tesis.

A mis profesores del Programa de Licenciatura en Matemáticas del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Valparaíso, por los conocimientos impartidos en mis estudios de Pregrado.

A mi familia y a mi novia, por estar presente en los momentos tristes y alegres, incentivandome en todo momento, a mis amigos por los gratos momentos compartidos en la vida.

A Fondecyt a través del Proyecto 1130538 por el Apoyo Financiero.

Valparaíso-Chile, Marzo de 2014

Gonzalo Manzano Flores

Resumen

Esta Tesis se desarrolla en el marco de la Teoría de Contacto y Geometría Diferencial. El principal objetivo del trabajo es presentar un análisis detallado de superficies inmersas en variedades Riemannianas, caracterizando las superficies minimales en término de un invariante geométrico conocido como el ángulo de contacto. Para tal finalidad, hemos utilizado herramientas de la Teoría de Contacto, ecuaciones de estructura y tópicos de Variedades Riemannianas.

La tesis está organizada en 4 capítulos: inicialmente establecemos los principales elementos matemáticos utilizados en este trabajo, los cuales provienen de la Geometría Riemanniana, y Teoría de Lie. En particular, conceptos tales como campos de vectores, corchetes de Lie de campos de vectores, fibrados, distribuciones, estructuras de contacto, formas diferenciables sobre variedades, grupos y álgebras de Lie, teoría de conexiones; son introducidos y utilizados para alcanzar los objetivos propuestos. Seguidamente, discutimos diversos aspectos relacionados al método del marco referencial para inmersiones y las ecuaciones de estructura. Es importante destacar que debido a la potencialidad como herramienta, sobre todo en superficies inmersas en una variedad Riemanniana, la teoría de contacto tiene enormes aplicaciones en una gama amplia de problemas derivados de la Teoría de Lie y Geometría Diferencial. En el capítulo 3, presentamos un análisis sobre la clasificación de superficies inmersas que tienen alguna propiedad determinada, tal estudio fue realizado considerando un nuevo invariante geométrico, el cual fue introducido recientemente y es de bastante utilidad para la investigación de la geometría de superficies inmersas. A saber el ángulo de contacto, el cual determina una estructura de contacto asociada. Finalmente, formulamos el problema de clasificación de superficies minimales en términos de la noción de ángulo de contacto, sobre el grupo de Lie de Heisenberg.

El estudio realizado constituye una base ordenada para establecer nuevos resultados que permitan clasificar superficies mínimas en término de invariantes geométricos, puesto que tal problema actualmente continua siendo objeto de estudio en espacios de dimensión alta.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	IV
Introducción	1
1. Preliminares	4
1.1. Variedades diferenciables	4
1.2. Formas Diferenciables	16
1.3. Variedades de contacto	22
1.4. Variedades Riemannianas	26
1.5. Grupos y Álgebras de Lie	36
2. Ecuaciones de estructura de inmersiones	44
2.1. Ecuaciones Fundamentales de las Inmersiones Isométricas	44
2.2. Método del marco referencial	50
2.3. Laplaciano sobre una Variedad Riemaniana	72
3. Superficies minimales sobre la esfera 3–dimensional	78

3.1. Curvatura Gaussiana y Laplaciano de una superficie minimal	80
3.2. Curvatura Gaussiana y Laplaciano de superficies inmersas	90
4. Superficies minimales en el grupo de Lie de Heisenberg	100
4.1. Curvatura Gaussiana y Laplaciano de superficies minimales	102
Conclusiones	108
Bibliografía	109

Introducción

Esta tesis se desarrolla en el marco de la Teoría de Contacto y Geometría Diferencial. El principal objetivo del trabajo es presentar un análisis detallado de superficies inmersas en variedades Riemannianas, caracterizando las superficies minimales en término de un invariante geométrico conocido como el ángulo de contacto. Para tal fin, hemos utilizado herramientas de la Teoría de Contacto, ecuaciones de estructura y tópicos de Variedades Riemannianas.

Los principales elementos matemáticos utilizados provienen de la Geometría Riemanniana, y Teoría de Lie. En particular, conceptos tales como campos de vectores, corchetes de Lie de campos de vectores, distribuciones, estructuras de contacto, formas diferenciables sobre variedades, grupos y álgebras de Lie, teoría de conexiones; son introducidos y utilizados para alcanzar los objetivos propuestos.

La teoría global de superficies minimales ha atraído considerable atención en las últimas décadas, tales objetos están entre los más importantes estudiados en la geometría diferencial; ver por ejemplo [22], [36], [37], [40], [41], [42]. Superficies de este tipo sirven como modelos matemáticos para las películas de jabón en física [31].

Un aspecto bastante estudiado en Geometría Diferencial es la clasificación de superficies que tienen alguna propiedad determinada, sean inmersas o incrustadas. Las superficies minimales inmersas juegan un rol importante en la comprensión de la estructura de las variedades 3 dimensionales, ver [19]. Sobre el espacio Euclideo tridimensional \mathbb{R}^3 las superficies minimales incluyen el catenoide y el helicoide; sobre la esfera tridimensional superficies minimales inmersas comprenden por ejemplo el ecuador de la esfera y el Toro de Clifford. En el caso de superficies con curvatura positiva, la situación es muy diferente, puesto que en [9] se ha probado que toda superficie orientable puede ser inmersa minimalmente en la esfera tridimensional S^3 . Para otros detalles, el lector interesado puede consultar [7],[8],[11],[13],[20],[30]. Existen muchos resultados sobre la clasificación de superficies mínimas. Sin embargo, actualmente continúa siendo objeto

de estudio en espacios de dimensión alta, [38].

El comienzo de la geometría de contacto, por su parte ha demostrado tener un lugar significativo en distintas áreas de la matemática aplicada, tales como la mecánica, óptica, termodinámica y la teoría de control, ver [1],[2],[12],[39],[43]. Para problemas derivados de la Geometría Diferencial en el contexto de estructuras de contacto ver [5], [16], [32], [46]. El ángulo de contacto, introducido en [33] puede ser considerado como un nuevo invariante geométrico; dicho objeto ha resultado ser de bastante utilidad para el estudio de la geometría de superficies inmersas.

En esta tesis, la metodología usada para el estudio de las superficies minimales, provienen del método de marco referencial para inmersiones y las ecuaciones de estructura; las cuales se destacan debido a la potencialidad como herramientas para el estudio de superficies inmersas en una variedad Riemanniana, para otros aspectos relacionados con esta teoría ver [4], [28], [38]. En particular, discutimos la geometría de superficies inmersas en la esfera 3 dimensional en función del ángulo de contacto, la curvatura Gaussiana y la curvatura media para mostrar algunos resultados sobre rigidez, siguiendo la línea de los autores [18], [34], [35].

En el contexto de los grupos de Lie, estudiaremos ecuaciones fundamentales de las superficies minimales inmersas en el grupo de Heisenberg 3-dimensional a través del ángulo de contacto. Los autores en [14], [23], [24] establecen interesantes métodos de construcción de superficies minimales inmersas en dicho grupo de Lie.

Esta tesis basada en una serie de recientes trabajos en esta área de investigación, y a través de la Teoría de formas diferenciales sobre variedades y tópicos de variedades Riemannianas son descritas las ecuaciones fundamentales para el estudio de las inmersiones minimales sobre esferas y grupo de Lie.

La presente tesis está organizada en 4 capítulos, a continuación entregamos una breve descripción de las secciones que la componen:

1. Preliminares.

Este capítulo contiene algunos aspectos de la Teoría de Contacto y la Geometría Diferencial estrechamente relacionados al problema en estudio. Se introduce una serie de elementos necesarios para la comprensión del trabajo de investigación desarrollado en esta tesis, tales como: Variedades diferenciables, formas diferenciables, Variedades de

Contacto, Variedades Riemannianas, grupos y álgebras de Lie, entre otros. Se incluyen diversos ejemplos.

2. Ecuaciones de estructura de Inmersiones.

En este capítulo se analizan diversos aspectos relacionados a las ecuaciones fundamentales de inmersiones isométricas, en este contexto presentamos el método del marco referencial, y se establecen diversos aspectos sobre el Laplaciano en una Variedad Riemanniana. Los elementos discutidos constituyen la base para la comprensión III y IV.

3. Superficies minimales sobre la esfera 3-dimensional.

En este capítulo presentamos un análisis sobre la clasificación de superficies inmersas que tienen alguna propiedad determinada, tal estudio será realizado considerando un importante invariante geométrico. A saber el ángulo de contacto, el cual determina una estructura de contacto asociada. A través de técnicas provenientes del Método del marco referencial se derivan expresiones explícitas para la curvatura Gaussiana y Laplaciano de una superficie inmersa en la esfera S^3 , las cuales permiten el estudio de la geometría de superficies inmersas en dicho ambiente.

4. Superficies minimales en el grupo de Lie de Heiseberg.

Este capítulo contiene un análisis sobre el problema de clasificación de superficies minimales en término del ángulo de contacto sobre grupo de Lie de Heisenberg \mathcal{H}_3 .

Los dos últimos capítulos contienen significativos aportes a la comprensión del problema en estudio, constituyendo así una gran fuente de apoyo para el estudio de futuros problemas de aplicación a espacios de dimensiones altas de la teoría contenida en este trabajo de investigación.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Variedades diferenciables

En ésta sección discutiremos algunos aspectos provenientes de la Teoría de Variedades diferenciables, necesarios para la mejor comprensión del presente trabajo, ver por ejemplo [17], [44].

Iniciamos nuestro estudio con la siguiente definición.

Definición 1. Una variedad diferenciable de dimensión n es un par (M^n, \mathcal{A}) donde M^n es un conjunto y $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) : \alpha \in I\}$ es una familia de aplicaciones inyectivas llamadas parametrizaciones

$$x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n,$$

las cuales cumplen:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha(U_\alpha) = M^n.$

2. Para todo par $\alpha, \beta \in I$ tal que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, las aplicaciones

$$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n, \quad y$$

$$x_\alpha^{-1} \circ x_\beta : x_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x_\alpha^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$$

son diferenciables.

3. La familia \mathcal{A} es maximal relativa a las condiciones anteriores, esto es, si (U_γ, x_γ) es otra parametrización tal que $x_\beta^{-1} \circ x_\gamma$ y $x_\gamma^{-1} \circ x_\beta$ son diferenciables entonces $(U_\gamma, x_\gamma) \in \mathcal{A}$. Cuando M^n es dotado de una familia \mathcal{A} cumpliendo 1, 2 y 3, se dice que posee una estructura diferenciable. Ver Figura 1.1.

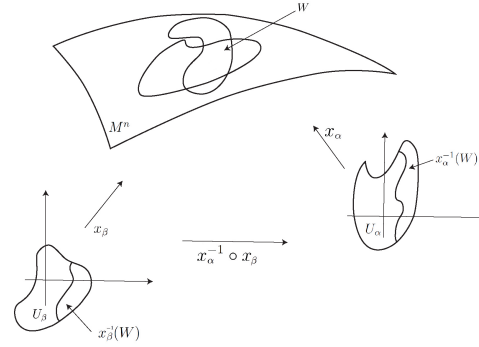


Figura 1.1: Estructura diferenciable sobre M^n .

A lo largo de éste trabajo usualmente denotaremos una Variedad Diferenciable (M^n, \mathcal{A}) de dimensión n por M^n y al par (U_α, x_α) lo llamaremos sistema de coordenadas.

Ejemplo 2. El par $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable n dimensional con el atlas $\mathcal{A} = \{(U, id)\}$. Aquí, $U = \mathbb{R}^n$ e id denota la aplicación identidad de \mathbb{R}^n .

Diversos ejemplos provienen desde la Teoría de superficies. En particular, la esfera unitaria n -dimensional, denotada por $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una variedad diferenciable. En efecto, es facil comprobar que el conjunto $\{(\mathbb{R}^n, \varphi^N), (\mathbb{R}^n, \varphi^S)\}$ con φ^N y φ^S dadas por

$$\varphi^N(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right)$$

y

$$\varphi^S(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right),$$

donde $N = (0, \dots, 1)$ y $S = (0, \dots, -1)$, es una estructura diferenciable. Para mas detalles ver [17].

Definición 3. Sean M^n y M^m variedades diferenciables. Decimos que una aplicación $\varphi : M^n \rightarrow M^m$ es diferenciable en $p \in M^n$, si dada una parametrización $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M^m$ en $\varphi(p)$ existe una parametrización $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ en p con $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ tal que la aplicación

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es diferenciable en $x^{-1}(p)$. Ver Figura 1.2.

La aplicación φ se dice diferenciable en un abierto W de M^n si es diferenciable en todo punto $p \in W$.

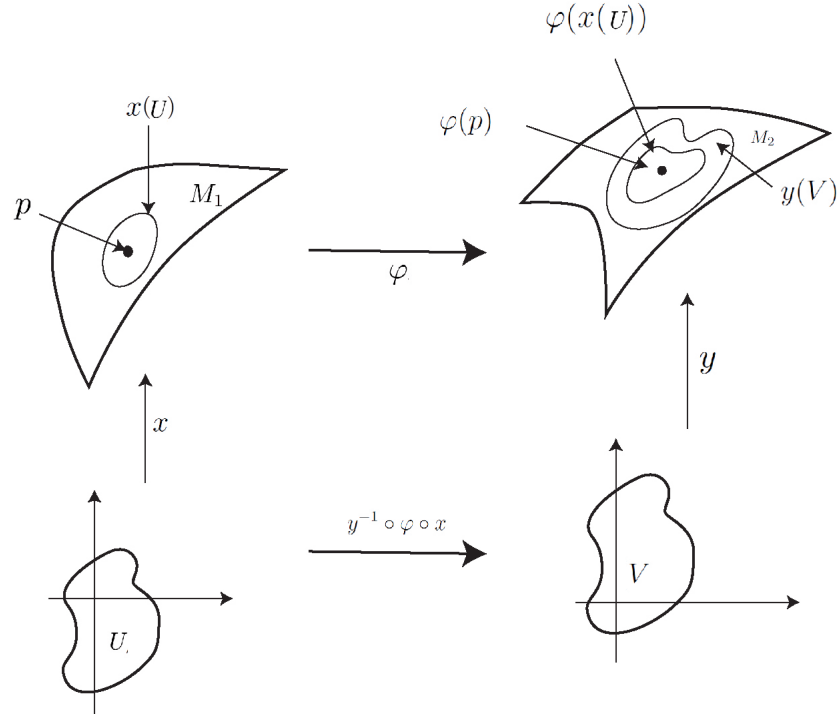


Figura 1.2: Sistema de coordenadas.

A continuación definiremos el espacio tangente en un punto de una variedad diferenciable.

Definición 4. Sean $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$ una curva diferenciable en una variedad diferenciable M^n y $p \in M^n$, definimos el vector tangente a la curva α en $t = 0$ como la función $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f := \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(M^n),$$

con $\alpha(0) = p$. Aquí, $\mathcal{D}(M^n)$ denota el conjunto de todas las funciones de M^n en \mathbb{R} , diferenciables en el punto p .

Definición 5. Sea M^n una variedad diferenciable, el espacio tangente a M^n en un punto $p \in M^n$, denotado por $T_p M^n$, es dado por

$$T_p M^n := \{ \alpha'(0) : \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n \text{ es una curva diferenciable con } \alpha(0) = p \},$$

es decir, $T_p M^n$ es el conjunto de todos los vectores tangentes a curvas diferenciables sobre M^n que pasan por el punto p .

A partir de la Definición 5 es posible definir el fibrado tangente TM^n de M^n por

$$TM^n := \bigsqcup_{p \in M^n} T_p M^n \equiv \{(p, v); p \in M^n, v \in T_p M^n\}.$$

Un subconjunto $\mathcal{D} \subset TM^n$, es llamado subfibrado de TM^n .

Observación 6. Sea M^n una variedad diferenciable, $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ una parametrización con $x(0) = p \in M^n$ y $f \in \mathcal{D}(M^n)$. Podemos expresar la función f y la curva α en esta parametrización por

$$f \circ x(q) = f \circ x(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

y

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

respectivamente. Definimos $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(x^{-1}(p))$ por lo tanto, restringiendo f a α , obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ x \circ x^{-1} \circ \alpha(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ x(x_1(t), \dots, x_n(t)))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(x_1(0), \dots, x_n(0)) \cdot x'_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(x^{-1} \circ \alpha(0)) \cdot x'_i(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(0)) \cdot x'_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) f, \end{aligned}$$

en otras palabras, el vector $\alpha'(0)$ puede ser expresado en la parametrización x por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(p). \quad (1.1)$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ es el vector tangente en p , a la curva coordenada

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

La expresión (1.1), muestra que el vector tangente a la curva α en p depende solo de las derivadas de α en un sistema de coordenadas.

Así, podemos establecer el siguiente resultado

Proposición 7. *El espacio tangente, $T_p M^n$ es un espacio vectorial de dimensión n , cuya base asociada es dada por*

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}.$$

Prueba: Mostraremos que $T_p M^n$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n con las operaciones usuales de funciones. En efecto, sean $\alpha'(0), \beta'(0) \in T_p M^n$, $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}(M^n)$ y $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ una parametrización, entonces

1.

$$\begin{aligned} (\alpha'(0) + \beta'(0))f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ x \circ x^{-1} \circ (\alpha + \beta)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f \circ x(x_1(t) + y_1(t), \dots, x_n(t) + y_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f \circ x(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} + \left. \frac{d}{dt} f \circ x(y_1(t), \dots, y_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right) + \left(\sum_{i=1}^n y'_i(0) \frac{\partial f}{\partial y_i}(p) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) f + \left(\sum_{i=1}^n y'_i(0) \frac{\partial}{\partial y_i}(p) \right) f. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (c\alpha'(0))f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ x \circ x^{-1}(c\alpha)) \right|_{t=0} \\ &= c \left. \frac{d}{dt} f \circ x(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} \\ &= c \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) f. \end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. □

Proposición 8. *Sean M^n y M^m variedades diferenciables, $\varphi : M^n \rightarrow M^m$ una aplicación diferenciable. Sean $p \in M^n$, $v \in T_p M^n$, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Sea $\beta = \varphi \circ \alpha$, la aplicación $(d\varphi)_p : T_p M^n \rightarrow T_{\varphi(p)} M^m$ definida por $(d\varphi)_p(v) = \beta'(0)$ es una aplicación lineal que no depende de la elección de α .*

Prueba: Ver [27]. □

La aplicación lineal $d\varphi_p$ definida en la Proposición 8 es llamada diferencial de φ en p .

Definición 9. Sea M un espacio topológico. Un fibrado vectorial de dimensión k sobre M es un espacio topológico E junto con una función sobreyectiva $\pi : E \rightarrow M$ satisfaciendo:

1. Para cada $p \in M$, el conjunto $E_p = \pi^{-1}(p) \subset E$ está dotado de la estructura de un espacio vectorial real k -dimensional.
2. Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p y un homeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^k \\
 \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 \\
 & U &
 \end{array}$$

Figura 1.3:

(donde π_1 es la proyección del primer factor); y tal que para cada $q \in U$, la restricción de ϕ de E_q es un isomorfismo lineal de E_q a $\{q\} \times \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k$.

Definición 10. Sea M^n una variedad diferenciable, $\pi : E \rightarrow M^n$ un fibrado vectorial sobre M^n , la aplicación continua $\sigma : M^n \rightarrow E$ es llamada sección de π si $\pi \circ \sigma = id_{M^n}$.

Definición 11. Un campo de vectores X en una variedad diferenciable M^n es una aplicación $X : M^n \rightarrow TM^n$ tal que $\pi \circ X = id$, donde id es la aplicación identidad de M^n y π la proyección canónica $\pi : TM^n \rightarrow M^n$. La aplicación X es llamada también sección de TM^n . Así, a cada punto $p \in M^n$ le asociamos un vector $X(p) \in T_p M^n$.

Sea $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ una parametrización, podemos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

donde $a_i : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en $x(U)$ y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\}_{i=1}^n$, es una base de $T_p M^n$ asociada a x . El campo de vectores X se dice diferenciable cuando las funciones a_i son diferenciables.

Algunas veces es conveniente pensar en un campo de vectores como una aplicación $X : \mathcal{D}(M^n) \rightarrow \mathcal{F}(M^n)$ definida por

$$X_p(f) := (Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

donde $\mathcal{F}(M^n)$ denota el conjunto de funciones de M^n real valuadas, y como antes $\mathcal{D}(M^n)$ es el conjunto de las funciones diferenciables en M^n . En este contexto, también será de utilidad definir el Corchete de Lie de campos de vectores y algunas de sus propiedades.

Proposición 12. *Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables definidos sobre una variedad diferenciable n -dimensional M^n . Existe un único campo de vectores Z tal que para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf := (XY - YX)f$.*

Prueba: En efecto, probaremos que si Z existe entonces es único. Sea $p \in M^n$ y $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ una parametrización en p , y sean

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

las expresiones de X e Y en términos de la parametrización x . Tenemos

$$\begin{aligned} XYf &= X \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ YXf &= Y \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j=1}^n b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n a_j b_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \end{aligned}$$

para todo $f \in \mathcal{D}(M^n)$. De aquí, sigue que

$$Zf = XYf - YXf = \sum_{i,j=1}^n (a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

lo que muestra la unicidad de Z .

Para mostrar la existencia, sea $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ una estructura diferenciable de M^n . Defina Z_α por la expresión anterior, en cada vecindad coordinada $x_\alpha(U_\alpha)$. Por unicidad, $Z_\alpha = Z_\beta$ en $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, lo que permite definir Z en toda la variedad M^n , y la prueba concluye. \square

La Proposición 12 permite introducir la siguiente definición formal.

Definición 13. *Dados X e Y campos de vectores diferenciables sobre una variedad diferenciable M^n , llamamos Corchete de Lie de X e Y al único campo de vectores diferenciable Z dado por $[X, Y] := XY - YX$.*

Proposición 14. *Sea M^n una variedad diferenciable, sean X, Y y Z campos diferenciables sobre M^n , $a, b \in \mathbb{R}$ y f, g funciones diferenciables, entonces*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$,
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
3. $[X, aZ + bW] = a[X, Z] + b[Z, W]$,
4. $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$, (Identidad de Jacobi)
5. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Prueba: Ver [27]. □

Otro elemento que nos será de utilidad es dada por la siguiente noción,

Definición 15. *Una variedad diferenciable M^n se dice orientable si existe una estructura diferenciable \mathcal{A} de M^n tal que:*

para todo $(\varphi, U), (\psi, V) \in \mathcal{A}$, con $\varphi(U) \cap \psi(V) = W \neq \emptyset$, su cambio de coordenadas $f = (\varphi^{-1} \circ \psi)|_{\psi^{-1}(W)}$ satisface

$$\det(df_q) > 0, \quad \forall q \in \psi^{-1}(W).$$

Diremos que dicha estructura diferenciable induce una orientación de M^n , y (M^n, \mathcal{A}) es llamada variedad orientada.

Definición 16. *Sea M^m y N^n , $m < n$, variedades diferenciables. Una aplicación diferenciable $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ es una inmersión si $d\varphi_p : T_p M^m \rightarrow T_{\varphi(p)} N^n$ es inyectiva para todo $p \in M^m$. Si además φ es un homeomorfismo sobre $\varphi(M^m) \subset N^n$, donde $\varphi(M^m)$ tiene la topología inducida por N^n , se dice que φ es una incrustación. Si $M^m \subset N^n$ y la inclusión $i : M^m \hookrightarrow N^n$ es una incrustación, se dice que M^m es una subvariedad de N^n .*

A continuación, discutiremos algunos aspectos fundamentales asociados a la noción de distribuciones sobre variedades diferenciables.

Definición 17. Sea M^n una variedad diferenciable. Una distribución tangente \mathcal{D} de rango constante $k < n$ es una aplicación que asocia a cada punto $p \in M^n$ un subespacio vectorial k -dimensional \mathcal{D}_p de $T_p M^n$.

La distribución \mathcal{D} es llamada diferenciable si la unión de todos sus subespacios forman un subfibrado diferenciable $\mathcal{D} = \cup_{p \in M^n} \mathcal{D}_p \subset TM^n$. Equivalentemente, \mathcal{D} se dice diferenciable si para cada punto $p \in M^n$ existe una vecindad U y campos de vectores diferenciables $Y_1, \dots, Y_k : U \rightarrow TM^n$ tales que $Y_1|_p, \dots, Y_k|_p$ forman una base de \mathcal{D}_p en cada $p \in U$. En esta situación, decimos que \mathcal{D} es la distribución localmente expandida por los campos de vectores Y_1, \dots, Y_k .

Definición 18. Sea $\mathcal{D} \subset TM^n$ una distribución diferenciable. Una subvariedad inmersa $N^k \subset M^n$ es llamada una variedad integral de \mathcal{D} si $T_p N^k = \mathcal{D}_p$ en cada punto $p \in N^k$. Así, decimos que \mathcal{D} es integrable si es integrable en todo punto $p \in M^n$.

Ejemplo 19. Si V es un campo de vectores diferenciable, arbitrario, (no nulo en todas partes sobre una variedad diferenciable M^n), entonces V genera una distribución 1-dimensional $\mathcal{D}_p = \text{Span}(V_p)$ para cada $p \in M^n$. Sobre \mathbb{R}^n los campos de vectores canónicos $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ generan una distribución diferenciable de dimensión k ; el subespacio afín de dimensión k paralelo a \mathbb{R}^k es una variedad integrable. En la Figura 1.4 se muestra una distribución sobre \mathbb{R}^3 , la cual es diferenciable, ya que cada una de sus coordenadas es diferenciable.

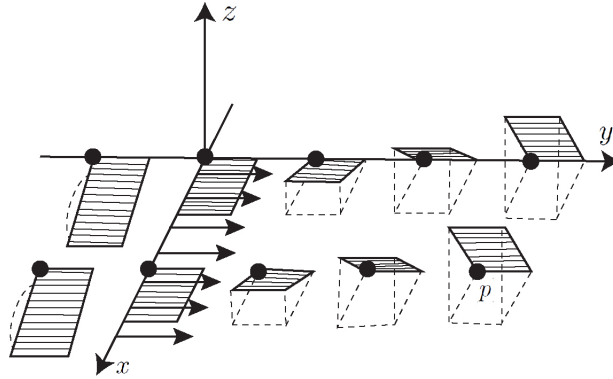


Figura 1.4: Distribución diferenciable.

Definición 20. Sea \mathcal{D} una distribución sobre M^n . Decimos que \mathcal{D} es involutivo, si dado un par de campos de vectores diferenciables X, Y definidos en un abierto U de M^n tales que $X_p, Y_p \in \mathcal{D}_p$ para cada p , se satisface $[X, Y]_p \in \mathcal{D}_p$.

Ejemplo 21. La distribución diferenciable \mathcal{D} sobre \mathbb{R}^3 generada por los campos de vectores:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

no es involutiva. En efecto, el corchete de Lie entre X e Y es dado por

$$[X, Y] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z}.$$

Como $-\frac{\partial}{\partial z} \notin \text{Span}\{X, Y\}$, entonces \mathcal{D} no es involutivo.

Proposición 22. *Toda distribución integrable es involutiva.*

Prueba: Ver [29]. □

Observación 23. *La condición de involutividad no tiene que comprobarse para todo par de campos de vectores diferenciables, si no que solo para una base de vectores local diferenciable cercano a cada punto. Esto es, si en una vecindad de cada punto de M^n existe una base de vectores local diferenciable $\{e_1, \dots, e_k\}$ de una distribución $\mathcal{D} \subseteq TM^n$ tal que $[e_i, e_j]$ es una sección de \mathcal{D} para cada $i, j = 1, \dots, k$, entonces \mathcal{D} es involutivo. En efecto, sean X e Y secciones local diferenciables de \mathcal{D} sobre algun abierto $U \subset M^n$. Dado $p \in M^n$, elijamos una base de vectores local diferenciable $\{e_1, \dots, e_k\}$ que satisfice la hipótesis en una vecindad de p , y escribamos $X = a^i e_i$ y $Y = b^i e_i$. Entonces:*

$$[X, Y] = [a^i e_i, b^j e_j] = a^i b^j [e_i, e_j] + a^i (e_i b^j) e_j - b^j (e_j a^i) e_i$$

Se sigue de la hipótesis de inductividad que esta última expresión es una sección de \mathcal{D} .

Teorema 24. *Sea M^n una variedad diferenciable, y sean V_1, \dots, V_k campos de vectores diferenciables sobre $U \subset M^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen coordenadas (x_1, \dots, x_n) en una vecindad de cada punto $p \in M^n$ tal que $V_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, k$.*
2. *$[V_i, V_j] \equiv 0$ para todo i, j .*

Prueba: Ver [17]. □

Proposición 25. *Sea M^n una variedad diferenciable, y sea $\mathcal{D} \subset TM^n$ una distribución de dimensión k . Entonces \mathcal{D} es diferenciable si y solo si en cada punto $p \in M^n$ existe una vecindad U en la que existen 1-formas diferenciables $\omega_1, \dots, \omega_{n-k}$ tal que para cada $p \in U$.*

$$\mathcal{D}_p = \text{Ker}(\omega_1|_p) \cap \dots \cap \text{Ker}(\omega_{n-k}|_p),$$

donde $\text{Ker}(\omega_i|_p)$ denota el Kernel de la 1-forma $\omega_i|_p$

Prueba: Ver [17]. □

Definición 26. Sean M^n y M^m variedades diferenciables, $\Pi : M^n \rightarrow M^m$ una función diferenciable, X un campo de vectores en M^n . Si existe un campo de vectores Y sobre M^m tal que para cada $p \in M^n$, $d\Pi(X_p) = Y_{\Pi(p)}$ decimos que X e Y son Π -relacionados.

El siguiente teorema es uno de los resultados principales de la teoría de distribuciones sobre variedades diferenciables conocido en la literatura como Teorema de Frobenius.

Teorema 27. Toda distribución involutiva en una variedad diferenciable M^n es completamente integrable.

Prueba: El Teorema 24 garantiza que cualquier distribución localmente generada por campos de vectores conmutativos diferenciables es completamente integrable. Así, es suficiente demostrar que toda distribución involutiva es localmente generada por campos de vectores conmutativos.

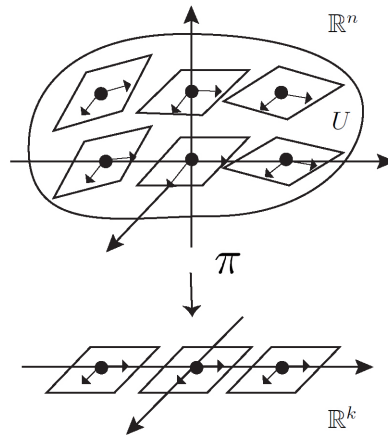


Figura 1.5: Teorema de Frobenius.

Sea \mathcal{D} una distribución involutiva de dimensión k en una variedad diferenciable M^n , y sea $p \in M^n$. Como integrabilidad completa es un concepto local en una vecindad

coordenada diferenciable de p , podemos reemplazar M^n por un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y elegir una base de vectores local diferenciable $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ para \mathcal{D} . Reordenando las coordenadas si es necesario, podemos asumir que \mathcal{D}_p es complementario al subespacio de $T_p\mathbb{R}^n$ generado por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right\}$.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ la proyección de las primeras k coordenadas: $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ ver Figura 1.5. Esto induce una función del fibrado diferenciable $d\pi : TU \rightarrow T\mathbb{R}^k$, que podemos escribir como

$$d\pi \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q \right) = \sum_{i=1}^k v^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\pi(q)}.$$

Por nuestra elección de coordenadas, $\mathcal{D}_p \subset T_p\mathbb{R}^n$ es complementario al kernel de $d\pi$, entonces la restricción de $d\pi$ a \mathcal{D}_p es biyectiva. Por continuidad, lo mismo vale para $d\pi : \mathcal{D}_q \rightarrow T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k$ con q en una vecindad de p . Como $d\pi|_{\mathcal{D}}$ es la composición de la inclusión $\mathcal{D} \hookrightarrow TM^n$ seguido por $d\pi$, esta es una función del fibrado diferenciable. Así, las entradas de la matriz de $d\pi|_{\mathcal{D}_q}$ con respecto a las bases de vectores $\{Y_i|_q\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial x^j}|_{\pi(q)}\}$ son funciones diferenciables de q , y entonces también lo son las entradas de la matriz $(d\pi|_{\mathcal{D}_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{D}_q$. Definiendo un nuevo marco de referencia local diferenciable X_1, \dots, X_k para \mathcal{D} cercano a p por

$$X_i|_q = (d\pi|_{\mathcal{D}_q})^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\pi(q)}.$$

El teorema queda demostrado si podemos probar que $[X_i, X_j] = 0$ para todo i, j .

Para tal fin, primero observemos que X_i y $\frac{\partial}{\partial x^i}$ son π -relacionados, luego la Proposición 25 implica que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\pi(q)} = (d\pi|_{\mathcal{D}_q}) X_i|_q = d\pi X_i|_q,$$

por lo tanto, por la naturaleza del Corchete de Lie, tenemos

$$d\pi([X_i, X_j]_q) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]_{\pi(q)} = 0.$$

Como $[X_i, X_j]$ toma valores en \mathcal{D} por involutividad, y $d\pi$ es inyectivo en cada fibrado de \mathcal{D} , esto implica que $[X_i, X_j]_q = 0$ para cada q ; y la demostración esta concluida. \square

Ejemplo 28. Sea $\mathcal{D} \subset T\mathbb{R}^3$ la distribución generada por los campos de vectores

$$V = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1) \frac{\partial}{\partial z}, \quad y \quad W = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}$$

El Corchete de Lie entre ellos es $[V, W] = -\frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z} = -W$, así \mathcal{D} es involutivo. Como \mathcal{D} es complementario al campo generado por $\frac{\partial}{\partial z}$, entonces la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, z) = (x, y)$ induce un isomorfismo $d\pi|_{\mathcal{D}(x,y,z)} : \mathcal{D}(x,y,z) \rightarrow T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ahora, por la demostración del Teorema de Frobenius, existe una sección local diferenciable X, Y de \mathcal{D} que es π -relacionada a $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$, respectivamente. Notemos que tales campos de vectores son conmutativos y serán los que generan \mathcal{D} . Entonces, podemos ver que los campos de vectores X e Y tienen esta propiedad si y solo si son de la forma

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + u(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad y \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + v(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

para algunas funciones diferenciables u y v de valor real. Así, es posible verificar que los campos de vectores que generan \mathcal{D} tienen la forma

$$X := W, \quad y \quad Y := V - xW = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}.$$

El flujo de estos campos de vectores es dado, respectivamente, por:

$$\alpha_t(x, y, z) = (x + t, y, z + ty), \quad y \quad \beta_t(x, y, z) = (x, y + t, z + tx),$$

así, podemos definir

$$\psi(u, v, w) = \alpha_u \circ \beta_v(0, 0, w) = \alpha_u(0, v, z) = (u, v, z + uv).$$

Por lo tanto, la inversa de ψ , de una función coordenada comenzando en el eje z y recorriendo a lo largo de estos dos flujos está bien definida. Las coordenadas que buscamos son dadas por la función inversa $(x, y, z) = \psi(u, v, w) = (u, v, z + uv)$, la cual cumple

$$(u, v, w) = \psi^{-1}(x, y, z) = (x, y, z - xy).$$

Consecuentemente, la variedad integrable de \mathcal{D} es dada por el conjunto de nivel de $w(x, y, z) = z - xy$.

1.2. Formas Diferenciables

Antes de establecer las ecuaciones de estructura sobre una variedad diferenciable M^n , introducimos algunas nociones de formas diferenciables sobre variedades diferenciables, ver [17],[26].

Definición 29. Un tensor del tipo (s, r) sobre una variedad diferenciable M^n es una aplicación multilínea de valor real,

$$A : \underbrace{T_p^*M^n \times \cdots \times T_p^*M^n}_{s\text{-veces}} \times \underbrace{T_pM^n \times \cdots \times T_pM^n}_{r\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R},$$

donde $T_p^*M^n$ denota el espacio dual de T_pM^n , con $p \in M^n$.

Definición 30. Un tensor del tipo $(0, r)$ sobre una variedad Riemanniana M^n , o tensor de orden r es una aplicación φ que a cada punto $p \in M^n$ le asocia una forma r -lineal dada por

$$\varphi_p : \underbrace{T_pM^n \times \cdots \times T_pM^n}_{r\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

El tensor φ es diferenciable en $p \in M^n$ si para una base de vectores $\{e_i\}_{i=1}^n$ en una vecindad U de p , las funciones $\varphi_{i_1 i_2 \dots i_r}$ dadas por

$$\varphi_q(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \varphi_{i_1 i_2 \dots i_r}(q), \quad 1 \leq i_1 \dots, i_r \leq n, \quad q \in U,$$

son diferenciables en p . Decimos que φ es diferenciable en M^n cuando es diferenciable en todo punto $p \in M^n$. Usualmente, φ_p es conocido como r -forma exterior (r -forma diferencial) sobre M^n .

El tensor se dice alternado si $\varphi_q(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = 0$ cuando $e_{i_k} = e_{i_j}$ con $j \neq k$.

Para cualquier tensor φ del tipo $(0, r)$ definimos el operador alternante

$$(\text{Alt}\varphi)\mu_1 \cdots \mu_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) \varphi_{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(p)}},$$

donde S_p denota el grupo de permutación de los enteros $\{1, 2, \dots, p\}$ y $\text{sgn}(\sigma)$ denota su signo.

El espacio de todas las r -formas diferenciales alternadas es denotado por $\bigwedge^r(T_pM^n)^*$ (r -formas lineales alternadas del espacio tangente T_pM^n), donde $(T_pM^n)^*$ es el espacio dual de T_pM^n .

Definición 31. Sea M^n una variedad diferenciable. Sean α un p -forma y β una q -forma llamamos producto exterior (también llamado producto cuña) de α y β a la $(p+q)$ -forma, denotada por $\alpha \wedge \beta$, definido por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(p+q)}{p!q!} \text{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in (T_p M^n)^*$ obtenemos el elemento $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ de $\bigwedge^k (T_p M^n)^*$.

Notemos que si ω_1, ω_2 son formas lineales en un espacio vectorial V de dimensión n entonces podemos realizar el producto exterior $(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1)$, $v_1, v_2 \in V$. Además, si $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es una base para el espacio de formas lineales V^* entonces $\{\omega_i \wedge \omega_j\}_{1 \leq i < j \leq n}$ es una base para el espacio $\bigwedge^2 V^*$ de las formas bilineales alternadas.

Si $M^n = \mathbb{R}^n$ es fácil probar que

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)), \quad i, j \in \{1, \dots, k\},$$

y por las propiedades de determinante, se sigue que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ es k -lineal y alternada. En particular, $(dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p \in \bigwedge^k (T_p \mathbb{R}^n)^*$, $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, donde $(dx_{i_j})_p$ es el dual de $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos estos elementos por $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k})_p$.

Sea $\bigwedge^2 (T_p \mathbb{R}^3)^*$ el conjunto de todas las aplicaciones $\varphi : T_p \mathbb{R}^3 \times T_p \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bilineales y alternadas (i.e. $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1)$). Si $\varphi_1, \varphi_2 \in (T_p \mathbb{R}^3)^*$ entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \bigwedge^2 (T_p \mathbb{R}^3)^*$ está definido por

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)).$$

Un elemento $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p \in \bigwedge^2 (T_p \mathbb{R}^3)^*$ lo denotaremos por $(dx_i \wedge dx_j)_p$. El conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p : i < j\}$ es una base para $\bigwedge^2 (T_p \mathbb{R}^3)^*$. Más aún,

Proposición 32. *El conjunto*

$$\{(\omega_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mu_r})_p, \quad 1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq n\},$$

donde ω_{ν_j} denotan 1-formas sobre $T_p M^n$, es una base de $\bigwedge^r (T_p M^n)^*$

Prueba: Ver [26]. □

Definición 33. *Una r -forma sobre M^n es una función α que a cada punto $p \in M^n$ le asocia un elemento $\alpha(p) \in \bigwedge^r (T_p M^n)^*$, esto es,*

$$\alpha(p) = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq n} a_{\mu_1, \dots, \mu_r}(p) (\omega_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mu_r})_p$$

donde $a_{\mu_1 \dots \mu_r}$ son funciones definidas sobre U vecindad de p a valores reales. Denotando por I la r -tupla ascendente (μ_1, \dots, μ_r) , $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_r \leq n$ podemos escribir

$$\alpha = \sum_I a_I d\omega_I.$$

La r -forma α se dice diferenciable cuando a_{μ_1, \dots, μ_r} son funciones diferenciables.

Por convención, las 0-formas diferenciables son las funciones $f : U \subseteq M^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde U es un abierto de $p \in M^n$.

Una n -forma $\omega_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mu_n}$ es llamado elemento volumen. Puesto que el espacio de las n -formas es uni-dimensional tenemos que cualquier n -forma α puede ser representada como

$$\alpha = f \omega_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mu_n},$$

con f alguna función escalar.

Definición 34. Una 1-forma diferenciable sobre un abierto U de $p \in M^n$ es una aplicación $\alpha : U \rightarrow (T_p U^n)^*$ dada por

$$\alpha(p) = \sum_{i=1}^n a_{\mu_i}(p) (\omega_{\mu_i})_p$$

donde a_i son funciones diferenciables sobre U a valores reales. Análogamente, decimos que una 2-forma diferenciable sobre U es dada por

$$\alpha(p) = \sum_{i,j=1}^n a_{\mu_i \mu_j}(p) (\omega_{\mu_j} \wedge \omega_{\mu_i})_p$$

o

$$\alpha = \sum_{\mu_i < \mu_j} a_{\mu_i \mu_j} \omega_{\mu_i} \wedge \omega_{\mu_j}, \quad \mu_i, \mu_j = 1, \dots, n$$

donde $a_{\mu_i \mu_j}$ son diferenciables sobre U .

Sean α , φ r -formas y β una s -forma dadas por

$$\alpha = \sum a_I \omega_I, \quad I = (\mu_1, \dots, \mu_r) \quad \mu_1 < \dots < \mu_r,$$

$$\varphi = \sum b_I \omega_I, \quad I = (\delta_1, \dots, \delta_k) \quad \delta_1 < \dots < \delta_r,$$

$$\beta = \sum c_J \omega_J, \quad J = (\delta_1, \dots, \delta_s) \quad \delta_1 < \dots < \delta_s$$

definimos las operaciones de suma y producto de r-formas en U abierto de $p \in M^n$, como sigue: la suma

$$\omega + \varphi = \sum_I (a_I + b_I)\omega_I,$$

y el producto exterior $\omega \wedge \varphi$ es la $(r + s)$ -forma dada por

$$\omega \wedge \beta = \sum_{IJ} a_I b_J \omega_I \wedge \omega_J.$$

Algunas propiedades del producto exterior son dadas como sigue:

Proposición 35. Sean α y θ dos r -formas y φ una s -forma sobre un abierto U de $p \in M^n$. Entonces,

1. $(\alpha \wedge \varphi) \wedge \theta = \alpha \wedge (\varphi \wedge \theta)$,
2. $(\alpha \wedge \varphi) = (-1)^{rs}(\varphi \wedge \alpha)$,
3. $\alpha \wedge (\varphi + \theta) = \alpha \wedge \varphi + \alpha \wedge \theta$, si $r = s$.

Prueba: La prueba sigue directamente desde la definición de formas y las operaciones definidas entre ellas. □

Por ejemplo, si $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$ es una 1-forma en \mathbb{R}^3 y $\varphi = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ una 2-forma en \mathbb{R}^3 entonces

$$\omega \wedge \varphi = x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3 x_1 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (-1)^2 \varphi \wedge \omega.$$

Definición 36. Sea $\omega = \sum_I a_I \omega_I$ una k -forma sobre un abierto U de $p \in M^n$. El diferencial exterior de ω , denotado por $d\omega$, es dado por

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge \omega_I.$$

Ahora presentaremos algunas propiedades del diferencial exterior.

Proposición 37. Sean ω_1 y ω_2 dos k -formas, ω una k -forma, sobre una variedad diferenciable M^n y φ una s -forma. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$,
2. $d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi$,
3. $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

Prueba: Ver [26]. □

Existe una importante relación entre diferenciación exterior de formas diferenciales y la operación de Corchete de Lie, esta relación es como sigue.

Proposición 38. *Sea ω una 1-forma diferenciable sobre una variedad diferenciable M^n y sean X e Y campos de vectores diferenciables sobre M^n , entonces*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (1.2)$$

Prueba: Sea $f : U \rightarrow M^n$ una parametrización de M^n y sean

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

las expresiones de X e Y en esta parametrización. Primero observemos que si se cumple (1.2) para X_i y Y_j entonces también se cumple para $\sum_i X_i$ y $\sum_j Y_j$. Ahora, pretendemos mostrar que si (1.2) se cumple para X e Y entonces también se cumple para fX y gY cuando f y g son funciones diferenciables. En efecto, notemos que,

$$d\omega(fX, gY) = fg d\omega(X, Y) = fg \{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\}.$$

Luego por el ítem (5) de la Proposición 14 tenemos,

$$\begin{aligned} (fX)\omega(gY) &- (gY)\omega(fX) - \omega([fX, gY]) \\ &= fX(g)\omega(Y) + (fgX)\omega(Y) - gY(f)\omega(X) - (fgY)\omega(X) \\ &\quad - fg\omega([X, Y]) - fX(g)\omega(Y) + gY(f)\omega(X) \\ &= fg \{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\} \\ &= d\omega(fX, gY). \end{aligned}$$

De aquí sigue que, es suficiente demostrar (1.2) para vectores $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$. Puesto que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, es suficiente demostrar que

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

Notemos que si esta última igualdad se cumple para ω_1 y ω_2 entonces también se cumple para $\omega_1 + \omega_2$. Así, es suficiente mostrar que

$$d(\alpha dx_k)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

donde α es una función diferenciable. La anterior ecuación se reduce a

$$(d\alpha \wedge dx_k)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{kj} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} - \delta_{ki} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j},$$

la cual se cumple por definición de producto exterior. \square

1.3. Variedades de contacto

Iniciamos esta sección describiendo uno de los elementos fundamentales para nuestro estudio. A saber, las estructura de contacto, ver [5], [15], [43], [46].

Definición 39. *Sea M^{2n+1} una variedad diferenciable. Una distribución diferenciable \mathcal{D} en M^{2n+1} es llamada estructura de contacto si, para cada punto $p \in M^{2n+1}$ existe una vecindad U de p y una 1-forma α sobre U tal que*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0. \tag{1.3}$$

en todo punto de M^{2n+1} . Aquí, $(d\alpha)^n$ denota $d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha$ n -veces. La distribución es dada por $\mathcal{D}|_U = \ker(\alpha) \subset TM^{2n+1}$.

La 1-forma α definida localmente es llamada forma de contacto sobre M^{2n+1} . La Variedad diferenciable M^{2n+1} es llamada Variedad de Contacto cuando es dotada de una tal distribución \mathcal{D} .

Notemos que, puesto que la 1-forma $\alpha_x : T_x(M^{2n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, se tiene que $\ker(\alpha)$ es un hiperplano en $T_x(M^{2n+1})$.

La distribución \mathcal{D} de la Definición previa es maximal y no integrable maximal. Geométricamente la no-integrabilidad de \mathcal{D} significa que no hay hipersuperficie en M^{2n+1} que pueda ser tangente a \mathcal{D} a lo largo de un subconjunto abierto de la hipersuperficie. Intuitivamente, esto dice que, el hiperplano gira demasiado para ser tangente a la

hipersuperficie. Así, las estructuras de contacto son en cierta medida exactamente lo contrario de la distribución integrable, tal como veremos en el siguiente resultado.

Se puede verificar que si α es una forma de contacto y f es una función diferenciable distinta de cero en M^{2n+1} , entonces $f\alpha$ es también una forma de contacto. Estas dos formas de contacto, α y $f\alpha$, determinan la misma estructura de contacto en M^{2n+1} . Además, si dos formas de contacto α y β determinan la misma estructura de contacto, entonces $\beta = f\alpha$ para una función diferenciable distinta de cero f .

Proposición 40. *Sea M^{2n+1} una variedad diferenciable, α una 1-forma diferenciable sobre M^{2n+1} , $\mathcal{D} = \ker(\alpha)$ una distribución diferenciable. Entonces \mathcal{D} es involutiva si y solo si $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$.*

Prueba: Sean X, Y, Z campos de vectores sobre M^{2n+1} de tal manera que $X, Y \in \mathcal{D}$ y Z no necesariamente en \mathcal{D} . Luego, $\alpha(X) = 0$ y $\alpha(Y) = 0$. Por otro lado, la distribución \mathcal{D} es involutiva si y solamente si $[X, Y] \in \mathcal{D}$. De aquí, $\alpha([X, Y]) = 0$.

Puesto que,

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$$

podemos ver que \mathcal{D} es involutivo si y solo si $\alpha(X) = 0$ y $\alpha(Y) = 0$ implican que $d\alpha(X, Y) = 0$.

Entonces

$$\alpha \wedge d\alpha(X, Y, Z) = \alpha(X)d\alpha(Y, Z) - \alpha(Y)d\alpha(X, Z) + \alpha(Z)d\alpha(X, Y) \equiv 0$$

si y solo si $\alpha(X) = 0$ y $\alpha(Y) = 0$ implican que $d\alpha(X, Y) = 0$. □

Por la demostración de la Proposición 40, podemos ver que si α es una forma de contacto, entonces $d\alpha$ es no degenerada en la distribución $\ker(\alpha)$.

Observación 41. *En el caso de una variedad diferenciable M^3 , esto es, 3-dimensional, la condición de contacto puede ser reformulada como sigue: Si $X, Y \in \mathcal{D}$ son linealmente independientes entonces*

$$[X, Y] \notin \mathcal{D}.$$

En efecto, esto sigue a partir de la ecuación

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]),$$

y del hecho de que la condición de contacto en este caso se reduce a $d\alpha|_{\mathcal{D}} \neq 0$.

Ahora daremos algunos ejemplos de variedades de contacto.

Ejemplo 42. Considere M^{2n+1} siendo el espacio Euclideo \mathbb{R}^{2n+1} . En coordenadas cartesianas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$ la 1-forma $\alpha_1 = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ dota a la variedad diferenciable \mathbb{R}^{2n+1} de una estructura de contacto.

Cuando $n = 1$, esto es, $M^3 = \mathbb{R}^3$. La 1-forma $\alpha = dz - ydx$ dada en coordenadas cartesianas (x, y, z) define una estructura de contacto en M^3 , como se muestra en la Figura 1.6. En efecto,

$$\alpha \wedge d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz$$

es igual a la forma de volumen estandar de \mathbb{R}^3 .

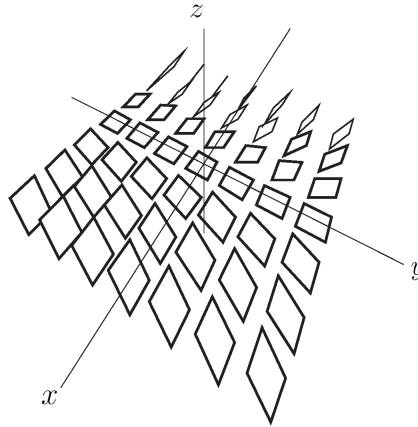


Figura 1.6: Estructura de contacto $\text{Ker } \alpha = \text{Ker}(dz + xdy)$.

Ejemplo 43. Considere la esfera unitaria de radio r denotada por $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. En coordenadas cartesianas $(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$ la 1-forma $\alpha_0 = \sum_{j=1}^{n+1} (x_j dy_j - y_j dx_j)$ dota a la esfera $2n + 1$ dimensional de una estructura de contacto,

puesto que si $r^2 = \sum_{j=1}^{n+1} (x_j^2 + y_j^2)$ entonces $\alpha_0 \wedge (d\alpha_0)^n \neq 0$ para $r \neq 0$.

Ejemplo 44. Sea $M^3 = \mathbb{R}^2 \times S^1$ con coordenadas $(x, y, \theta(\text{mod } 2\pi))$. La 1-forma

$$\alpha = (\cos \theta)dx + (\sin \theta)dy$$

define una estructura de contacto en M^3 . Notemos que $\alpha \wedge d\alpha = -dx \wedge dy \wedge d\theta$.

Ejemplo 45. La esfera unitaria S^3 en \mathbb{R}^4 dada por

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

es una variedad de contacto. En efecto, sea $p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ y considere la 1-forma α_p sobre \mathbb{R}^4 definida por

$$\alpha_p = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 - x_4 dx_3 + x_3 dx_4,$$

restringiendo la 1-forma α_p a S^3 , podemos ver que el kernel de $\alpha_p : T_p S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es dado por

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\alpha_p|_{S^3}) &= \{v = (a, b, c, d) \in T_p S^3 \mid \alpha_p(v) = 0\} \\ &= \{v \in T_p S^3 \mid -x_2 a + x_1 b - x_4 c + x_3 d = 0\}. \end{aligned}$$

Consideremos sobre \mathbb{C}^2 el producto Hermitiano

$$(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2, \quad \text{donde } z = (z_1, z_2), \quad w = (w_1, w_2),$$

y definamos el producto interno $\langle iz, v \rangle = \text{Re}(iz, v)$. Si identificamos $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ con $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$; donde $z_j = x_1 + ix_2$, $j = 1, 2$, $i = \sqrt{-1}$, de la manera usual, tenemos

$$\begin{aligned} \langle iz, v \rangle &= ((iz_1, iz_2), (v_1, v_2)) = iz_1 \bar{v}_1 + iz_2 \bar{v}_2 \\ &= (-x_2 a + x_1 b - x_4 c + x_3 d) + i(x_2 b + x_1 a + x_4 d + x_3 c), \end{aligned}$$

donde $(z_1, z_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $(v_1, v_2) = (a, b, c, d)$. De aquí,

$$\langle iz, v \rangle = \text{Re}(iz, v) = -x_2 a + x_1 b - x_4 c + x_3 d.$$

Por lo tanto, podemos reescribir el kernel en términos de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como,

$$\text{Ker}(\alpha_p|_{S^3}) = \{v \in T_p S^3 \mid \langle iz, v \rangle = 0\}.$$

De otro lado, por la Definición 39, obtenemos una distribución sobre S^3 determinada por α_p , $p \in S^3$, dada por $\mathcal{D} = \text{Ker}(\alpha_p|_{S^3})$, también denotada por δ_p . Notemos que, $\gamma = \alpha_p|_{S^3}$, satisface $\gamma \wedge d\gamma \neq 0$. Así, γ es una 1-forma de contacto sobre S^3 .

Definición 46. Sea α una forma de contacto. Se denomina campo vectorial de Reeb denotado por ξ , al campo de vectores asociado a la forma de contacto α de manera única satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\alpha(\xi) = 1$

$$2. \iota_\xi(d\alpha) = d\alpha(\xi, \cdot) = 0,$$

donde ι_X es una contracción con respecto al campo vectorial X . i.e, $\iota_X(d\alpha)(Y) = d\alpha(X, Y)$ para todo Y .

Como $d\alpha$ es una forma bilineal anti-simétrica $(2n + 1)$ -dimensional, su determinante bajo una base es cero. Así, podemos encontrar un vector no nulo ξ asociado a la forma de contacto α tal que $\iota_\xi(d\alpha) = 0$. Este vector no puede estar en el $\ker(\alpha)$ ya que $d\alpha$ es no-degenerada en este hiperplano tangente. Por lo tanto, $\alpha(\xi) \neq 0$ y podemos normalizar ξ tal que $\alpha(\xi) = 1$.

1.4. Variedades Riemannianas

Es esta sección describimos algunos elementos provenientes de la Geometría Riemanniana para una mejor comprensión de la tesis. Ver [4],[10],[27],[36].

Definición 47. Sea M^n una variedad diferenciable, una métrica Riemanniana en M^n es una correspondencia que a cada punto $p \in M^n$ le asocia un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (es decir, una forma bilineal simétrica, definida positiva) en el espacio tangente $T_p M^n$, que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ es una parametrización en torno de p , con $x(x_1, \dots, x_n) = p \in x(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ donde $q = x^{-1}(p)$, entonces

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$$

es una función diferenciable en U . Las funciones $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ son llamadas expresión local de la métrica Riemanniana en términos del Sistema de Coordenadas (U, x) , algunas veces denotaremos g_{ij} como g_{ij}^x para enfatizar la parametrización x .

Observación 48. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $T_p M^n$. La matriz asociada a la forma bilineal definida positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_p : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$G_p = (g_{ij}(p)) = \begin{pmatrix} g_p(e_1, e_1) & \cdots & g_p(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p(e_n, e_1) & \cdots & g_p(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Usualmente, G_p es llamada matriz de la métrica Riemanniana.

Definición 49. Una variedad diferenciable M^n con una métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es llamada variedad Riemanniana, y es denotada usualmente por (M^n, g) .

Definición 50. Sean N^n y M^m variedades Riemannianas, un difeomorfismo $\varphi : N^n \rightarrow M^m$ es llamada una isometría si para todo $p \in N^n$ y todo par $x, y \in T_p N^n$, se tiene

$$\langle x, y \rangle_p = \langle d\varphi_p(x), d\varphi_p(y) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Observación 51. Sea M^n una variedad Riemanniana, $p \in M^n$. En términos de un sistema de coordenadas (U, x) podemos escribir los vectores $V_p, W_p \in T_p M^n$ en la forma

$$V_p = \sum_{i=1}^n v_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad y \quad W_p = \sum_{i=1}^n w_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

De aquí, tenemos

$$\langle V_p, W_p \rangle_p = \sum_{i,j=1}^n v_i(p) w_j(p) g_{ij}^x(p)$$

donde g_{ij}^x denotan como antes la expresión local de la métrica Riemanniana.

Proposición 52. Sean M^n una variedad diferenciable, $p \in M^n$ y $(N^{n+k}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)})$ una variedad Riemanniana. Si $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ es una inmersión entonces es posible definir una métrica Riemanniana en M^n vía f .

Prueba: Considere la correspondencia que asocia a cada punto $p \in M^n$, la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle_p := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}.$$

Observe que, para cada $p \in M^n$ la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M^n \times T_p M^n$ es un producto interno en $T_p M^n$. En efecto, sea $u \in T_p M^n$ un vector no nulo y supongamos que $\langle u, u \rangle = 0$, así, tenemos que $\langle df_p(u), df_p(u) \rangle_{f(p)} = 0$, como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)}$ es una forma bilineal simétrica definida positiva $df_p(u) = 0$, entonces $u \in \ker(df_p)$ el cual es nulo ya que df_p es inyectiva, por lo tanto $u = 0$, lo que es una contradicción. Siguiendo, como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal y simétrica, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es también bilineal y simétrica. Por otro lado, como N^{n+k} es una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{f(p)}$, $p \in M^n$ se tiene que $\langle df_p(u), df_p(u) \rangle_{f(p)} > 0$. De aquí, $\langle u, u \rangle > 0$ para todo $u \in T_p M$ no nulo.

Falta mostrar que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Sean $p \in M^n$ y (U, φ) , (V, ψ) sistemas de coordenadas de M^n en p y N^{n+k} en $f(p)$, respectivamente. Denotemos por (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_{n+k}) a las coordenadas de U y V , respectivamente. Puesto que N^{n+k} posee una métrica Riemanniana entonces la expresiones locales de la métrica, $g_{lr}^\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a (V, ψ) definidas por

$$g_{lr}^\psi = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_l}(f(p)), \frac{\partial}{\partial y_r}(f(p)) \right\rangle_{f(p)}, \quad y = \psi^{-1}(f(p)),$$

son diferenciables. Por tanto, es suficiente mostrar que las expresiones locales de la métrica en M^n dadas por las funciones $g_{ij}^\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ y definidas por

$$g_{ij}^\varphi(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$$

son también diferenciables. Para tal efecto, considere la expresión local de f , en términos de los sistemas de coordenadas dados anteriormente, mediante

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) = \xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n+k}(x)).$$

En particular, la matriz jacobiana de esta expresión local es

$$J(\xi(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \xi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{n+k}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_{n+k}(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \xi_{n+k}(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Haciendo $p = \varphi(x)$ tenemos

$$\begin{aligned}
g_{ij}^\varphi(x) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p \\
&= \left\langle df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right), df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) \right\rangle_{f(p)} \\
&= \left\langle \sum_{l=1}^{n+k} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_l}(f(p)), \sum_{l=1}^{n+k} \frac{\partial \xi_r(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_r}(f(p)) \right\rangle_{f(p)} \quad (1.4) \\
&= \sum_{l,r=1}^{n+k} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r(x)}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_l}(f(p)), \frac{\partial}{\partial y_r}(f(p)) \right\rangle_{f(p)} \\
&= \sum_{l,r=1}^{n+k} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r(x)}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_l}(f(p)), \frac{\partial}{\partial y_r}(f(p)) \right\rangle_{f(p)}.
\end{aligned}$$

Por tanto, como las funciones $g_{lr}^\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables por hipótesis, y $\frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} : U \rightarrow V$ es diferenciable, entonces por (1.4) se concluye que las funciones $g_{ij}^\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, y la prueba ha concluido. \square

La métrica inducida vía una inmersión, como se indica en la Proposición 52 es llamada métrica inducida, y la aplicación f recibe el nombre de inmersión isométrica.

El siguiente ejemplo será de utilidad en las siguientes secciones.

Ejemplo 53. *La esfera unitaria n -dimensional, S^n , es una variedad Riemanniana. En efecto, como fue mostrado anteriormente la esfera S^n es una variedad diferenciable. Por otro lado, considerando $N = \mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica usual, $M^n = S^n$ y $f = i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión, por la Proposición 52, concluimos que $M^n = S^n$ es dotada de una métrica inducida por i .*

A seguir, daremos una expresión explícita para dicha métrica inducida por i sobre la esfera S^n .

Sea $p \in S^n$ y (U, φ) un sistema de coordenadas de S^n en p . La expresión local de $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es dada por $\xi(x) = i \circ \varphi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_{n+1}(x))$, $x \in U$ tiene como

matriz Jacobiana asociada a la diferencial $(d\xi)_x$ la siguiente

$$J(\xi(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_{n+1}(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_{n+1}(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \xi_{n+1}(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Si $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ es la base de $T_p S^n$ asociada a (U, φ) entonces, para cada $p \in \varphi(U)$, $u = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ y $v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(p)$ vectores en $T_p S^n$ por la expresión (1.4), se tiene

$$(g^\varphi)_{ij}(x) = \sum_{l,r=1}^{n+1} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_r(x)}{\partial x_j} \delta_{lr}.$$

Como, $\delta_{lr} = 0$ si $l \neq r$ y $\delta_{lr} = 1$ si $l = r$, la expresión anterior se puede escribir en la forma

$$(g^\varphi)_{ij}(x) = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_j}, \quad (1.6)$$

y obtenemos

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{i,j}^n u_i v_j \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle_p = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j g_{ij}^\varphi(x) = \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_j}.$$

Ahora, consideremos la parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U) = S^n - \{s\}$ donde $s = (0, \dots, 0, -1)$ es el polo sur, dada por $\varphi(x) = \frac{1}{1+|x|^2}(2x, 1 - |x|^2)$. Sea, $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión, su expresión local en términos de φ es la aplicación $i \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$\xi(x) = i \circ \varphi(x) = \frac{1}{1+|x|^2}(2x, 1 - |x|^2),$$

donde $x = \varphi^{-1}(p)$ y $p \in S^n - \{s\}$. Por lo tanto, la matriz Jacobiana $J(\xi(x))$ dada en

(1.5) se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} \frac{2(|x|^2 + 1) - 4x_1^2}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{-4x_2x_1}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{-4x_3x_1}{(|x|^2 + 1)^2} & \cdots & \frac{-4x_nx_1}{(|x|^2 + 1)^2} \\ \frac{-4x_1x_2}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{2(|x|^2 + 1) - 4x_2^2}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{-4x_3x_2}{(|x|^2 + 1)^2} & \cdots & \frac{-4x_nx_2}{(|x|^2 + 1)^2} \\ \frac{-4x_1x_3}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{-4x_2x_3}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{2(|x|^2 + 1) - 4x_3^2}{(|x|^2 + 1)^2} & \cdots & \frac{4x_nx_3}{(|x|^2 + 1)^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-4x_1x_n}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{-4x_2x_n}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{-4x_3x_n}{(|x|^2 + 1)^2} & \cdots & \frac{2(|x|^2 + 1) - 4x_n^2}{(|x|^2 + 1)^2} \\ \frac{4x_1}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{4x_2}{(|x|^2 + 1)^2} & \frac{4x_3}{(|x|^2 + 1)^2} & \cdots & \frac{4x_n}{(|x|^2 + 1)^2} \end{pmatrix}.$$

Ahora, como

$$\xi_i(x) = \frac{2x_i}{|x|^2 + 1} \quad y \quad \xi_{n+1}(x) = \frac{1 - |x|^2}{|x|^2 + 1},$$

por (1.6) tenemos que

$$\begin{aligned} g_{ii}^\varphi(q) &= \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \\ &= \left\{ \sum_{l=1, l \neq i}^n \frac{(-4x_i x_l)^2}{(|x|^2 + 1)^4} \right\} + \frac{[2(|x|^2 + 1) - 4x_i^2]^2}{(|x|^2 + 1)^4} + \frac{(4x_i)^2}{(|x|^2 + 1)^4} \\ &= \frac{(4x_i)^2}{(|x|^2 + 1)^4} \left\{ \sum_{l=1, l \neq i}^n (x_l)^2 \right\} + \frac{[2(|x|^2 + 1) - 4x_i^2]^2 + (4x_i)^2}{(|x|^2 + 1)^4} \\ &= \frac{(4x_i)^2}{(|x|^2 + 1)^4} (|x|^2 - x_i^2) + \frac{4(|x|^2 + 1)^2 - 16x_i^2(|x|^2 + 1) + 16x_i^4 + 16x_i^2}{(|x|^2 + 1)^4}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(g\varphi)_{ii}(q) = \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2}.$$

Análogamente, para $i \neq j$ (supongamos $i < j$) se tiene, por (1.6) que

$$g_{ij}^\varphi(x) = \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l(x)}{\partial x_j},$$

así,

$$g_{ij}^\varphi(x) = \left\{ \sum_{l=1, l \neq i, j}^n \frac{(-4x_i x_l)(-4x_j x_l)}{(|x|^2 + 1)^4} \right\} + \frac{[2(|x|^2 + 1) - 4x_i^2](-4x_j x_i)}{(|x|^2 + 1)^4} \\ + \frac{16x_i x_j}{(|x|^2 + 1)^4} + \frac{(-4x_i x_j)[2(|x|^2 + 1) - 4x_j^2]}{(|x|^2 + 1)^4},$$

luego

$$g_{ij}^\varphi(x) = \frac{16x_i x_j (|x|^2 - x_i^2 - x_j^2) - 8x_i x_j (|x|^2 + 1) + 16x_j x_i^3 + 16x_i x_j}{(|x|^2 + 1)^4} \\ + \frac{-8x_i x_j (|x|^2 + 1) + 16x_i x_j^3}{(|x|^2 + 1)^4},$$

y simplificando, se obtiene finalmente $g_{ij}^\varphi = 0$.

En resumen, la métrica en S^n inducida por la inclusión en \mathbb{R}^{n+1} , en término del sistema de coordenadas φ descrito anteriormente es dada por:

$$g_{ij}^\varphi(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(|x|^2 + 1)^2},$$

donde $x = \varphi^{-1}(p)$. Así, (S^n, g^φ) es una Variedad Riemanniana.

A continuación describimos brevemente algunos elementos de la Geometría Riemanniana que serán de utilidad a lo largo de este trabajo. Denotemos por $\chi(M^n)$ el conjunto de todos los campos de vectores de clase C^∞ en M^n , y $\mathcal{D}(M^n)$ como antes, denota el conjunto de funciones reales de clase C^∞ definidas sobre M^n .

Definición 54. *Sea M^n una variedad diferenciable, se llama conexión afin sobre M^n a una aplicación*

$$\nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \chi(M^n) \\ (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gZ} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y$.
2. $\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$.
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

donde $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $f, g \in D(M)$.

Proposición 55. Sea M^n una variedad diferenciable con una conexión afin ∇ . Existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow M^n$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de α tal que:

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde V es un campo de vectores a lo largo de α y f es una aplicación diferenciable en I ,
3. Si V es inducido por un campo de vectores $Y \in \chi(M^n)$, esto es, $V(t) = Y(\alpha(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}}Y$.

El campo de vectores $\frac{DV}{dt}$ es llamado la derivada covariante de V a lo largo de α .

Prueba: Ver [27]. □

Definición 56. Sean M^n una variedad diferenciable con conexión afin ∇ , X un campo de vectores tangentes diferenciable en M^n , $Y \in T_pM^n$, y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = Y$. Llamamos derivada covariante del campo X a lo largo del vector Y en el punto $p \in M^n$ al campo de vectores

$$(\nabla_Y X)_p = \text{proyección sobre } T_pM^n \text{ de } \left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0},$$

donde t es el parámetro de la curva α .

Observación 57. Sean $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j$ campos de vectores en torno de p , donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, tenemos que

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j=1}^n x_i X_i (y_j) X_j,$$

como $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base de T_pM^n y como $\nabla_{X_i} X_j \in T_pM^n$, entonces existen escalares Γ_{ij}^k tales que $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$, donde Γ_{ij}^k son funciones diferenciables y

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k.$$

Lo que muestra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ y las derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segun X . Las funciones Γ_{ij}^k son llamadas los Símbolos de Christoffel de la conexión.

Definición 58. Sea M^n una variedad diferenciable dotada de una conexión afin ∇ . Un campo vectorial V a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es llamado paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Definición 59. Sea M^n una variedad diferenciable dotada de una conexión afin ∇ . Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica Riemanniana en M^n . La conexión ∇ se dice compatible con la métrica, si para toda curva diferenciable α y cualquier par de campos de vectores paralelos P y P' a lo largo de α se tiene $\langle P, P' \rangle = k$, donde k es una constante.

Una caracterización de la compatibilidad de la conexión con la métrica es dada por

Proposición 60. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Una conexión en M^n es compatible con la métrica si y solo

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M^n)$.

Prueba: Ver [27]. □

Definición 61. Sea M^n una variedad Riemanniana. Una conexión afin ∇ sobre M^n se dice simétrica si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \chi(M^n).$$

Teorema 62. Dada una variedad Riemanniana M^n , existe una única conexión afin ∇ en M^n satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. ∇ es simétrica.
2. ∇ es compatible con la métrica.

Tal conexión, es llamada conexión de Levi-Civita. Además, los símbolos de Christoffel para ∇ en coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) son dados por

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right),$$

donde g^{ij} denotan los coeficientes de la inversa de la matriz de la métrica sobre M^n .

Prueba: Sean $X, Y, Z \in \chi(M^n)$. Supongamos que la conexión de Levi-Civita existe, entonces por Proposición 60 se cumple

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle X, Z \rangle &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ -Z\langle X, Y \rangle &= -\langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Mas aún, como ∇ es simétrica, tenemos

$$\begin{aligned} -\langle [X, Z], Y \rangle &= -\langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle, \\ -\langle [Y, Z], X \rangle &= -\langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle \nabla_Z Y, X \rangle, \\ \langle [X, Y], Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle. \end{aligned}$$

Sumando ambos lados de las igualdades previas, obtenemos

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle X, Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle, \quad (1.7)$$

así, ∇ está unívocamente determinada por la métrica, es decir, en el caso que exista ella será única. La expresión anterior es conocida como fórmula de Koszul.

Para probar la existencia, definimos la conexión a través de la fórmula de Koszul. Falta verificar que satisface las propiedades deseadas. En efecto, ∇ es simétrica, puesto que

$$2\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z \rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle - 2\langle \nabla_Y X, Z \rangle = 2\langle [X, Y], Z \rangle,$$

usando nuevamente la fórmula de Koszul, tenemos que

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle,$$

por la Proposición 60 la prueba se concluye.

Finalmente, tomando un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) tenemos,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \quad y \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij},$$

por la fórmula de Koszul,

$$2 \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right),$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n g_{il} \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right),$$

de aquí, podemos escribir los símbolos de Christoffel en términos de un sistema de coordenadas. \square

Definición 63. Sea M^n una variedad Riemanniana con conexión Levi-Civita ∇ . Llamamos operador de curvatura a la aplicación $R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \chi(M^n)$ tal que

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z;$$

para todo $X, Y, Z \in \chi(M^n)$.

A continuación establecemos la conocida Primera identidad de Bianchi

Proposición 64. Sea M^n una variedad Riemanniana con conexión Levi-Civita ∇ , se cumple:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \quad (1.8)$$

Prueba: Por la simetría de la conexión, tenemos

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] \\ &\quad - \nabla_{[X, Z]} Y - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \end{aligned}$$

y la prueba concluye desde la Identidad de Jacobi. \square

1.5. Grupos y Álgebras de Lie

En esta sección presentaremos algunos resultados provenientes de la Teoría de Lie, con el objetivo de introducir los elementos necesarios para una comprensión de los capítulos siguientes. Introducimos las nociones de: grupos de Lie, álgebras de Lie, en particular sobre el grupo de Heisenberg [21], [44].

Iniciamos esta sección introduciendo la noción de Grupo de Lie.

Definición 65. Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable de clase C^∞ dotado de una estructura de grupo abstracto tal que la aplicación $G \times G \rightarrow G$ dada por $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es de clase C^∞ .

Ejemplo 66. El grupo de las matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes reales dado por

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \det(X) \neq 0\},$$

es un grupo de Lie con el producto usual de matrices. En efecto, la estructura diferenciable de $GL(n, \mathbb{R})$ es heredada de la estructura diferenciable de \mathbb{R}^{n^2} . Por otro lado, sean $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ y $B = (b_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ entonces la aplicación $(A, B) \mapsto A \cdot B = (c_{ij})$ es diferenciable. Aquí, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ son polinomios de grado dos en las variables A_{ij}, B_{ij} y, por lo tanto, la aplicación es diferenciable. Asimismo, la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\tilde{a}_{ij})$ donde \tilde{a}_{ij} son los coeficientes de la matriz adjunta de A . Luego, la aplicación $A \rightarrow A^{-1}$, donde $(A^{-1})_{ij}$, son funciones racionales en A_{ij} . De aquí, la aplicación $(A, B) \rightarrow A \cdot B^{-1}$ es diferenciable.

Usualmente, $GL(n, \mathbb{R})$ es llamado grupo de Lie lineal general.

Ejemplo 67. Considere el grupo de las matrices

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

el cual es un subgrupo de Lie de $GL(3, \mathbb{R})$, y por lo tanto un grupo de Lie. Usualmente, conocido como el grupo de Lie de Heisenberg tridimensional, el cual es conexo, simplemente conexo, y nilpotente. En efecto, observe que \mathcal{H}_3 es difeomorfo a \mathbb{R}^3 vía la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ dada por

$$\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con inversa $\phi^{-1} : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (x, y, z).$$

Por lo tanto, \mathcal{H}_3 tiene una estructura diferenciable 3-dimensional. Por otra parte, el producto usual de matrices induce sobre \mathcal{H}_3 la operación producto $*$: $\mathcal{H}_3 \times \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ como sigue

$$(x, y, z)^\top * (x', y', z')^\top = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \right)^\top,$$

donde $()^\top$ denota la transpuesta, y la inversa $i : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$ son operaciones diferenciables. Por lo tanto, \mathcal{H}_3 es un grupo de Lie.

Definición 68. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un espacio vectorial dotado de una operación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ (llamado corchete de Lie) satisfaciendo las siguientes propiedades

1. Es bilineal.
2. $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$
3. Para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$.

Definición 69. El álgebra de Lie de un grupo de Lie G es definido como el espacio tangente en la identidad del grupo, esto es, $\mathfrak{g} := T_{Id}G$.

Ejemplo 70. El conjunto de matrices $M(n, \mathbb{R})$ dotado del corchete definido por $[X, Y] = XY - YX$, es un álgebra de Lie. En efecto, $M(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real y satisface las propiedades de la Definición 68. Observe que el espacio tangente en la identidad del grupo de las matrices $n \times n$ invertibles, $Gl(n, \mathbb{R})$, es $M(n, \mathbb{R})$.

Definición 71. Un subespacio \mathfrak{h} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una subálgebra de Lie si $[X, Y] \in \mathfrak{h}, \forall X, Y \in \mathfrak{h}$.

Ejemplo 72. El álgebra de Lie del grupo de Lie \mathcal{H}_3 es dada por

$$\mathfrak{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, sabemos que el espacio tangente en la identidad I_3 del grupo es

$$T_{I_3}\mathcal{H}_3 = \{\dot{\gamma}_i(0) : \gamma_i \text{ diferenciable con } \gamma_i(0) = I_3\}.$$

Definamos $\gamma_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}_3$ curvas diferenciables, $i = 1, 2, 3$ tales que $\gamma_i(0) = I_3 \in \mathcal{H}_3$, como sigue:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, podemos definir las curvas diferenciables

$$\alpha_i = \phi^{-1} \circ \gamma_i : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

luego:

$$\alpha_1(t) = \phi^{-1} \circ \gamma_1(t) = \phi^{-1}(\gamma_1(t)) = (x(t), 0, 0),$$

$$\alpha_2(t) = \phi^{-1} \circ \gamma_2(t) = \phi^{-1}(\gamma_2(t)) = (0, y(t), 0),$$

$$\alpha_3(t) = \phi^{-1} \circ \gamma_3(t) = \phi^{-1}(\gamma_3(t)) = (0, 0, z(t)),$$

así, la derivada de cada α_i en $t = 0$, es dada por

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(0) &= (\dot{x}(0), 0, 0), \\ \dot{\alpha}_2(0) &= (0, \dot{y}(0), 0), \\ \dot{\alpha}_3(0) &= (0, 0, \dot{z}(0)),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\dot{\gamma}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{y}(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{z}(0) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, como $\dot{\gamma}_i'(0) \in T_{I_3}\mathcal{H}_3$ son linealmente independientes, estas generan al álgebra \mathfrak{H}_3 . Luego, cualquier elemento de \mathfrak{H}_3 se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Así, podemos escribir el álgebra de Lie del grupo de Lie de Heisenberg por

$$\mathfrak{H}_3 = \langle E_{12}, E_{23}, E_{13} \rangle,$$

donde

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las relaciones entre sus Corchetes de Lie dados por el conmutador $[A, B] = AB - BA$ tiene como único Corchete no nulo $[E_{12}, E_{23}] = E_{13}$.

Existe una representación natural de un grupo de Lie G en su álgebra de Lie. Dicha representación es construida de la siguiente forma: un elemento $g \in G$ define el automorfismo interno $C_g : G \rightarrow G$ dado por $C_g(h) = ghg^{-1}$. Por otro lado, $(dC_g)_1 : T_1G \rightarrow T_1G$ es una aplicación lineal, puesto que $C_g(1) = 1$. A continuación describimos la representación adjunta de grupos y álgebras de Lie.

Definición 73. Sea G un grupo de Lie, la representación adjunta de G en su álgebra de Lie es la aplicación diferenciable

$$Ad : G \rightarrow Aut(\mathfrak{g})$$

definida por $Ad(g) = d(C_g)_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$.

La representación adjunta de G induce una representación de \mathfrak{g} en el álgebra de Lie del grupo de las transformaciones lineales sobre G , denotado por $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, definida de la manera siguiente

Definición 74. Sea \mathfrak{g} una álgebra de Lie, su representación adjunta, es la aplicación

$$\begin{array}{ccc} ad: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ & X & \longrightarrow & ad(X) \end{array}$$

definida por $ad(X)(Y) = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Observación 75. Si $G = GL(n, \mathbb{R})$, entonces para cualquier $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y $g \in G$ tenemos $Ad(g)X = gXg^{-1}$.

Definición 76. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} L_g & : & G \longrightarrow G \\ & & h \longmapsto L_g(h) = g \cdot h \end{array}$$

es llamada la traslación a izquierda de $h \in G$ vía $g \in G$. De manera similar, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} R_g & : & G \longrightarrow G \\ & & h \longmapsto R_g(h) = h \cdot g \end{array}$$

es llamada la traslación a derecha de $h \in G$ vía $g \in G$.

Observación 77. Las aplicaciones L_g y R_g son difeomorfismos.

Definición 78. Una Métrica Riemanniana, sobre un grupo de Lie, se dice invariante a izquierda (respectivamente invariante a derecha) si la traslación a izquierda (respectivamente a derecha) es una isometría.

Observación 79. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ es una métrica sobre el espacio tangente $T_e G$ en la identidad del grupo de Lie G , entonces para cualquier $g \in G$ y campos de vectores $X_g, Y_g \in T_g G$ dados, podemos definir a una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ en el espacio tangente $T_g G$ por:

$$\langle X_g, Y_g \rangle_g := \langle (dL_g)_e^{-1} X_g, (dL_g)_e^{-1} Y_g \rangle_e \quad (1.9)$$

Recíprocamente, si $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ es una métrica invariante a la izquierda en el grupo de Lie G , para $g \in G$ y $X_e, Y_e \in T_e G$ podemos definir una métrica en $T_e G$ mediante,

$$\langle X_e, Y_e \rangle_e := \langle (dL_g)_e X_e, (dL_g)_e Y_e \rangle_g = \langle X_g, Y_g \rangle_g.$$

Definición 80. Una métrica Riemanniana sobre un grupo de Lie G , se llama bi-invariante si es invariante a derecha y también invariante a izquierda.

Proposición 81. *Sobre el grupo de Lie de Heisenber 3-dimensional \mathcal{H}_3 la métrica Riemanniana es dada por*

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz \right)^2.$$

Prueba: En efecto, considere la traslación a izquierda sobre \mathcal{H}_3 , $L_p : \mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{H}_3$, definida por

$$L_p(x', y', z') = (x, y, z)^\top * (x', y', z')^\top = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{xy'}{2} - \frac{x'y}{2} \right)^\top,$$

donde $p = (x, y, z)$ y su diferencial

$$(dL_p)_h : T_h\mathcal{H}_3 \rightarrow T_{ph}\mathcal{H}_3,$$

dada por

$$(dL_p)_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}.$$

Una base para el espacio tangente en la identidad $e = (0, 0, 0)$ del grupo de Lie $T_e\mathcal{H}_3$, es dada por los vectores

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Así, podemos construir campos de vectores izquierda invariantes sobre \mathcal{H}_3 vía la fórmula

$$E_i(p) = (dL_p)_e X_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad g \in \mathcal{H}_3.$$

Explícitamente,

$$E_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ahora, observemos que

$$[E_2, E_3] = 0 = [E_1, E_3], \quad \text{y} \quad [E_1, E_2] = E_3,$$

de hecho,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2](x, y, z) &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2}y \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} - \frac{1}{4}xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&\quad - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2}x \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \frac{1}{4}xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{E}_3(x, y, z).
\end{aligned}$$

De aquí, en la base ortonormal $(dL_p)_e^{-1}E_i(p)$ podemos escribir

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} &= \mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}y\mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \mathbf{E}_2 - \frac{1}{2}x\mathbf{E}_3 \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \mathbf{E}_3. \end{cases}$$

Por otro lado, los coeficientes de la métrica sobre $T_p\mathcal{H}_3$ en un punto $p = (x, y, z) \in \mathcal{H}_3$ son dados por

$$g_{ij}(p) = \langle E_i(p), E_j(p) \rangle_p := \langle (dL_p)_e^{-1}E_i(p), (dL_p)_e^{-1}E_j(p) \rangle_e,$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned}
g_{11}(p) &= \langle E_1(p), E_1(p) \rangle_p \\
&= \langle (dL_p)_e^{-1}E_1(p), (dL_p)_e^{-1}E_1(p) \rangle_e \\
&= \langle E_1 + \frac{1}{2}yE_3, E_1 + \frac{1}{2}yE_3 \rangle_e \\
&= 1 + \frac{1}{4}y^2,
\end{aligned}$$

de manera análoga se calculan los otros coeficientes. Por lo tanto, podemos introducir una Métrica Riemanniana invariante a izquierda en cada punto $g \in \mathcal{H}_3$ cuya matriz de

la métrica es dada por

$$G_p = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}y^2 & -\frac{1}{4}xy & \frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{4}xy & 1 + \frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix}, \quad p = (x, y, z)^\top \in \mathcal{H}_3.$$

Puesto que la métrica sobre \mathcal{H}_3 es por definición

$$g = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(p) dx_i dx_j,$$

donde $g_{ij}(p)$ denotan los coeficientes de la métrica y denotando $dx_1 = dx$, $dx_2 = dy$ y $dx_3 = dz$ tenemos que, la métrica invariante a izquierda sobre $T_p\mathcal{H}_3$ es dada por

$$g = \left(1 + \frac{1}{4}y^2\right) dx^2 + \left(1 + \frac{1}{4}x^2\right) dy^2 + dz^2 - \frac{1}{2}xy dx dy + y dx dz - x dy dz,$$

equivalentemente,

$$g = dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz\right)^2.$$

□

Capítulo 2

Ecuaciones de estructura de inmersiones

En este capítulo presentaremos las ecuaciones fundamentales provenientes de la Teoría de Inmersiones, y el Método del marco referencial, ver [4], [26], [27], [28].

2.1. Ecuaciones Fundamentales de las Inmersiones Isométricas

En esta sección presentaremos algunos aspectos fundamentales de la Teoría de Inmersiones Isométricas, fundamentalmente establecemos las ecuaciones fundamentales asociadas a tales inmersiones. A saber, ecuación de Gauss–Codazzi–Ricci; las mismas que nos serán de utilidad en los siguientes capítulos.

Comenzamos con la siguiente noción de inmersión.

Definición 82. Sean $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{M^n})$ y $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}^{n+m}})$ Variedades Riemannianas. Decimos que una inmersión $\varphi : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+m}$ es isométrica si

$$\langle d\varphi_p(X_p), d\varphi_p(Y_p) \rangle_{\overline{M}^{n+m}} = \langle X_p, Y_p \rangle_{M^n},$$

para todo $p \in M^n$ y campos de vectores $X, Y \in \chi(M^n)$.

Definición 83. Sean M^n una variedad diferenciable y \overline{M}^{n+m} una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}^{n+m}}$. Sea $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión, llamamos métrica inducida sobre M^n vía φ a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^n}$ que induce de manera natural en M^n una

estructura de variedad Riemanniana; y es definida del siguiente modo: dados $p \in M^n$ y $X_p, Y_p \in T_p M^n$ se tiene

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \langle d\varphi_p(X_p), d\varphi_p(Y_p) \rangle_{\overline{M}^{n+m}}.$$

Observación 84. Por la Definición 83, se tiene que, al dotar a M^n con tal métrica la aplicación φ es una inmersión isométrica.

Sea $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión, para todo punto $p \in M^n$, el producto interno en $T_p \overline{M}^{n+m}$ induce una descomposición de $T_p \overline{M}^{n+m}$ en la siguiente suma directa

$$T_p \overline{M}^{n+m} = T_p M^n \oplus (T_p M^n)^\perp$$

donde $(T_p M^n)^\perp$ es llamado complemento ortogonal de $T_p M^n$ en $T_p \overline{M}^{n+m}$. Así, si $v \in T_p \overline{M}^{n+m}$, $p \in M^n$, podemos escribir

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_p M^n, \quad v^N \in (T_p M^n)^\perp.$$

A partir de la descomposición anterior y la proyección canónica, es posible definir el fibrado normal $(TM^n)^\perp$ de M^n en $T_p \overline{M}^{n+m}$ por

$$(TM^n)^\perp := \bigsqcup_{p \in M^n} (T_p M^n)^\perp,$$

de tal manera que $T\overline{M}^{n+m} \Big|_{M^n} \cong TM^n \oplus (TM^n)^\perp$.

Denotaremos por $\chi(M^n)^\perp$ el conjunto de campos de vectores normales diferenciables, a M^n , es decir, el espacio de secciones de $(TM^n)^\perp$.

La Conexión Riemanniana de \overline{M}^{n+m} sera indicada por $\overline{\nabla}$. Sean X e Y campos de vectores locales definidos sobre M^n , X_1, X_2 extensiones locales de X e Y_1, Y_2 extensiones locales de Y a \overline{M}^{n+m} entonces

$$\overline{\nabla}_{X_1} Y_1 = \overline{\nabla}_{X_2} Y_2.$$

Por lo tanto, si $\overline{X}, \overline{Y}$ denotan las extensiones de X e Y a \overline{M}^{n+m} , respectivamente, entonces podemos escribir $\overline{\nabla}_X Y$ para denotar $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$. Así, obtenemos un campo de vectores bien definido $\overline{\nabla}_X Y \in T\overline{M}^{n+m} \Big|_{M^n}$.

Proposición 85. Sean $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica, ∇ y $\overline{\nabla}$ las conexiones de Levi-Civita de M^n y \overline{M}^{n+m} , respectivamente. Si $X, Y \in \chi(M^n)$ entonces

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top,$$

donde $(\)^\top$ denota la proyección ortogonal sobre TM^n . La conexión obtenida $(\overline{\nabla}_X Y)^\top$ es llamada componente tangencial de $\overline{\nabla}_X Y$.

Prueba: Ver [27]. □

Consideremos en $(TM^n)^\perp$ la métrica obtenida por la restricción de la métrica de $T\overline{M}^{n+m}$ determinada por la inmersión isométrica $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$.

Definición 86. Sean $X \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$ campos de vectores, definimos la conexión $\nabla^\perp : \chi(M^n) \times \chi(M^n)^\perp \rightarrow \chi(M^n)^\perp$ en el fibrado normal de M^n por

$$\nabla_X^\perp \eta := (\overline{\nabla}_X \eta)^\perp = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^\top, \quad (2.1)$$

la componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$. Tal conexión ∇^\perp es denominada conexión normal de la inmersión.

Observación 87. La conexión ∇^\perp es compatible con la métrica de $(TM^n)^\perp$. En efecto, puesto que si $X \in \chi(M^n)$ y $\eta, \xi \in \chi(M^n)^\perp$ entonces

$$X \langle \eta, \xi \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \overline{\nabla}_X \xi \rangle = \langle \nabla_X^\perp \eta, \xi \rangle + \langle \eta, \nabla_X^\perp \xi \rangle.$$

Definición 88. Llamamos la segunda forma fundamental vectorial de la inmersión φ a la sección $\alpha : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \rightarrow \chi(M^n)^\perp$ del fibrado de Homomorfismos $\text{Hom}(TM^n \oplus TM^n; (TM^n)^\perp)$ definida por

$$\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

donde $X, Y \in \chi(M^n)$.

En particular, para cada $p \in M^n$ la aplicación $\alpha_p : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow (T_p M^n)^\perp$ dada por $\alpha_p(X, Y) = \alpha(X, Y)(p)$ depende solamente de los valores X e Y en p .

Proposición 89. La segunda forma fundamental vectorial de la inmersión φ es una aplicación bilineal y simétrica.

Prueba: Ver [27]. □

Definición 90. Sea $p \in M^n$ y $\eta \in (T_p M^n)^\perp$. Llamamos segunda forma fundamental de la inmersión φ en p segun el vector normal η , denotada por II_η , a la forma cuadrática definida en $T_p M^n$ dada por

$$II_\eta(X) = H_\eta(X, X),$$

donde la aplicación $H_\eta : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica dada por $H_\eta(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle$, $X, Y \in T_p M^n$.

La sección α corresponde a la sección $A : \chi(M^n) \times \chi(M^n)^\perp \rightarrow \chi(M^n)$ del fibrado de Homomorfismos $\text{Hom}(TM^n \oplus (TM^n)^\perp; TM^n)$ por la igualdad

$$\langle A(X, \eta), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle.$$

Definición 91. Llamamos Operador de forma, también llamado Operador de Weingarten de la inmersión φ en la dirección de η , al operador auto-adjunto $A_\eta : \chi(M^n) \rightarrow \chi(M^n)$, definido por $A_\eta X = A(X, \eta)$.

Observación 92. La aplicación bilineal H_η esta asociada a la aplicación lineal $S_\eta : T_p M^n \rightarrow T_p M^n$ dada por

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle$$

Proposición 93. Sean $p \in M^n$, $X \in T_p M^n$ y $\eta \in (T_p M^n)^\perp$. Entonces

$$A_\eta X = -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top \quad (2.2)$$

Prueba: Sea $Y \in T_p M^n$, notemos que $\langle \eta, Y \rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle A_\eta X, Y \rangle &= \langle \alpha(X, Y)(p), \eta \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X Y, \eta \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_X \eta \rangle = \langle -\bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle(p) = \langle (-\bar{\nabla}_X \eta)^\top, Y \rangle \end{aligned}$$

Como Y es arbitrario, la prueba esta concluida. \square

Observación 94. Por las ecuaciones (2.1) y (2.2) obtenemos la siguiente ecuación

$$\bar{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta,$$

para todo $X \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$. Tal ecuación es conocida como ecuación de Weingarten.

Denotando también por ∇^\perp la conexión canónica del fibrado de homomorfismos $\text{Hom}(TM^n \oplus TM^n; (TM^n)^\perp)$ tenemos

$$(\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \nabla_X \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

Ahora establecemos las conocidas ecuaciones de Gauss y Codazzi, las cuales relacionan las componentes tangencial y normal del tensor curvatura de \overline{M}^{n+m} con el tensor de curvatura de M^n , para campos de vectores sobre M^n , y la segunda forma fundamental de la inmersión φ .

Proposición 95. Sea $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica, y $X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ entonces:

$$\begin{aligned} a) \quad & (\overline{R}(X, Y)Z)^\top = R(X, Y)Z + A_{\alpha(X, Z)}Y - A_{\alpha(Y, Z)}X \quad (\text{Ec. Gauss}). \\ b) \quad & (\overline{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z) \quad (\text{Ec. Codazzi}). \end{aligned}$$

Prueba: Ver [27]. □

Corolario 96. (Ecuación de Gauss) Sea $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica, y $X, Y, Z, W \in \chi(M^n)$ entonces

$$\langle R(W, X)Y, Z \rangle = \langle \overline{R}(W, X)Y, Z \rangle - \langle \alpha(W, Y), \alpha(X, Z) \rangle + \langle \alpha(W, Z), \alpha(X, Y) \rangle. \quad (2.3)$$

En particular, si $X, Y \in \chi(M^n)$ son ortonormales, entonces la curvatura seccional de M^n y \overline{M}^{n+m} satisfacen la ecuación

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - |\alpha(X, Y)|^2. \quad (2.4)$$

Prueba: Por (a) de la Proposición 95 tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(W, X)Y, Z \rangle &= \langle (\overline{R}(W, X)Y)^\top, Z \rangle \\ &= \langle R(W, X)Y + A_{\alpha(W, Y)}X - A_{\alpha(X, Y)}W, Z \rangle \\ &= \langle R(W, X)Y, Z \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(W, Y) \rangle - \langle \alpha(W, Z), \alpha(X, Y) \rangle, \end{aligned}$$

para la segunda parte, de la ecuación (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= \langle R(X, Y)Y, X \rangle \\ &= \langle \overline{R}(X, Y)Y, X \rangle - \langle \alpha(Y, X), \alpha(X, Y) \rangle + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle \\ &= \overline{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - |\alpha(X, Y)|^2. \end{aligned}$$

□

Notemos que para $X, Y \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$ tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)(Y, \eta) &= \nabla_X A(y, \eta) - A(\nabla_X Y, \eta) - A(Y, \nabla_X^\perp \eta) \\ &= \nabla_X A_\eta Y - A_\eta \nabla_X Y - A_{\nabla_X^\perp \eta} Y. \end{aligned}$$

Se puede verificar directamente, la siguiente igualdad

Proposición 97. Para $X, Y, Z \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$, tenemos

$$\langle (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z), \eta \rangle = \langle (\nabla_X A)(Y, Z), \eta(Y, \eta) \rangle. \quad (2.5)$$

La ecuación de Codazzi, puede ser reescrita como se indica en el siguiente resultado.

Corolario 98. (Ecuación de Codazzi) Sea $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica, $X, Y, Z \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$, tenemos

$$(\overline{R}(X, Y)\eta)^\top = (\nabla_Y A)(X, \eta) - (\nabla_X A)(Y, \eta). \quad (2.6)$$

Prueba: Para $Z \in \chi(M^n)$, por la Ecuación de Codazzi dada en (b) de la Proposición 95 y la ecuación (2.5), se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, Y)\eta, Z \rangle &= -\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle \\ &= \langle (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z), \eta \rangle - \langle (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z), \eta \rangle \\ &= \langle (\nabla_Y A)(X, \eta), Z \rangle - \langle (\nabla_X A)(Y, \eta), Z \rangle \\ &= \langle (\nabla_Y A)(X, \eta) - (\nabla_X A)(Y, \eta), Z \rangle, \end{aligned}$$

como Z es arbitrario la prueba es concluida. □

Ahora, establecemos el Teorema Fundamental para Hipersuperficies, como sigue.

Teorema 99. Sea M^n una variedad Riemanniana simplemente conexa, y sea $A : TM^n \longrightarrow TM^n$ el tensor simétrico satisfaciendo las ecuaciones de Gauss y Codazi en el caso de curvatura seccional constante c , entonces existe una inmersión $\varphi : M^n \longrightarrow M_c^{n+1}$ talque $A = A_\xi$ para algún campo de vectores normal $\xi \in (TM^n)^\perp$, donde A_ξ denota la segunda forma fundamental de la inmersión φ .

Prueba: Ver [25]. □

En vista del Corolario 98 resulta natural escribir $(\overline{R}(X, Y)\eta)^\perp$, $X, Y \in \chi(M^n)$, $\eta \in \chi(M^n)^\perp$ en función de elementos de la inmersión asociada. Con esta finalidad introducimos la siguiente definición.

Definición 100. Sean $X, Y \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$ campos de vectores, la curvatura normal R^\perp (operador de curvatura del fibrado normal $(TM^n)^\perp$) de la inmersión isométrica $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$, es dada por

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Proposición 101. Sea $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica, para $X, Y \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$ tenemos

$$(\overline{R}(X, Y)\eta)^\perp = R^\perp(X, Y)\eta + \alpha(A_\eta X, Y) - \alpha(A_\eta Y, X). \quad (\text{Ec. Ricci}). \quad (2.7)$$

Prueba: Ver [27]. □

Corolario 102. (Ecuación de Ricci) Sea $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica, para $X, Y \in \chi(M^n)$ y $\eta \in \chi(M^n)^\perp$ tenemos

$$\langle \overline{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X, Y \rangle, \quad (2.8)$$

donde $[A_\eta, A_\zeta]$ es la aplicación $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Prueba: Tomando el producto interno entre la ecuación (2.7) de la Proposición 101 con ζ y observando que

$$\begin{aligned} \langle \alpha(A_\eta X, Y), \zeta \rangle - \langle \alpha(A_\eta Y, X), \zeta \rangle &= \langle A_\zeta A_\eta X, Y \rangle - \langle A_\zeta A_\eta Y, X \rangle \\ &= \langle A_\zeta A_\eta X, Y \rangle - \langle Y, A_\eta A_\zeta X \rangle \\ &= \langle [A_\zeta, A_\eta]X, Y \rangle. \end{aligned}$$

□

2.2. Método del marco referencial

En esta sección estableceremos algunos aspectos fundamentales del Método del marco referencial sobre Variedades Riemannianas.

Iniciaremos, por tanto, estableciendo la noción de marco de referencia.

Definición 103. Sean M^n una Variedad Riemanniana, $p \in M^n$ y $U \subset M^n$ una vecindad de p . Llamamos marco de referencia ortonormal sobre U a un conjunto de campos de vectores diferenciables $\{e_1, \dots, e_n\}$ en U tal que para todo punto $p \in U$ se tiene $g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $1 \leq i, j \leq n$. Equivalentemente, $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal en cada punto $p \in M^n$ del espacio tangente $T_p M^n$.

En la definición previa estamos considerando una vecindad U de $p \in M^n$ donde sea posible definir campos de vectores diferenciables con la propiedad indicada. Asimismo, indicamos que omitiremos los adjetivos ortonormal y en movimiento cuando no exista posibilidad de confusión.

Apartir de la noción de marco referencial podemos introducir el concepto de marco referencial dual, como sigue

Definición 104. Sean M^n una Variedad Riemanniana, $p \in M^n$, $U \subset M^n$ una vecindad de p y $\{e_i\}_{i=1}^n$ un Marco de Referencia sobre U . Llamamos Marco de Referencia Dual o Co-referencial asociado a $\{e_i\}_{i=1}^n$ al conjunto de 1-formas lineales diferenciables $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ definidas sobre U por la condición $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, n$. En otras palabras, para cada p , la base $\{(\omega_i)_p\}_{i=1}^n$ es la base dual de $\{(e_i)_p\}_{i=1}^n$.

Si M^n tiene métrica inducida por una inmersión $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, para $p \in M^n$, existe $Z \subset M^n$ una vecindad de p tal que la restricción $\varphi|_Z$ es inyectiva. Sea $W \subset \overline{M}^{n+1}$ una vecindad de $\varphi(p)$ en \overline{M}^{n+1} de tal modo que $\varphi(Z) \subset W$. Admitiendo W suficientemente pequeña para que exista un marco referencial $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ en W de manera que cuando nos restringimos a $\varphi(Z)$ el marco referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ sea tangente a $\varphi(Z)$ y e_{n+1} sea normal a $\varphi(Z)$. Un marco referencial con estas características es llamado marco referencial adaptado.

Ahora, introduciremos la noción de formas de conexión en términos de la derivada covariante, como sigue:

Definición 105. Sean M^n una Variedad Riemanniana, $p \in M^n$, y $U \subset M^n$ una vecindad de p . Dado un marco de referencia $\{e_i\}_{i=1}^n$ sobre U . Llamamos formas de conexión en U asociadas al marco de referencia $\{e_i\}_{i=1}^n$ a las 1-formas diferenciables sobre U definidas por la igualdad

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j e_j, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Equivalentemente, si $X = e_i$ tenemos $\omega_i^j(Y) = \langle \nabla_Y e_i, e_j \rangle$.

Lo que nos dá una interpretación geométrica de las formas de conexión. Las propiedades de una conexión garantizan inmediatamente que las ω_i^j son, en efecto, 1-formas diferenciables en U .

Observación 106. En el caso que $M^n = \mathbb{R}^n$, cada campo vectorial e_i es una función diferenciable $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. El diferencial en $p \in U$, $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una función lineal. Así, para cada p y cada $v \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_i^j)_p(v) e_j$$

Podemos ver que las expresiones $(\omega_i^j)_p(v)$, dependen linealmente de v . Así $(\omega_i^j)_p$ es una 1-forma en \mathbb{R}^n y, como e_i es un campo de vectores diferenciables, ω_i^j es una 1-forma diferenciable. Por lo tanto, las n^2 formas ω_i^j en el marco de referencia $\{e_i\}$ definidas por

$$de_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j e_j$$

son llamadas formas de conexión de \mathbb{R}^n .

Observación 107. Las formas ω_i^j son anti-simétricas en los índices i, j , esto es, $\omega_i^j = -\omega_j^i$. En efecto, derivando la expresión $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ obtenemos

$$\langle \nabla e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla e_j \rangle = 0.$$

Por otro lado,

$$\nabla e_i = \sum_s \omega_i^s e_s,$$

lo cual implica que,

$$\langle \nabla e_i, e_j \rangle = \left\langle \sum_s \omega_i^s e_s, e_j \right\rangle = \sum_s \omega_i^s \langle e_s, e_j \rangle = \omega_i^j.$$

Por lo tanto,

$$0 = \langle \nabla e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla e_j \rangle = \omega_i^j + \omega_j^i,$$

es decir, las formas de conexión son antisimétricas en los índices i, j .

Por la observación anterior sobre la condición de antisimetría de las formas de conexión, tenemos que $\omega_i^i = -\omega_i^i$, así $\omega_i^i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, la condición de antisimetría de las formas de conexión tiene el efecto de reducir la cantidad de formas de conexión ω_i^j .

Proposición 108. *La derivada covariante $\nabla_Y X$ solamente depende de la métrica inducida en M^n .*

Prueba: Elijamos un marco referencial adaptado $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de M^{n+1} a una vecindad $U \subset M^n$ y escribamos $X = \sum_i x_i e_i$, donde x_i son funciones diferenciables en U .

Como

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i x_i e_i \right) = \sum_i \frac{dx_i}{dt} e_i + \sum_i x_i \frac{De_i}{dt} \\ &= \sum_j \frac{dx_j}{dt} e_j + \sum_i x_i \sum_j \omega_i^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) e_j + \sum_i x_i \sum_k \omega_i^k \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) e_k \end{aligned}$$

tenemos que

$$(\nabla_Y X)_p = \sum_j \left\{ \frac{dx_j}{dt} + \sum_i \omega_i^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) x_i \right\} e_j = \sum_j \left\{ dx_j(Y) + \sum_i \omega_i^j(Y) x_i \right\} e_j$$

lo que muestra que $\nabla_Y X$ solamente depende de los ω_i^j , y por lo tanto, de la métrica inducida. \square

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia ortonormal en un abierto $U \subset M^n$. Si $X = e_i$ tenemos que $\frac{dX}{dt} = \frac{De_i}{dt}$, entonces $(\nabla_Y e_i)_p = \frac{De_i}{dt}$.

Antes de analizar la unicidad de las formas de conexión describimos el conocido Lema de Cartan, como sigue

Lema 109. (Cartan). *Sea V un espacio vectorial n dimensional. Sean $\omega_1, \dots, \omega_r : V \rightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, 1-formas lineales de V que son linealmente independientes. Supongamos que existen formas lineales $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición: $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$.*

Entonces

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Prueba: Completamos las formas $\omega_1, \dots, \omega_r$ en una base $\{\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n\}$ de V^* , y escribamos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j + \sum_l b_{il} \omega_l, \quad l = r+1, \dots, n.$$

Observemos que la condición que satisfacen las formas θ_i (por hipótesis) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \left(\sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j + \sum_{l=r+1}^n b_{il} \omega_l \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j + \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \sum_{l=r+1}^n b_{il} \omega_l. \end{aligned}$$

Restringiendo los índices, esto es, haciendo $i < j$ tenemos

$$\sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i < l} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l = 0,$$

es decir,

$$\sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i < l} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l = 0.$$

Como $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $1 \leq k, s \leq n$, son linealmente independientes, concluimos que $a_{ij} = a_{ji}$ y $b_{il} = 0$. Por lo tanto, con la condición $\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0$ tenemos que

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

□

Lema 110. Sean M^n una variedad Riemanniana, $p \in M^n$, y $U \subset M^n$ una vecindad de p . Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia en U con $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Sean $\omega_1, \dots, \omega_n$ 1-formas diferenciables linealmente independientes en U definidas por la condición $\omega_j(e_j) = \delta_{ij}$ el co-referencial de $\{e_i\}$. Supongamos que existe sobre U un conjunto de 1-formas diferenciables $\{\omega_i^j\}$, $i, j = 1, \dots, n$ que satisfacen las condiciones:

$$d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^j, \quad \text{y} \quad \omega_i^j = -\omega_j^i.$$

Entonces, tal conjunto es único.

Prueba: Supongamos que existe otro conjunto θ_i^j con

$$\theta_i^j = -\theta_j^i \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \theta_k^j,$$

entonces tenemos que $\sum_k \omega_k \wedge \theta_k^j = d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^j = 0$, lo cual implica que

$$\sum_k \omega_k \wedge (\theta_k^j - \omega_k^j) = 0.$$

Por el Lema 109 tenemos

$$\theta_k^j - \omega_k^j = \sum_i B_{ki}^j \omega_i \quad B_{ki}^j = B_{ik}^j,$$

note que

$$\theta_k^j - \omega_k^j = \sum_i B_{ki}^j \omega_i = -(\theta_j^k - \omega_j^k) = -\sum_i B_{ji}^k \omega_i$$

y, como ω_i son linealmente independiente, $B_{ki}^j = -B_{ji}^k$. Usando las simetrías obtenidas, concluimos que

$$B_{ji}^k = -B_{ki}^j = -B_{ik}^j = B_{jk}^i = B_{kj}^i = -B_{ij}^k = -B_{ji}^k = 0,$$

es decir, $\theta_k^j = \omega_k^j$; $k, j = 1, \dots, n$. □

Ahora pasamos a la introducción de la curvatura en una variedad Riemanniana, la cual esta estrechamente ligada a las segundas ecuaciones de estructura. Para tal finalidad elijamos un marco referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en un abierto $U \subset M^n$, y denote como antes por $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ su marco de referencia dual.

Las 2-formas sobre U denotadas por Ω_i^j son llamadas formas de curvatura de M^n en el referencial $\{e_i\}$, y estan dadas por la igualdad

$$\Omega_i^j(X, Y) = \langle R(e_i, e_j)X, Y \rangle,$$

donde $X, Y \in \chi(M^n)$, y R denota como antes el tensor curvatura R .

Observación 111. Las 2-formas Ω_i^j sobre U son antisimétricas, es decir, $\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0$ para todo i, j . En particular, $\Omega_i^i = 0$ para todo i . En efecto, sigue desde la simetría del operador curvatura R .

Como las formas de conexión Ω_i^j son formas de grado dos, ellas pueden ser escritas como

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \quad (2.10)$$

donde las funciones R_{ijkl} son las llamadas componentes del tensor curvatura R de M^n y en el referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$ estan dadas por $R(e_i, e_j, e_k, e_l) = R_{ijkl}$. En efecto, notemos que

$$R_{ijkl} := \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle = \Omega_i^j(e_k, e_l).$$

Así, tomando una base $\{\omega_l \wedge \omega_k\}_{k < l}$, vemos que

$$\Omega_i^j = \sum_{k < l} \Omega_i^j(e_k, e_l) \omega_k \wedge \omega_l = \sum_{k < l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l.$$

Observe que $\langle R(e_k, e_l)e_i, e_j \rangle = \Omega_j^i(e_k, e_l) = \frac{1}{2} \sum_{s, t} R_{jist} \omega_s \wedge \omega_t(e_k, e_l) = R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$.

El significado geométrico de tales formas es análogo al de las formas de conexión ω_i^j . A saber, para cada punto $p \in M^n$ y cada par de vectores $X, Y \in T_p M^n$ la matriz $\{(\Omega_i^j)_p(X, Y)\}$ es la matriz de una aplicación lineal

$$(R_{XY})_p : T_p M^n \longrightarrow T_p M^n,$$

donde R_{XY} es el operador de curvatura de M^n .

El punto clave en el método del marco de referencia es que las 1-formas ω_i y ω_i^j satisfacen las ecuaciones de estructura de Elie Cartan, descritas en el siguiente Teorema.

Teorema 112. (*Ecuaciones de estructura sobre M^n*). Sea M^n una variedad Riemanniana, $p \in M^n$ y $U \subset M^n$ una vecindad de p . Sean $\{e_i\}$ un marco de referencia sobre U con $\{\omega_i\}$ su marco de referencia dual, y ω_i^j $1 \leq i, j \leq n$ las formas de conexión. Entonces las derivadas exteriores de estas formas satisfacen:

(1) *Las primeras ecuaciones de estructura*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^i, \quad \omega_i^k + \omega_k^i = 0, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (2.11)$$

(2) *Las segundas ecuaciones de estructura*

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.12)$$

donde Ω_i^j denota la forma de curvatura de M^n .

Prueba: Sean $X, Y \in \chi(U)$ cualesquiera. Desde la Proposición 38 tenemos que

$$\begin{aligned}
d\omega_i(X, Y) &= X(\omega_i(Y)) - Y(\omega_i(X)) - \omega_i([X, Y]) \\
&= X\langle Y, e_i \rangle - Y\langle X, e_i \rangle - \langle [X, Y], e_i \rangle \\
&= \langle Y, \nabla_X e_i \rangle - \langle X, \nabla_Y e_i \rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \langle Y, e_k \rangle \langle \nabla_X e_i, e_k \rangle - \langle X, e_k \rangle \langle \nabla_Y e_i, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^n \{ \omega_j(Y) \omega_i^k(X) - \omega_k(X) \omega_i^k(Y) \} \\
&= \sum_{k=1}^n (\omega_i^k \wedge \omega_k)(X, Y) \\
&= - \sum_{k=1}^n (\omega_k \wedge \omega_i^k)(X, Y) = \sum_{k=1}^n (\omega_k \wedge \omega_i^k)(X, Y).
\end{aligned}$$

Ahora, probaremos las segundas ecuaciones de estructura. Se sigue de la Proposición 38 que

$$\begin{aligned}
d\omega_i^j(X, Y) &= X(\omega_i^j(Y)) - Y(\omega_i^j(X)) - \omega_i^j([X, Y]) \\
&= X\langle \nabla_Y e_i, e_j \rangle - Y\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} e_i, e_j \rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X e_i, e_j \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_k \langle R(X, Y) e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_Y e_i, e_k \rangle \langle \nabla_X e_j, e_k \rangle - \langle \nabla_X e_i, e_k \rangle \langle \nabla_Y e_j, e_k \rangle \\
&= \sum_k \langle R(e_i, e_j) X, Y \rangle + \omega_i^k(Y) \omega_j^k(X) - \omega_i^k(X) \omega_j^k(Y) \\
&= \sum_k \Omega_i^j(X, Y) + \omega_i^k(X) \omega_k^j(Y) - \omega_i^k(Y) \omega_k^j(X) \\
&= \sum_k \Omega_i^j(X, Y) + (\omega_i^k \wedge \omega_k^j)(X, Y).
\end{aligned}$$

□

Sobre \mathbb{R}^n las ecuaciones de estructura se pueden reescribir como se describe en la siguiente proposición.

Proposición 113. *Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ un marco de referencia sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con marco de referencia dual $\{\omega_i\}_{i=1}^n$, y ω_i^j $1 \leq i, j \leq n$ las formas de conexión de U en el referencial $\{e_i\}_{i=1}^n$. Entonces las ecuaciones de estructura son dadas por*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^i, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (2.13)$$

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.14)$$

Prueba: Sea $a_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, a_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ la base canónica de \mathbb{R}^n para cada $p \in U$. Sea $x_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función que corresponde a cada punto $p = (x_1, \dots, x_n) \in U$ la i -ésima coordenada. Entonces, dx_i es la 1-forma diferencial en U que satisface la condición $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$, así concluimos que $\{dx_i\}$ es el co-referencial asociado al referencial $\{a_i\}$. Luego, el referencial $\{e_j\}$ dado se expresa en término de los a_i mediante

$$e_i = \sum_j \beta_{ij} a_j, \quad (2.15)$$

donde β_{ij} son funciones diferenciables en U y, para cada $p \in U$, la matriz $(\beta_{ij}(p))$ es una matriz ortogonal.

Puesto que, $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ tenemos

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j, \quad (2.16)$$

diferenciado la ecuación (2.15) tenemos $\nabla e_i = \sum_j d\beta_{ij} a_j$. Por otro lado,

$$\nabla e_i = \sum_k \omega_i^k e_k = \sum_k \omega_i^k \left(\sum_j \beta_{kj} a_j \right) = \sum_{jk} \omega_i^k \beta_{kj} a_j,$$

de aquí, por comparación se sigue que

$$d\beta_{ij} = \sum_k \beta_{kj} \omega_i^k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.17)$$

por lo tanto, diferenciando exteriormente (2.16) y usando (2.17) obtenemos las primeras ecuaciones de estructura, como sigue:

$$d\omega_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_j \left(\sum_k \omega_i^k \beta_{kj} \right) \wedge dx_j = \sum_k \omega_i^k \wedge \sum_j \beta_{kj} dx_j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^i,$$

para obtener la segundas ecuaciones de estructura, primero observamos que

$$\omega_i^k = \sum_j d\beta_{ij} \beta_{kj}. \quad (2.18)$$

En efecto, diferenciado la ecuación (2.15) obtenemos

$$\nabla e_i = \sum_j d\beta_{ij} a_j = \sum_j \left(d\beta_{ij} \sum_k \beta_{kj} e_k \right),$$

y como $\nabla e_i = \sum_k \omega_i^k e_k$, concluimos que $\omega_i^k = \sum_j d\beta_{ij}\beta_{kj}$.

Ahora, derivando exteriormente la ecuación (2.18) y usando (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega_i^k &= \sum_j d(d\beta_{ij}) \wedge \beta_{kj} + (-1)^1 \sum_j d\beta_{ij} \wedge d\beta_{kj} \\ &= \sum_j d\beta_{kj} \wedge d\beta_{ij} = \sum_j \left\{ \left(\sum_l \omega_k^l \beta_{lj} \right) \wedge \left(\sum_s \omega_i^s \beta_{sj} \right) \right\} \\ &= \sum_l \left(\omega_k^l \wedge \sum_s \omega_i^s \sum_j \beta_{lj} \beta_{sj} \right). \end{aligned}$$

Observe que $\sum_j \beta_{lj} \beta_{sj} = \delta_{ls}$. Así,

$$\begin{aligned} d\omega_i^k &= \sum_l \left(\omega_k^l \wedge \sum_s \omega_i^s \sum_j \beta_{lj} \beta_{sj} \right) = \sum_l \left(\omega_k^l \wedge \sum_s \omega_i^s \delta_{ls} \right) \\ &= \sum_l \omega_k^l \wedge \omega_i^l \\ &= - \sum_l \omega_i^l \wedge \omega_k^l \\ &= \sum_l \omega_i^l \wedge \omega_l^k = \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^k \end{aligned}$$

renombrando los índices tenemos, $d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j$, tal como deseabamos. \square

Proposición 114. (*Bianchi*). Fijando un marco de referencia ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en un abierto de la variedad Riemanniana M^n , sea $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ el marco de referencia dual asociado, ω_i^j las formas de conexión y Ω_i^j las formas de curvatura correspondiente. Se cumplen:

1. $\sum_{j=1}^n \Omega_i^j \wedge \omega_j = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$,
2. $\sum_{k=1}^n d\Omega_i^j + \Omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge \Omega_k^j = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Prueba: Para la prueba del primer ítem, derivando en las primeras ecuaciones de

estructura (2.13), obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= d(d\omega_i) = \sum_{j=1}^n d(\omega_i^j \wedge \omega_j) \\
&= \sum_{j=1}^n (d\omega_i^j \wedge \omega_j - \omega_i^j \wedge d\omega_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^n (\omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j) \wedge \omega_j - \omega_i^j \wedge (\omega_j^k \wedge \omega_k) \\
&= \sum_{j,k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j \wedge \omega_j + \Omega_i^j \wedge \omega_j - \omega_i^j \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k \\
&= \sum_{j=1}^n \Omega_i^j \wedge \omega_j,
\end{aligned}$$

donde, para obtener la última igualdad, cambiamos los índices j y k en la última parte de la penúltima línea.

Para (2), derivando exteriormente en las segundas ecuaciones de estructura (2.14), obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &= d(d\omega_i^j) = \sum_{k=1}^n d\Omega_i^j + d(\omega_i^k \wedge \omega_k^j) \\
&= \sum_{k=1}^n d\Omega_i^j + d\omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge d\omega_k^j \\
&= \sum_{k,l=1}^n d\Omega_i^j + (\omega_i^l \wedge \omega_l^k + \Omega_i^k) \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge (\omega_k^l \wedge \omega_l^j + \Omega_k^j) \\
&= \sum_{k,l=1}^n d\Omega_i^j + \omega_i^l \wedge \omega_l^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^l \wedge \omega_l^j - \omega_i^k \wedge \Omega_k^j \\
&= \sum_{k=1}^n d\Omega_i^j + \Omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge \Omega_k^j,
\end{aligned}$$

y cambiando k por l en la última parcela de la penúltima línea, la prueba se concluye. \square

Lema 115. *Sea M^n una variedad diferenciable y ω una k -forma. Para cualquier campo de vectores diferenciables X_1, \dots, X_{k+1} en M^n , se tiene:*

$$\begin{aligned}
d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq k+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\
&+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde el símbolo $\widehat{(\quad)}$ indica que el elemento se omite.

Prueba: Ver [17]. □

Observación 116. *La formula de (1) de la Proposición 114 es la versión en k -formas de la primera identidad de Bianchi dada en la Proposición 64. En efecto, fijemos $X, Y, Z \in \chi(M^n)$. Así, para $1 \leq i \leq n$,*

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^n (\Omega_i^j \wedge \omega_j)(X, Y, Z) \\
&= \sum_{j=1}^n \Omega_i^j(X, Y)\omega_j(Z) - \Omega_i^j(X, Z)\omega_j(Y) + \Omega_i^j(Y, Z)\omega_j(X) \\
&= \sum_{j=1}^n \langle R(e_i, e_j)X, Y \rangle \langle Z, e_j \rangle - \langle R(e_i, e_j)X, Z \rangle \langle Y, e_j \rangle + \langle R(e_i, e_j)Y, Z \rangle \langle X, e_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \langle R(X, Y)e_i, e_j \rangle \langle Z, e_j \rangle - \langle R(X, Z)e_i, e_j \rangle \langle Y, e_j \rangle + \langle R(Y, Z)e_i, e_j \rangle \langle X, e_j \rangle \\
&= \langle R(X, Y)e_i, Z \rangle - \langle R(X, Z)e_i, Y \rangle + \langle R(Y, Z)e_i, X \rangle \\
&= -\langle R(X, Y)Z - R(X, Z)Y + R(Y, Z)X, e_i \rangle
\end{aligned}$$

de manera que

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0.$$

En cuanto a la equivalencia entre (2) de la Proposición 114 y la segunda identidad de Bianchi, la fórmula de Kozul es útil para la prueba. En efecto, por el Lema 115 tenemos,

$$\begin{aligned}
d\Omega_i^j(X, Y, Z) &= X(\Omega_i^j(Y, Z)) - Y(\Omega_i^j(X, Z)) + Z(\Omega_i^j(X, Y)) \\
&\quad - \Omega_i^j([X, Y], Z) + \Omega_i^j([X, Z], Y) - \Omega_i^j([Y, Z], X) \\
&= X(R(e_i, e_j, Y, Z)) - Y(R(e_i, e_j, X, Z)) + Z(R(e_i, e_j, X, Y)) \\
&\quad - R(e_i, e_j, [X, Y], Z) + R(e_i, e_j, [X, Z], Y) - R(e_i, e_j, [Y, Z], X) \\
&= X(R(e_i, e_j, Y, Z)) - Y(R(e_i, e_j, X, Z)) + Z(R(e_i, e_j, X, Y)) \\
&\quad - R(e_i, e_j, \nabla_X Y, Z) + R(e_i, e_j, \nabla_Y X, Z) \\
&\quad + R(e_i, e_j, \nabla_X Z, Y) - R(e_i, e_j, \nabla_Z X, Y) \\
&\quad - R(e_i, e_j, \nabla_Y Z, X) - R(e_i, e_j, \nabla_Z Y, X) \\
&= X(R(e_i, e_j, Y, Z)) - R(e_i, e_j, \nabla_X Y, Z) - R(e_i, e_j, Y, \nabla_X Z) \\
&\quad + Y(R(e_i, e_j, Z, X)) - R(e_i, e_j, \nabla_Y Z, X) - R(e_i, e_j, Z, \nabla_Y X) \\
&\quad + Z(R(e_i, e_j, X, Y)) - R(e_i, e_j, \nabla_Z X, Y) - R(e_i, e_j, X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n (\Omega_i^k \wedge \omega_k^j)(X, Y, Z) &= \sum_{k=1}^n \Omega_i^k(X, Y)\omega_k^j(Z) - \Omega_i^k(X, Z)\omega_k^j(Y) + \Omega_i^k(Y, Z)\omega_k^j(X) \\
&= \sum_{k=1}^n -R(e_i, e_j, X, Y)\omega_k^j(Z) + R(e_i, e_k, X, Z)\omega_k^j(Y) \\
&\quad - R(e_i, e_k, Y, Z)\omega_k^j(X) \\
&= \sum_{k=1}^n \langle R(X, Y)e_i, e_k \rangle \langle \nabla_Z e_j, e_k \rangle + \langle R(X, Z)e_i, e_k \rangle \langle \nabla_Y e_j, e_k \rangle \\
&= -R(X, Y, e_i, \nabla_Z e_j) + R(X, Z, e_i, \nabla_Y e_j) - R(Y, Z, e_i, \nabla_X e_j) \\
&= -R(e_i, \nabla_Z e_j, X, Y) - R(e_i, \nabla_Y e_j, Z, X) - R(e_i, \nabla_X e_j, Y, Z),
\end{aligned}$$

y análogamente,

$$\sum_{k=1}^n (\omega_i^k \wedge \Omega_k^j)(X, Y, Z) = R(\nabla_Z e_i, e_j, X, Y) + R(\nabla_Y e_i, e_j, Z, X) + R(\nabla_X e_i, e_j, Y, Z).$$

Luego, sustituyendo las tres expresiones anteriores en la fórmula (2) de la Proposición 114 obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X R)(e_i, e_j, Y, Z) + (\nabla_Y R)(e_i, e_j, Z, X) + (\nabla_Z R)(e_i, e_j, X, Y) \\ &= (\nabla R)(e_i, e_j, Y, Z, X) + (\nabla R)(e_i, e_j, Z, X, Y) + (\nabla R)(e_i, e_j, X, Y, Z) \end{aligned}$$

Ahora, como ∇R es un 5-tensor, se sigue de la relación anterior que

$$(\nabla R)(V, W, Y, Z, X) + (\nabla R)(V, W, Z, X, Y) + (\nabla R)(V, W, X, Y, Z) = 0$$

para todo $V, W, X, Y, Z \in \chi(M)$.

Las formas de curvatura Ω_i^j permiten definir varios tipos de curvatura sobre M^n , siendo la más importante la curvatura que pasaremos a introducir.

Definición 117. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Fijando un punto $p \in M^n$, $\sigma \subset T_p M^n$ un subespacio bi-dimensional y una base $\{X, Y\}$ de σ , el número real

$$K_{M^n}(p, \sigma) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2},$$

donde R denota el operador de curvatura sobre M^n , es llamado curvatura seccional de M^n en p a lo largo de σ .

La simetría del operador de curvatura R garantizan que $K_{M^n}(p, \sigma)$ es independiente de la base ortonormal $\{X, Y\}$ escogida, siendo por lo tanto intrínsecamente asociada al 2-plano σ de $T_p M^n$.

Definición 118. Decimos que una variedad Riemanniana M^n es isotrópica en $p \in M^n$ si $K_{M^n}(p, \sigma)$ es independiente del subespacio bidimensional elegido $\sigma \subset T_p M^n$, es decir, si todas las curvaturas seccionales en p tienen el mismo valor.

El próximo resultado caracteriza la curvatura seccional.

Proposición 119. Sea M^n una variedad Riemanniana, p un punto de M^n y $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia en una vecindad de p con marco de referencia dual $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ y formas de curvatura Ω_i^j . Entonces M^n es isotrópica en p si y solo si existe $K_p \in \mathbb{R}$ tal que

$$\Omega_i^j = -K_p \omega_i \wedge \omega_j, \quad (2.20)$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Prueba: Supongamos primero que M^n es isotrópica en p , de manera que

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = K_p(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2), \quad (2.21)$$

para algún $K_p \in \mathbb{R}$ y para todo $X, Y \in T_p M^n$. Sean $X = a_i e_i$ y $Y = b_i e_i$, cálculos inmediatos nos permiten ver que

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = R_{ijkl} a_i b_j b_k a_l$$

y

$$\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2 = (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) a_i b_j b_k a_l,$$

de manera que

$$R_{ijkl} a_i b_j b_k a_l = K_p (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) a_i b_j b_k a_l. \quad (2.22)$$

Así, como $X, Y \in T_p M^n$ son arbitrarios, concluimos que se cumple (2.22) para todo $a_i, a_l, b_j, b_k \in \mathbb{R}$, y de aquí

$$R_{ijkl} = K_p (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}), \quad (2.23)$$

para todo $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Por lo tanto, a partir de (2.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \Omega_i^j &= \frac{1}{2} K_p (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_k \wedge \omega_l \\ &= \frac{1}{2} K_p (\omega_j \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \omega_j) \\ &= -K_p \omega_i \wedge \omega_j. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si se cumple (2.20) para algún $K_p \in \mathbb{R}$ y para todo $1 \leq i, j \leq n$, entonces nuevamente la ecuación (2.10) nos lleva a (2.23). De aquí, una inversión en los cálculos anteriores permiten concluir la validez de (2.21), es decir, la isotropía de M^n en el punto p . \square

Observación 120. *Decimos que la variedad M^n tiene curvatura seccional constante, cuando $K(p, \sigma)$ es independiente tanto del punto $p \in M^n$ como del subespacio $\sigma \subset T_p M^n$. Este es un caso extremo de isotropía, y la curvatura seccional sobre M^n es denotada simplemente por K .*

El siguiente resultado garantiza que bajo ciertas condiciones, tener curvatura seccional constante equivale a la isotropía en todos los puntos.

Teorema 121. *Sea M^n con $n \geq 3$, una variedad Riemanniana conexa. Si M^n es isotrópica en todo $p \in M^n$, entonces M^n tiene curvatura seccional constante.*

Prueba: Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia en un abierto de M^n , con marco de referencia dual $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ y formas de curvatura Ω_i^j . La Proposición 119 garantiza la existencia de una función (suave) $K : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Omega_i^j = -K\omega_i \wedge \omega_j,$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Por lo tanto, las primeras ecuaciones de estructura (2.13) y la condición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} d\Omega_i^j &= -dK \wedge \omega_i \wedge \omega_j - Kd\omega_i \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge d\omega_j \\ &= -dK \wedge \omega_i \wedge \omega_j - K\omega_i^k \wedge \omega_k \wedge \omega_j + K\omega_i \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k \\ &= -dK \wedge \omega_i \wedge \omega_j + \omega_i^k \wedge (-K\omega_k \wedge \omega_j) + (-K\omega_i \wedge \omega_k) \wedge \omega_j^k \\ &= -dK \wedge \omega_i \wedge \omega_j + \omega_i^k \wedge \Omega_k^j + \Omega_i^k \wedge \omega_j^k, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$-dK \wedge \omega_i \wedge \omega_j = d\Omega_i^j - \omega_i^k \wedge \Omega_k^j + \Omega_i^k \wedge \omega_j^k.$$

Por la identidad de Bianchi dada en la Proposición 114 tenemos que el lado derecho es nulo, de manera que

$$dK \wedge \omega_i \wedge \omega_j = 0,$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Pero como $n \geq 3$, la relación anterior implica que $dK = 0$ sobre M^n , y la conexidad de M^n asegura que K es constante. \square

Ahora, considere una inmersión isométrica $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ de una variedad diferenciable M^n en una variedad Riemanniana \overline{M}^{n+1} con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\overline{M}^{n+1}}$. La restricción de la métrica de \overline{M}^{n+1} a campos de vectores en M^n determina una métrica Riemanniana en M^n , la cual es inducida por \overline{M}^{n+1} . Nosotros, consideraremos M^n con tal métrica. Así, M^n puede ser vista como una subvariedad de \overline{M}^{n+1} y es posible extender un marco referencial sobre M^n a uno sobre una vecindad de \overline{M}^{n+1} .

Sea $p \in M^n$ y $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ un marco referencial en una vecindad $V \subset \overline{M}^{n+1}$ de p , tal que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es tangente a M^n y e_{n+1} es normal a M^n a lo largo de $U = V \cap M^n$. Para $1 \leq i, j \leq n+1$, denotemos respectivamente por $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_i^j$ y $\bar{\Omega}_i^j$ el marco de referencia dual, las formas de conexión y las formas de curvatura en V del marco de referencia $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$. Análogamente, para $1 \leq i, j \leq n$, denotemos respectivamente ω_i, ω_i^j y Ω_i^j el marco de referencia dual, las formas de conexión y las formas de curvatura en U del marco de referencia $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Dada una k -forma diferenciable $\bar{\theta}$ en V , su restricción a los campos en U define una k -forma $\bar{\theta}|_U$ en U . Las formas diferenciables $(\bar{\omega}_i)|_U, (\bar{\omega}_i^j)|_U$ sobre U están relacionadas a las formas diferenciales ω_i, ω_i^j y Ω_i^j . En este sentido tenemos,

Lema 122. *Con las notaciones previas, se cumplen*

1. $\omega_i = (\bar{\omega}_i)|_U$ para $1 \leq i \leq n$ y $(\bar{\omega}_{n+1})|_U = 0$.
2. $\omega_i^j = (\bar{\omega}_i^j)|_U$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Prueba: Para la prueba del primer ítem, sea M^n con la métrica inducida por \overline{M}^{n+1} , $1 \leq i \leq n$ y $X \in \chi(U)$ tenemos que $\omega_i(X) = \langle e_i, X \rangle = \bar{\omega}_i(X) = (\bar{\omega}_i)|_U(X)$, de aquí $\omega_i = (\bar{\omega}_i)|_U$. Por otro lado, como $\langle e_{n+1}, X \rangle = 0$ sigue que $(\bar{\omega}_{n+1})|_U(X) = \bar{\omega}_{n+1}(X) = \langle e_{n+1}, X \rangle = 0$, lo que implica que $(\bar{\omega}_{n+1})|_U = 0$.

Para la prueba de la segunda parte, sean $X, Y \in \chi(U)$. Por las primeras ecuaciones de estructura (2.11) y usando la relación del ítem (1), para $1 \leq i \leq n$ tenemos

$$\begin{aligned} (d\bar{\omega}_i)(X, Y) &= \sum_{j=1}^{n+1} (\bar{\omega}_i^j \wedge \bar{\omega}_j)(X, Y) = \sum_{j=1}^n (\bar{\omega}_i^j \wedge \bar{\omega}_j)(X, Y) \\ &= \sum_{j=1}^n ((\bar{\omega}_i^j)|_U \wedge (\bar{\omega}_j)|_U)(X, Y) = \sum_{j=1}^n ((\bar{\omega}_i^j)|_U \wedge (\omega_j))(X, Y). \end{aligned}$$

Por otro lado, como $[X, Y] \in \chi(U)$, de la fórmula de Koszul (2.19) dada en el Lema 115, usando nuevamente las primeras ecuaciones de estructura (2.11) y (1), para $1 \leq i \leq n$

tenemos que

$$\begin{aligned}
(d\bar{\omega}_i)(X, Y) &= X(\bar{\omega}_i(Y)) - Y(\bar{\omega}_i(X)) - \bar{\omega}_i([X, Y]) \\
&= X((\bar{\omega}_i)|_U(Y)) - Y((\bar{\omega}_i)|_U(X)) - (\bar{\omega}_i)|_U([X, Y]) \\
&= X(\omega_i(Y)) - Y(\omega_i(X)) - \omega_i([X, Y]) \\
&= (d\omega_i)(X, Y) = \sum_{j=1}^n (\omega_i^j \wedge \omega_j)(X, Y).
\end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones anteriores para $(d\bar{\omega}_i)(X, Y)$, sigue de la arbitrariedad de los campos X e Y que, para $1 \leq i \leq n$

$$\sum_{j=1}^n ((\bar{\omega}_i^j)|_U - \omega_i^j) \wedge \omega_j = 0.$$

Luego por el Lema 110 se sigue que $(\bar{\omega}_i^j)|_U = \omega_i^j$, para todo $1 \leq i, j \leq n$; lo que concluye la prueba. \square

En la siguiente proposición establecemos una relación entre las formas de curvatura sobre M^n y \bar{M}^{n+1} .

Proposición 123. *La ecuación de Gauss, satisface*

$$(\bar{\Omega}_i^j)|_U = \Omega_i^j - (\bar{\omega}_i^{n+1})|_U \wedge (\bar{\omega}_{n+1}^j)|_U$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

Prueba: Usando (2) del Lema 122 se deduce que

$$\begin{aligned}
(d\bar{\omega}_i^j)|_U &= \sum_{k=1}^{n+1} (\bar{\omega}_i^k \wedge \bar{\omega}_k^j)|_U + (\bar{\Omega}_i^j)|_U \\
&= \sum_{k=1}^n (\bar{\omega}_i^k)|_U \wedge (\bar{\omega}_k^j)|_U + (\bar{\omega}_i^{n+1})|_U \wedge (\bar{\omega}_{n+1}^j)|_U + (\bar{\Omega}_i^j)|_U \\
&= \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j + (\bar{\omega}_i^{n+1})|_U \wedge (\bar{\omega}_{n+1}^j)|_U + (\bar{\Omega}_i^j)|_U.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la fórmula de Koszul (2.19) dada en el Lema 115 y usando nuevamente (2) del Lema 122 se sigue que

$$(d\bar{\omega}_i^j)|_U = d\omega_i^j = \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j.$$

Comparando las dos expresiones anteriores para $(d\bar{\omega}_i^j)|_U$, obtenemos la igualdad deseada, y la prueba concluye. \square

Para evitar exceso de notación, y cuando no exista posibilidad de confusión denotaremos también sobre \bar{M}^{n+1} por $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ las formas duales, y por ω_i^j , $i, j = 1, \dots, n+1$ las formas de conexión. Tales formas satisfacen las primeras ecuaciones de estructura

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_i^j \wedge \omega_j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0.$$

Más aún, la forma de curvatura $\bar{\Omega}_i^j$ de \bar{M}^{n+1} satisface, las segundas ecuaciones de estructura:

$$\bar{\Omega}_i^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n+1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j = 1, \dots, n+1.$$

De acuerdo con la Proposición 119, tenemos que \bar{M}^{n+1} tiene curvatura seccional constante igual a c si y solamente si

$$\bar{\Omega}_i^j = -c \omega_i \wedge \omega_j. \quad (2.24)$$

Segun (1) del Lema 122, las formas sobre \bar{M}^{n+1} restringidas a M^n satisfacen que $\omega_{n+1} = 0$.

Las formas de conexión de M^n serán las de \bar{M}^{n+1} restringidas a M^n y aún satisfaciendo:

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_i^j \wedge \omega_j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

Así, puesto que Ω_i^j es la forma de curvatura de M^n , por las segundas ecuaciones de estructura tenemos

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, la ecuación de Gauss, dada en la Proposición 123 puede ser escrita como

$$\bar{\Omega}_i^j = \Omega_i^j - \omega_i^{n+1} \wedge \omega_{n+1}^j. \quad (2.25)$$

Más aún, la ecuación de Codazzi es dada por

$$\bar{\Omega}_{n+1}^j = d\theta_{n+1}^j - \sum_{k=1}^n \omega_{n+1}^k \wedge \omega_k^j. \quad (2.26)$$

Por el Lema 109 tenemos que

$$\omega_i^{n+1} = \sum_{j=1}^n h_{ij} \omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji},$$

la segunda forma fundamental de M^n denotada por h es dada por:

$$h = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} \omega_i \omega_j e_{n+1},$$

además, la norma al cuadrado h , usualmente denotada por S es,

$$S = \sum_{i,j=1}^n h_{ij}^2,$$

y la curvatura media H de M^n es,

$$nH := \sum_{i=1}^n h_{ii}. \quad (2.27)$$

Establecemos una versión de la Proposición 85 en el caso $m = 1$, en el contexto del método de marco referencial. Específicamente, el próximo resultado relaciona la conexión de Levi-Civita de M^n y \bar{M}^{n+1} .

Corolario 124. *Sea \bar{M}^{n+1} una variedad Riemanniana con conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$, y $M^n \subset \bar{M}^{n+1}$ una hipersuperficie junto con una métrica inducida. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de M^n , entonces para $p \in M^n$ y $X, Y \in \chi(U)$, tenemos*

$$(\nabla_X Y)(p) = (\bar{\nabla}_X Y)^\top(p), \quad (2.28)$$

que es la proyección ortogonal de $(\bar{\nabla}_X Y)(p) \in T_p \bar{M}^{n+1}$ sobre $T_p M^n$.

Prueba: Sea $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ un marco de referencia ortonormal en un abierto $V \subset \bar{M}^{n+1}$, tal que e_{n+1} es normal a M^n a lo largo de $U = V \cap M^n$. Por (2) del Lema 122 se sigue que

$$\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = \omega_i^j(X) = \bar{\omega}_i^j(X) = \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle,$$

para $X \in \chi(M^n)$ y $1 \leq i, j \leq n$. Por lo tanto,

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^n \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^n \langle (\bar{\nabla}_X e_i)^\top, e_j \rangle e_j = (\bar{\nabla}_X e_i)^\top,$$

luego, si $Y \in \chi(M^n)$ es tal que $Y = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ en U , obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n \nabla_X (a_i e_i) = \sum_{i=1}^n (X(a_i) e_i + a_i \nabla_X e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (X(a_i) e_i + a_i (\bar{\nabla}_X e_i)^\top) = \sum_{i=1}^n (X(a_i) e_i + a_i \bar{\nabla}_X e_i)^\top \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_X (a_i e_i) \right)^\top = (\bar{\nabla}_X Y)^\top. \end{aligned}$$

□

Recordemos que la conexión de Levi-Civita ∇ sobre \mathbb{R}^n es simplemente la derivada direccional de campos de vectores. Más precisamente, si $X(p) = (a_1(p), \dots, a_n(p))$, $Y(p) = (b_1(p), \dots, b_n(p))$ son campos de vectores sobre \mathbb{R}^n tenemos

$$\nabla_Y X = \frac{\partial X}{\partial Y} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial Y}, \dots, \frac{\partial a_n}{\partial Y} \right) = \left(b_i \frac{\partial a_1}{\partial x_i}, \dots, b_i \frac{\partial a_n}{\partial x_i} \right),$$

donde (x_1, \dots, x_n) denotan las coordenadas canónicas de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, si $X \in \chi(\mathbb{R}^{n+1})$ es el campo determinado por el vector posición, es decir, tal que $X(p) = p$ para todo $p \in \mathbb{R}^{n+1}$; tenemos

$$\bar{\nabla}_Y X = Y, \quad (2.29)$$

para todo $Y \in \chi(\mathbb{R}^{n+1})$.

Ejemplo 125. *La esfera 3-dimensional*

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

con la métrica inducida de \mathbb{R}^4 , tiene curvatura seccional constante igual a 1.

En efecto, fijemos un marco de referencia ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ en una vecindad V de p en \mathbb{R}^4 , con $\{e_1, e_2, e_3\}$ tangente y e_4 normal a S^3 a lo largo de $U = V \cap S^3$. Por la Proposición 123 y usando el hecho que $\bar{\Omega}_i^j = 0$, $1 \leq i, j \leq 4$ (donde como antes $\bar{\Omega}_i^j$ denotan las formas de curvatura de \mathbb{R}^4) se obtiene

$$\Omega_i^j = (\bar{\omega}_i^4)|_U \wedge (\bar{\omega}_4^j)|_U. \quad (2.30)$$

Ahora, como e_3 es la restricción a U del campo de vectores determinado por el vector posición en \mathbb{R}^4 , se sigue de la ecuación (2.29) que

$$(\bar{\omega}_4^j)|_U(X) = \bar{\omega}_4^j(X) = \langle \bar{\nabla}_X e_4, e_j \rangle = \langle \bar{\nabla}_X N, e_j \rangle = \langle X, e_j \rangle = \omega_j(X), \quad (2.31)$$

para $X \in \chi(U)$ y $1 \leq j \leq 4$. Por lo tanto, como X es arbitrario, se tiene que $(\bar{\omega}_4^j)|_U = \omega_j$, análogamente, $(\bar{\omega}_i^4)|_U = -(\bar{\omega}_i^4)|_U = -\omega_i$. Sigue finalmente de (2.30) que

$$\Omega_i^j = -\omega_i \wedge \omega_j,$$

y por la Proposición 119 se concluye que S^3 tiene curvatura seccional constante igual a 1.

Ahora, estableceremos algunos aspectos relacionados a la teoría de inmersiones mínimas. Comenzaremos, con una definición importante en el ámbito de las inmersiones y el método del marco referencial.

Definición 126. Sea $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ una inmersión isométrica. Un referencial ortonormal $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+m}\}$ en un abierto $\bar{U} \subset \bar{M}^{n+m}$ se denomina referencial adaptado a la inmersión si las restricciones de $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+m}$ a $U = \bar{U} \cap M^n$ forman un referencial en U .

Definición 127. Sea α la segunda forma fundamental de la inmersión φ , U un abierto de M^n , y sean $\{e_1, \dots, e_n, \eta_1, \dots, \eta_m\}$ un referencial adaptado a $U \subset M^n$. Considere el campo

$$H = \frac{1}{n} \alpha(e_i, e_i) \in \chi(M^n)^\perp,$$

definimos el vector curvatura media de φ en un punto $p \in M^n$ como el valor en p del campo de vectores $H \in \chi(M^n)^\perp$ dado por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(A_{\eta_j}) \eta_j. \quad (2.32)$$

Observemos que el campo (2.32) está bien definido, puesto la forma que tiene indica que es independiente tanto del referencial tangente $\{e_1, \dots, e_n\}$ como del referencial normal $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$.

Definición 128. Una inmersión $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ se dice mínima si $H \equiv 0$, esto es, si para todo $p \in M^n$ y todo $\eta_j \in (T_p M^n)^\perp$ se tiene que $\text{tr}(A_{\eta_j}) = 0$.

Lema 129. Sean $\phi_1 : M_1 \rightarrow M_2$ y $\phi_2 : M_2 \rightarrow M_3$ inmersiones isométricas, entonces

$$H_{\phi_1} = (H_{\phi_2 \circ \phi_1})^\top,$$

donde H_{ϕ_1} denota el vector curvatura media asociado a la inmersión ϕ_1 .

Prueba: Ver [28]. □

Proposición 130. *La aplicación*

$$\varphi : S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow S^3, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2),$$

es una inmersión mínima. Aquí, $\varphi_i : S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$ denotan las inmersiones canónicas usuales, y $S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ la esfera 1-dimensional de radio $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Prueba: Sea v un vector tangente a la esfera S^3 , tenemos

$$A_v N = -(\bar{\nabla}_v N)^\top = \frac{1}{r}(\bar{\nabla}_v x)^\top = \frac{1}{r}v,$$

donde $\bar{\nabla}$ denota la conexión sobre \mathbb{R}^4 , A el operador de Weingarten asociado a la inmersión canónica $\varphi_i : S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$ $\varphi_i(z) = z$ en relación al campo normal unitario $N = -\frac{z}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$. En otras palabras, $A = \frac{1}{r}Id$, donde Id es el operador identidad. Por lo tanto

$$H_{\varphi_i} = (Tr A)N = -\frac{z}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Considere la aplicación $\hat{\varphi} : S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. definida por

$$\hat{\varphi}(z_1, z_2) = (z_1, z_2),$$

el vector de curvatura media es dado por

$$H_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{2}(H_{\varphi_1}, H_{\varphi_2}) = -(z_1, z_2),$$

considerando $M_1 = S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2 = S^3$, $M_3 = \mathbb{R}^4$, $\phi_1 = \varphi$ y $\phi_2 : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$; en el Lema 129, tenemos

$$H_\varphi = H_{\hat{\varphi}} \in (TS^3)^\perp,$$

con $\hat{\varphi} = \phi_2 \circ \phi_1$. Como $H_{\hat{\varphi}} = -(z_1, z_2) = \lambda(z_1, z_2) = \lambda\varphi$, para $\lambda = -1$, tenemos que $H_{\hat{\varphi}} \parallel \varphi$, por otro lado

$$H_{\hat{\varphi}} \parallel \varphi \Leftrightarrow H_\varphi = H_{\hat{\varphi}} \in (TS^3)^\perp \Leftrightarrow H_\varphi = 0.$$

Por lo tanto, φ es una inmersión minimal. □

2.3. Laplaciano sobre una Variedad Riemanniana

En esta sección, introduciremos algunos aspectos relacionados a las nociones de gradiente, Laplaciano y divergencia, sobre variedades. Introducimos la siguiente noción

Definición 131. Sea M^n una variedad Riemanniana, $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Llamamos gradiente de f en $p \in M^n$, denotado por $\nabla(f_p)$, al único vector de $T_p M^n$, definido por

$$\langle \nabla f(p), X(p) \rangle = X_p(f)$$

para todo $X \in \chi(M^n)$. Aquí, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno dada por la métrica g sobre $T_p M^n$.

Proposición 132. Sea M^n una variedad Riemanniana, $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia ortonormal en una vecindad abierta $U \in M^n$. Entonces,

$$\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j$$

dicha igualdad es independiente del marco de referencia elegido.

Prueba: Sea $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ el campo de vectores sobre U , tenemos

$$X(f) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(f) = \sum_{i,j=1}^n \langle a_i e_i, e_j(f) e_j \rangle = \langle X, \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j \rangle$$

y desde la Definición 131 se concluye la primera parte.

Si $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ es otro marco de referencia ortonormal sobre U , tenemos $\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$,

luego, $\sum_{j=1}^n \tilde{e}_j(f) \tilde{e}_j = \sum_{k,j,l=1}^n a_{kj} a_{lj} e_k(f) e_l = \sum_{k,l=1}^n \delta_{kl} e_k(f) e_l = \sum_{k=1}^n e_k(f) e_k$. \square

Observación 133. Cuando $M^n = \mathbb{R}^n$, tomando $e_i = E_i$, $1 \leq i \leq n$, como el i -ésimo campo canónico en \mathbb{R}^n podemos escribir

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

esto es, $(\nabla f)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$.

Proposición 134. Sea M^n una variedad Riemanniana, $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dados $p \in M^n$ y $v \in T_p M^n$, sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$ una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$ entonces

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Prueba: La prueba se sigue directamente de la Definición 131. □

Proposición 135. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, se satisfacen:

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$,
2. $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$,
3. $\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f$.

Prueba: Sea X un campo diferenciable sobre M^n , tenemos:

$$\langle \nabla(f + g), X \rangle = X(f + g) = X(f) + X(g) = \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle,$$

también,

$$\langle \nabla(fg), X \rangle = X(fg) = gX(f) + fX(g) = \langle g\nabla f, X \rangle + \langle f\nabla g, X \rangle = \langle g\nabla f + f\nabla g, X \rangle.$$

Finalmente, sea $p \in M^n$, $v \in T_p M^n$ y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$ una curva diferenciable tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$, por la Proposición 134 se sigue que,

$$\langle \nabla(\phi \circ f), v \rangle = \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = \phi'(f(p)) \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} = (\phi' \circ f) \langle \nabla f, v \rangle_p. \quad \square$$

Proposición 136. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, $U \subset M^n$ una vecindad coordenada, y $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ un marco de referencia en U . El gradiente de f en U es dado por

$$\nabla f = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

En particular,

$$|\nabla f|^2 = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_l},$$

donde g^{kl} denotan los coeficientes de la inversa de la matriz G de la métrica sobre M^n .

Prueba: Sea $\nabla f = \sum_k a_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k g_{kl},$$

de manera que, $\sum_{l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} = \sum_{j,l=1}^n a_j g^{kl} g_{jl} = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{kj} = a_k$, y se concluye la primera parte. Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= \sum_{k,l,m,j=1}^n \left\langle g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_k}, g^{mj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle \\ &= \sum_{k,l,m,j=1}^n g^{kl} g^{mj} g_{km} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{k,l,j=1}^n g^{kl} \delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

□

Definición 137. Sea M^n una variedad Riemanniana con conexión de Levi-Civita ∇ . Sea X un campo de vectores diferenciable sobre M^n . Llamamos Divergencia de X a la función diferenciable $\text{div}X : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(\text{div}X)(p) = \text{tr}\{v \rightarrow (\nabla_v X)(p)\}, \quad p \in M^n,$$

donde $v \in T_p M^n$ y tr denota la traza de la matriz de la aplicación lineal $v \rightarrow \nabla_v X(p)$.

Definición 138. Un marco de referencia ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en un abierto $U \subset M^n$ es llamado geodésico en $p \in U$ si $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, $p \in M^n$.

Proposición 139. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y conexión de Levi-Civita ∇ . Sea X un campo diferenciable en M^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia ortonormal en una vecindad abierta $U \subset M^n$. Si $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ en U , entonces

$$\text{div}X = \sum_{i=1}^n e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle. \quad (2.33)$$

En particular, si el referencial es geodésico en $p \in U$, entonces

$$(\text{div}X)(p) = \sum_i e_i(a_i)(p).$$

Prueba: Por definición y usando la Proposición 60, tenemos

$$\begin{aligned} \text{div}X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle, \end{aligned}$$

la última parte sigue directamente desde la expresión anterior y la definición del referencial geodésico. \square

Observación 140. Si $M^n = \mathbb{R}^n$, tomando $e_i = E_i$, $1 \leq i \leq n$, el i -ésimo campo canónico en \mathbb{R}^n tenemos

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n E_i(a_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

puesto que los campos canónicos forman un referencial geodésico cada punto de \mathbb{R}^n .

Proposición 141. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y conexión de Levi-Civita ∇ . Sean X, Y campos de vectores diferenciables en M^n y $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle \quad (2.34)$$

Prueba: Sean $X = \sum_i a_i e_i$ e $Y = \sum_i b_i e_i$ dos campos de vectores en M^n , usando la Proposición 139 tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle = \sum_i \langle e_i(f)X + f \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i(f) e_i, X \rangle + f \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div} X. \end{aligned}$$

\square

Definición 142. Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. El Laplaciano de f es la función $\Delta f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),$$

donde ∇ se establece para el gradiente de la función f .

Proposición 143. Sea M^n una variedad Riemanniana con métrica g y sean $f, \phi \in \mathcal{F}(M^n)$, se cumple

$$\operatorname{div}(f \nabla \phi) = f \Delta \phi + g(\nabla f, \nabla \phi) \quad (2.35)$$

Prueba: Haciendo $X = \nabla \phi$ en la ecuación (2.34) se concluye la prueba. \square

Ahora daremos una expresión para el Laplaciano de una función en términos de un marco de referencia ortonormal.

Proposición 144. Sean M^n una variedad Riemanniana con conexión ∇ , $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $\{e_1, \dots, e_n\}$ un marco de referencia ortonormal en un abierto $U \subset M^n$. Entonces

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f. \quad (2.36)$$

En particular, si el referencial es geodésico en $p \in U$, entonces tenemos en p que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)). \quad (2.37)$$

Prueba: Note primero que $\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i$ en U . Ahora, por la Definición 142 del Laplaciano de una función y la Proposición 139 sigue,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f.$$

□

Observación 145. Cuando $M^n = \mathbb{R}^n$, podemos tomar e_i como los campos canónicos coordenadas E_i de \mathbb{R}^n , los mismos que forman un marco de referencia geodésico en cada punto de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, se sigue de (2.37) que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Ahora, enunciaremos un resultado conocido como Lema de Hopf.

Teorema 146. (Lema de Hopf) Sea M^n una variedad Riemanniana compacta, conexa, y $f \in \mathcal{F}(M^n)$ tal que

$$\Delta f \geq 0,$$

entonces f es constante

Prueba: Primero, demostremos que

$$\Delta f = 0,$$

sobre M^n . Integrando y aplicando el Teorema de Divergencia tenemos que

$$0 \leq \int_{M^n} \Delta f dv = \int_{M^n} \operatorname{div}(\nabla f) dv = 0,$$

donde asumimos que M^2 tiene frontera $\partial M^n = 0$. Por otro lado, sustituyendo $f = \phi$ en la ecuación (2.35) del Teorema 143, obtenemos

$$\operatorname{div}(f\nabla f) = f\Delta f + g(\nabla f, \nabla f).$$

Nuevamente, integrando y usando el Teorema de Divergencia, tenemos

$$0 = \int_{M^n} \operatorname{div}(f\nabla f) = \int_{M^n} f\Delta f + \int_{M^n} |\nabla f|^2.$$

Como el primer término del lado derecho es cero, se sigue que

$$\int_{M^n} |\nabla f|^2 = 0,$$

lo que implica que

$$|\nabla f| = 0,$$

sobre M^n . Por lo tanto, f es constante. □

Capítulo 3

Superficies minimales sobre la esfera 3–dimensional

En este capítulo, es introducido el invariante geométrico conocido como ángulo de contacto, en orden a estudiar las superficies inmersas en la esfera tri–dimensional. En este contexto, establecemos una expresión explícita para la curvatura Gaussiana y el Laplaciano para la superficie minimal inmersa en S^3 . En particular, establecemos una caracterización del toro de Clifford inmerso en la esfera tri–dimensional S^3 vía el método del marco referencial y las ecuaciones de estructura asociadas a la inmersión.

Iniciaremos este capítulo introduciendo el ángulo de contacto para superficies inmersas.

Sean $z, w \in \mathbb{C}^2$, definimos el producto Hermitiano por

$$(z, w) = z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2,$$

donde \bar{w} denota el conjugado de w .

Sobre \mathbb{C}^2 definimos el producto interno $\langle z, w \rangle = \text{Re}(z, w)$. Aquí, Re denota la parte real.

Definición 147. Sea $S^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid (z, z) = 1\}$ la esfera unitaria, definimos la distribución de contacto en S^3 , por

$$\delta_z = \{v \in T_z S^3 \mid \langle \xi, v \rangle = 0\},$$

la cual es ortogonal al campo de vectores de Reeb en S^3 dado por $\xi(z) = iz$.

Observación 148. La distribución δ es invariante por la estructura compleja de \mathbb{C}^2 .

En lo que sigue, sea M^2 una superficie inmersa en S^3 .

Definición 149. El ángulo de contacto $\beta : M^2 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[$ es el ángulo complementario entre la distribución de contacto δ y el espacio tangente TM^2 de la superficie M^2 .

Observación 150. Sea $\{f_1, f_2, f_3\}$ un marco de referencia local de S^3 dado por $f_1 = z^\perp$, $f_2 = iz^\perp$ y $f_3 = iz$, donde $z^\perp := (-\bar{z}_2, \bar{z}_1)$, y $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ el marco de referencia dual asociado, entonces las formas de conexión se resumen a $\omega_1^2, \omega_1^3 = \omega_2$, y $\omega_2^3 = -\omega_1$, por lo tanto la derivada covariante en S^3 es dada por

$$\bar{D}f_1 = \omega_1^2 f_2 + \omega_2 f_3 \quad \bar{D}f_2 = \omega_2^1 f_1 - \omega_1 f_3 \quad \text{y} \quad \bar{D}f_3 = -\omega_2 f_1 + \omega_1 f_2. \quad (3.1)$$

En efecto, si \tilde{D} es la derivada covariante en \mathbb{C}^2 , tenemos que para todo $v \in T_z S^3$

$$\tilde{D}_v f_3 = \bar{D}_v f_3 - \langle v, f_3 \rangle z, \quad (3.2)$$

donde z es el vector posición que determina la orientación de S^3 .

Observando que $\bar{D}_v f_3 = \omega_3^1(v) f_1 + \omega_3^2(v) f_2$, $\tilde{D}_v f_3 = iv$ y $v = \omega_1(v) f_1 + \omega_2(v) f_2 + \omega_3(v) f_3$, deducimos, sustituyendo en (3.2), que $v = \omega_3^2(v) f_1 - \omega_3^1(v) f_2 + \langle v, f_3 \rangle f_3$. Esto demuestra que $\omega_3^2 = \omega_1$ y $\omega_3^1 = \omega_2$ como lo habíamos señalado.

Ahora supongamos que $f_1 \in T_z M^2 \cap \delta_z$ y consideremos $\{f_1, u\}$ una base ortonormal de $T_z M^2$. Con esta elección tenemos que $\cos(\beta) = \langle f_3, u \rangle$ y obviamente $u = a f_2 + b f_3$, con $b = \langle u, f_3 \rangle = \cos(\beta)$ y $a = \langle u, f_2 \rangle = \sin(\beta)$. Podemos ver que

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1 \\ e_2 &= u \\ &= \sin(\beta) f_2 + \cos(\beta) f_3 \\ e_3 &= -\cos(\beta) f_2 + \sin(\beta) f_3, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde β es el ángulo entre e_2 y f_3 . $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un marco de referencia en S^3 adaptado a M^2 con marco de referencia dual asociado

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1 \\ \theta_2 &= \sin(\beta) \omega_2 + \cos(\beta) \omega_3 \\ \theta_3 &= -\cos(\beta) \omega_2 + \sin(\beta) \omega_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.1. Curvatura Gaussiana y Laplaciano de una superficie minimal

En esta sección, deduciremos las ecuaciones para la curvatura Gaussiana y para el Laplaciano de una superficie minimal inmersa en S^3 en términos del ángulo de contacto.

Teorema 151. *Sea M^2 una superficie minimal orientable inmersa en S^3 , entonces la curvatura Gaussiana K de M^2 en términos del ángulo de contacto es dada por*

$$K = 1 - |\nabla\beta + e_1|^2.$$

Prueba: Sea $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ el marco de referencia dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ dado como en la Observación 150, por

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \omega_1, \\ \theta_2 &= \sin(\beta)\omega_2 + \cos(\beta)\omega_3, \\ \theta_3 &= -\cos(\beta)\omega_2 + \sin(\beta)\omega_3.\end{aligned}$$

Sobre M^2 tenemos que $\theta_3 = 0$. Entonces obtenemos la siguiente ecuación

$$\sin(\beta)\omega_3 = \cos(\beta)\omega_2.$$

Ahora, multiplicando θ_2 por $\sin(\beta)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sin(\beta)\theta_2 &= \sin^2(\beta)\omega_2 + \cos(\beta)\sin(\beta)\omega_3 \\ &= \sin^2(\beta)\omega_2 + \cos^2(\beta)\omega_2 \\ &= \omega_2.\end{aligned}$$

Similarmente, tenemos que $\omega_3 = \cos(\beta)\theta_2$. Así, derivando exteriormente θ_1 tenemos que

$$\begin{aligned}d\theta_1 &= d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_2^1 + \omega_3 \wedge \omega_3^1 \\ &= \sin(\beta)\theta_2 \wedge \omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2 \wedge \omega_2 \\ &= \sin(\beta)\theta_2 \wedge \omega_2^1 - \cos(\beta)\sin(\beta)\theta_2 \wedge \theta_2 \\ &= -\sin(\beta)\omega_2^1 \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\sin(\beta)\theta_2 \wedge \theta_2 \\ &= -\sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_2,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$d\theta_1 + \sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_2 = 0.$$

Ahora, derivando exteriormente θ_2 obtenemos

$$\begin{aligned}
d\theta_2 &= \cos(\beta)d\beta \wedge \omega_2 + \sin(\beta)d\omega_2 - \sin(\beta)d\beta \wedge \omega_3 + \cos(\beta)d\omega_3 \\
&= \cos(\beta)d\beta \wedge \omega_2 + \sin(\beta)(\omega_1 \wedge \omega_1^2 + \omega_3 \wedge \omega_3^2) - \sin(\beta)d\beta \wedge \omega_3 \\
&\quad + \cos(\beta)(\omega_1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2 \wedge \omega_2^3) \\
&= \cos(\beta)\sin(\beta)d\beta \wedge \omega_2 + \sin(\beta)\omega_1 \wedge \omega_1^2 + \sin(\beta)\omega_3 \wedge \omega_3^2 - \sin(\beta)\cos(\beta)d\beta \wedge \theta_2 \\
&\quad + \cos(\beta)\theta_1 \wedge \omega_2 + \cos(\beta)\omega_2 \wedge \omega_2^3 \\
&= \sin(\beta)\theta_1 \wedge \omega_1^2 + \sin(\beta)\cos(\beta)\theta_2 \wedge \theta_1 + \cos(\beta)\sin(\beta)\theta_1 \wedge \theta_2 \\
&\quad \sin(\beta)\theta_1 \wedge \omega_1^2 + \cos(\beta)\sin(\beta)\theta_1 \wedge \theta_2 \\
&= -\sin(\beta)(\omega_1^2 + \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_1,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$d\theta_2 + \sin(\beta)(\omega_1^2 + \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_1 = 0.$$

Por último,

$$\begin{aligned}
d\theta_3 &= \sin(\beta)d\beta \wedge \omega_2 - \cos(\beta)d\omega_2 + \cos(\beta)d\beta \wedge \omega_3 + \sin(\beta)d\omega_3 \\
&= \sin(\beta)d\beta \wedge \omega_2 - \cos(\beta)(\omega_1 \wedge \omega_1^2 + \omega_3 \wedge \omega_3^2) + \cos^2(\beta)d\beta \wedge \theta_2 \\
&\quad + \sin(\beta)(\omega_1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2 \wedge \omega_2^3) \\
&= d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\theta_1 \wedge \omega_1^2 - \cos^2(\beta)\theta_2 \wedge \theta_1 + \sin^2(\beta)\theta_1 \wedge \theta_2 \\
&\quad - \sin^2(\beta)\theta_2 \wedge \theta_1 \\
&= d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\theta_1 \wedge \omega_1^2 + (1 + \sin^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$d\theta_3 = d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\omega_2^1 \wedge \omega_1^1 + (1 + \sin^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Así, como $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_1^2$, la forma de conexión de M^2 esta dada por

$$\theta_2^1 = \sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2). \quad (3.5)$$

Derivando e_3 en la base $\{e_1, e_2\}$, tenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$De_3 = \theta_3^1 e_1 + \theta_3^2 e_2,$$

donde D denota la derivada covariante sobre M^2 . Por las primeras ecuaciones de estructura (2.11) dadas en el Teorema 112 tenemos que

$$d\theta_3 = \theta_1 \wedge \theta_1^3 + \theta_2 \wedge \theta_2^3 = -\theta_1 \wedge \theta_3^1 - \theta_2 \wedge \theta_3^2.$$

Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned}
d\theta_3 &= d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\omega_2^1 \wedge \theta_1 + (1 + \sin^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2 \\
&= \cos(\beta)\theta_1 \wedge \omega_2^1 + \sin^2(\beta)\theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_2 \wedge d\beta - \theta_2 \wedge \theta_1 \\
&= -\theta_1 \wedge (-\cos(\beta)\omega_2^1 - \sin^2(\beta)\theta_2) - \theta_2 \wedge (d\beta + \theta_1).
\end{aligned}$$

Comparando, obtenemos los coeficientes

$$\begin{aligned}\theta_3^1 &= -\cos(\beta)\omega_2^1 - \sin^2(\beta)\theta_2 \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta_1.\end{aligned}$$

Ahora, como en M^2 sabemos que $d\theta_3 = 0$, evaluando (e_1, e_2) y haciendo $d\beta(e_i) = \beta_i$ obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \theta_1 \wedge \theta_1^3(e_1, e_2) + \theta_2 \wedge \theta_2^3(e_1, e_2) \\ &= \theta_1(e_1)\theta_1^3(e_2) - \theta_1^3(e_1)\theta_1(e_2) + \theta_2(e_1)\theta_2^3(e_2) - \theta_2^3(e_1)\theta_2(e_2) \\ &= \theta_1^3(e_2) - \theta_2^3(e_1) \\ &= \cos(\beta)\omega_2^1(e_2) + \sin^2(\beta)\theta_2(e_2) - [-d\beta(e_1) - \theta_1(e_1)] \\ &= \cos(\beta)\omega_2^1(e_2) + \sin^2(\beta) + \beta_1 + 1,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega_2^1(e_2) = -\frac{\beta_1}{\cos(\beta)} - \frac{(1 + \sin^2(\beta))}{\cos(\beta)}. \quad (3.6)$$

La condición de minimalidad es equivalente a la siguiente ecuación

$$\theta_1^3 \wedge \theta_2 - \theta_2^3 \wedge \theta_1 = 0,$$

por lo que, evaluando en (e_1, e_2) , obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \theta_1^3 \wedge \theta_2(e_1, e_2) - \theta_2^3 \wedge \theta_1(e_1, e_2) \\ &= \theta_1^3(e_1)\theta_2(e_2) - \theta_1^3(e_2)\theta_2(e_1) - [\theta_2^3(e_1)\theta_1(e_2) - \theta_2^3(e_2)\theta_1(e_1)] \\ &= \theta_1^3(e_1) + \theta_2^3(e_2) \\ &= \cos(\beta)\omega_2^1(e_1) - \beta_2,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega_2^1(e_1) = \frac{\beta_2}{\cos(\beta)}. \quad (3.7)$$

Por otra parte, como $\theta_2^1 = \theta_2^1(e_1)\theta_1 + \theta_2^1(e_2)\theta_2$, podemos evaluar e_i en θ_2^1 de (3.5), y utilizando (3.7) y (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned}\theta_2^1 &= \sin(\beta)\omega_2^1(e_1)\theta_1 + \sin(\beta)(\omega_2^1(e_2) - \cos(\beta))\theta_2 \\ &= \sin(\beta) \left(\frac{\beta_2}{\cos(\beta)}\theta_1 + \left(\frac{-\beta_1 - 1 - \sin^2(\beta)}{\cos(\beta)} - \cos(\beta) \right)\theta_2 \right) \\ &= \tan(\beta)(\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\theta_2^1 = \tan(\beta)(\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2). \quad (3.8)$$

Similarmente, deducimos que

$$\begin{aligned}\theta_3^1 &= -\beta_2\theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_2, \\ \theta_3^2 &= (\beta_1 + 1)\theta_1 + \beta_2\theta_2.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Si J es la estructura compleja de M^2 , tenemos que $Je_1 = e_2$ y $Je_2 = -e_1$. Usando J , las fórmulas anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}\theta_2^1 &= \tan(\beta)(d\beta \circ J - 2\theta_2), \\ \theta_3^1 &= -d\beta \circ J + \theta_2, \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta_1.\end{aligned}$$

El paso siguiente es encontrar la curvatura Gaussiana K de M^2 , para lo cual recordemos que si $\bar{\Omega}_i^j$ son las formas de curvatura de S^3 y Ω_i^j son las formas de curvatura de M^2 . Desde la ecuación (2.25) obtenemos

$$\bar{\Omega}_1^2 = \Omega_1^2 - \theta_1^3 \wedge \theta_3^2. \quad (3.10)$$

Por otro lado, por la segundas ecuaciones de estructura (2.12) en el Teorema 112, sobre M^2 , tenemos que

$$\Omega_1^2 = d\theta_1^2 - \sum_{k=1}^2 \theta_1^k \wedge \theta_k^2,$$

lo que implica que $\Omega_1^2 = d\theta_1^2$. También sabemos que por (2.24), $\bar{\Omega}_1^2 = -c\theta_1 \wedge \theta_2$, por lo tanto, en (3.10) obtenemos

$$-c\theta_1 \wedge \theta_2 = d\theta_1^2 - \theta_1^3 \wedge \theta_3^2.$$

Como S^3 tiene curvatura seccional constante 1, tenemos la siguiente ecuación

$$d\theta_1^2 = \theta_2 \wedge \theta_1 + \theta_1^3 \wedge \theta_3^2, \quad (3.11)$$

luego

$$\begin{aligned}d\theta_1^2 &= \theta_2 \wedge \theta_1 + [\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 1)\theta_2] \wedge [(\beta_1 + 1)\theta_1 + \beta_2\theta_2] \\ &= \theta_2 \wedge \theta_1 + \beta_2^2\theta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1 + 1)^2\theta_2 \wedge \theta_1 \\ &= (-1 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_1 + 1)\theta_1 \wedge \theta_2 \\ &= (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1)\theta_1 \wedge \theta_2.\end{aligned} \quad (3.12)$$

Por otro lado, sobre M^2 tenemos $\Omega_1^2 = -K\theta_1 \wedge \theta_2$, y como $\Omega_1^2 = d\theta_1^2$ resulta $d\theta_1^2 = -K\theta_1 \wedge \theta_2$. Luego comparando con (3.12) resulta

$$\begin{aligned}K &= -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1) \\ &= 1 - |\nabla\beta + e_1|^2.\end{aligned}$$

□

Teorema 152. *Sea M^2 una superficie minimal orientable inmersa en S^3 , el Laplaciano de β satisface*

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)((\beta_1 + 2)^2 + \beta_2^2).$$

Prueba: En efecto, sean $e_i(\beta_j) = \beta_{ji}$ con $i, j = 1, 2$. Entonces, por (2.36) de la Proposición 144 tenemos

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22} - (D_{e_1}e_1)(\beta) - (D_{e_2}e_2)(\beta),$$

donde D denota la derivada covariante sobre M^2 . De la Definición 105 tenemos

$$De_i = \theta_i^1 e_1 + \theta_i^2 e_2,$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} D_{e_1}e_1 &= \theta_1^2(e_1)e_2, \\ D_{e_2}e_2 &= \theta_2^1(e_2)e_1. \end{aligned}$$

Procediendo similarmente al Teorema 151, se sigue de (3.8) que

$$\begin{aligned} \theta_1^2(e_1) &= -\tan(\beta)\beta_2, \\ \theta_2^1(e_2) &= -\tan(\beta)(\beta_1 + 2). \end{aligned}$$

Por otro lado, por el Teorema 151, la curvatura Gaussiana es dada por

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1), \quad (3.13)$$

luego

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22} + \tan(\beta)(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1) = \beta_{11} + \beta_{22} - K \tan(\beta), \quad (3.14)$$

ademas, derivando θ_2^1 como en (3.8) tenemos

$$d\theta_2^1 = \sec^2(\beta)d\beta \wedge [\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2] + \tan(\beta)d[\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2]. \quad (3.15)$$

Ahora, usando la ecuación de Gauss (3.11) junto con $d\beta = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$, y (3.13) obtenemos que

$$\sec^2(\beta)d\beta \wedge [\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2] = K(1 + \tan^2\beta)\theta_1 \wedge \theta_2. \quad (3.16)$$

Por otra parte, podemos observar que

$$\tan(\beta)d[\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2] = \tan(\beta)[d\beta_2 \wedge \theta_1 + \beta_2 d\theta_1 - d\beta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1 + 2)d\theta_2],$$

como $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \theta_2^1$ y $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_1^2$, podemos notar que la ecuación (3.8) cumple

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= -\tan(\beta)\beta_2\theta_1 \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= \tan(\beta)(\beta_1 + 2)\theta_1 \wedge \theta_2, \end{aligned}$$

donde $d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2$, $d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2$. así, deducimos la siguiente igualdad

$$\tan(\beta)[d\beta_2 \wedge \theta_1 + \beta_2 d\theta_1 - d\beta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1 + 2)d\theta_2] = -\tan(\beta)[\beta_{11} + \beta_{22} + \tan(\beta)\beta_2^2 + (\beta_1 + 2)^2]\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Así,

$$\tan(\beta)d[\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2] = -\tan(\beta)[\beta_{11} + \beta_{22} + \tan(\beta)\beta_2^2] \theta_1 \wedge \theta_2 \quad (3.17)$$

Finalmente, usando (3.14), concluimos que

$$-\tan(\beta)[\beta_{11} + \beta_{22} + \tan(\beta)\beta_2^2 + (\beta_1 + 2)^2]\theta_1 \wedge \theta_2 = -\tan(\beta)[\Delta\beta + K \tan(\beta) + \tan(\beta)\beta_2^2 + (\beta_1 + 2)^2]\theta_1 \wedge \theta_2,$$

por lo tanto, reemplazando (3.17) y (3.16) en (3.15)

$$d\theta_2^1 = K(1 + \tan^2 \beta)\theta_1 \wedge \theta_2 - \tan(\beta)[\Delta\beta + K \tan(\beta) + \tan(\beta)(\beta_2^2 + (\beta_1 + 2)^2)]\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Por otro lado, como $d\theta_2^1 = K\theta_1 \wedge \theta_2$, donde K es la curvatura Gaussiana de M^2 , comparando tenemos

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)((\beta_1 + 2)^2 + \beta_2^2), \quad (3.18)$$

o

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)|\nabla\beta + 2e_1|^2.$$

□

Proposición 153. *Las ecuaciones de Codazzi son*

$$\begin{aligned} d\theta_3^1 - \theta_3^2 \wedge \theta_2^1 &= 0 \\ d\theta_3^2 - \theta_3^1 \wedge \theta_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Prueba: Primero demostremos que

$$d\theta_3^1 - \theta_3^2 \wedge \theta_2^1 = 0. \quad (3.19)$$

En efecto, derivando θ_3^1 en la ecuación (3.9), y observando que $d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2$, $d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2$, donde $\beta_{ij} = \beta_i(e_j)$, obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta_3^1 &= -d\beta_2 \wedge \theta_1 - \beta_2 d\theta_1 + d\beta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)d\theta_2 \\ &= -\beta_{22}\theta_2 \wedge \theta_1 - \beta_2\theta_1^2 \wedge \theta_2 + \beta_{11}\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)\theta_2^1 \wedge \theta_1 \\ &= (\beta_{22} + \beta_{11})\theta_1 \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_1^2 \wedge \theta_2 - \beta_1\theta_1 \wedge \theta_2^1 - \theta_1 \wedge \theta_2^1. \end{aligned}$$

Así, evaluando en (e_1, e_2) , tenemos que

$$\begin{aligned} d\theta_3^1(e_1, e_2) &= \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_2\theta_1^1(e_1) - \beta_1\theta_2^1(e_2) - \theta_2^1(e_2) \\ &= \Delta\beta - \theta_2^1(e_2) \\ &= -\tan(\beta)[\beta_2^2 + (\beta_1 + 2)^2] - \theta_2^1(e_2) \\ &= -\tan(\beta)[\beta_2^2 + (\beta_1 + 2)^2] + \tan(\beta)(\beta_1 + 2) \\ &= -\tan(\beta)(3\beta_1 + 2 + |\nabla\beta|^2). \end{aligned}$$

Se sigue de θ_2^1 y θ_2^3 en (3.9) que

$$\theta_3^2 \wedge \theta_2^1(e_1, e_2) = -\tan(\beta)[(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 2) + \beta_2]\beta_2 = -\tan(\beta)(3\beta_1 + 2 + |\nabla\beta|^2),$$

así, se deduce que

$$d\theta_3^1(e_1, e_2) - \theta_3^2 \wedge \theta_2^1(e_1, e_2) = 0,$$

lo que demuestra la primera ecuación de Codazzi (3.19). Para demostrar la segunda ecuación de Codazzi

$$d\theta_3^2 - \theta_3^1 \wedge \theta_2^2 = 0, \quad (3.20)$$

notemos que $d\beta = \beta_1\theta^1 + \beta_2\theta^2$ implica

$$0 = d\beta_1 \wedge \theta_1 + \beta_1 d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 = \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + \beta_1\theta_1^2 \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_2^1 \wedge \theta_1,$$

de donde obtenemos

$$\beta_{21} - \beta_{12} = -\beta_1\theta_1^2(e_1) + \beta_2\theta_2^1(e_2), \quad (3.21)$$

además, derivando θ_2^3 en (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta_3^2 &= d\beta_1 \wedge \theta_1 + (\beta_1 + 1)d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 \\ &= \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_1^2 \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_2^1 \wedge \theta_1 \\ &= (-\beta_{12} + \beta_{21})\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)\theta_1^2 \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_1 \wedge \theta_2^1. \end{aligned}$$

Notemos que por θ_2^1 en (3.9) y por (3.21) podemos deducir que

$$\begin{aligned} d\theta_3^2(e_1, e_2) &= \beta_{21} - \beta_{12} + (\beta_1 + 1)\theta_1^2(e_1) - \beta_2\theta_2^1(e_2) \\ &= \theta_1^2(e_1) \\ &= -\tan(\beta)\beta_2, \end{aligned}$$

por otro lado, se sigue de θ_2^1 y θ_1^3 en (3.9) que

$$\theta_3^1 \wedge \theta_1^2(e_1, e_2) = \tan(\beta)[- \beta_2(\beta_1 + 2) + (\beta_1 + 1)\beta_2] = -\tan(\beta)\beta_2.$$

así, deducimos que

$$d\theta_3^2(e_1, e_2) - \theta_3^1 \wedge \theta_1^2(e_1, e_2) = 0,$$

lo que concluye la prueba. \square

Teorema 154. *Sea M^n es una subvariedad minimal compacta en la esfera de radio 1, $S^{n+p}(1)$. Si la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental de M^n , denotada por S , satisface $S \leq \max\{\frac{n}{2-1/p}, \frac{2}{3}n\}$, entonces M^n es congruente a una de las siguientes superficies*

1. La esfera n -dimensional de radio 1, $S^n(1)$,
2. El toro de Clifford minimal $S^k(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times S^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}})$ en $S^{n+1}(1)$ para $1 \leq k \leq n-1$, donde $S^k(r)$ denota la esfera k -dimensional de radio $r > 0$,
3. La superficie Veronese en la esfera unitaria 4-dimensional, $S^4(1)$.

En particular, si $p = 1$ y $S \leq n$, entonces $S = 0$ y M^n es una esfera grande, o $S = n$ y M^n es el toro de Clifford.

Prueba: Ver [45]. \square

Corolario 155. *El toro de Clifford es la única superficie minimal compacta en S^3 con ángulo de contacto $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ o $(-\frac{\pi}{2} < \beta \leq 0)$.*

Prueba: Sea $(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$. Se sigue del Teorema 152 que $\tan(\beta) \geq 0$, por lo tanto $\Delta\beta \leq 0$. Puesto que, M^2 es una superficie compacta, tomando $f = -\beta$ en el Teorema 146, concluimos que β es constante. Por otro lado, del Teorema 151, tenemos que la curvatura Gaussiana K de M^2 es dada por

$$K = 1 - |\nabla\beta + e_1|^2,$$

por lo tanto, como β es constante, tenemos que $K = 0$. Por otro lado, como $\theta_1^3 = h_{11}\theta_1 + h_{12}\theta_2$ y $\theta_2^3 = h_{21}\theta_1 + h_{22}\theta_2$. Luego, por (3.9), podemos concluir que $h_{11} = \beta_2, h_{12} = -(\beta_1 + 1), h_{21} = -(\beta_1 + 1)$ y $h_{22} = -\beta_2$. Así, la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental S es dada por

$$\begin{aligned} S &= h_{11}^2 + h_{12}^2 + h_{21}^2 + h_{22}^2 \\ &= 2\beta_2^2 + 2(\beta_1 + 1)^2 \\ &= 2(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 1), \end{aligned}$$

y como β es constante igual a cero, tenemos que $S = 2$. Ahora, utilizando el Teorema 154, con $n = 2$ y $p = 1$, podemos deducir que M^2 es el toro de Clifford. \square

Teorema 156. *Consideremos M^2 una superficie Riemanniana, e un campo de vectores en M^2 y $\beta : M^2 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[$ la función sobre M^2 que cumple la siguiente ecuación*

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)(|\nabla\beta|^2 + 4(e(\beta) + 1)).$$

Entonces existe una única inmersión minimal de M^2 en S^3 tal que e es el campo de vectores característico, y β es el ángulo de contacto de esta inmersión.

Prueba: Sea M^2 una superficie orientable en S^3 , y sea e un campo de vectores unitario en M^2 . Podemos elegir una base ortonormal positiva $\{e_1, e_2\}$, con $e_1 = e$, y $\{\theta^1, \theta^2\}$ el marco de referencia dual de M^2 . Para cada función $\beta : M^2 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[$ que cumple la siguiente ecuación laplaciana

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)|\nabla\beta + 2e_1|^2,$$

tenemos que se satisfacen las ecuaciones de Gauss–Codazzi. Ahora, por el Teorema 99, existe una única inmersión de M^2 en S^3 . Por otro lado, podemos observar que la curvatura media H dada por la ecuación (2.27) es

$$2H = h_{11} + h_{22},$$

donde $\theta_1^3 = h_{11}\theta_1 + h_{12}\theta_2$ y $\theta_2^3 = h_{21}\theta_1 + h_{22}\theta_2$. Así, comparando θ_1^3 y θ_2^3 en (3.9) tenemos que $h_{11} = \beta_2$ y $h_{22} = -\beta_2$, lo que concluye que la curvatura media H es igual a cero, por lo tanto la inmersión es minimal. Podemos observar que los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} \theta_1^3 &= (d\beta + \theta^1) \circ J, \\ \theta_2^3 &= -(d\beta + \theta^1), \end{aligned}$$

los cuales también satisfacen la ecuación de la curvatura media H . \square

Ejemplos de superficies minimales en S^3 fueron descubiertas por Lawson, en [9]. Aquí ocuparemos la noción de ángulo de contacto para dar la caracterización de estos ejemplos. A continuación daremos dos ejemplos de superficies minimales en S^3 . En el primero, determinamos que el ángulo de contacto (β) del Toro de Clifford es $\beta = 0$ y en el segundo determinamos que el ángulo de contacto de la esfera S^3 es $\beta = -|z_1|$ y por lo tanto, no es constante.

Ejemplo 157. Consideremos el toro T^2 , dado por

$$T^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / z_1 \bar{z}_1 = \frac{1}{2}, z_2 \bar{z}_2 = \frac{1}{2}\}.$$

Sea $f : T^2 \rightarrow S^3$ una inmersión dada por

$$f(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{iu_1}, e^{iu_2}).$$

El espacio tangente $T_z(T^2)$ es dado por $\{\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\}$ así tenemos que

$$a \frac{\partial}{\partial u_1} + b \frac{\partial}{\partial u_2} = \lambda z^\perp.$$

Usando la condición anterior y el hecho de que $|\lambda| = 1$, obtenemos

$$\lambda = ie^{i(u_1+u_2)}.$$

Definimos el marco de referencia en T^2 por

$$\begin{aligned} e_1 &= ie^{i(u_1+u_2)} z^\perp \\ e_2 &= iz \\ e_3 &= iz^\perp. \end{aligned}$$

El ángulo de contacto es el ángulo entre e_2 y f_3 , entonces

$$\cos(\beta) = \langle e_2, f_3 \rangle = \langle iz, iz \rangle = \operatorname{Re}(iz, iz) = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1,$$

donde $iz = (iz_1, iz_2)$. Por lo tanto, el ángulo de contacto es $\beta = 0$, y la segunda forma fundamental en la base $\{e_1, e_2\}$ es dada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 158. Consideremos la esfera

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Sea M^2 la superficie inmersa en S^3 dada por $M^2 = S^3 \cap \Sigma$, donde

$$\Sigma = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_2 = \bar{z}_1\}.$$

El marco de referencia en S^3 adaptado a M^2 es dado por

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}(-x_1x_2, -y_1x_2, 1-x_2^2, 0) \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}(y_1, -x_1, 0, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Observemos que $e_2 = \frac{1}{|z_1|}(-iz_1, 0)$, por lo tanto

$$\langle e_2, f_3 \rangle = \left\langle \left(\frac{-iz_1}{|z_1|}, 0 \right), (iz_1, iz_2) \right\rangle = \frac{-iz_1(\overline{iz_1})}{|z_1|} = -|z_1|.$$

Así, el ángulo de contacto β es

$$\cos(\beta) = \langle e_2, f_3 \rangle = \operatorname{Re}(e_2, f_3) = -|z_1|,$$

el cual no es constante.

3.2. Curvatura Gaussiana y Laplaciano de superficies inmersas

En esta sección, deduciremos las ecuaciones para la curvatura Gaussiana y para el Laplaciano de una superficie inmersa en S^3 en términos del ángulo de contacto.

Teorema 159. Sea M^2 una superficie inmersa orientable en S^3 , entonces la curvatura Gaussiana K de M^2 en términos del ángulo de contacto es dada por

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2),$$

donde $\beta_1 = d\beta(e_1)$, $\beta_2 = d\beta(e_2)$ y H representa la curvatura media de la superficie.

Prueba: Sea $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ el marco de referencia dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ dado como en la Observación 150 por

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1, \\ \theta_2 &= \sin(\beta)\omega_2 + \cos(\beta)\omega_3, \\ \theta_3 &= -\cos(\beta)\omega_2 + \sin(\beta)\omega_3. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Sobre M^2 tenemos que $\theta^3 = 0$. Entonces obtenemos la siguiente ecuación

$$\sin(\beta)\omega_3 = \cos(\beta)\omega_2.$$

Ahora, multiplicando θ_2 por $\sin(\beta)$ tenemos que

$$\omega_2 = \sin(\beta)\theta_2.$$

Similarmente, tenemos que $\omega_3 = \cos(\beta)\theta_2$. Así, derivando exteriormente θ_1, θ_2 y θ_3 en (3.22) obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \sin(\beta)(\omega_1^2 + \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= \sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_1, \\ d\theta_3 &= d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\omega_2^1 \wedge \theta_1 + (1 + \sin^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2. \end{aligned}$$

Así, como $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_1^2$, la forma de conexión de M^2 esta dada por

$$\theta_2^1 = \sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2). \quad (3.23)$$

Ahora podemos ver que

$$\bar{D}e_3 = \sin(\beta)d\beta f_2 - \cos(\beta)\bar{D}f_2 + \cos(\beta)d\beta f_3 + \sin(\beta)\bar{D}f_3,$$

donde \bar{D} denota la derivada covariante sobre S^3 . Por otra parte

$$\bar{D}e_3 = \theta_3^1 e_1 + \theta_3^2 e_2,$$

entonces, usando (3.1), (3.3) como en la Observación 150 obtenemos que

$$\begin{aligned} \theta_3^1 &= -\cos(\beta)\omega_2^1 - \sin^2(\beta)\theta^2, \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta^1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ahora, como en M^2 sabemos que $d\theta_3 = 0$, evaluando (e_1, e_2) y haciendo $d\beta(e_i) = \beta_i$, obtenemos

$$0 = d\theta_3(e_2, e_1) = \theta_1 \wedge \theta_1^3(e_1, e_2) + \theta_2 \wedge \theta_2^3(e_1, e_2) = -\beta_1 - \cos(\beta)\omega_2^1(e_2) - (1 + \sin^2(\beta)),$$

por lo tanto

$$\omega_2^1(e_2) = -\frac{\beta_1}{\cos(\beta)} - \frac{(1 + \sin^2)}{\cos(\beta)}. \quad (3.25)$$

Por otro lado, podemos observar que la curvatura media H dada por la ecuación (2.27) es

$$2H = h_{11} + h_{22},$$

donde $\theta_1^3 = h_{11}\theta_1 + h_{12}\theta_2$ y $\theta_2^3 = h_{21}\theta_1 + h_{22}\theta_2$. Así, tenemos que

$$(h_{11}\theta_1 + h_{12}\theta_2) \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge (h_{21}\theta_1 + h_{22}\theta_2) = h_{11}\theta_1 \wedge \theta_2 + h_{22}\theta_1 \wedge \theta_2 = (h_{11} + h_{22})\theta_1 \wedge \theta_2,$$

por lo que concluimos que la curvatura media H de M^2 es dada por

$$2H\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1^3 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \theta_2^3,$$

y aplicada a (e_1, e_2) , cumple

$$2H = \cos(\beta)\omega_2^1(e_1) - \beta_2, \quad (3.26)$$

donde $d\beta(e_2) = \beta_2$.

El paso siguiente es encontrar la curvatura Gaussiana K de M^2 , para lo cual recordamos que si $\bar{\Omega}_i^j$ son las formas de curvatura de S^3 y Ω_i^j son las formas de curvatura de M^2 , tenemos sobre M^2 que

$$\bar{\Omega}_1^2 = \Omega_1^2 - \theta_1^3 \wedge \theta_3^2. \quad (3.27)$$

Por otro lado, por las segundas ecuaciones de estructura (2.12) en el Teorema 112, sobre M^2 , tenemos que

$$\Omega_1^2 = d\theta_1^2 - \sum_{k=1}^2 \theta_1^k \wedge \theta_k^2,$$

lo que implica que $\Omega_1^2 = d\theta_1^2$. También sabemos que por (2.24) $\bar{\Omega}_1^2 = -c\theta_1 \wedge \theta_2$. Por lo tanto en (3.27) obtenemos

$$-c\theta_1 \wedge \theta_2 = d\theta_1^2 - \theta_1^3 \wedge \theta_3^2,$$

como S^3 tiene curvatura seccional constante 1, tenemos la siguiente ecuación

$$d\theta_1^2 = \theta_2 \wedge \theta_1 + \theta_1^3 \wedge \theta_3^2. \quad (3.28)$$

Por otra parte, como

$$\theta_3^1 = \theta_3^1(e_1)\theta_1 + \theta_3^1(e_2)\theta_2 \quad y \quad \theta_3^2 = \theta_3^2(e_1)\theta_1 + \theta_3^2(e_2)\theta_2,$$

se sigue de (3.25) y (3.26) que

$$\theta_3^1 = -(2H + \beta_2)\theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_2 \quad y \quad \theta_3^2 = (\beta_1 + 1)\theta_1 + \beta_2\theta_2,$$

así, por la ecuación de Gauss (3.28), obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta_1^2 &= \theta_2 \wedge \theta_1 + [(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 1)\theta_2] \wedge [(\beta_1 + 1)\theta_1 + \beta_2\theta_2] \\ &= \theta_2 \wedge \theta_1 + (2H + \beta_2)\beta_2\theta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1 + 1)^2\theta_2 \wedge \theta_1 \\ &= \theta_2^1 + (2H\beta_2 + \beta_2^2)\theta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1^2 + 2\beta_1 + 1)\theta_2 \wedge \theta_1 \\ &= (-1 + 2H\beta_2 + \beta_2^2 + \beta_1^2 + 2\beta_1 + 1)\theta_1 \wedge \theta_2 \\ &= (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2)\theta_1 \wedge \theta_2, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2). \quad (3.29)$$

□

Teorema 160. *Sea M^2 una superficie orientable inmersa en S^3 , el Laplaciano de β satisface*

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan(\beta)[(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2],$$

donde $H_2 = dH(e_2)$.

Prueba: Para esto, elegiremos las siguientes notaciones $e_i(\beta_j) = \beta_{ji}$ y $dH(e_i) = H_i$ para $i, j = 1, 2$. Entonces, por (2.36) de la Proposición 144 tenemos

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22} - (D_{e_1}e_1)(\beta) - (D_{e_2}e_2)(\beta),$$

donde D denota la derivada covariante sobre M^2 . De la Definición 105, tenemos

$$De_i = \theta_i^1 e_1 + \theta_i^2 e_2,$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} D_{e_1}e_1 &= \theta_1^2(e_1)e_2, \\ D_{e_2}e_2 &= \theta_2^1(e_2)e_1. \end{aligned}$$

Procediendo similarmente al Teorema 159, se sigue de (3.23), (3.25) y (3.26)

$$\begin{aligned} \theta_1^2(e_1) &= -\tan(\beta)(2H + \beta_2), \\ \theta_2^1(e_2) &= -\tan(\beta)(\beta_1 + 2), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Delta\beta = \beta_{11} + \beta_{22} + \tan(\beta)(|\nabla\beta|^2 + 2H\beta_2 + 2\beta_1) = \beta_{11} + \beta_{22} - K \tan(\beta), \quad (3.30)$$

y como $\theta_2^1 = \theta_2^1(e_1)\theta_1 + \theta_2^1(e_2)\theta_1$, tenemos que

$$\theta_2^1 = \tan(\beta)[(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2], \quad (3.31)$$

así, derivando (3.31)

$$d\theta_2^1 = \sec^2(\beta)d\beta \wedge [(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2] + \tan(\beta)d[(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2] = P_1 + P_2,$$

donde $P_1 = \sec^2(\beta)d\beta \wedge [(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2]$ y $P_2 = \tan(\beta)d[(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2]$.

Ahora, usando la ecuación de Gauss (3.28) junto con $d\beta = \beta_1\theta_1 + \beta_2\theta_2$, obtenemos

$$P_1 = K(1 + \tan^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2. \quad (3.32)$$

Por otra parte, podemos escribir

$$P_2 = \tan(\beta)[(2dH + d\beta_2) \wedge \theta_1 + (2H + \beta_2)d\theta_1 - d\beta_1 \wedge \theta_2 - (\beta_1 + 2)d\theta_2].$$

Como $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \theta_2^1$ y $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_1^2$, podemos notar que la ecuación (3.31) cumple

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= -\tan(\beta)(2H + \beta_2)\theta_1 \wedge \theta_2 \\ d\theta_2 &= \tan(\beta)(\beta_1 + 2)\theta_1 \wedge \theta_2, \end{aligned}$$

donde $d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2$, $d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2$ y $dH = H_1\theta_1 + H_2\theta_2$. Así, obtenemos la siguiente expresión para P_2

$$P_2 = -\tan(\beta)[\beta_{11} + \beta_{22} + 2H_2 + \tan(\beta)((2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2)]\theta_1 \wedge \theta_2. \quad (3.33)$$

Finalmente, usando (3.30), concluimos que

$$P_2 = -\tan(\beta)[\Delta\beta + K \tan(\beta) + 2H_2 + \tan(\beta)((2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2)]\theta_1 \wedge \theta_2,$$

luego, como

$$K\theta_1 \wedge \theta_2 = P_1 + P_2,$$

podemos usar P_1 y P_2 como en (3.32) y (3.33) respectivamente, y simplificar K para obtener

$$\Delta\beta = -2H_2 - \tan(\beta)[(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2],$$

lo que termina la demostración del teorema. \square

Como una consecuencia directa del teorema se deduce el siguiente resultado.

Corolario 161. *Sea M^2 una superficie inmersa orientable en S^3 con ángulo de contacto constante, entonces ella es plana. En particular, si M^2 es cerrada sera difeomórfica al toro.*

Prueba: Por el Teorema 159, sabemos que la curvatura Gaussiana K es dada por

$$K = -(|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 2H\beta_2),$$

por lo tanto si β es constante, tenemos que $K = 0$, lo cual termina la demostración \square

Proposición 162. *No existe superficie M^2 inmersa en S^3 con ángulo de contacto β constante satisfaciendo $|\beta| = \frac{\pi}{2}$.*

Prueba: Supongamos que $\beta = \frac{\pi}{2}$, entonces reemplazando en la ecuación (3.25) del Teorema 159, dada por

$$\omega_2^1(e_2) = -\frac{\beta_1}{\cos(\beta)} - \frac{(1 + \sin^2)}{\cos(\beta)}.$$

donde $e_1(\beta) = d\beta(e_1) = \beta_1$, tenemos que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, llegando a una contradicción, lo cual finaliza la prueba. \square

Teorema 163. *Sea M^2 una superficie inmersa en \mathbb{R}^4 con vector curvatura media paralelo $H \neq 0$ y curvatura Gaussiana K de M^2 igual a cero. Entonces M^2 es isométrica a $S^1(r) \times S^1(\rho)$, esto es, el producto de dos círculos de radios r y ρ respectivamente, con inmersión plana.*

Prueba: Ver [6] \square

Corolario 164. *Si M^2 es una superficie inmersa cerrada conexa en S^3 con ángulo de contacto β constante y curvatura media H constante, entonces es isométrica al toro $S^1(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$ para algún $r \in (0, 1)$.*

Prueba: En efecto, por el Teorema 163, la superficie M^2 inmersa en la esfera S^3 de curvatura media $H = c$ constante, con $c \neq 0$, es isométrica al toro de Clifford $S^1(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$ para algún $r \in (0, 1)$, lo que finaliza la demostración del Corolario.

□

Usando el Corolario previo y el Teorema 146, probamos el siguiente teorema.

Teorema 165. *Si M^2 es una superficie inmersa cerrada orientable en S^3 , con curvatura media H constante y ángulo de contacto β satisfaciendo $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, entonces es isométrica al toro de Clifford $S^1(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2})$ para algún $r \in (0, 1)$.*

Prueba: Sea $|\beta| < \frac{\pi}{2}$, entonces $\tan(\beta) \geq 0$. Por otra parte, como H es constante tenemos que $H_2 = 0$. Así, por el Teorema 160 tenemos que $\Delta\beta \leq 0$. Luego, tomando $f = -\beta$ en el Teorema 146, concluimos que β es constante. Por consecuencia, la demostración sigue del Corolario 164. □

Teorema 166. *Sea M^2 una superficie Riemanniana orientable y e_1 un campo de vectores en M^2 . Consideremos $\beta : M^2 \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ una función diferenciable en M^2 y H constante, satisfaciendo la ecuación*

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)(|\nabla\beta + 2e_1|^2 + 4H(H + \beta_2)),$$

donde $\beta_1 = d\beta(e_1)$, $\beta_2 = d\beta(e_2)$. Consideremos $\{e_1, e_2\}$ un marco de referencia en M^2 y $\{\theta_1, \theta_2\}$ su marco de referencia dual asociado. Entonces existe una única inmersión isométrica de M^2 en S^3 , tal que e_1 es el campo de vectores característico, β es el ángulo de contacto de M^2 y H es la curvatura media de la inmersión. En particular si M^2 es cerrada, entonces ello sera como en el Teorema 165.

Prueba: En efecto, para cada función $\beta : M^2 \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ diferenciable en M^2 y cada constante H , satisfaciendo la ecuación

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)(|\nabla\beta + 2e_1|^2 + 4H(H + \beta_2)) = -\tan(\beta)[(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2],$$

definimos

$$\theta_2^1 = \tan(\beta)[(2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2], \quad (3.34)$$

y los coeficientes de la segunda forma fundamental por

$$\theta_1^3 = (2H + \beta_2)\theta_1 - (\beta_1 + 1)\theta_2, \quad (3.35)$$

y

$$\theta_2^3 = -(\beta_1 + 1)\theta_1 - \beta_2\theta_2. \quad (3.36)$$

Ahora verificaremos que las ecuaciones fundamentales se satisfacen. Un cálculo directo muestra que la ecuación de Gauss

$$-\theta_1 \wedge \theta_2 = d\theta_1^2 - \theta_1^3 \wedge \theta_3^2,$$

se satisface. Ahora probaremos que se satisfacen las ecuaciones de Codazzi

$$d\theta_3^1 - \theta_3^2 \wedge \theta_2^1 = 0, \quad (3.37)$$

así como

$$d\theta_3^2 - \theta_3^1 \wedge \theta_1^2 = 0. \quad (3.38)$$

Primero probaremos la primera ecuación de Codazzi (3.37). En efecto, notemos que $d\beta_1 = \beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2$, $d\beta_2 = \beta_{21}\theta_1 + \beta_{22}\theta_2$ y derivando la ecuación (3.35), obtenemos que

$$\begin{aligned} d\theta_3^1 &= -d\beta_2 \wedge \theta_1 - (2H + \beta_2)d\theta_1 + d\beta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)d\theta_2 \\ &= -\beta_{22}\theta_2 \wedge \theta_1 - (2H + \beta_2)\theta_1^2 \wedge \theta_2 + \beta_{11}\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)\theta_2^1 \wedge \theta_1 \\ &= (\beta_{22} + \beta_{11})\theta_1 \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_1^2 \wedge \theta_2 - \beta_1\theta_1 \wedge \theta_2^1 - 2H\theta_1^2 \wedge \theta_2 - \theta_1 \wedge \theta_2^1. \end{aligned}$$

Así, evaluando en (e_1, e_2) tenemos que

$$\begin{aligned} d\theta_3^1 &= \beta_{22} + \beta_{11} - \beta_2\theta_1^2(e_1) - \beta_1\theta_2^1(e_2) - 2H\theta_1^2(e_1) - \theta_2^1(e_2) \\ &= \Delta\beta - 2H\theta_1^2(e_1) - \theta_2^1(e_2) \\ &= -\tan(\beta)[(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2] - 2H\theta_1^2(e_1) - \theta_2^1(e_2) \\ &= -\tan(\beta)[(2H + \beta_2)^2 + (\beta_1 + 2)^2] + 2H \tan(\beta)(2H + \beta_2) + \tan(\beta)(\beta_1 + 2) \\ &= -\tan(\beta)[2H\beta_2 + 3\beta_1 + 2 + |\nabla\beta|^2]. \end{aligned}$$

Se sigue de (3.34) y (3.36) que

$$\theta_3^2 \wedge \theta_2^1(e_1, e_2) = -\tan(\beta)[(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 2) + (2H + \beta_2)\beta_2] = -\tan(\beta)[2H\beta_2 + 3\beta_1 + 2 + |\nabla\beta|^2],$$

así, se deduce que

$$d\theta_3^1(e_1, e_2) - \theta_3^2 \wedge \theta_2^1(e_1, e_2) = 0,$$

lo que demuestra (3.37). Ahora, para demostrar (3.38), notemos que $d\beta = \beta_1\theta^1 + \beta_2\theta^2$ implica

$$0 = d\beta_1 \wedge \theta_1 + \beta_1 d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 = \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + \beta_1\theta_1^2 \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_2^1 \wedge \theta_1,$$

de donde obtenemos

$$\beta_{21} - \beta_{12} = -\beta_1\theta_1^2(e_1) + \beta_2\theta_2^1(e_2). \quad (3.39)$$

Ademas, derivando (3.36) obtenemos

$$\begin{aligned} d\theta_3^2 &= d\beta_1 \wedge \theta_1 + (\beta_1 + 1)d\theta_1 + d\beta_2 \wedge \theta_2 + \beta_2 d\theta_2 \\ &= \beta_{12}\theta_2 \wedge \theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_1^2 \wedge \theta_2 + \beta_{21}\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2\theta_2^1 \wedge \theta_1 \\ &= (-\beta_{12} + \beta_{21})\theta_1 \wedge \theta_2 + (\beta_1 + 1)\theta_1^2 \wedge \theta_2 - \beta_2\theta_1 \wedge \theta_2^1. \end{aligned}$$

Notemos que por (3.34) y (3.39) podemos deducir que

$$\begin{aligned} d\theta_3^2(e_1, e_2) &= \beta_{21} - \beta_{12} + (\beta_1 + 1)\theta_1^2(e_1) - \beta_2\theta_2^1(e_2) \\ &= \theta_1^2(e_1) \\ &= -\tan(\beta)(2H + \beta_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, se sigue de (3.34) y (3.35) que

$$\theta_3^1 \wedge \theta_1^2(e_1, e_2) = \tan(\beta)[-(2H + \beta_2)(\beta_1 + 2) + (\beta_1 + 1)(2H + \beta_2)] = -\tan(\beta)(2H + \beta_2).$$

Así, deducimos que

$$d\theta_3^2(e_1, e_2) - \theta_3^1 \wedge \theta_1^2(e_1, e_2) = 0,$$

lo que demuestra la ecuación de Codazzi (3.38); y como S^3 tiene curvatura seccional constante, se cumplen las hipótesis del Teorema 99. Lo cual implica que existe una única inmersión de M^2 . Ahora mostraremos que H es la curvatura media de la inmersión. En efecto, notemos que H satisface la ecuación

$$2H\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1^3 \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \theta_2^3,$$

puesto que

$$\begin{aligned} 2H\theta_1 \wedge \theta_2(e_1, e_2) &= \theta_1^3 \wedge \theta_2(e_1, e_2) + \theta_1 \wedge \theta_2^3(e_1, e_2) \\ &= \theta_1^3(e_1)\theta_2(e_2) - \theta_1^3(e_2)\theta_2(e_1) + \theta_1(e_1)\theta_2^3(e_2) - \theta_1(e_2)\theta_2^3(e_1) \\ &= \theta_1^3(e_1) + \theta_2^3(e_2) \\ &= (2H + \beta_2) - \beta_2 \\ &= 2H, \end{aligned}$$

lo que finaliza la prueba del teorema. □

Corolario 167. *El toro de Clifford es la única superficie minimal cerrada en S^3 con ángulo de contacto que satisface $|\beta| < \frac{\pi}{2}$.*

Prueba: Como la inmersión es mínima entonces desde el Teorema 166, tenemos que

$$K = 1 - |\nabla\beta + e_1|^2,$$

por lo tanto, desde el Corolario 155 y Teorema 165 la prueba de concluye. \square

Ejemplo 168. Sea $w \in \mathbb{C}^2$ un vector unitario fijo y c un numero real tal que $|c| < 1$. Consideremos la siguiente superficie en S^3 .

$$S_{w,c}^2 = \{z \in S^3 : (z, w) = c\},$$

entonces, la función de Gauss $N : S_{w,c}^2 \rightarrow S^3$ es dada por $N(z) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(w - cz)$. Como la curvatura media H es dada por

$$H = -\frac{1}{2}Tr(dN_p),$$

tenemos que H y el ángulo de contacto β estan dados por

$$H = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \quad y \quad \sin \beta(z) = \langle N, iz \rangle = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \langle w, iz \rangle.$$

Por ejemplo, tomando $c = 0$ y $w = (0, 0, 0, 1)$, tenemos que $S_{w,c}^2$ es una esfera totalmente geodésica en S^3 con ángulo de contacto que satisface $\sin(\beta(z)) = x_3$, donde $z = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Ejemplo 169. consideremos la superficie de Clifford inmersa en S^3 . Dado un numero real $r \in (0, 1)$, definimos

$$M^2 = S^1(r) \times S^1(\sqrt{1-r^2}) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 = r^2, |z_2|^2 = 1-r^2\} \subset S^3,$$

entonces, $N(z_1, z_2) = (\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} z_1, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} z_2)$ es la función de gauss de M^2 . Como

$$dN_p = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix},$$

y $H = -\frac{1}{2}Tr(dN_p)$, deducimos que

$$H = \frac{2r^2 - 1}{2r\sqrt{1-r^2}} \quad y \quad \sin(\beta(z)) = \langle N, iz \rangle = 0,$$

para todo $z \in M^2$. Asi M^2 tiene curvatura media constante y ángulo de contacto también constante $\beta = 0$. Además, $z^\perp \in T_z M^2$ para todo $z \in M^2$.

Capítulo 4

Superficies minimales en el grupo de Lie de Heisenberg

En este capítulo estudiaremos las superficies minimales sobre el grupo de Heisenberg 3-dimensional a través de un invariante conocido como ángulo de contacto, estableciendo las ecuaciones para la curvatura Gaussiana y el Laplaciano de la superficie minimal inmersa. A través de las ecuaciones Gauss–Codazzi establecemos un teorema de congruencia para superficies minimales en el grupo de Heisenberg.

Consideremos el grupo de Lie de Heisenberg \mathcal{H}_3 , identificado con \mathbb{R}^3 dotado por la métrica dada en la Proposición 81 del capítulo 1.

$$dx^2 + dy^2 + \left(\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz\right)^2,$$

Sea el campo de vectores de Reeb sobre \mathcal{H}_3 por $\xi(z) = iz$.

Definición 170. *Definimos la distribución de contacto en \mathcal{H}_3 por*

$$\delta_z = \{v \in T_z\mathcal{H}_3 \mid \langle \xi, v \rangle = 0\},$$

la cual es ortogonal al campo de vectores de Reeb ξ en \mathcal{H}_3 .

Observación 171. En \mathcal{H}_3 tenemos el siguiente marco de referencia

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \\ f_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z}, \\ f_3 &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sea $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ el marco de referencia dual asociado a $\{f_1, f_2, f_3\}$. Así, de (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx, \\ \omega_2 &= dy, \\ \omega_3 &= dz - ydx + xdy. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Observe que $d\omega_i = d(dx_i) = 0$, $i = 1, 2$. De aquí,

$$\begin{aligned} d\omega_1 - \omega_3 \wedge \omega_2 - \omega_2 \wedge \omega_3 &= 0, \\ d\omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_1 + \omega_1 \wedge \omega_3 &= 0. \end{aligned}$$

También, por cálculos directos se verifica

$$d\omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_1 - \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

así, por lo tanto

$$\omega_2^1 = -\omega_3; \omega_3^2 = \omega_1; \omega_1^3 = \omega_2; d\omega_2^1 = -2\omega_1 \wedge \omega_2; d\omega_3^2 = 0; d\omega_1^3 = 0.$$

De las primeras ecuaciones de estructura (2.11) en el Teorema 112, tenemos

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 &= \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \bar{\Omega}_2^1 \\ d\omega_3^2 &= \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 + \bar{\Omega}_3^2 \\ d\omega_1^3 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 + \bar{\Omega}_1^3. \end{aligned}$$

De aquí, las formas de curvatura $\bar{\Omega}_i^j$ en \mathcal{H}_3 son dadas por

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_2^1 &= d\omega_2^1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = -3\omega_1 \wedge \omega_2 \\ \bar{\Omega}_3^2 &= d\omega_3^2 + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = \omega_2 \wedge \omega_3 \\ \bar{\Omega}_1^3 &= d\omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = \omega_3 \wedge \omega_1, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_2^1(e_1, e_2) &= -3 \\ \bar{\Omega}_3^2(e_2, e_3) &= 1 \\ \bar{\Omega}_1^3(e_3, e_1) &= 1. \end{aligned}$$

En lo que sigue, sea M^2 una superficie minimal orientable inmersa en \mathcal{H}_3

Definición 172. *El ángulo de contacto β es el ángulo complementario entre la distribución de contacto δ y el espacio tangente TM^2 de la superficie M^2 .*

Observación 173. *consideremos $\{e_1, e_2\}$ un marco de referencia local de TM^2 , donde $e_1 \in TM^2 \cap \delta$, entonces $\cos(\beta) = \langle \xi, e_2 \rangle$. Así, se sigue que*

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1, \\ e_2 &= \sin(\beta)f_2 + \cos(\beta)f_3, \\ e_3 &= -\cos(\beta)f_2 + \sin(\beta)f_3, \end{aligned}$$

donde β es el ángulo entre f_3 y e_2 , es un marco de referencia en \mathcal{H}_3 adaptado M^2 con marco de referencia dual asociado:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1, \\ \theta_2 &= \sin(\beta)\omega_2 + \cos(\beta)\omega_3, \\ \theta_3 &= -\cos(\beta)\omega_2 + \sin(\beta)\omega_3. \end{aligned}$$

4.1. Curvatura Gaussiana y Laplaciano de superficies minimales

En esta sección, daremos las ecuaciones para la curvatura Gaussiana y para el Laplaciano de una superficie minimal inmersa en S^3 en términos del ángulo de contacto. \mathcal{H}_3 .

Teorema 174. *Sea M^2 una superficie orientable minimal inmersa en \mathcal{H}_3 , entonces la curvatura Gaussiana K de M^2 en términos del ángulo de contacto es dada por*

$$K = -\sin(\beta) - |\nabla\beta + e_1|^2.$$

Prueba: Sea $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ el marco de referencia dual de $\{e_1, e_2, e_3\}$ dado como en la Observación 173 por

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1, \\ \theta_2 &= \sin(\beta)\omega_2 + \cos(\beta)\omega_3, \\ \theta_3 &= -\cos(\beta)\omega_2 + \sin(\beta)\omega_3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sobre M^2 tenemos que $\theta_3 = 0$. Entonces obtenemos la siguiente ecuación

$$\sin(\beta)\omega_3 = \cos(\beta)\omega_2.$$

Ahora, multiplicando θ_2 por $\sin(\beta)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sin(\beta)\theta_2 &= \sin^2(\beta) + \cos(\beta)\sin(\beta)\omega_3, \\ &= \sin^2(\beta)\omega_2 + \cos^2(\beta)\omega_2, \\ &= \omega_2.\end{aligned}$$

Similarmente, tenemos que $\omega_3 = \cos(\beta)\theta_2$. Así, derivando θ_1, θ_2 y θ_3 en (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned}d\theta_1 &= \sin(\beta)(\omega_1^2 + \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= \sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2) \wedge \theta_1, \\ d\theta_3 &= d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\omega_2^1 \wedge \theta_1 + (1 + \sin^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2.\end{aligned}$$

Así, como $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_1^2$, la forma de conexión de M^2 esta dada por

$$\theta_2^1 = \sin(\beta)(\omega_2^1 - \cos(\beta)\theta_2). \quad (4.4)$$

Derivando e_3 covariantemente sobre M^2 en la base $\{e_1, e_2\}$, tenemos los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$De_3 = \theta_3^1 e_1 + \theta_3^2 e_2,$$

donde D denota la derivada covariante sobre M^2 . Desde las primeras ecuaciones de estructura (2.11) en el Teorema 112 tenemos

$$d\theta_3 = \theta_1 \wedge \theta_1^3 + \theta_2 \wedge \theta_2^3 = -\theta_1 \wedge \theta_3^1 - \theta_2 \wedge \theta_3^2,$$

luego, como

$$\begin{aligned}d\theta_3 &= d\beta \wedge \theta_2 - \cos(\beta)\omega_2^1 \wedge \theta_1 + (1 + \sin^2(\beta))\theta_1 \wedge \theta_2 \\ &= \cos(\beta)\theta_1 \wedge \theta_2^1 + \sin^2(\beta)\theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_2 \wedge d\beta - \theta_2 \wedge \theta_1 \\ &= -\theta_1 \wedge (-\cos(\beta)\omega_2^1 - \sin^2(\beta)\theta_2) - \theta_2 \wedge (d\beta + \theta_1),\end{aligned}$$

comparando obtenemos los coeficientes

$$\begin{aligned}\theta_3^1 &= -\cos(\beta)\omega_2^1 - \sin^2(\beta)\theta_2, \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta_1.\end{aligned}$$

Ahora, como en M^2 sabemos que $d\theta_3 = 0$, evaluando (e_1, e_2) y haciendo $d\beta(e_i) = \beta_i$ obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \theta_1\theta_1^3(e_1, e_2) + \theta_2 \wedge \theta_2^3(e_1, e_2) \\ &= \theta_1(e_1)\theta_1^3(e_2) - \theta_1^3(e_1)\theta_1(e_2) + \theta_2(e_1)\theta_2^3(e_2) - \theta_2^3(e_1)\theta_2(e_2) \\ &= \theta_1^3(e_2) - \theta_2^3(e_1) \\ &= \cos(\beta)\omega_2^1(e_2) + \sin^2(\beta)\theta_2(e_2) - [-d\beta(e_1) - \theta_1(e_1)] \\ &= \cos(\beta)\omega_2^1(e_2) + \sin^2(\beta) + \beta_1 + 1,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega_2^1(e_2) = -\frac{\beta_1}{\cos(\beta)} - \frac{(1 + \sin^2(\beta))}{\cos(\beta)}. \quad (4.5)$$

La condición de minimalidad es equivalente a la siguiente ecuación

$$\theta_1^3 \wedge \theta_2 - \theta_2^3 \wedge \theta_1 = 0,$$

por lo que, evaluando en (e_1, e_2) , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_1^3 \wedge \theta_2(e_1, e_2) - \theta_2^3 \wedge \theta_1(e_1, e_2) \\ &= \theta_1^3(e_1)\theta_2(e_2) - \theta_1^3(e_2)\theta_2(e_1) - [\theta_2^3(e_1)\theta_1(e_2) - \theta_2^3(e_2)\theta_1(e_1)] \\ &= \theta_1^3(e_1) + \theta_2^3(e_2) \\ &= \cos(\beta)\omega_2^1(e_1) - \beta_2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega_2^1(e_1) = \frac{\beta_2}{\cos(\beta)}, \quad (4.6)$$

se deduce de (4.4), (4.5) y (4.6)

$$\begin{aligned} \theta_2^1 &= \tan(\beta)(\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 2)\theta_2), \\ \theta_3^1 &= -\beta_2\theta_1 + (\beta_1 + 1)\theta_2, \\ \theta_3^2 &= (\beta_1 + 1)\theta_1 + \beta_2\theta_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si J es la estructura compleja de M^2 , tenemos que $Je_1 = e_2$ y $Je_2 = -e_1$. Usando J , las fórmulas anteriores se reducen a:

$$\begin{aligned} \theta_2^1 &= \tan(\beta)(d\beta \circ J - 2\theta_2), \\ \theta_3^1 &= -d\beta \circ J + \theta_2, \\ \theta_3^2 &= d\beta + \theta_1. \end{aligned}$$

La ecuación de Gauss en \mathcal{H}_3 es dada por

$$d\theta_1^2 = \overline{\Omega}_1^2 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^3,$$

por lo tanto, reemplazando θ_2^3 y θ_1^3 tenemos

$$\begin{aligned} d\theta_1^2 &= \overline{\Omega}_1^2 + [-(\beta_1 + 1)\theta_1 - \beta_2\theta_2] \wedge [\beta_2\theta_1 - (\beta_1 + 1)\theta_2] \\ &= \overline{\Omega}_1^2 + (\beta_1 + 1)^2\theta_1 \wedge \theta_2 - \beta_2^2\theta_2 \wedge \theta_1 \\ &= \overline{\Omega}_1^2 + (\beta_1^2 + 2\beta_1 + 1)\theta_1 \wedge \theta_2 + \beta_2^2\theta_1 \wedge \theta_2 \\ &= \overline{\Omega}_1^2 + (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 1)\theta_1 \wedge \theta_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_1^2(e_2, e_1) &= 3\omega_1 \wedge \omega_2(e_2, e_1) \\ &= 3(\omega_1(e_2)\omega_2(e_1) - \omega_1(e_1)\omega_2(e_2)) \\ &= -3\omega_2(e_2) \\ &= -3\sin(\beta)\theta_2 \wedge \theta_1(e_2, e_1), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\bar{\Omega}_1^2 = -3 \sin(\beta) \theta_2 \wedge \theta_1.$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} d\theta_1^2 &= -3 \sin(\beta) \theta_2 \wedge \theta_1 + (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 1) \theta_1 \wedge \theta_2 \\ &= [-3 \sin(\beta) - (|\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 1)] \theta_2 \wedge \theta_1, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$K = -3 \sin(\beta) - |\nabla\beta + e_1|^2, \quad (4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} |\nabla\beta + e_1|^2 &= \langle \nabla\beta + e_1, \nabla\beta + e_1 \rangle \\ &= \langle \nabla\beta, \nabla\beta \rangle + 2\langle \nabla\beta, e_1 \rangle + \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= |\nabla\beta|^2 + 2\langle \nabla\beta, e_1 \rangle + 1 \\ &= |\nabla\beta|^2 + 2\beta_1 + 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 175. *Sea M^2 una superficie minimal orientable inmersa en \mathcal{H}_3 , el Laplaciano de β satiface*

$$\Delta\beta = -\tan(\beta) \left(|\nabla\beta + 2e_1|^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{\sin(\beta)} \right).$$

Prueba: Derivando θ_2^1 dado en (4.7) y usando que $\Delta\beta = \text{tr}\nabla d\beta$ tenemos que

$$d\theta_2^1 = \left(\tan(\beta) \left(((\beta_1 + 2)^2 + \beta_2^2) + \frac{\cos^2(\beta)}{\sin(\beta)} \right) \right) \theta_1 \wedge \theta_2.$$

Por otro lado, como la curvatura Gaussiana es dada por $\bar{\Omega}_1^2 = -K\theta_1 \wedge \theta_2$, comparando con la ecuación anterior obtenemos que

$$\Delta\beta = -\tan(\beta) \left(((\beta_1 + 2)^2 + \beta_2^2) + \frac{\cos^2(\beta)}{\sin(\beta)} \right)$$

o

$$\Delta\beta = -\tan(\beta) \left(|\nabla(\beta) + 2e_1|^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{\sin(\beta)} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1^3(e_1, e_2) &= -\cos(\beta) \\ \bar{\Omega}_2^3(e_1, e_2) &= -\sin(\beta) \cos(\beta). \end{aligned}$$

□

Lema 176. *Las ecuaciones de Codazzi son:*

$$\begin{aligned} d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2 &= \Omega_1^3, \\ d\theta_2^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^1 &= \Omega_2^3. \end{aligned}$$

Prueba: Sean Ω_i^j las formas de curvatura de M^2 . De la ecuación de Gauss dada por (2.25) tenemos que

$$\bar{\Omega}_1^3 = \Omega_1^3 - \theta_1^3 \wedge \theta_3^3.$$

Así, $\bar{\Omega}_1^3 = \Omega_1^3$. Por otro lado, desde las segundas ecuaciones de estructura (2.12) en el Teorema 112, sobre M^2 , tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega_1^3 &= d\theta_1^3 - \sum_{k=1}^2 \theta_1^k \wedge \theta_k^3 \\ &= d\theta_1^3 - \theta_1^2 \wedge \theta_2^3 \\ &= d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\bar{\Omega}_1^3 = \Omega_1^3 = d\theta_1^3 + \theta_2^3 \wedge \theta_1^2.$$

Para la segunda ecuación de Codazzi, por la ecuación de Gauss dada por (2.25) tenemos que

$$\bar{\Omega}_2^3 = \Omega_2^3 - \theta_2^3 \wedge \theta_3^3,$$

así $\bar{\Omega}_2^3 = \Omega_2^3$. Luego, de las segundas ecuaciones de estructura (2.12) en el Teorema 112, sobre M^2 , tenemos

$$\Omega_2^3 = d\theta_2^3 - \theta_2^1 \wedge \theta_1^3,$$

por lo tanto

$$\Omega_2^3 = d\theta_2^3 + \theta_1^3 \wedge \theta_2^1.$$

□

Corolario 177. *Toda superficie minimal compacta inmersa en \mathcal{H}_3 tienen ángulo de contacto β constante, con $(0 \leq \beta < \frac{\pi}{2})$.*

Prueba: Sea $(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$. Se sigue del Teorema 174 que $\tan(\beta) \geq 0$, por lo tanto $\Delta\beta \leq 0$. Como M^2 es una superficie compacta, tomando $f = -\beta$ en el Teorema 146

concluimos que β es constante. \square

Corolario 178. *La curvatura Gaussiana K de una superficie minimal M^2 inmersa en \mathcal{H}_3 es negativa, con ángulo de contacto entre $(0 < \beta < \pi)$.*

Prueba: Supongamos que $(0 < \beta < \pi)$, se deduce de (4.8) que la curvatura Gaussiana K de M^2 es negativa, lo que concluye el corolario. \square

Teorema 179. *Consideremos M^2 una superficie Riemanniana, e un campo de vectores en M^2 y $\beta : M^2 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[$ una función sobre M^2 que cumple la siguiente ecuación*

$$\Delta(\beta) = -\tan(\beta) \left(|\nabla(\beta) + 2e|^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{\sin(\beta)} \right),$$

entonces existe una inmersión minimal de M^2 en \mathcal{H}^3 tal que e es el campo vectorial característico, y β es el ángulo de contacto de esta inmersión.

Prueba: Sea M^2 una superficie orientable en \mathcal{H}_3 , y sea e un campo de vectores unitario en M^2 . Podemos elegir una base ortonormal positiva $\{e_1, e_2\}$, con $e_1 = e$, y $\{\theta^1, \theta^2\}$ el marco de referencia dual de M^2 . Para cada función $\beta : M^2 \rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[$ que cumple la siguiente ecuación laplaciana

$$\Delta\beta = -\tan(\beta)|\nabla\beta + 2e_1|^2,$$

tenemos que se satisfacen las ecuaciones de Gauss–Codazzi, ahora, por el Teorema 99, existe una única inmersión de M^2 en \mathcal{H}_3 . Por otro lado, podemos observar que la curvatura media H dada por la ecuación (2.27) es $2H = h_{11} + h_{22}$, donde $\theta_1^3 = h_{11}\theta_1 + h_{12}\theta_2$ y $\theta_2^3 = h_{21}\theta_1 + h_{22}\theta_2$. Así, comparando θ_1^3 y θ_2^3 en (4.7) tenemos que $h_{11} = \beta_2$ y $h_{22} = -\beta_2$, lo que concluye que la curvatura media H es igual a cero, por lo tanto la inmersión es minimal. Podemos observar que los coeficientes de la segunda forma fundamental son

$$\begin{aligned} \theta_1^3 &= (d\beta + \theta^1) \circ J, \\ \theta_2^3 &= -(d\beta + \theta^1), \end{aligned}$$

los cuales también satisfacen la ecuación de la curvatura media H . \square

CONCLUSIONES

La Geometría Riemanniana provee variadas herramientas para analizar en detalle, superficies inmersas. En particular superficies mínimas inmersas.

El método del referencial sobre Variedades Riemannianas, nos permite deducir las ecuaciones de estructura de inmersiones isométricas, las mismas que nos permiten determinar los elementos necesarios para obtener una expresión explícita para la Curvatura Gaussiana y así abordar una clasificación de superficies inmersas en la esfera tridimensional.

A través del invariante geométrico conocido como ángulo de contacto estudiamos las superficies minimales inmersas, estableciendo una expresión explícita para la curvatura Gaussiana de dicha superficie inmersa en el grupo de Lie de Heisenberg.

A partir de las ecuaciones fundamentales, de Gauss y Codazzi, es posible analizar el problema de existencia de una única inmersión minimal tanto en la esfera como en el Grupo de Heisenberg 3-dimensional.

Usando las técnicas del método del marco de referencia, deducimos la ecuación para el Laplaciano del ángulo de contacto asociado a una superficie minimal inmersa sea en el caso de la esfera como para el grupo de Heisenberg tridimensionales.

En término del invariante geométrico considerado en esta investigación bajo ciertas consideraciones es posible establecer que existe una única inmersión isométrica en la esfera tridimensional. Asimismo, para superficies inmersas con curvatura media nula sobre tal esfera a través del ángulo de contacto es posible deducir que la única superficie minimal inmersa en S^3 con ángulo de contacto constante es el Toro de Clifford.

Las técnicas de la Geometría Riemanniana y Teoría de Contacto discutidas a lo largo de la tesis pueden ser consideradas como una fuente de importantes herramientas para lectores interesados en estas líneas de investigación.

Bibliografía

- [1] Arnold. V. I, *Contact Geometry: the geometrical method of Gibb's themodynamics*, Proceedings of the Gibbs Symposium, Yale, 1989, Arne. Math. Soc, Berlin, 1999, 163–179.
- [2] Anorld. V. I, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Grad. Texts in Math, 60, Springer, (1978).
- [3] B. Aebischer, *Symplectic geometry*, Progress in mathematics, 124, Springer–Verlag, Berlin–New York, (1992).
- [4] B. O'Neil, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, (1966).
- [5] D. Blair, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, 509, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, (1976).
- [6] D. Hoffman, *Surfaces in constant curvature manifolds with parallel mean curvature vector field*, Am. Math. Soc., 78, 1972, 247–250.
- [7] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 19, 1967, 205–214.
- [8] H. B. Lawson, *Local rigidity theorems for minimal immersions*, Ann. of Math., 89, 1969, 187–197.
- [9] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. Math., 92, 1970, 335–374.
- [10] H. W. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover Pub., New York, (1963).
- [11] J. Bolton, G. R. Jensen, M. Rigoli, L. M. Woodward, *On conformal minimal immersions of S^2 into $\mathbb{C}P^n$* , Math. Ann., 279, 1988, 599–620.
- [12] J. C. Willems, Baillieul, *Mathematical Control Theory*, Springer, Berlin (1999).

- [13] J. Eschenburg, Guadalupe. I. V. and R. Tribuzy, *The fundamental equations of minimal surfaces in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* , **Math Ann.**, **270**, 1985, 571–598.
- [14] J. Inoguchi, *Flat translation invariant surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group*, **J. Geom.**, **82**, 2005, 83–90.
- [15] J. Martinet, *Formes de contact sur les varités de dimension 3*, **Lect. Notes Math.**, **209**, Springer, (1971).
- [16] J. Martinet, *Formes de contact sur les variétés de dimensión 3*, **Proc. Liverpool Singularities Sympos. II, Lectures Notes in Math**, **209**, Springer, 1971, 142–163.
- [17] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, **GTM**, **218**, Seattle, USA, (2006).
- [18] J. N. V. Gomes, *The Gaussian curvature via the contact angle of immersed surfaces into the Euclidean three sphere*, **Differential Geometry and its Applications**, **31**, 2013, 691–697.
- [19] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *Minimal immersions of closed Riemann surfaces*, **Trans. Amer. Math. Soc.**, **271**, (2), 1982, 639–652.
- [20] K. Kenmotsu, *On compact minimal surfaces with non-negative Gaussian curvature in a space of constant curvature I,II*, **Tohoku Math. J.**, **27**, 1975, **Tohoku Math. J.**, **25**, 1973, 469–479.
- [21] L. A. B San Martín, *Álgebras de Lie*, **Unicamp**, Campinas, (1999).
- [22] L. M. Simon, *The minimal surface equation*, **Encyclopedia Math. Sci.**, **90**, 1997, 239–272.
- [23] M. Bekkar, *Exemples de surfaces minimales l'espace Heisenberg \mathcal{H}^3* , **Rend. Sem. Mat. Univ. Cagliari**, **61**, 1991, 123–130.
- [24] M. Bekkar and T. Sari, *Surfaces minimales regless dans l'espace Heisenberg \mathcal{H}^3* , **Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino**, **50**, 1992, 243–254.
- [25] M. Dajczer. et al., *Submanifolds and insometric immersions*, **Publish or perish**, Houston, (1990).
- [26] M. P. Do Carmo, *Differential forms and applications*, **Springer**, (2000).
- [27] M. P. Do Carmo, *Geometría Riemanniana*, **P. Euclides**, R. de Janeiro, IMPA, (1988).
- [28] M. P. Do Carmo, *O método do referencial móvel*, **IMPA**, Rio de Janeiro, Brasil, (1976).

- [29] M. Spivak, *Differential Geometry*, Publish or Perish, (1979).
- [30] Q. Cheng, S. Ishikawa, *A characterization of the Clifford torus*, Proc. Amer. Math. Soc., 127, 1999, 819–828.
- [31] R. Courant, *Soap film experiments with minimal surfaces*. Amer. Math. Monthly, 47, 1940, 167–174.
- [32] R. Lutz, C. Meckert, *Structure de contact sur certains spheres exotiques*, C.R.Acad. Sci. Paris sér. A–B, 282, 1976, A591–A593.
- [33] R. R. Montes and J. A. Verderesi, *A new characterization of the clifford torus*, Report IME–USP, RT–MAT–NS, 2002–22, arXiv: math/0601583v1, 2006.
- [34] R. R. Montes, J. A. Verdesi, *Minimal surfaces in S^3 with constant contact angle*, Monatshefte fur Mathematik, 157, 2009, 379–386.
- [35] R. Montes, M. Mariano, A. Brasil, *$H(r)$ constant contact angle surfaces in the three sphere*, (2010).
- [36] R. Schoen, S. T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press, vol. I, Boston, (1994).
- [37] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, 2nd edition, Dover Publications, New York (1986).
- [38] S. S. Chern and J. G. Wolfson, *Minimal surfaces by moving frames*, American J.Math, 105, 1938, 59–83.
- [39] S. Lie, *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen*, Göttinger Nachrichten (1872).
- [40] T. H. Colding and W. P. Minicozzi, *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, 121, American Mathematical Society, Providence RI, (2001).
- [41] T. H. Colding and W. P. Minicozzi, *Minimal surfaces*, Courtan Lecture Notes in Mathematics, 4, New York University, New York, (1999).
- [42] W. H. Meeks III, *A survey of the geometric results in the classical theory of minimal surfaces*, Bol. Soc. Mat. Bra., 12,1981, 29–86.
- [43] W. M. Boothby, H. C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Math, 68, 2, 1958,721–734.
- [44] W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, GTM, 94, Springer, New York, (1983).

- [45] Xu Yi-wen, Xu Zhi-yuan, *On rigidity of Clifford torus in a unit sphere*, **Appl. Math. J. Chinese Univ.** (2011), **26(1)**, 121–126.
- [46] Y. Eliashberg, *Classification of contact structure on \mathbb{R}^3* , **internat. Math. Res. Notices**, **3**, 1993, 87–91.