Facultad de Ciencias

Instituto de Matemáticas

Influencia de la Transferencia Analógica en la resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: Dificultades y Contextos

Memoria de Tesis para optar al grado de Licenciado en Educación y el Título de Profesor de Matemática, Mención en Didáctica

Presentada por:

Mónica Daniela Paz Cerda Hernández

Daniela Alejandra Ogas Muñoz

Profesora Guía:

Carolina Guerrero Ortiz

Diciembre de 2017

Valparaíso, Chile

Agradecimientos

En primer lugar, queremos agradecer a la Universidad de Valparaíso por habernos aceptado como parte de su comunidad universitaria y por siempre brindarnos herramientas para lograr nuestros objetivos. Así mismo, queremos agradecer a los docentes que nos apoyaron en este difícil, pero gratificante proceso, entre ellos no queremos dejar de destacar a Daniel Jiménez y Jorge Ávila, que, desde su ejemplo como seres humanos y docentes, se transformaron en una fuente de inspiración para nuestro ejercicio futuro. Finalmente, pero igualmente importante, Gerardo Araya, quien, a través de su apoyo incondicional como funcionario y amigo, nos facilitó el desarrollo como estudiantes y personas.

Para comenzar le agradezco a Dios, por poner en mi camino aquellas personas que me brindaron la fortaleza que necesite. A mi madre que en su entrega encontré mis objetivos, a mi padrino, que con su ejemplo encontré la perseverancia para alcanzarlo y en su familia el amor para anhelarlos. Le agradezco a cada caída y mano amiga que me levantó y en especial a ti que saliste de mis sueños para hacer todo esto realidad.

Mónica Cerda Hernández.

Es difícil comenzar a pensar a quien agradecer, porque posiblemente son muchas las personas que de uno u otro modo intentaron darme una palabra de aliento o ánimo cuando estaba por caer. Es por eso que destacaré a los incondicionales, a aquellos que siempre están. Primero mis padres Rosa y Hernán que con su amor y perseverancia me hicieron ver que todo se puede lograr si tienes los objetivos claros. Mis hermanos, Mariela y Boris (terrenalmente) que me apoyaron en cada momento que los necesite, dándome fuerzas para continuar este camino, ya sea con un abrazo o simplemente un "nana tú puedes lograrlo todo" y Edgardo (espiritualmente) quien de una u otra forma siempre lo sentí cerca. Constanza y Pía mis sobrinas, Luis mi cuñado y Catalina mi prima por estar siempre al pendiente de mí. Por último, al hombre que roba día a día mis sueños, Salvador, quien a pesar de la distancia siempre me dio su apoyo y amor.

Daniela Ogas Muñoz.

Índice

Resumen

La investigación que se presenta, ha sido abordada desde un paradigma cualitativo de tipo investigación-acción, el cual permitió observar la influencia de la implementación de una estrategia de enseñanza conocida como Transferencia Analógica. Se observó el trabajo de estudiantes de Técnico medio en Gastronomía y Química Industrial de un Instituto escolar de la región de Valparaíso, cuando resuelven problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, logrando identificar algunas dificultades y el rol que juega el contexto.

La información para el análisis se obtuvo a partir de un cuadernillo, papelógrafo de invención de problemas y audio grabaciones de entrevistas semiestructuradas. Lo que permitió levantar las categorías y subcategorías para, posteriormente, triangular dicha información.

Los resultados evidenciaron que la mayor fuente de obstáculos en la resolución de problemas, cuando se utiliza una Estrategia de Transferencia Analógica, se centra en los procesos de construcción del Modelo de la Situación y/o Modelo del Problema, así como en la reinterpretación de datos. Por otro lado, en los distintos Contextos (Cotidiano-Área Técnica de Estudio) que consideró esta propuesta didáctica los resultados indican que no se reportaron influencias importantes en relación a las dificultades observadas, pudiendo estar esto influenciado por la Estrategia propuesta (Transfer), la que proporcionó al estudiante herramientas dirigidas hacia el plan de acción en el proceso de resolución del sistema de ecuaciones, desde la esquematización de dicho proceso, postergando la comprensión desde la situación descrita por el problema, siendo el Contexto un factor tal vez irrelevante desde el Transfer, al estar inmersa en la compresión propiamente tal del problema.

Abstract

This study has been approached from a qualitative paradigm of research-action type, which shows the influence of the implementation of a teaching strategy known as Analog Transfer. We observed the work of students of the Technician in Gastronomy and Industrial Chemistry's program of a school in the Valparaíso region, when they solved problems involving systems of linear equations with two variables. Difficulties were identified and the role played by the context characterized.

Data for the analysis was obtained from a booklet, an invention of problems flipchart and audio recordings of semi-structured interviews, these instruments allowed to raise the categories and subcategories to later triangulate this information.

The results showed that the main source of obstacles for students in problem solving, when using an Analog Transfer Strategy focuses on the construction's processes of the Situation Model and / or Problem Model, as well as on the reinterpretation of data. On the other hand, in the different Contexts (Daily-Technical Area of Study) that was associated with the didactic proposal, the results indicate that no significant influences were reported in relation to the observed difficulties , this findings could be influenced by the proposed Strategy (Transfer), which provided the student tools directed towards the action plan in the process of solving the system of equations, from the schematization of such process, delaying the understanding from the situation described by the problem, the Context being a factor perhaps irrelevant from the Transfer, being immersed in the actual compression of the problem.

Introducción

En la presente investigación se analiza una propuesta didáctica que se enmarcó en una estrategia de Transferencia Analógica, que consiste en la explicación, por parte del docente, de un problema ejemplo (problema Fuente), esperando luego, que el estudiante aplique lo aprendido a un nuevo problema (problema Diana). Esta estrategia (Transfer) es reportada por la literatura como un procedimiento didáctico habitual, utilizado por el docente para la enseñanza en la resolución de problemas, dotando al estudiante de las bases de la comprensión y orientación al plan de acción (Sanjosé, Valenzuela, Forte y Solaz-Portolés, 2007).

La propuesta didáctica que se presenta en este estudio, fue adaptada a las necesidades presentadas en los estudiantes de tercer año medio de una institución escolar Municipal de la región de Valparaíso. El objetivo principal fue analizar las dificultades presentes en la resolución de problemas, además de la incidencia del contexto involucrado en la situación descrita por los enunciados en aquellas dificultades observadas. Al mismo tiempo de considerar los intereses y motivaciones de los estudiantes para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en relación con su Área Técnica de Estudio.

Este trabajo se sustenta en una metodología cualitativa de investigación-acción, dado que su visión se centra en mejorar la calidad de acción del aula a partir del análisis social de los sujetos.

Para alcanzar el objetivo de este estudio, se realizó un análisis detallado de los datos obtenidos con dos técnicas de recolección: escritos y audio grabados a estudiantes de Técnico medio de Gastronomía y Química Industrial.

Este trabajo se articula en seis capítulos:

Capítulo I: Se presenta el estado del arte ubicando y delimitando la problemática de estudio, además de las preguntas de investigación y objetivos propuestos.

Capítulo II: Se encuentra el Marco Conceptual de la investigación, en donde se especifican los conceptos clave, atendiendo a las clasificaciones y los elementos destacados en la literatura, en lo relativo a la comprensión y resolución de problema con estructura matemática subyacente.

Capítulo III: Se describe la metodología utilizada en el estudio, caracterizando las muestras, los instrumentos de recolección de datos, los procedimientos, además de mencionar la validez y confiabilidad de la investigación.

Capítulo IV: En donde se realiza la descripción y justificación del experimento. Realizando un análisis exhaustivo de la estructura de las sesiones e instrumento de implementación.

Capítulo V: Se presenta la descripción de las categorías tomadas a partir de los datos obtenidos, como también el análisis de resultados.

Capítulo VI: Se realiza una reflexión pedagógica a partir de los resultados, además de las conclusiones que responden a las preguntas planteadas en esta investigación.

Capítulo I

Planteamiento del Problema

El siguiente capítulo presenta el estado de arte de nuestra investigación con el objetivo de ubicar y delimitar el problema que abordaremos. Se mencionan experiencias y teorías relacionadas con la comprensión de problemas de palabras, abarcando principalmente las dificultades que presentan los sujetos al resolver problemas con estructura matemática subyacente. De esta misma forma, se presenta la justificación y descripción de las preguntas que guían este trabajo.

Antecedentes del problema

La investigación nace a partir de una experiencia en la práctica profesional, en donde se observó a estudiantes de un Instituto Técnico ubicado en la Región de Valparaíso. De estas observaciones pudimos distinguir las dificultades de los estudiantes para traducir del lenguaje natural al matemático y viceversa, problemas de palabras que conducen al planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Así mismo, fuimos testigos de las dudas que presentaron los estudiantes respecto de la utilidad de la resolución de problemas para su vida cotidiana o directamente en la extensión de sus respectivas Áreas Técnicas de Estudio.

En relación a las dificultades de los estudiantes en las disciplinas relacionadas con la matemática y las ciencias, la resolución de problemas es una de las áreas que más ha atraído el interés de los investigadores ¿por qué? Se podría inferir preliminarmente que se debe a que implica un desafío que exige el desarrollo de la creatividad, lo que la convierte, según los teóricos, en una de las tareas más exigentes, desafiantes e interesantes para la actividad mental (Kintsch & Greeno, 1985; Greer, 1997; Oliva, 2004; Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés, 2007).

En particular, Greer (1997), con base en el estudio de diferentes referentes de investigación, conjetura que a menudo el proceso de resolución de un problema de palabras por parte de los estudiantes, es guiado por el texto del problema donde las palabras clave conducen a la elección de una de las cuatro operaciones aritméticas básicas, por ejemplo, la palabra "excede" sugiere la operación de "adición", así como la palabra "disminuye" activa la "sustracción". Luego la operación sugerida se aplica a los dos (o más) números introducidos en el texto y su cálculo se realiza normalmente sin referencia al problema, concluyendo así que aquella estrategia de resolución es promovida y reforzada por la naturaleza estereotipada de las palabras.

No obstante, a lo anterior, Greer (1997) señala que no siempre el concepto generalizado de las palabras clave corresponde al modelo de la operación que se necesita para la resolución del problema. El autor realiza recomendaciones orientadas a tratar los problemas de palabras como un proceso de modelización, entendiéndose este como el vínculo entre los aspectos de la realidad y el desarrollo de la abstracción de las estructuras formales. En su artículo titulado, *Modelando la realidad en la clase de matemática: el caso de los problemas de palabras,* propone un modelo alternativo para la resolución de problemas, donde el *problema de palabras* se basa tanto en el *conocimiento del mundo real* como en el *conocimiento del problema de palabras*, donde además el sujeto resolutor construye a partir de esto, el *Modelo de la Situación* (MS). El proceso anterior se ejecuta con el objetivo de establecer el *Modelo Matemático* (MM) del problema, de donde se va a derivar la solución, que deberá estar idealmente alineada en sentido del MS.

En lo relativo a la enseñanza de la resolución de problemas, Sanjosé et al. (2007) enfatizan que tradicionalmente su instrucción se realiza mediante una estrategia de Transferencia Analógica (o Transfer), en donde los estudiantes deben transferir métodos y estrategias desde un problema Fuente (que usualmente resuelve y explica el docente) a un problema Diana (a resolver por parte del estudiante), habitualmente no idénticos entre sí.

Considerando la complejidad cognitiva detectada en los estudiantes, y las precauciones didácticas necesarias para su utilización en las aulas, la Analogía es definida por Oliva (2004) como comparaciones entre fenómenos que mantienen una cierta semejanza a nivel funcional o estructural. Este autor considera cuatro rasgos destacados en los fundamentos teóricos del pensamiento analógico:

1. La analogía. Se establece como un proceso intrínseco al sujeto, en continua interacción con su entorno y que, como todo conocimiento, es una construcción personal, que la lleva a cabo quien desarrolla el proceso de aprendizaje.
2. El proceso o camino que el alumno ha de recorrer (Transferencia Analógica), donde el resolutor debe establecer las relaciones entre los objetos y atributos.
3. Este proceso demanda la construcción de una matriz más profunda que la pura asociación directa de atributos entre problemas Fuente y Diana. La analogía concibe un proceso de modelización de segundo orden o simplemente “modelo de

la analogía" que vendría a marcar la estructura en común de los problemas o el mensaje de la analogía desde la intencionalidad que se propone.

4. La analogía se origina a través de una causa bidireccional compleja que se construye entre los problemas Fuente y Diana, ya que tanto la construcción de la analogía como el modelo que lleva de fondo, no se verifica en forma lineal y unidireccional sino en un proceso interactivo entre los problemas, en el cual tanto el modelo como el significado de la analogía deben enriquecerse y reformularse paulatinamente a medida que el resolutor avanza en su comprensión.

En la investigación desarrollada por Sanjosé et al. (2007) sobre las dificultades de los estudiantes de secundaria al trabajar con problemas de palabras (con estructura matemática subyacente), a través de una estrategia de Transfer, se concluye que el principal inconveniente al momento de aprender a resolver problemas de palabras, no procede del conocimiento inadecuado sobre el uso de las herramientas matemáticas involucradas, sino de la representación mental del problema ya sea desde su codificación y/o clasificación en términos, o desde los rasgos superficiales o estructurales.

Esto puede deberse a que su codificación permite reconocer los vínculos analógicos entre los problemas, por ello la representación mental del problema por parte del sujeto resulta ser crucial en el Transfer y es ahí en donde se concentran las mayores dificultades. Dicho de otro modo, se ha detectado que las principales dificultades se generan en los procesos de construcción del Modelo de la Situación (MS) y/o del Modelo del Problema (MP).

Bajo la misma línea, otro factor de complejidad en la resolución de problemas es el estudiado por Olazábal (2005) quien advierte que la situación determinante para el éxito del estudiante, consiste en hallar el *Modelo Matemático* que le permita plantear el problema, entendiendo por modelo matemático la representación de un fenómeno real basado en relaciones matemáticas (Neira, 2012).

Neira (2012) desarrolla una categorización que, asociada a la forma en que se abstrae el modelo matemático a partir del enunciado, se materializa en las siguientes categorías:

1. Enunciado Literal.
2. Enunciado Evocador.
3. Enunciado Complejo (Olazábal, 2005).

La abstracción que involucra cada una de estas categorías, naturalmente representa para el resolutor una fuente de complejización en la resolución del problema.

Olazábal (2005) concluye que a pesar de que la traducción del lenguaje natural al matemático constituye una condición necesaria en la etapa primordial para el planteamiento y resolución de problemas, no es suficiente para el éxito de la tarea que se busca desarrollar, infiriendo entonces que el entendimiento y planteamiento de los problemas dependerá de los elementos clave que este contenga (conceptos, situaciones, objetos, fenómenos, y el problema en particular) y del grado de familiaridad que tenga el estudiante con ellos.

En esta misma línea de estudio, Neira (2012) utilizando la categorización de Olazábal (2005), en una investigación realizada con estudiantes de primer año de estudio de Ciencias Administrativas, concluye que las dificultades presentadas resultan de la traducción del lenguaje natural al matemático y viceversa. Según estos resultados, el número de estudiantes que entiende y traduce el problema con éxito desciende según aumenta la categoría (Literal-Evocador-Evocador Complejo). De igual manera, a través de este estudio, logró constatar que el conocimiento del contexto en que se desarrolla la problemática juega un rol fundamental para el éxito de la resolución de problemas. Sobre lo mismo, Trejo y Camarena (2009) realizaron un estudio sobre problemas contextualizados y concluyeron que utilizar problemas en el contexto profesional o técnico de los estudiantes permite que se involucren en la resolución de los mismos, cobrando sentido e interés en el estudio.

Con la finalidad de entender cómo el Contexto forma parte del aprendizaje del estudiante, se hace necesario preguntarnos en primera instancia ¿Qué es Contexto? En esta investigación, se utiliza el concepto de *Contexto* como la consecuencia de un proceso de interpretación, debido a que el Contexto es una representación cognitiva a través de la que un sujeto otorga significado personal a una tarea determinada (Clarke & Helme, 1998). Clarke & Helme (1998) mencionan que si el conocimiento es construido por el sujeto como un proceso cognitivo que organiza el estudiante en conjunto con su mundo experiencial, entonces el Contexto es una consecuencia significativa de un proceso de interpretación, o bien, una construcción personal que se somete a un proceso de interpretación.

Como síntesis y considerando la literatura mencionada, se señala que el aprendizaje de los sujetos se facilita cuando estos pueden encontrar un nexo entre su propia experiencia y lo que intentan comprender.

Según Clarke & Helme (1998) el uso de Contextos en tareas elaboradas para la instrucción matemática se argumentan por tres motivos principales:

- La introducción de nuevos Contextos facilita la comprensión del nuevo contenido, puesto que este tipo de Contexto pueden contribuir a la representación individual, por parte de los estudiantes, de ese contenido utilizando elementos contextuales ya presentes en el marco cognitivo del alumno.

- La utilización de Contextos significativos facilita la participación del estudiante en la resolución del problema y aumenta su motivación.
- El aprendizaje matemático en Contexto familiar sugiere una mayor transferencia.

Clarke & Helme (1998) señalan también que el detalle contextual dentro de una tarea puede proporcionar a los estudiantes señales metacognitivas para la selección de herramientas y para la evaluación de la viabilidad de la solución basada en el conocimiento del estudiante sobre la situación de la tarea ("Contexto Figurativo") y en el conocimiento del estudiante sobre las matemáticas (o sobre las convenciones de los problemas matemáticos).

Ya que aún queda la interrogante en cuanto a la forma que estos Contextos son interpretados por el sujeto, es útil distinguir la "situación" que alude a la tarea propuesta al estudiante del "Contexto".

En la investigación realizada por Clarke & Helme (1998) se señalan dos clases de contextos:

- Contexto Interactivo: Situación en la que se encuentra la tarea, aludiendo a las percepciones individuales de los estudiantes, sobre sus requisitos.
- Contexto Figurativo: Situación propiamente tal descrita en la tarea y en donde el estudiante se involucra significativamente.

Como hemos observado en esta breve revisión de la literatura, la enseñanza de la matemática requiere necesariamente de la contextualización, ya que esta es capaz de generar la motivación para una actitud positiva durante el aprendizaje de las matemáticas, lo que creemos, influencia en el aprendizaje significativo.

Esto queda evidenciado en los Programas de Estudio para Segundo Año Medio en matemática (Mineduc, 2011) en donde se aclara que la utilización del Contexto en el aula es un ancla importante para el aprendizaje, tomando en cuenta que el Contexto debe ser cercano a los estudiantes con el fin de apoyar la construcción del conocimiento matemático y, de esta manera, implementar situaciones que se ajusten a la realidad en el aula.

Para los alcances de esta investigación y con base en los autores Clarke & Helme (1998) se distinguen dos tipos de *Contextos* (ambos Contextos Figurativos), con el objetivo de identificar cómo facilitan o dificultan la generación de aprendizaje en la resolución de problemas. Por un lado, nos referiremos a *Contexto Cotidiano* (C.C.) como un Contexto que debe ser cercano al estudiante y orientado hacia el área personal y/o social. Por otro lado, nos referiremos a *Contexto de Área Técnica de Estudio* (A.T.E.), como un Contexto específico de cada área de estudio de los estudiantes o, como se menciona en las Bases Curriculares (Mineduc, 2015), como Contextos relacionados al área profesional, laboral y/o científico. Un ejemplo de A.T.E. se presenta en un problema como el gramaje de dos compuestos a estudiantes que se encuentren en un liceo técnico mención Química Industrial. Ambos Contextos se anclan en lo mencionado por los autores Clarke & Helme (1998), dado que buscan relacionar significativamente a los estudiantes con la situación propiamente tal descrita en la tarea, a partir de su experiencia personal.

Un aspecto que recientemente se ha comenzado a estudiar y que está relacionado con la resolución de problemas es la invención de problemas. Puesto que en nuestro estudio abordaremos brevemente esta línea, consideramos necesario presentar algunas investigaciones relacionadas.

Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), basados en diferentes referentes teóricos, señalan que existen al menos seis propósitos distintos que se han investigado en la invención de problemas matemáticos. Estos son:

1. Como actividad creativa o talento excepcional: la formulación de problemas tiene una incidencia positiva en la creatividad de los estudiantes, a la vez que mejora los resultados de los estudiantes con talento.
2. Como enseñanza orientada a la responsabilidad sobre el aprendizaje, en otras palabras, hace del estudiante un actor partícipe de su propio proceso educativo.
3. Como ventana que permite observar la comprensión matemática, ya que la actividad de inventar un problema es una oportunidad para que el estudiante demuestre sus conocimientos y habilidades permitiéndole al docente tener una visión de su comprensión.
4. Como herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos, que como fue mencionado en el punto anterior, da oportunidad al docente de observar la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos en el estudiante, de este modo comprobar su comprensión y capacidades.
5. Como medio para mejorar la disposición y actitudes hacia las matemáticas por parte del estudiante, ya que se observan altamente motivados, creando una atmósfera optimista dentro del aula.

6. Como medio para mejorar la capacidad de resolución de problemas, al mejorar las estrategias necesarias para su resolución.

Stoyanova (1998) distingue tres maneras para formular la invención de un problema: *situación libre, situaciones semiestructuradas* y *situaciones estructuradas*. Tal como fue referenciado en Espinoza et al., (2014). En la primera situación no existe una restricción para la invención de problemas por parte de los estudiantes; mientras que en la segunda situación se les propone que planteen enunciados con base en alguna experiencia o de forma textual. Finalmente, las *estructuradas* son aquellas situaciones en las que se reformulan los problemas dados. Para fines de esta investigación se consideró la *situación libre* para la invención de problemas por parte de los sujetos y de esta manera estudiar los efectos de la estrategia propuesta (Transfer) sin restricciones, con el objetivo de observa que tipo de contextos se presentaron en las creaciones.

Problema de estudio

A partir de los antecedentes analizados e indicados anteriormente, surge nuestra problemática de estudio que tiene por objetivo indagar en las dificultades de la resolución de problemas, analizando la incidencia de la estrategia de Transferencia Analógica y la influencia del Contexto de los problemas presentados a los estudiantes en las dificultades observadas. Nos centramos principalmente en las dificultades asociadas a la resolución de problemas que conducen a los sistemas de ecuaciones con dos variables, haciendo énfasis en la complejidad inherente a la traducción del lenguaje natural al matemático y viceversa, por medio de dicha estrategia de enseñanza.

Justificación

La presente investigación busca analizar la estrategia de Transferencia Analógica, procedimiento didáctico habitual en las aulas, de carácter expositivas y dirigidas por el docente.

La importancia y utilidad que aporta la estrategia propuesta en el presente trabajo de título, radica en ser parte de nuevas herramientas que ayuden a confrontar estrategias para resolver situaciones concretas.

Si queremos discernir ¿por qué se debe aplicar nuestra estrategia en el aula? debemos comprender primero la dificultad asociada, en nuestro caso, a la tarea de resolver problemas de palabras.

Finalmente, queremos mencionar los alcances de nuestra investigación. La innovación de nuestro estudio está en que busca encontrar las dificultades presentadas por los estudiantes en los procesos de resolución de un problema con matemática subyacente, así como la incidencia del Contexto, en dichas dificultades, cuando se utiliza una estrategia de Trasferencia Analógica. No obstante, este alcance se puede extender a estudiantes que presenten un Contexto similar.

Preguntas de estudio

Con base en la revisión de la literatura se conjetura que muchos estudiantes, al resolver problemas matemáticos de palabras, no consideran la relación entre las situaciones del mundo real y las operaciones matemáticas. Dicho de otra forma, los estudiantes descuidan las condiciones realistas y excluyen el mundo real de sus conocimientos al resolver problemas matemáticos. A pesar de ello, las Bases Curriculares (Mineduc, 2015) señalan que comprender y ser capaz de aplicar conceptos y procedimientos en la resolución de problemas es fundamental para el desarrollo de los ciudadanos en el mundo moderno. En relación a la enseñanza en la resolución de problemas, con matemática subyacente, la Transferencia Analógica es una estrategia didáctica habitual, dotando al estudiante de herramientas dirigidas al plan de acción o un camino a recorrer hacia la resolución (Oliva, 2004). Es por ello que es imperante preguntarnos *¿Cuáles son las influencias del Contexto en la resolución problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, cuando se usa una estrategia de Transferencia Analógica?*, conjeturando que, a partir de un Contexto más significativo para los estudiantes, se pueden presentar menos dificultades en la traducción del lenguaje natural al matemático y viceversa.

Bajo esta misma línea de estudio, nos preguntamos también *¿Qué dificultades presentan los estudiantes cuando resuelven y responden un problema que involucre plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, cuando se usa una estrategia de Transferencia Analógica?* Esperamos que las dificultades no provengan de los conocimientos inadecuados de las herramientas matemáticas involucradas, sino más bien se relacionen con la construcción del Modelo de la Situación y/o Modelo Problema, en otras palabras, nuestra hipótesis se centra en las dificultades, desde la representación mental, de la situación por parte del resolutor.

Para dar respuestas a las preguntas generadas, nos planteamos los siguientes objetivos generales y específicos.

Objetivos generales

1. Comprender cómo influye el Contexto en la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales de primer grado con dos variables, utilizando una estrategia de Transferencia Analógica con estudiantes de Gastronomía y Química Industrial de tercer año medio.
2. Identificar y analizar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de palabras cuando se usa una estrategia de transferencia.

Objetivos específicos

a) Identificar las dificultades que surgen en los estudiantes al resolver problema de palabras, según la categorización de Olazábal (2005).
b) Examinar la construcción de las analogías por parte de los estudiantes.
c) Analizar las influencias del Contexto en la resolución de problemas que conducen a un sistema de ecuaciones lineales de primer grado con dos variables.

Capítulo II

Marco Conceptual

En este capítulo se especifican los conceptos clave de esta investigación. Atendemos a aquellas clasificaciones y elementos que han sido destacados en la literatura relativa a la resolución de problemas, dedicando especial atención a los problemas algebraicos de enunciado verbal por su destacado papel en este trabajo. La información que aquí se recoge, junto a los antecedentes que muestran el estado del arte, permite delimitar el área de estudio dentro de la que se enmarca y fundamenta la presente investigación.

El presente capítulo tiene por objetivo presentar el marco referencial conceptual de esta investigación, el que para Eisenhart (1991) se conforma a partir de la construcción de un argumento que sintetiza los diferentes puntos de vista, sirviendo como guía de análisis y explicación de los datos obtenidos.

Estructuralmente el capítulo se presenta en cinco apartados que hemos querido puntualizar a partir de las categorías que se presentan a continuación:

- Noción de Problema
- Contexto
- Tipo de Enunciado
- Comprensión de un Problema
- Transferencia Analógica

Además del Marco Matemático pertinente a la investigación, relacionado con métodos de solución y definiciones de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Noción de Problema

Si nos referimos a la investigación en educación matemática es posible distinguir que los problemas matemáticos han sido el objeto de análisis de muchos estudios. La Real Academia Española define *problema* como el planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. Análogamente se realiza una subcategorización entre problemas matemáticos como un problema determinado y que no puede tener sino una solución, o más de una, en número fijo e indeterminado, en otras palabras, puede tener un número indefinido de soluciones.

Referente a los problemas matemáticos, hemos indagado en la literatura especializada las siguientes nociones sobre problema:

- Polya (1962) considera que un individuo se encuentra frente a un *problema* cuando ha de buscar, mediante una acción adecuada, un objetivo que no es inmediatamente alcanzable (citado en Ayllón, 2012, p.27).
- Un sujeto se enfrenta a un *problema* cuando no dispone de las representaciones completas, Modelo de la Situación y/o Modelo del Problema, necesarias para dar respuesta a las preguntas formuladas en la demanda del enunciado. (Sanjosé et al., 2007).
- Desde la didáctica de las ciencias se ha distinguido la diferencia entre un ejercicio y un problema; Jiménez-Aleixandre (1998) menciona que, en el caso del ejercicio, el sujeto conoce desde el principio el modo en que debe ser resuelto; en el caso del problema, no (citado en Sanjosé et al., 2007, p. 539).

Es posible distinguir un punto común en las definiciones señaladas por estos autores. Se tiene un problema matemático cuando se presenta una situación en la que el sujeto resolutor necesite superar alguna dificultad para poder lograr un objetivo. Es precisamente esta extensión la que hemos decidido adoptar en la presente investigación, centrándonos particularmente en los problemas algebraicos. Para ello hemos empleado la definición de Kieran (1992) y Stacey (1995)

> "[Los] *problemas algebraicos* [son] *aquellos que implican relaciones matemáticas en las que el signo "=" no es sinónimo de efectuar una operación aritmética, sino un signo de equilibrio entre el miembro que está a su izquierda y el que está a su derecha. Ambos miembros contienen cantidades que se operan aritméticamente*."
>
> (citado en Fernández, 2001, p. 4)

Contexto

Según los Programas de Estudio para Segundo Año Medio en matemática presentados por el Mineduc (2011), se establece que la utilización del Contexto de un problema en el aula es un ancla importante para el aprendizaje, considerando para ello que la elección del Contexto debe ser cercano a los estudiantes. Por esta razón consideramos imperante en primera instancia preguntarnos ¿Qué es el Contexto? ya que sólo una vez especificado el concepto, podremos indagar en lo concreto cómo éste propicia el aprendizaje.

Contexto es definido por la Real Academia Española como el *entorno lingüístico del que depende el sentido de una palabra, frase o fragmento determinados*. Además, Valero (2002) se refiere al Contexto como todo aquello que acompaña al texto, en otras palabras, los diferentes sucesos que rodean a una situación.

Para los efectos de esta investigación, se usará la definición entregada por Clarke & Helme (1998), quienes entienden el *Contexto* como una representación cognitiva a lo que el sujeto otorga un significado personal, además establecen la relación entre Contexto social y Contexto personal; el primero está basado en la escuela y las relaciones que se generan dentro de la misma. Por otro lado, el Contexto personal se entiende por lo que cada estudiante construye de forma autónoma en el aula.

Sintetizando, esta relación entre Contexto y actividad matemática es posible contextualizar el conocimiento matemático abstracto, a través del Contexto social de los sujetos, logrando que el estudiante enlace dicho conocimiento nuevo a una experiencia personal. Por otro lado, Font (2006) sugiere utilizar el término "matemáticas contextualizadas" cuando se busca que el estudiante realice el proceso que va del objeto matemático a la realidad o viceversa, planteando que se debe partir de una experiencia real de los estudiantes para conseguir una actividad matemática significativa (citado en Burgos, Concha, Segura, Silva y Villegas, 2016).

El Contexto de un problema es importante dentro de concepciones que abogan por la necesidad de involucrar al estudiante en una construcción activa del conocimiento. El Contexto puede facilitar o ser un obstáculo en la construcción del mismo y ahí radica su importancia. El Contexto aumenta las posibilidades de que el estudiante asimile y reorganice su pensamiento. Es aquí donde debemos detenernos como docentes y considerar la importancia de proveer Contextos escolares favorables como una parte medular de las actividades que se proponen a los estudiantes (Valero, 2002).

Tipo de Enunciado

Otro elemento a considerar en la construcción del conocimiento y la resolución de problemas, consiste en hallar el modelo matemático que permite plantearlo, entendiendo por modelo matemático a la representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas (Mochón, 1997, citado en Olazábal, 2005). Un factor definitivo para establecer aquel modelo matemático según Olazábal (2005) es el entendimiento del enunciado, fundamentado en los procesos de traducción del lenguaje natural al planteamiento y resolución de problemas matemáticos en contexto, entendiendo por traducción al proceso que involucra ir de un modo de representación a otro (Janvier, 1987, citado en Olazábal, 2005)

Olazábal (2005) genera la categorización de problemas de acuerdo a las características de sus enunciados desde su complejidad al abstraer el modelo matemático del problema por parte del resolutor, que, a su vez, involucra los conocimientos del traductor en diferentes niveles.

- La primera categoría corresponde a los problemas con *Enunciado Literal*, donde, del mismo enunciado, se puede obtener literalmente el modelo del problema, para lo que el traductor debe conocer el vocabulario y su simbología matemática. Un ejemplo de esta categoría es el siguiente problema:

  Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en tres años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades (Olazábal, 2005, p. 36).
- La segunda categoría corresponde a los problemas con *Enunciado Evocador*, donde el enunciado evoca el modelo del problema ya sea mencionando, describiendo o haciendo referencia a él, donde además es necesario que el traductor conozca su significado. Como ejemplo de esta categoría:

  Las dimensiones de una caja rectangular son 6cm, 8cm y 12cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm. Calcular esta cantidad (Olazábal, 2005, p. 38).
- La tercera categoría corresponde a los problemas con *Enunciado Evocador Complejo*. En este caso, el enunciado no expresa literalmente, ni evoca el modelo del problema, sino que se espera que el resolutor sea capaz de deducirlo, por lo que se considera necesario poseer una estructura cognoscitiva preparada para dicha tarea. Un ejemplo de esta categoría es el siguiente problema:

  Una viga de madera tiene sección rectangular de altura h y anchura w. Su resistencia s es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la viga más resistente que se pueda cortar en un tronco de 24 pulgadas de diámetro? (Olazábal, 2005, p.40).

Las diferencias de estos enunciados radican en la manera en que estos conducen al modelo matemático. En el Enunciado Literal, el modelo matemático se establece directamente de la descripción del enunciado; en cambio en el Enunciado Evocador, el modelo se menciona indirectamente y éste servirá como puente para establecer el modelo representativo del problema. Por otra parte, en el enunciado Evocador complejo, el sujeto debe adaptarse a las condiciones del Enunciado y de esa manera aplicar un Modelo Matemático adecuado para el problema, así el modelo no surge ni Literalmente ni por Evocación del Enunciado, sino que surge de la estructura cognitiva del individuo (Olazábal, 2005).

Producto de las limitaciones de esta investigación hemos decidido abarcar específicamente los problemas de primera y segunda categoría, dado que para resolver un problema de tipo Evocador Complejo se necesita una estructura cognitiva preparada para poder deducir el Modelo Matemático.

Comprensión de un Problema

Luego de haber delimitado algunas de las características de los problemas, nos preguntamos de qué forma los estudiantes logran comprenderlos. Es sabido que la resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana y es un área que ha atraído el interés de los científicos cognitivos desde siempre, en especial en ciencias y matemáticas (Sanjosé et al., 2007).

Con la intención de responder a esta interrogante, hacemos referencia a la Teoría de los Modelos Mentales propuesta por Johnson-Laird (1983) como una explicación a los procesos superiores de la cognición, como la comprensión y la inferencia (Moreira, Greca y Rodríguez, 2002). Sin embargo, para comprenderlo es necesario introducir el concepto de representación. Una representación es cualquier notación, signo o conjunto de símbolos que representa algún aspecto del mundo exterior o de nuestro mundo interior, es decir, de nuestra imaginación (Moreira et al., 2002). Por ejemplo, la palabra “auto” o su dibujo, son representaciones externas que nos permiten evocar al objeto en su ausencia. Johnson-Laird (1983) señala al menos tres partes para el contenido de la mente; los *procedimientos recursivos*, señalados por él como indecibles, ya que es tal su magnitud que no pueden ser descritos. Estos llevan a cabo tareas como el mapeo de las representaciones proposicionales dentro de los modelos; *la representación proposicional*, o cadena de símbolos correspondiente al lenguaje natural; y *modelos mentales,* análogo a la estructura del mundo (Rodríguez, Marrero y Moreira, 2001).

Por lo tanto, la Teoría de Johnson-Laird es una teoría de la mente que abarca tanto la representación como los procedimientos que la construyen y manipulan, siempre con base en un lenguaje mental propio.

En esta misma línea la Teoría desarrollada por Van Dijk y Kintsch (1983) explica cómo comprenden los sujetos un texto científico (citado en Kintsch & Greeno, 1985) en el que se proponen dos componentes en la representación mental de un texto: la estructura proposicional de la información que está en el texto en un determinado sentido, que se obtiene mediante la construcción coherente de la información entregada por texto llamado microestructura; y el Modelo de la Situación (MS) que se deriva del texto, en su totalidad o en parte, llamado macroestructura que corresponde a las ideas esenciales expresadas en el texto, incluyendo las inferencias que se realizan con conocimiento sobre el dominio de la información del problema otorgado. Las macroestructuras resultantes contienen información acerca de quién hizo qué y por qué. Van Dijk y Kintsch (citado en Kintsch & Greeno, 1985) en su investigación con niños sobre la comprensión y resolución de problemas de palabras aritméticos, sugiere que la comprensión del lector incluye las relaciones conceptuales entre las cantidades que guían la elección de los cálculos realizados, más allá de la representación de los objetos y eventos del mundo observable. Los problemas matemáticos y científicos requieren también de abstracciones en términos de magnitudes, números, operaciones, ecuaciones, etc. Estas abstracciones se denominan Modelo del Problema (MP).

Según este modelo, existen tres conjuntos de estructuras del conocimiento utilizadas para representar y resolver un problema con estructura matemática subyacente. En primer lugar, existe un conjunto proposicional, utilizado para traducir las frases. En segundo lugar, existe un conjunto de esquemas que representan las propiedades y relaciones, comprendiendo la situación de manera general, estos esquemas se utilizan en la construcción de la macroestructura y la solución del problema que puede ser considerado el MP. Por último, existe un conjunto "experto", en el sentido utilizado en la literatura sobre la solución de los problemas, que incluyen el recuento y operaciones aritméticas en forma general (Kintsch & Greeno, 1985). La comprensión del lector debe incluir las relaciones conceptuales entre las cantidades y los cálculos a realizar, construyendo el MP, por lo que el lector debe analizar el texto de un modo especializado.

Según Sanjosé et al. (2007), la Teoría señalada anteriormente puede resumirse en cuatro niveles mentales de representación de un problema matemático y científico:

a) El Nivel Léxico, o de reconocimiento de las palabras.

b) La Base del Texto (BT), o nivel semántico, constituido por los significados de las oraciones independientemente de la forma en que están escritas y de las palabras usadas.
c) El Modelo de la Situación (MS) o nivel referencial en el que la información semántica del texto se relaciona con el conocimiento previo y se puede aplicar a nuevas situaciones.
d) El Modelo del Problema (MP): El conocimiento que un resolutor debe poseer se amplía para incluir la capacidad de representar relaciones de un modo abstracto y la capacidad de realizar las operaciones matemáticas necesarias para llegar a la solución pedida.
En el proceso de resolución de un problema con enunciado (con matemática subyacente) Hegarty, Mayer & Monk (1995) señalan que existen al menos tres niveles, en los que cada uno de ellos puede generar un obstáculo para los sujetos. El primer nivel correspondiente a la comprensión de la situación, con sus objetos, atributos y relaciones concretas, en otras palabras, el sujeto debe entender el enunciado a partir del mundo que conoce para subsumir la situación descrita en un esquema de funcionamiento conocido (construcción del MS).
En el segundo nivel, la traducción de lenguaje natural al matemático y viceversa, el sujeto debe pasar de un modelo mental en términos concretos (MS) a una representación abstracta (MP) que involucre magnitudes y fenómenos; cantidades y relaciones matemáticas; teoremas, leyes y axiomas. En el caso de reinterpretar la solución, el resolutor debe vincular las abstracciones resultantes (MP) nuevamente con los objetos del mundo (MS). El tercer nivel, involucra las herramientas matemáticas necesarias para alcanzar el resultado.
La relación entre las perspectivas de Johnson-Laird y Van Dijk y Kintsch no está establecida de un modo riguroso, pero ambas manejan constructos cognitivos de naturaleza similar, es decir, intentan dar una explicación a cómo un sujeto comprende el mundo o cierto texto que alude a una parte de él. El Modelo de la Situación construido en un problema está contenido en el conjunto de Modelos Mentales necesarios para representar el problema, pero en el caso de problemas con base matemática, los Modelos Mentales deben incluir también las abstracciones teóricas basadas en teoremas, leyes y principios científicos, por lo tanto, contienen el Modelo del Problema (Sanjosé et al., 2007).

Transferencia Analógica

La enseñanza de resolución de problemas en ciencias y matemáticas se ha realizado habitualmente utilizando la estrategia de Transferencia Analógica (Transfer), esto significa que el profesor resuelve y explica un conjunto de problemas en contextos determinados o temas (problemas ejemplo o “Fuente”) y después se pide a los estudiantes que resuelvan otros problemas análogos a los ejemplos trabajados (problemas “Diana”). (Sanjosé et al., 2007).

Para comprender esta usual estrategia de enseñanza es necesario delimitar lo referido al concepto de analogía, el que para Oliva (2004) son comparaciones entre fenómenos que mantienen cierta semejanza a nivel funcional (relaciones) o estructural (objetos y/o atributos). Por su complejidad cognitiva y precauciones didácticas, Oliva (2004) menciona cuatro rasgos que caracterizan al pensamiento analógico:

- Como un proceso interno del sujeto y no solo el estímulo externo que se presenta como recurso.
- La Transferencia Analógica se trata de un camino o proceso que el alumno debe recorrer.
- La Transferencia Analógica exige un modelo más profundo que la asociación entre los objetos (elementos pertenecientes al mundo) y atributos (propiedades de los objetos) entre el problema Fuente y el Diana. Exige que se configure una estrecha conexión entre los contextos donde se presenta la analogía.
- La Transferencia Analógica es un proceso bidireccional complejo, es decir que la construcción de la analogía y del modelo que lleva de fondo se realiza a través de un proceso interactivo entre los problemas Fuente y Diana, y su complejidad radica en el alto nivel de abstracción que conlleva el problema Fuente.

Desde su carácter interno, Oliva (2004) señala que es quien aprende, el que está en continua interacción con su entorno, quien debe desarrollar la construcción de la analogía a modo personal. Así mismo, induce al docente a recurrir a estímulos externos que promuevan y faciliten la relación análoga. Esta analogía el autor la define principalmente como una construcción interna, coherente con las teorías del aprendizaje como construcción. Desde este punto de vista, hablar de analogías se puede referir a dos cosas diferentes, por un lado, desde un estímulo externo utilizado por el profesor o un texto, por otro, la representación interna que se genera en la mente del estudiante a partir de ese estímulo. Sobre el carácter procesual del pensamiento analógico, Oliva (2004) señala que elaborar una analogía conlleva establecer relaciones entre los objetos y atributos entre los problemas Fuente y Diana. Según Sternberg (1977) la relación existente entre los objetos y atributos se puede interpretar en términos proporcionales como:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D}$$

Por ejemplo, el **Sistema Solar**: **Planeta** como el **Átomo**: **Electrón**, para el caso los objetos son: planeta, Sol, Sistema Solar, electrón, átomo y núcleo. Sus atributos están relacionados con tamaño, carga o masa. Y su relación va dirigida hacia el movimiento de los objetos (citado en Oliva, 2004).

En relación a la complejidad cognitiva interna de las analogías, es el sujeto resolutor el que debe decidir cuáles son las relaciones que se mantienen de un problema Fuente al Diana durante la fase de extrapolación de la Transferencia Analógica, pero esta no estará concluida hasta la fase de adaptación o acomodación de las relaciones al nuevo dominio (problema Diana).

Del mismo modo Jonassen (2003) señala que para que exista transferencia de conocimiento es necesario que los estudiantes generen conexiones conceptuales internas entre los problemas y los dominios de conocimiento específico, y aprendan a elaborar diversas representaciones de los problemas (Sanjosé et al., 2007, p. 541).

Con respecto a los obstáculos que se pueden presentar en una estrategia de transferencia analógica Sanjosé et al. (2007) señalan que

> *Las principales fuentes de obstáculos para la correcta resolución de problemas en situaciones típicas de Transfer se concentran en la construcción de los vínculos a nivel del modelo de la situación (vínculos entre objetos, sucesos y atributos) y/o en el proceso de traducción del lenguaje natural al lenguaje del álgebra*
>
> (Sanjosé et al, p. 544).

A partir de esto último podemos inferir entonces que las dificultades se encuentran en la construcción del MS y MP, así como la conexión entre ellos (traducción inversa) al mismo tiempo que desde la perspectiva cognitiva de la analogía, sus dificultades radicarán en las fases de extrapolación de las relaciones entre los objetos y atributos, como en la fase de acomodación de las relaciones al nuevo dominio.

Marco Matemático

Este capítulo tiene por propósito describir el objeto matemático involucrado en la implementación de la propuesta didáctica de nuestra investigación, a saber, Sistemas de Ecuaciones Lineales de primer grado con dos Incógnitas. Se presentará, además de los elementos pertenecientes a la formalidad matemática, una reseña histórica y los fundamentos teóricos del objeto en cuestión.

Análisis epistemológico

El presente, hace referencia histórica relacionada al objeto matemático en el estudio y sus fundamentos teóricos. Dicha referencia estará basada en lo expuesto por los autores Luzardo & Peña (2006) que mencionan que "*como parte esencial de su propio desarrollo evolutivo, el hombre ha procurado entender los diferentes aspectos que forman parte de su vida cotidiana*" (p. 154), esto con el objetivo de disponer de herramientas que le permitan cazar y recolectar, así como también poder medir longitudes, ordenar, organizar y cuantificar objetos, o simplemente reconocer fenómenos presentes en la naturaleza. Así, "*el hombre ha construido modelos que le han facilitado la tarea de resolver problemas concretos o que le han ayudado a encontrar una solución al problema específico que lo afecta*" (p. 154).

De estos problemas, muchos poseen carácter lineal, en otras palabras, es posible plantearlos a través de ecuaciones lineales que contemplen coeficientes en algún campo de números y pocas variables.

Etimológicamente la palabra "*ecuación*" surge del latín *"aequatío"* que significa "*igualdad*" (Luzardo & Peña, 2006, p. 154), por consiguiente, una ecuación lineal es una *aequatío* con ciertas cantidades desconocidas, particularmente de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son los coeficientes, $x_1, x_2, \dots, x_n$ las incógnitas y b el término constante. Este sistema posee además la característica de ser un conjunto definido de ecuaciones de comportamiento lineal.

Los problemas a los que han debido enfrentarse los seres humanos a lo largo de la historia de las civilizaciones se relacionan con asuntos principalmente económicos, como lo es la distribución de cosechas, la subdivisión del patrimonio de los terratenientes, o el presupuesto de un país, o de otra índole. Todo lo antes señalado es susceptible de ser planteado en términos de sistemas de ecuaciones lineales (Luzardo & Peña, 2006).

Es posible conocer el germen de lo que hoy conceptualizamos como *Álgebra lineal* a través de la fuente matemática más antigua conocida hasta el presente, hablamos del papiro Rhind, documento escrito por el sacerdote egipcio Ahmés a mediados del siglo XVII a.C. El Este papiro es un manuscrito de carácter didáctico matemático, pues contiene numerosos problemas que consideran el uso de ecuaciones de primer grado, donde la incógnita aparece representada por un "ibis", que literalmente significa *escarbando en el suelo*. El significado puede asociarse posiblemente a la antigua aplicación de la palabra, esto es a la agrimensura o la topografía, ambas, técnicas de medición de tierras y de su representación, por consiguiente, orientada a la agricultura (Sánchez, 2000).

Del mundo egipcio nos trasladamos a la civilización Babilónica en Mesopotamia. Herederos de los sumerios, estos prestaron escasa atención a las ecuaciones lineales. Quizás por considerarlas demasiado elementales, lo cierto es que no utilizaban letras para representar las cantidades variables porque aún no había sido construido el alfabeto propiamente tal, pero sí incorporaron a la mentalidad oriental, ideas y teoremas matemáticos sobre longitud, anchura, área y volumen (Bonfantes, 2003).

No obstante, a lo anterior, los babilónicos ya manejaban métodos de resolución de problemas concretos que comprendían ecuaciones de primer y segundo grado. Uno de estos métodos consistía en completar cuadrados, así como ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.

Si miramos más allá del *limes* babilónico encontramos el mundo oriental. Durante los siglos IV y III a.C., los matemáticos chinos mantuvieron la tradición babilónica y fueron más allá, desarrollando los primeros métodos de pensamiento lineal, materializado, por ejemplo, en el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático* compuesto por Chuan Tsanom a principios del siglo II a.C., donde emerge el subsecuente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Así como un método para su resolución, llamado regla fan-chen o método de eliminación gaussiana para nuestros días.

Dada la importancia de la solución de sistemas de ecuaciones lineales desde la antigüedad, según hemos mencionando en párrafos anteriores, hasta la actualidad, como cuando los estudiantes en su contexto cotidiano deben enfrentarse a situaciones problemas, por ejemplo, al comprar, administrar o evaluar asuntos económicos, sociales, e incluso políticos, pueden utilizar el razonamiento cuantitativo matemático que contribuyan a formularlos o resolverlos. Así es entonces que hemos querido desarrollar, a la vez que diseñar, una propuesta didáctica a partir de los métodos de resolución de problemas en los que puedan ser empleados los Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas. Este objeto matemático se ha convertido en los últimos años en una parte esencial de los conocimientos de la disciplina, reflejando la importancia y el alcance de sus aplicaciones.

Sistema de Ecuaciones Lineales con dos variables

En la presente sección se aborda la descripción del objeto matemático del estudio, con base en el libro de Lipschutz, S. (1992).

Ecuación Lineal

Definición 2.1: Sea $n \geq 1$ un número natural. Una *ecuación lineal* es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$$

Donde $a_1, a_2 \dots, a_n, b$ son constantes reales, con al menos a_i no nulos. La constante a_k se denomina coeficiente de x_k y b se denomina constate de la ecuación.

La *solución* de la ecuación lineal anterior es una serie de números $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ que la satisfacen, es decir, que la verifican

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots a_n\alpha_n = b$$

Ecuación lineal con dos incógnitas

Para el caso particular de las ecuaciones lineales con dos incógnitas (x e y), que constituyen parte sustancial de nuestro objeto de estudio, estas se pueden escribir de forma convencional:

$$ax + by = c$$

Donde a, b, c son números reales (con a y b no nulos simultáneamente). Cada solución de la ecuación es un punto $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}^2$ representa el plano cartesiano. Como a y b son no nulos, todas las soluciones tales corresponden precisamente a los puntos de una recta del plano, denominándose *gráfico* de la ecuación.

Sistema de ecuaciones lineales

Definición 2.2: Sea $m \geq 1$ y $n \geq 1$ números naturales. Un sistema lineal es un conjunto de m ecuaciones lineales y n incógnitas, de la forma:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Donde x_i son las incógnitas y a_{ij}, b_j son constantes. A las constantes a_{ij} se les denomina *coeficientes* del sistema, y al conjunto de b_i *términos independientes* del sistema.

Una *solución* del sistema lineal anterior es una sucesión de números $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ que satisfacen cada ecuación del sistema, es decir, que verifica

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots a_{in}\alpha_n = b_i$$

Para i=1, 2, …, n

Para estos sistemas existen tres casos de posibles soluciones:

1. El sistema tiene una única solución, es decir, existe uno y sólo un conjunto de valores para x_i que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.
2. El sistema tiene infinitas soluciones. Existen infinitos conjuntos de valores para x_i que satisfacen simultáneamente las ecuaciones.
3. No tiene solución. El conjunto solución es vacío, es decir, no existe ningún conjunto de valores para x_i que satisfagan simultáneamente las ecuaciones.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

Los sistemas de ecuaciones lineales con dos variables conforman precisamente nuestro objeto de estudio. Consideramos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas *x* e *y*, es decir, de la forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Con a_1 y b_1; a_2 y b_2 no nulos simultáneamente.

Sea un par de números reales k_1, k_2 tales que *satisfacen* ambas ecuaciones simultáneamente (solución del sistema). Note que cada una de las ecuaciones componente del sistema antes mencionado representa una recta en el plano cartesiano, dado que el conjunto de puntos (x, y) que la satisface tiene tal gráfica. A partir de la interpretación geométrica del sistema antes mencionado, se corroboran los tres casos mencionados anteriormente:

1. El sistema tiene una única solución. Aquí, los gráficos de las ecuaciones lineales se cortan en un solo punto.
2. El sistema no tiene soluciones. La gráfica de las ecuaciones lineales son dos rectas paralelas.
3. El sistema tiene infinitas soluciones. Aquí, los gráficos de las ecuaciones son las mismas.

A continuación, se estudia un algoritmo que permite hallar el conjunto solución de un sistema arbitrario de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Algoritmo de eliminación

La solución de un sistema se puede obtener mediante un proceso conocido como eliminación, por el medio del cual se reduce el sistema a una ecuación sencilla con sólo una incógnita. Suponiendo que un sistema de ecuaciones tiene una única solución, el algoritmo de eliminación consiste en los siguientes pasos:

1. Sumar el múltiplo de una ecuación a la otra, de forma que las incógnitas se eliminen en la nueva ecuación.
2. Resolver la ecuación para la incógnita dada y sustituir su valor en una de las ecuaciones originales y así obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo 2.1: Consideremos el sistema de ecuaciones lineales con dos variables:

$$L_1: 2x + 5y = 8$$
$$L_2: 3x - 2y = -7$$

Ahora siguiendo los pasos indicados del algoritmo de eliminación:

1. Multipliquemos L_1 por 3 y L_2 por -2 y sumando las ecuaciones resultantes se obtiene:

$$\begin{array}{rl} 3L_1: & 6x + 15y = 24 \\ \underline{-2L_2:} & \underline{-6x + 4y = 14} \\ Suma: & 19y = 38 \end{array}$$

2. Resolviendo se obtiene y = 2, sustituyendo y = 2 en una de las ecuaciones originales, digamos en L_1

$$2x + 10 = 8$$

Entonces x = -1 e y = 2, o sea, el par $(-1,2)$ es única solución para el sistema.

Existe una correspondencia entre los sistemas de ecuaciones lineales y la Teoría de matrices. Para explicitar esta correspondencia, requerimos introducir varias nociones relacionada con dicha Teoría, lo que se realizará en la siguiente sección.

Matrices

Sea *A* una tabla ordenada de números reales como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La tabla *A* se denomina *matriz*, denotada por $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m, j = 1,2, \dots n$. Una matriz con *m* filas y *n* columnas se llama matriz de *m x n*, se dice que la matriz es de tamaño m por *n*.

Operaciones elementales entre filas

Se dice que una matriz *A* es *equivalente por filas* a otra matriz *B (A ~ B),* si *B* puede obtenerse a partir de *A* mediante una sucesión finita de operaciones, tales como:

$[E_1]$ Intercambiar las filas i-ésima y j-ésima: $R_i \leftrightarrow R_j$

$[E_2]$ Multiplicar la fila i-ésima por un escalar no nulo k: $kR_i \rightarrow R_j$, $k \neq 0$

$[E_3]$ Sustituir la fila i-ésima por ella misma más *k* veces la j-ésima: $kR_j + R_i \rightarrow R_i$

$[E]$ Sustituir la fila i-ésima por *k* (no nulo) veces ella misma *k'* veces la j-ésima:

$$k'R_j + kR_i \rightarrow R_i, k \neq 0$$

Matrices y sistemas de ecuaciones

Sea la matriz ampliada *M* del sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, definida de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Observe que cada fila de *M* corresponde a una ecuación del sistema y cada columna al coeficiente de una incógnita, excepto la última que corresponde a los términos independientes del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse trabajando con su matriz ampliada; específicamente, reduciéndola a la forma escalonada y luego a su forma canónica. La justificación de este proceso proviene de los siguientes hechos:

1. Cualquier operación elemental entre filas en la matriz ampliada *M* del sistema es equivalente a efectuar la operación correspondiente en el sistema mismo.
2. El sistema tiene solución si y solo si la forma escalonada de la matriz ampliada no tiene una fila de la forma (0, 0…, *b*) con $b \neq 0$.
3. En la forma canónica por fila de la matriz *M* (excluyendo las filas nulas) el coeficiente de cada variable no libre es una entrada principal no nula igual a uno y es la única entrada distinta de cero en su columna; de aquí la solución en la forma de variables libres se obtiene simplemente transfiriendo los términos de variable no libre al otro miembro.

Ejemplo 2.2: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, resuelva:

$$x + 2y + z = 3$$
$$2x + 5y - z = -4$$
$$3x - 2y - z = 5$$

Se resuelve reduciendo a su matriz ampliada a la forma escalonada y luego a su forma canónica por filas:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 28 & -84 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

De modo que este sistema tiene una única solución $x = 2, y = -1, z = 3\ o\ u = (2, -1,3)$.

En lo relacionado con nuestro objeto de estudio, a través de elementos matriciales se puede determinar el carácter del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y dos ecuaciones. Para ello usaremos el concepto de *determinante* para una matriz de 2 por 2.

Sea la matriz *A* dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

El *determinante* de *A* es la expresión $ad - bc$.

Por otro lado, el producto entre una matriz de 2 por 2 y una matriz de 2 por 1 se define como:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dado el sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas y dos ecuaciones

$$a_1 x + a_2 y = b_1$$
$$a_3 x + a_4 y = b_2$$

Podemos re-escribirlo como

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

O de otro modo $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

El que la solución del sistema no es única, sólo puede ocurrir cuando los coeficientes de *x* e *y* en las dos ecuaciones lineales son proporcionales, es decir:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ ó bien } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

Con $a_2\ y\ b_2 \neq 0$

Así, la solución del sistema es única si y solo si el determinante de la matriz A de coeficientes es no nulo.

Capítulo III

Metodología de Investigación

En este capítulo se describe la metodología de investigación, la cual siguió un enfoque cualitativo, bajo un diseño de investigación-acción (Sampieri, Collado y Baptista, 2014), adaptando los principales criterios al presente estudio. Se presenta una caracterización de los participantes involucrados en el estudio, así como los instrumentos de recolección de información (cuadernillo, papelógrafo de invención de problema y entrevistas semiestructuradas). Se incluye además una descripción del procedimiento, en donde se incluyen los pasos para aplicar el estudio junto con los contenidos pertinentes a los programas de estudio, y, por último, se presentan las orientaciones que hemos seguido para dar validez y confiabilidad a los instrumentos de recolección de datos, para lo que se realizó una triangulación de información (Sampieri et al., 2014).

Diseño de Investigación

El diseño de la investigación siguió un enfoque metodológico cualitativo, que posibilitó la descripción y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en escenarios educativos:

> *La investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento.*
>
> (Sadín, 2003, p. 123)

Siguiendo este enfoque se refuerza la perspectiva de la realidad en el aula desde los propios estudiantes, dejando como opción abierta la comprensión, evolución y configuración del conocimiento, que hasta entonces ha sido ignorado o bien, desactualizado, procedente de los nuevos fenómenos sociales.

En particular se abordó el estudio siguiendo y adaptando los criterios principales de la metodología de investigación-acción, que pretende, esencialmente, estudiar una situación social con miras a mejorar la calidad de la acción dentro de ella (Sadín, 2003), bajo una perspectiva deliberativa, en donde el enfoque principal está en la interpretación humana, la comunicación interactiva, la deliberación, la negociación y la descripción detallada, utilizando un diseño práctico, incluyendo, según menciona Stringer (1999), las fases de actuar, pensar y observar, esenciales para este tipo de diseño (Sampieri, Collado, & Baptista, 2014) (Figura 3.1).

En el diseño de investigación-acción se distinguen tres fases esenciales: observar, donde se construye un bosquejo del problema y se recolectan los datos; pensar, donde se analizan e interpretan los datos y por último actuar, donde se resuelven las problemáticas e implementan las mejoras, las que se desarrollan de manera cíclica (Stringer, 1999, citado en Sampieri et al., 2014). En esta última fase nos hemos debido adaptar a las limitaciones de nuestra investigación, a la espera de que los hallazgos expuestos y conclusiones alcanzadas, conduzcan a futuras mejoras y de esta manera, el presente trabajo de título sea un aporte en la resolución de la problemática en cuestión.

Todo lo anterior se refleja en la siguiente Figura 3.1:

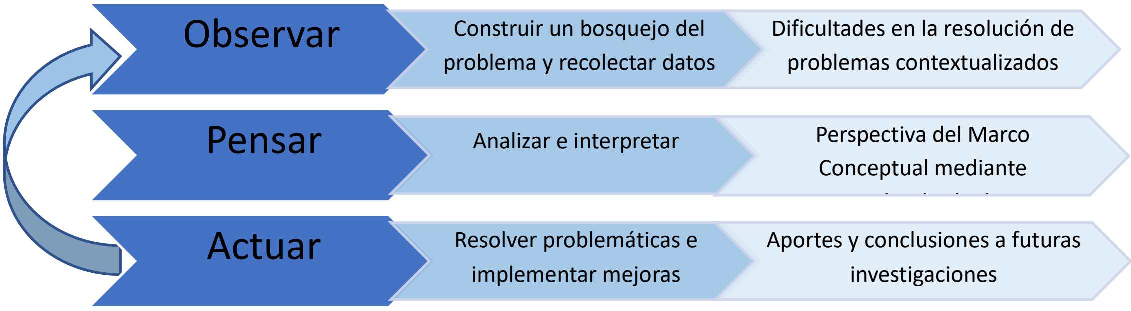


Figura 3.1: Fases metodológicas investigación-acción
Fuente: Elaboración propia

Como se observa, la Figura 3.1 ilustra las tres fases de la metodología utilizada en esta investigación.

En primera instancia, se observaron las dificultades en la resolución de problemas contextualizados que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos variables por parte de los estudiantes de un liceo técnico de la región de Valparaíso. A partir de ello se construyó el bosquejo del problema y la toma de datos, apoyado del estado del arte pertinente al objeto de estudio.

A continuación, se realizó el análisis e interpretación de datos recogidos en la fase anterior, considerando los criterios del marco conceptual y siendo validada la información a través de la triangulación de datos (Sampieri et al., 2014).

Para finalizar se deliberaron las conclusiones y aportes de este estudio, lo cual se espera que conduzca a un nuevo diagnóstico con miras a mejorar la toma de decisiones pedagógicas en el aula, en particular con la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales, los contextos y las estrategias de enseñanza.

Descripción de los participantes

Los participantes eran estudiantes de un Instituto Técnico Profesional ubicado en la región de Valparaíso, quienes cursaban las especialidades de Gastronomía y Química Industrial. Se consideraron estas dos especialidades, debido a los distintos Contextos en que se puede presentar la matemática, como una herramienta para la formación profesional de los estudiantes, en donde los conocimientos de Química Industrial pertenecen a una ciencia más específica, en contra posición a los conocimientos de Gastronomía. Se seleccionaron estas muestras con la intencionalidad de contrastar las dificultades presentes en la resolución de problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en cada grupo de estudio.

Los cursos seleccionados del establecimiento fueron dos: tercer Año Medio Gastronómico (G.) compuesto por 25 estudiantes y tercer Año Medio Químico Industrial (Q.I.) compuesto por 20 estudiantes.

Instrumento de recolección de información

Como instrumento para la recolección de datos se utilizó un cuadernillo que contiene:

a) Un problema ejemplo (problema Fuente) desarrollado usando los tres métodos de resolución de sistemas de ecuaciones mencionados anteriormente (igualación, sustitución y reducción).
b) Cuatro problemas que fueron resueltos por los sujetos (problemas Diana); dos problemas que involucran un contexto cotidiano (C.C.) y dos problemas relacionados a su área de estudio (A.T.E.).
c) Dos cuestionarios destinados a conocer las percepciones de los sujetos hacia los Contextos presentados en la propuesta (el primero con dos preguntas y el segundo con tres preguntas).

Por otro lado, también se utilizaron papelógrafos para la invención de un problema, en donde los participantes, quienes trabajaron en grupos conformados en libre elección por los sujetos, describieron sus procedimientos. Para finalizar se realizaron entrevistas a cada uno de los grupos, las que fueron audio grabadas.

Material de recolección de datos escritos:

- Cuadernillos.
- Papelógrafos.

Además de grabaciones de audio a las entrevistas grupales.

Descripción de instrumento

Es importante señalar previamente que una detallada descripción del instrumento se presentará en el siguiente capítulo. Además, mencionar que el instrumento descrito más adelante, fue utilizado en dos sesiones de clases, de dos horas pedagógicas cada una. En donde se abordaron problemas contextualizados que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

El cuadernillo constó de dos secciones, por un lado, contenía problemas vinculados a el Contexto Cotidiano (C.C.) de los sujetos y por otro, problemas relacionados al Área Técnica de Estudio (A.T.E.), además estos problemas se caracterizaron según tipo de enunciado: Literal y Evocador (Olazábal, 2005). Cada sección del cuadernillo contiene dos problemas a resolver por los estudiantes, que evalúan las dificultades de los sujetos en los procesos de resolución de los problemas, también contiene un cuestionario, que evalúa las percepciones de los sujetos hacia los Contextos presentados en ambas sesiones (C.C.-A.T.E.) y los beneficios que observen con su área de estudio en el aprendizaje del objeto matemático.

Además, los participantes trabajaron en la invención de un problema que involucró sistemas de ecuaciones lineales. Las producciones de los equipos fueron plasmadas en papelógrafos. Para finalizar, se realizó una entrevista semiestructurada, en donde las preguntas son una base de guía para el investigador, con el objetivo de obtener mayor información relevante para el estudio (Sampieri et al., 2014). Estas preguntas se formularon con el propósito de evaluar las percepciones de los sujetos, utilizando como criterio las sugerencias de una profesora de matemáticas.

Procedimiento

El desarrollo del presente estudio, se llevó a cabo siguiendo los procedimientos:

1) Selección del contenido de "Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas", considerado los Programas de Estudio para Segundo Año Medio en matemática (Mineduc, 2011).
2) Contacto con el establecimiento escolar, solicitud de permiso para la aplicación del estudio en los cursos de Gastronomía y Química Industrial, de tercer año medio durante dos días.
3) Diseño de los instrumentos de recolección de datos: cuadernillo, invención de problemas y entrevista semiestructuradas. Para la creación del cuadernillo se diseñaron los problemas y cuestionarios (ver Apéndice B) que fueron discutidos para ajustar el instrumento.
4) Piloteo de los problemas diseñados con cinco futuros profesores de matemáticas.
5) Selección de las herramientas a utilizar para el desarrollo de las sesiones (cuadernillo y PowerPoint).
6) Cada sesión se planificó (ver Apéndice A) de acuerdo a la metodología. Las planificaciones contienen el desarrollo del contenido "Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas" durante dos sesiones de clases.
7) La implementación del estudio tuvo fechas de inicio lunes 7 de agosto y finalización martes 8 de agosto.
8) Realización de una sesión extra que tuvo fecha viernes 17 de noviembre.

Contenidos

La implementación se realizó con estudiantes que cursan tercer año de Enseñanza Media, por esta razón es que trabajamos con los contenidos del curso anterior, obtenidos del Programa de Estudio para segundo Año Medio en matemática (Mineduc, 2011), en la tercera unidad Álgebra, siendo pertinente para este estudio:

a) Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
b) Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Los Aprendizajes Esperados (AE) asociados a los contenidos antes mencionados fueron:

(AE 06) Resolver sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente. Resuelven sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución, reducción e igualación.

(AE 07) Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema.

Materializándose todo lo anterior, en el objetivo de aprendizaje para los estudiantes del presente estudio: *“Recordar y resolver por diferentes métodos de resolución sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través problemas contextualizados”.*

Validez y confiabilidad

Toda investigación debe tener en cuenta la confiabilidad y validez, para cumplir con este requisito se utilizó el criterio de validez de triangulación de datos, el que busca analizar un mismo fenómeno, a través de los resultados obtenidos en el estudio, para luego compararlos y contrastarlos (Sampieri et al., 2014). La triangulación es más efectiva cuando el investigador combina varias fuentes o métodos, debido a que estos permitirán contrastar puntos de vista distintos sobre una misma situación (Sampieri et al., 2014). Así, la confiabilidad de esta investigación se evidencia por dos aspectos. Primero porque se utilizaron tres técnicas de recogida de información diferentes (cuadernillo, papelógrafo de la invención de problemas y entrevistas semiestructuradas) y, segundo, porque recogimos y triangulamos la información de los principales participantes de la temática en el estudio (estudiantes de G. y Q.I.).

En la siguiente Figura (3.2) se aprecia la gráfica del proceso realizado:

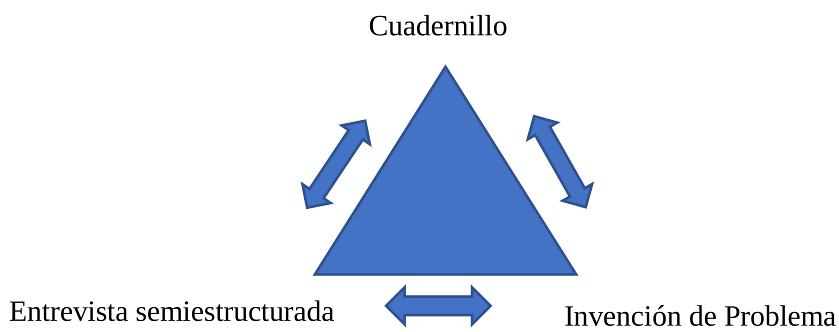


Figura 3.2: Representación gráfica de la triangulación de datos.
Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, para el proceso de análisis de datos, se levantaron categorías internas a cada fuente de recolección, en otras palabras, se analizó y se levantaron las categorías del cuadernillo, invención de problemas y entrevistas semiestructuradas. En segundo lugar, tal como se muestra en la Figura (3.2), se contrastó la información aportada por las diferentes fuentes, a manera de seleccionar las categorías en común (descritas en el Capítulo V), todo esto delimitado por el marco conceptual del estudio. Finalmente, se contrastó el discurso de los estudiantes con la invención de problemas, enfatizando en las características de la estrategia de Transferencia Analógica, sellando con esto, la validez y confiabilidad de la presente investigación.

Capítulo IV

Descripción del Experimento

En este capítulo se describe la metodología pedagógica que se empleó para el diseño y la aplicación del estudio, y se realiza una descripción exhaustiva de la estructura de las sesiones y el instrumento utilizado para la implementación.

Introducción

En primer lugar, como se hizo mención en el capítulo anterior, se utilizó un cuadernillo como principal instrumento de recolección de datos (Apéndice B). Este se organizó en dos secciones: en la primera, se consideraron dos problemas involucrados en un Contexto Cotidiano (C.C.) y en la segunda, dos problemas relacionados con el Área Técnica de Estudio (A.T.E.) de los sujetos. Ambas secciones contienen un mismo problema Fuente (PF), el cual conduce a un sistema de ecuaciones lineales de primer grado con dos variables, y se presenta resuelto por tres métodos (reducción, sustitución e igualación). Finalmente, en la parte inferior de cada sección del cuadernillo, se incluye un cuestionario, esto con el objetivo de conocer las percepciones de los sujetos respecto a la relación del objeto matemático con sus A.T.E.

Recordemos que el eje de la presente investigación, está centrado en comprender la incidencia del Contexto en las dificultades observadas en la resolución de problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, cuando se emplea una estrategia de Transferencia. Para comprender este proceso didáctico se aludió a la propuesta de Oliva (2004) quien define “Transfer” como la comparación entre fenómenos que mantienen semejanza a nivel tanto funcional (relaciones), como estructural (objetos y/o atributos) y en donde los estudiantes (a través de un proceso principalmente intrínseco) deben establecer las relaciones analógicas entre los fenómenos (problemas Fuente y problema Diana) más allá de mera asociación entre los objetos y atributos de los fenómenos.

Para alcanzar los propósitos de este trabajo, se consideraron enunciado de tipo Literal y Evocador, caracterización realizada por Olazábal (2005) de acuerdo a la complejidad de establecer el modelo matemático (MM), entendiendo por dicho modelo, la representación de un fenómeno real basado en relaciones matemáticas a partir del enunciado (Mochon, 1997, citado en Olazábal, 2005).

En este sentido, Clarke & Helme (1998) mencionan que la relación de la actividad matemática y el contexto, entendiéndolo como la situación descrita en la tarea, tiene influencia en la traducción del lenguaje natural al matemático, considerando esto como factor en la construcción del Modelo del Problema (MP) y/o en la conexión entre el MP y el Modelo de la Situación (MS).

A partir de estos elementos es que se generó el material de implementación, que incluye aspectos relacionados con el Contexto del estudiante para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante la estrategia de Transferencia Analógica.

Propuesta didáctica

Las sesiones fueron organizadas considerando tres momentos relevantes en la clase como lo recomienda el Programa de Estudio para Segundo Año Medio en matemática publicado por el Mineduc (2011). Estos momentos son Inicio, Desarrollo y Cierre de la clase, los que fueron trabajados con la finalidad de optimizar el tiempo en el aula, vinculando el material presentado y las metodologías propuestas para el estudio (ver Apéndice A).

Se entiende por Inicio a la etapa donde el docente realiza actividades que se encaminan a activar los conocimientos previos de los estudiantes, además de presentar el objetivo a trabajar en el transcurso la clase, acompañado de actividades motivadoras que permitan por un lado suscitar el interés y el foco en el objetivo, y por otro, relacionar el conocimiento previo con lo que se trabajará en la sesión. En la etapa del Desarrollo se presentan actividades que permitan que el estudiante logre los objetivos propuestos y los aprendizajes esperados en la fase inicial, a través de la participación activa. En la fase final, el Cierre, se realiza una retroalimentación del desempeño logrado y la evaluación de los aprendizajes abordados en la clase. (Mineduc, 2011).

La propuesta didáctica se implementó en, dos sesiones (dos horas pedagógicas cada una). En la Tabla 4.1 se muestra la manera en que se destinaron los instrumentos de recolección de datos, caracterizando los problemas a partir de los elementos claves para nuestra investigación según la sesión en que fue presentado.

<table>
<tr><td>Sesión uno</td><td>Sesión dos</td></tr>
<tr><td>Cuadernillo sección uno</td><td>Cuadernillo sección dos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema Fuente (PF):
• Enunciado Evocador (E.E.); Contexto Cotidiano (C.C.)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problemas Diana:
• Enunciado Literal (E.L.); Contexto Cotidiano (C.C.). (PD1)
• Enunciado Evocador (E.E.); Contexto Cotidiano (C.C.). (PD2)
Cuestionario</td><td>Problemas Diana:
• Enunciado Literal (E.L.); Contexto Área Técnica de Estudio (A.T.E.). (PD3)
• Enunciado Evocador (E.E.); Contexto Área Técnica de Estudio (A.T.E.). (PD4)
Cuestionario</td></tr>
<tr><td>Invención de problemas y entrevista semiestructurada</td></tr>
</table>

Tabla 4.1: Instrumentos de recolección de datos según sesiones

Con el objetivo de seguir un análisis lógico de la estrategia propuesta, es que se les presentó a los estudiantes, el mismo problema Fuente (PF) en ambas sesiones, en donde el docente enfatizó las características propias del Transfer, con el propósito de facilitar los vínculos analógicos entre los problemas (Fuente-Diana).

A continuación, se presenta lo trabajado en cada sesión en relación a los aspectos previamente señalados.

Sesión uno

En el momento de inicio de la sesión uno (ver Apéndice A) el docente, con apoyo visual, presentó el objetivo de la clase: *"Recordar y resolver por diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través de problemas contextualizados"* (ver Figura 4.1), que se utilizó de introducción y orientación para los estudiantes hacia lo que fue trabajado en la sesión.

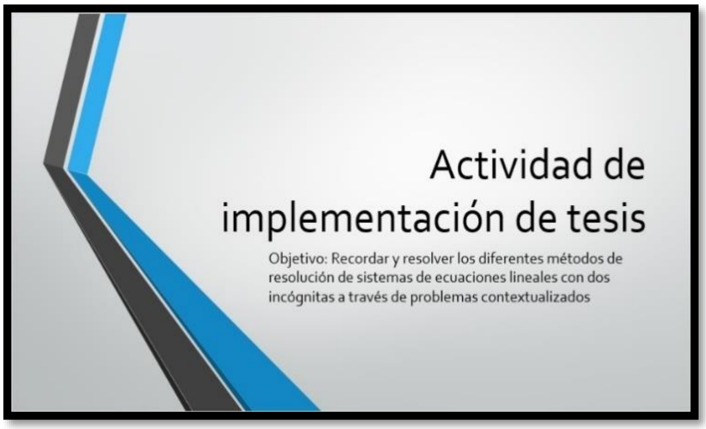


Figura 4.1: Objetivo de la clase

Luego, a partir de la pregunta: *¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?* (ver Figura 4.2) el docente, el cuál decidió participar voluntariamente, guio a los estudiantes a conectar el objetivo de la clase con su vida cotidiana. Seguidamente se realizó la formalización matemática de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas como:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Donde *a, b, c, d, e, f* son números racionales y *x* e *y* son las incógnitas.

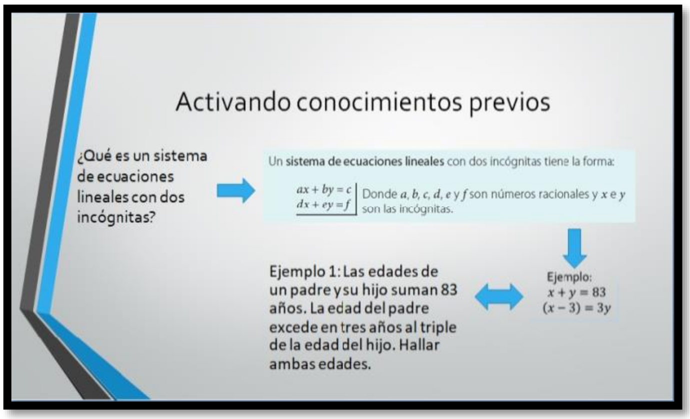


Figura 4.2: Contenido

De esta manera se dio paso a la ejemplificación, de la representación algebraica de un sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y = 83$$
$$x - 3 = 3y$$

Este sistema fue relacionado con una situación problemática en un Contexto Cotidiano particular, con el objetivo de establecer el Modelo Matemático por parte de los estudiantes, el problema fue luego resuelto por estudiantes elegidos al azar, por tres métodos de resolución (sustitución, reducción e igualación), siempre apoyados por el docente, logrando de esta manera la activación de conocimientos previos, destinado 25 minutos para este momento.

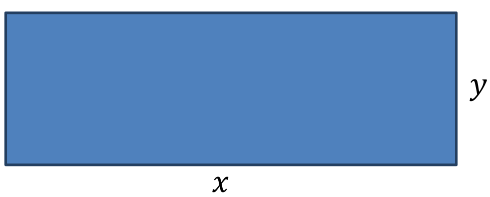
En el Desarrollo de la clase (ver Apéndice A), les fue entregado a los estudiantes un cuadernillo (Apéndice B) en su primera sección, que contiene el problema Fuente (PF) desarrollado por los tres métodos mencionados, y que fue explicado, enfatizando en los objetos (elementos de mundo) y atributos (propiedades de los objetos) del problema Fuente (ver Descripción de los problemas del cuadernillo, sección uno). Además, el docente explicó, de modo general, los tres métodos de resolución (ver Anexo B) que incluye el PF. Seguidamente los estudiantes resolvieron los dos problemas Diana (PD1 y PD2), siendo el enunciado del problema PD1 de tipo Literal y el del problema PD2 de tipo Evocador, involucrando ambos un Contexto cotidiano para los sujetos. Para esta actividad fueron destinados 30 minutos. Finalizando este momento con un cuestionario (ver Apéndice B) que tiene por objetivo capturar las percepciones de los participantes en relación al objeto matemático estudiado con su Área Técnica de Estudio, para lo que se dispuso de un tiempo de 20 minutos.

En el momento de Cierre (ver Apéndice A) se solicitó a los estudiantes, elegidos aleatoriamente, que compartieran sus respuestas con el resto de la clase, con el fin de retroalimentar la resolución de los problemas. Para esto se destinaron 10 minutos. (ver Apéndice A).

Descripción de los problemas del cuadernillo, sección uno

A continuación, se presenta un análisis exhaustivo de los problemas a partir de las características delimitadas en el marco conceptual.

- *Problema Fuente (PF): ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide* $\frac{48}{3}$ *cm y que su largo es el triple de su ancho?* (ver Apéndice B).



x: Largo del rectángulo
y: Ancho del rectángulo

Entre las principales características de dicho problema se destacan las siguientes:

Considerando las observaciones de Oliva (2004) acerca de la Transferencia Analógica, se distingue como objeto del problema al rectángulo mencionado en el enunciado y sus atributos como sus dimensiones, largo (x) y ancho (y) y relaciones entre ellos (objetos y atributos.

El problema involucra un Enunciado de tipo Evocador, ya que los datos que el enunciado nos da literalmente son el perímetro del rectángulo y la relación entre su largo (x) y su ancho (y), estableciéndose como:

$$P = \frac{48}{3} cm;\ donde\ P\ es\ el\ perimetro\ del\ rectángulo$$

$$x = 3y$$

Para establecer el modelo matemático que permitió resolver el problema, es necesario contar con la expresión perímetro de un paralelogramo regular:

$$P = 2x + 2y$$

Así, el perímetro esta dado por:

$$\frac{48}{3} = 2x + 2y$$

Quedando el modelo del problema de la siguiente manera:

$$x = 3y$$
$$\frac{48}{3} = 2(3y + y)$$

Además, para responder a la pregunta conceptual del enunciado, es necesaria la expresión del área de un paralelogramo regular

$$A = x * y$$

Por otro lado, la situación descrita por el enunciado se vincula al Contexto Cotidiano para los estudiantes.

- Problema Diana (PD1) (ver Apéndice B)*:* "*Las edades de Gaspar y Paula suman 68 años. Si la edad de Gaspar excede en 5 años el doble de la edad de Paula, señale las edades de cada uno.*" (Olazábal, 2005, p. 36)

Considerando las observaciones de Oliva (2004) acerca de Transferencia Analógica, se distinguen los objetos como "la edad " sus atributos "la cantidad de años" y su relación se establece en una dependencia generada por el enunciado.

Bajo esta misma, y siguiendo las delimitaciones realizadas en el Marco Conceptual, el enunciado presente en el problema (PD1) es de tipo Literal, ya que a partir del enunciado se establece, en primer lugar, " *Las edades de Gaspar y Paula suman 68 años"* el objeto *la edad* de Gaspar (*x*) y el objeto *la edad* de Paula (*y*) lo que la frase: *Las edades de Gaspar y Paula suman 68 años* establece:

$$x + y = 68$$

En segundo lugar," *Si la edad de Gaspar excede en 5 años el doble de la edad de Paula"* cuya frase establece:

$$x - 5 = 2y$$

Demostrando con esto que a partir del enunciado se establece literalmente el modelo matemático.

$$\begin{aligned} x + y &= 68 \\ x - 5 &= 2y \end{aligned}$$

Además, en el problema PD1 la situación va dirigida al Contexto Cotidiano de los estudiantes.

En este caso para los problemas PF y PD1 la Transferencia Analógica puede quedar establecida, interpretada en términos proporcionales, como:

$$\frac{Objetos\ (PF)}{Dimensiones} \ : \ \frac{Objetos\ (PD1)}{Cantidad\ de\ años}$$

En lo relativo a los contextos, ambos problemas (PF-PD1) están relacionados con el Contexto Cotidiano de los estudiantes, pero desde la dificultad de establecer el modelo matemático a partir del enunciado se presentan diferencias, según la categorización realizada por Olazábal (2005), el Enunciado del problema PF es del tipo Literal y el del problema PD1 es Evocador.

Es necesario comentar al lector que, el problema Diana dos (PD2), fue eliminado del análisis, ya que no aportó información relevante para el presente estudio, ya que pertenece a la misma naturaleza, según la categorización de Olazábal (2005), al problema PD1, imposibilitando el contraste de los datos. Señalado lo anterior, fue necesario diseñar e implementar otro problema Diana (PDE), que buscó conservar las mismas condiciones que en las sesiones previas (Sesión uno y dos). La descripción de la nueva implementación y del problema Diana Extra, se encuentra más adelante, en este mismo Capítulo.

Sesión dos

En la segunda sesión, el docente inició (ver Apéndice A) con la presentación del objetivo de la clase para luego dar paso a la activación de conocimientos previos por medio de la presentación en PowerPoint, en la que se recordaban los contenidos vistos durante la clase anterior. Se realizó la resolución de un sistema de ecuaciones (representación pictórica) a través de los tres métodos vistos, con el objetivo de que los estudiantes reconozcan los objetos (caracol- caballito de mar) presentes en el sistema de ecuación (ver Figura 4.3).

En la Figura 4.3 se observa la representación pictórica utilizada para la activación de conocimiento previos que fue resuelto por los estudiantes a voz alzada. Para este momento se dispuso de 10 minutos.

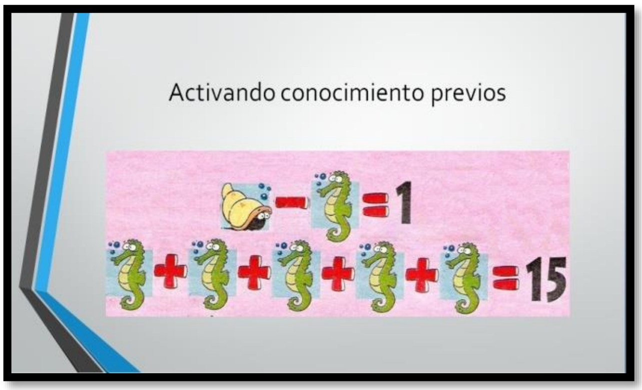


Figura 4.3: Representación pictórica

Luego en el momento de Desarrollo (ver Apéndice A) se entregó la sección dos del cuadernillo, incluyendo a PF y dos problemas Diana. Se hace necesario recordar, que los problemas Diana dependieron del Área Técnica de Estudio de las muestras (PD3, PD4 de la muestra de Química Industrial y PD5, PD6 de la muestra de Gastronomía), luego al terminar la resolución de los problemas por parte de los sujetos, se les solicitó que respondieran el cuestionario, destinando un tiempo de 37 minutos.

A continuación, los estudiantes se reunieron, en libre elección en grupos (4 a 5 sujetos), para la creación de un problema, que no tenía restricciones en su creación, y que además debía ser resuelto y responder a las preguntas conceptuales que se planteen. Con un tiempo de 25 minutos.

Para finalizar este momento de Desarrollo los sujetos fueron entrevistados con el objetivo de comprender el proceso que involucró la invención de problema. Se destinó un tiempo total de 62 minutos para el momento de Desarrollo.

Durante el momento de Cierre (ver Apéndice A), por un lado, los estudiantes respondieron a una entrevista semiestructurada (12 minutos), donde luego discutieron con respecto a las dificultades presentadas durante la invención de problemas. Para esto se destinó un tiempo de 6 minutos.

Descripción de los problemas del cuadernillo, sección dos

En este apartado se describen los problemas Diana propuesto para los estudiantes (dependiendo de la muestra a la que pertenecieron), a partir de los elementos del Marco Conceptual:

- Problema Diana muestra Química Industrial (PD3) (ver Apéndice B): "*En una farmacia se realizan inventarios diarios de la venta de Vitaminas C de distintos laboratorios, uno Estatal y otro Particular. Ambos laboratorios recaudan 23 mil pesos. El precio de la vitamina C, del laboratorio estatal es de 50 pesos y del laboratorio Particular es de 300 pesos. Calcular el número de Vitaminas C vendidas de cada laboratorio si el total de ventas fue de 160.*"

  Considerando las características del Transfer, con base en Oliva (2004), se distinguen los objetos como "Vitamina C Estatal" y "Vitamina C Particular", su atributo el *precio de venta* y la relación es la *recaudación* de los laboratorios.

  Por otro lado, el tipo de Enunciado presente en el problema (PD3) es Literal. Desde la asignación de las variables: vitamina C laboratorio estatal (x) y vitamina C laboratorio particular (y), y desde las frases del Enunciado: "*Vitaminas C de distintos laboratorios, uno Estatal y otro Particular. Ambos laboratorios recaudan 23 mil pesos"* y *"El precio de la vitamina C, del laboratorio estatal es de 50 pesos y del laboratorio Particular es de 300 pesos"*, se establece la ecuación como:

$$50x + 300y = 23.000$$

La segunda ecuación del sistema se establece a partir de "*Vitaminas C vendidas de cada laboratorio si el total de ventas fue de 160*"

$$x + y = 160$$

Demostrando con esto que a partir del enunciado se establece literalmente el modelo matemático como:

$$50x + 300y = 23.000$$
$$x + y = 160$$

Con base en lo mencionado en el Marco Conceptual, la Transferencia Analógica se puede establecer, en términos proporcionales entre el problema PF y PD3 como:

$$\frac{Objetos\ (PF)}{Dimensiones} \quad : \quad \frac{Objetos\ (PD3)}{Precio\ de\ venta}$$

Recordamos al lector que se presentan diferencias en los tipos de Contextos involucrados en estos problemas, en otras palabras, en el problema PF es tipo Contexto Cotidiano y PD3 Contexto Área Técnica de Estudio (Química Industrial).

- Problema Diana muestra Química Industrial (PD4): *"Un laboratorio químico de la ciudad de Valparaíso prepara una aleación de bronce (Cobre y concentrado de Estaño) con una cantidad muy precisa de sus ingredientes. La relación entre las cantidades de Cobre y concentrado de Estaño es:*

$$Gr_{Sn} = \frac{2Gr_{Cu}}{5}$$

donde Gr_{Sn} representa los gramos de concentrado de Estaño y Gr_{Cu} los gramos de Cobre.

Si se necesitan 20 granos de Estaño para obtener un gramo de este concentrado de Estaño ¿Cuántos gramos de Estaño se necesitan para elaborar 1230 barras de 2Gr de esta aleación de bronce?" (ver Apéndice B).

Desde la perspectiva de Oliva (2004) acerca de Transferencia Analógica, se distinguen como objetos a la *aleación de bronce*, a sus atributos: *Gramos de concentrado de Estaño* ($\mathrm{Gr_{Sn}}$) y *Gramos de Cobre* ($\mathrm{Gr_{Cu}}$) y su relación se establece a través de las cantidades utilizadas para la elaboración de *aleación de cobre* que se establece el Enunciado: $Gr_{Sn} = \frac{2Gr_{Cu}}{5}$

Por otro lado, el tipo de Enunciado presente en el problema es Evocador, ya que a partir del Enunciado se establece, en primer lugar y directamente

$$Gr_{Sn} = \frac{2Gr_{Cu}}{5}$$

En segundo, a partir de la frase "*prepara una aleación de bronce (Cobre y concentrado de Estaño)* " el Enunciado Evoca el principio de exclusión-inclusión, entendiéndolo como

$$Sea\ A_1, A_2, \dots, A_n\ conjuntos\ finitos, entonces\ \#\left(A_1 \bigcup A_2\right) = \#A_1 + \#A_2 - \#\left(A_1 \bigcap A_2\right)$$

En donde, en particular para la situación problemática $\#(A_1 \cap A_2)$ se define como $\#(C_u \cap S_n) = \emptyset$, por lo tanto, $\#(C_u \cup S_n) = \#C_u + \#S_n$.

Estableciéndose el Modelo Matemático (MM) que representa el problema como:

$$\#\left(Gr_{Cu} \bigcup Gr_{Sn}\right) = \#Gr_{Cu} + \#Gr_{Sn}$$

$$Gr_{Sn} = \frac{2Gr_{Cu}}{5}$$

Demostrando con esto que el problema PD4 es de Enunciado de tipo Evocador.

En este caso puede establecerse, en términos proporcionales, la Transferencia Analógica (PF-PD4) como:

$$\frac{Objetos\ (PF)}{Dimensiones} \quad : \quad \frac{Objetos\ (PD4)}{Gramos}$$

Al igual que en la descripción del problema anterior (PD3) el contexto del problema PD4 es de tipo Área Técnica de Estudio (Química Industrial), a diferencia del problema PF que es de tipo Cotidiano.

Los problemas de la muestra de Gastronomía (PG5-PG6) se formularon a partir de los últimos dos problemas descritos (PD3-PD4), por lo que se presentan las mismas características, a partir del Marco Conceptual. Desde lo aportado por Oliva (2004), se hicieron modificaciones en los objetos y atributos, pero no en sus relaciones, intentando con esto realizar cambios en el Contexto de los problemas, pero no en Modelo

Matemático que estos problemas involucran, es decir, a partir de modificaciones en los elementos del mundo (objetos) y sus propiedades o características (atributos) del problema PD3 se modificó el Contexto de problema, incorporando objetos y atributos propios de la disciplina de Gastronomía, generando el problema PD5, pero ambos problemas (PD3-PD5) involucran el mismo Modelo Matemático. El mismo proceso ocurrió para el problema PD4, que generó el problema PD6.

Descripción de la invención de problema

Los estudiantes realizaron la invención de un problema, en donde, formaron grupos de cuatro a cinco estudiantes (conformados a libre elección por sus participantes) y en condición libre, lo que no presento restricciones en la creación del problema (Stoyanova, 1998, citado en Espinoza, Lupiañez y Segovia, 2014). Sólo se les solicitó a los participantes que el problema propuesto involucrara un sistema de ecuaciones lineales con dos variables (ver Figura 4.4)

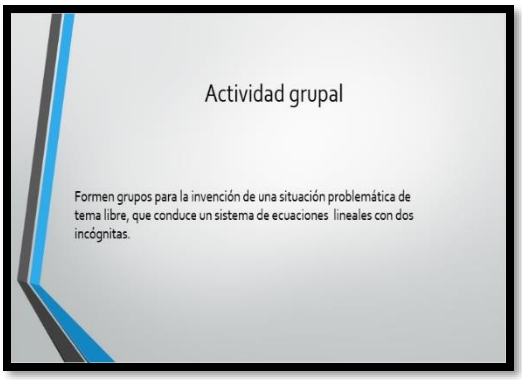


Figura 4.4: Instrucciones

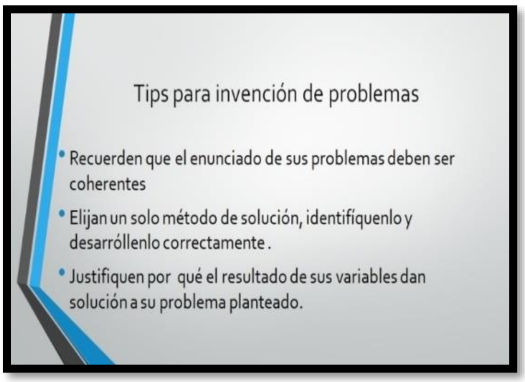


Figura 4.5: Sugerencias

Para dicha actividad se presentaron las sugerencias de apoyo para los estudiantes (ver Figura 4.5) proyectadas con el objetivo de direccionar al estudiante para alcanzar el éxito en la actividad. Las sugerencias apuntaron a la coherencia del problema y la traducción inversa (del lenguaje natural al matemático), además de dar instrucciones para resolver el problema creado por un solo método. Se destinó un total de 67 minutos para esta actividad.

Para la formulación de las sugerencias presentadas en la Figura 4.5 se consideró lo expuesto por Ayllón (2012), quien señala que, si se dota al estudiante de preguntas o sugerencias, es más factible para él alcanzar el éxito en la invención del problema.

Por último, se realizó la revisión de la actividad grupo a grupo, donde los sujetos participaron en una entrevista semiestructurada, la que se cimentó en una guía de preguntas, donde el investigador tenía la libertad de introducir nuevas, con el objetivo de recaudar la mayor cantidad de información posible (Sampieri, Collado y Baptista, 2014).

Las preguntas guías usadas fueron las siguientes:

- ¿Qué dificultades presentaron en la creación del problema?
- Comente sobre la situación involucrada en el problema propuesto.
- ¿Qué método utilizaron para la resolución de su creación?
- ¿De qué manera, se dio respuesta a la o las preguntas conceptuales sugeridas por el problema creado?

Descripción de experimento, sesión extra

El siguiente apartado tiene por objetivo describir la metodología pedagógica que se empleó en el diseño y la aplicación de la sesión *extra* que hubo que implementar *a posteriori*, debido a la necesidad de ampliar los recursos para obtener los resultados más correctos. Puesto que la implementación del segundo problema Diana (PD2) en la sesión uno no aportó resultados relevantes, fue necesario diseñar y aplicar un nuevo problema (PDE) caracterizado, a partir de las delimitaciones del Marco Conceptual, por involucrar un Enunciado de tipo Evocador que se vincula al Contexto Cotidiano de los sujetos. En el siguiente párrafo se encuentra la descripción de la estructura de la sesión y el instrumento utilizado para su implementación.

Propuesta didáctica sesión extra

Previamente a la descripción de la propuesta didáctica que se utilizó durante la sesión extra, es necesario señalar que se buscó conservar las mismas condiciones de las sesiones anteriores (sesión uno y dos). Para ello, se facilitó a los sujetos (mismas muestras) el mismo problema Fuente (PF) incluido en el cuadernillo, con el objetivo de continuar con el análisis lógico presente en los resultados.

La duración de esta sesión fue de una hora pedagógica y se organizó, al igual que las anteriores, considerando los tres momentos relevantes que recomienda el Programa de Estudio para segundo Año Medio en matemática publicado por el Mineduc (2011), los cuales se trabajaron a modo de optimizar el tiempo en el aula, vinculando el material presentado y las metodologías propuestas para el estudio.

Sesión extra

Durante la primera fase de inicio (ver Apéndice A) de esta sesión, fue señalado el objetivo de la clase (mismo objetivo utilizado en las sesiones anteriores), para luego presentar un problema (PF1.1) que involucró un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

"Calcule las edades de dos hermanos sabiendo que al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor y que si el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad" (Neira, 2012, p. 68).

Para la resolución del problema, el docente hizo énfasis en la identificación de los objetos *(edades)*, atributos *(años)* y sus relaciones (generada por el enunciado), activando la estrategia propuesta por el estudio (Transferencia Analógica). A continuación, el docente estableció el Modelo Matemático del problema, que se obtiene literalmente a partir del enunciado. A partir de la frase *"al mayor le faltan dos años para tener cinco veces la edad actual del menor"* establece la ecuación lineal:

$$x + 2 = 5y$$

Donde *x* es la *edad* del hermano mayor e *y* la *edad* del hermano menor.
A demás, de la frase *"el mayor tuviera seis años menos tendrían la misma edad"* se establece:

$$x - 6 = y$$

Demostrando con esto que el Modelo Matemático de la situación, se establece directamente del enunciado como:

$$\begin{aligned} x + 2 &= 5y \\ x - 6 &= y \end{aligned}$$

Obsérvese que el Contexto involucrado en el problema anterior (PF1.1) es de tipo Cotidiano.

Luego a través del método de reducción, el docente respondió a la pregunta conceptual propuesta en el problema, para este momento se dispuso de 15 minutos.

Durante la fase de desarrollo de la clase (ver Apéndice A), los estudiantes recibieron el mismo problema Fuente (PF) utilizado en el resto de la implementación. El problema Fuente fue desarrollado por tres métodos de resolución (reducción, sustitución e igualación), donde los estudiantes debieron responder el problema Diana Extra (20 min.). Para el cierre de la implementación, el docente realizó la retroalimentación del problema

Diana, el que fue resuelto en pizarra por parte de los estudiantes, apoyados por el docente, con una duración de 10 minutos.

Descripción del problema Diana Extra

A partir de las delimitaciones expresadas en el Marco Conceptual, se presenta un análisis del problema Diana Extra (PDE):

> *"Las dimensiones de una caja rectangular son 6 cm, 8 cm y 12 cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm^3. Calcular esta cantidad"* (Olazábal, 2005, p.38).

Del enunciado se desprende directamente, siendo *x* la cantidad que se disminuye, que:

(6-*x*)

(8-*x*)

(12-*x*)

A partir de lo observado, no es posible establecer el Modelo Matemático de la situación directamente desde el enunciado, puesto que para ello es necesario Evocar el Modelo Matemático del Volumen de un paralelogramo Rectangular, que es mencionado por el enunciado al señalar el Volumen de una caja rectangular:

$$V = Alto * Ancho * Largo$$

De esta manera, el Volumen Inicial (V_i), está dado por:

$$V_i = 6 * 8 * 12 = 576$$

Y el Volumen Final (V_F), después de disminuir las dimensiones de la caja:

$$V_F = 576 - 441$$

Estableciéndose el Modelo Matemático de la situación como:

$$V_F = V_i - 441 = (6 - x)(8 - x)(12 - x)$$

Desde lo señalado por Oliva (2004), se distingue como objeto del problema a la caja rectangular, sus atributos como las dimensiones de dicho objeto y su relación el Volumen.

Con respecto a las semejanzas Analógicas entre el problema Fuente (PF) y Diana Extra (PDE), proporcionalmente se obtiene que:

$$\frac{Objetos\ (PF)}{Dimensiones} : \frac{Objetos\ (PDE)}{Dimensiones}$$

$$\frac{Objetos\ (PF)}{Perímetro} : \frac{Objetos\ (PDE)}{Perímetro}$$

Además de ello, el PDE se relaciona en un Contexto Cotidiano para los sujetos al igual que los problemas PF y PF1.1.

Capítulo V

Análisis de Resultados

A lo largo de este capítulo presentaremos, en primera instancia la codificación de las categorías y sus vínculos, y en segunda instancia, el análisis de los resultados obtenidos de la implementación.

Los resultados fueron analizados a partir de las delimitaciones expresadas en el Marco Conceptual, desde las dificultades mostradas por los sujetos en los procesos de construcción del Modelo del Problema, como problemas en la traducción del lenguaje natural al algebraico y viceversa (conexión entre el modelo del problema y el modelo de la situación), hasta las influencias del contexto en la construcción del modelo del problema y la traducción inversa.

Finalmente hemos querido enfatizar las características propias de la estrategia propuesta (Transferencia Analógica) a partir de su análisis, como también el tipo de enunciado que involucran los problemas, por su importancia capital en la presente investigación.

Análisis de datos

Una vez recogidos los datos (el cuadernillo, la invención de problemas y las entrevistas semiestructuradas) se llevó a cabo el siguiente proceso de análisis:

Primero atendimos a la organización de la información obtenida, con especial foco en la distinción de aquellas dificultades que fueron similares en los cuadernillos, invenciones de problemas y entrevistas, obteniendo categorías y subcategorías del tema a abordar. Lo que se buscó fue encontrar una relación estrecha con los datos recolectados y las demarcaciones del marco conceptual. Hemos querido representar estas demarcaciones de la siguiente manera:

- Tipos de Contextos en los problemas:
    - Contexto Cotidiano (C.C.): Dirigida al área personal y/o área social de los estudiantes.

    - Contexto Área Técnica de Estudio (A.T.E.): Dirigidos al área profesional, laboral y/o científico de los estudiantes, que se relaciona con Química Industrial (Q.I.) y Gastronomía (G.).
- Tipos de Enunciados en los problemas:
    - Enunciado Literal (E.L.): Donde el Modelo Matemático (representación de un fenómeno real basado en relaciones matemáticas), se obtiene literalmente del problema, para lo que el resolutor debe conocer el vocabulario y su simbología matemática. (Olazábal, 2005).
    - Enunciado Evocador (E.E.): Donde el Modelo Matemático (MM) es evocado por el enunciado, ya sea mencionando, describiendo o haciendo referencia a él, además es necesario que el resolutor conozca su significado (Olazábal, 2005).
- Procesos de traducción y resolución del sistema ecuaciones:
    - Planteamiento: Correcta construcción del Modelo del Problema (MP).
    - Resolución del Sistema: Herramientas matemáticas involucradas en el desarrollo del sistema de ecuaciones.
    - Traducción Inversa: Reinterpretación de datos (conexión entre el MP y MS).

Cabe destacar que para el análisis de la invención de problemas se añadió la subcategoría "coherencia", definida como la viabilidad de la situación problemática en la realidad. En esta misma línea lógica, se utilizó la simbología con letra mayúscula para asignar códigos a las categorías, siendo estas: Contexto Cotidiano (C.C.), Contexto Área Técnica de Estudio (A.T.E.), Enunciado Literal (E.L.) y Enunciado Evocador (E.E.), como también a los sujetos (E_) pertenecientes a cada muestra (G.-Q.I.).
Todo lo anteriormente propuesto tiene por objetivo realizar un análisis lógico de los resultados recopilados que permita la triangulación de datos, haciendo referencia a diferentes fuentes de información (Sampieri, Collado y Baptista, 2014),

En lo relativo a los alcances de esta investigación, las muestras se delimitaron a sujetos que estudian Gastronomía (G.) y Química Industrial (Q.I.) en un Instituto Técnico de la Región de Valparaíso.

Análisis de resultados del cuadernillo

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes en el cuadernillo, este se ha fragmentado en dos secciones. En la primera, se encuentran los problemas que se vinculan con el Contexto Cotidiano (C.C.) de los sujetos, y presentados en la primera sesión de implementación. En la segunda, situamos los problemas relacionados con el Área Técnica de Estudio (A.T.E.) de los estudiantes (G. y Q.I.), presentados en la segunda sesión. Es importante señalar que la implementación del presente estudio se desarrolló durante dos sesiones, que consistió de dos horas pedagógicas cada una.

Para el análisis de cada sección del cuadernillo, se categorizó según tipo de Enunciado (Literal y Evocador) y según las dificultades presentadas, u observadas en la resolución del problema, materializándose en las siguientes subcategorías; <u>planteamiento</u>, que involucra una correcta construcción MP; <u>resolución del sistema</u>, que espera no presentar dificultades en las herramientas matemáticas utilizadas en su desarrollo y la <u>traducción inversa</u>, la que se vincula con la correcta conexión entre MP y MS. Cabe destacar que esta categorización se aplica a ambas muestras, con la finalidad de contrastar los resultados.

Situación problemática de Enunciado Literal: Sección uno, Contexto Cotidiano

Con base en la estrategia propuesta, el cuadernillo contuvo, en sus dos secciones, el mismo problema Fuente (ver descripción del problema Capítulo IV) el que fue explicado de forma discusiva y desarrollado por el docente. El problema Fuente (PF) se destacó por tener las siguientes características: como *objeto*, el rectángulo; como sus *atributos*, sus dimensiones; como la *relación*, el perímetro del paralelogramo rectangular, además involucraron un Contexto Cotidiano (C.C.) para los sujetos y su Enunciado es de tipo Evocador (E.E.).

En lo que respecta a las herramientas matemáticas, el problema Fuente incluyó tres métodos de resolución: reducción, igualación y sustitución. Dichos métodos fueron expuestos en detalle por parte del docente, quien debió poner énfasis en la traducción inversa, esto es, en la reinterpretación de datos en cada uno de estos métodos de resolución.

El siguiente Gráfico 5.1 refleja los resultados obtenidos en la primera sección del cuadernillo, hablamos específicamente del problema PD1 (ver descripción del problema Capítulo IV) relacionado con un C.C. que involucra un E.L., es decir, donde el modelo matemático se obtiene literalmente del enunciado. Que fue categorizado como: planteamiento (MP), resolución del sistema (herramientas matemáticas) y traducción inversa (conexión entre el MP y MS).

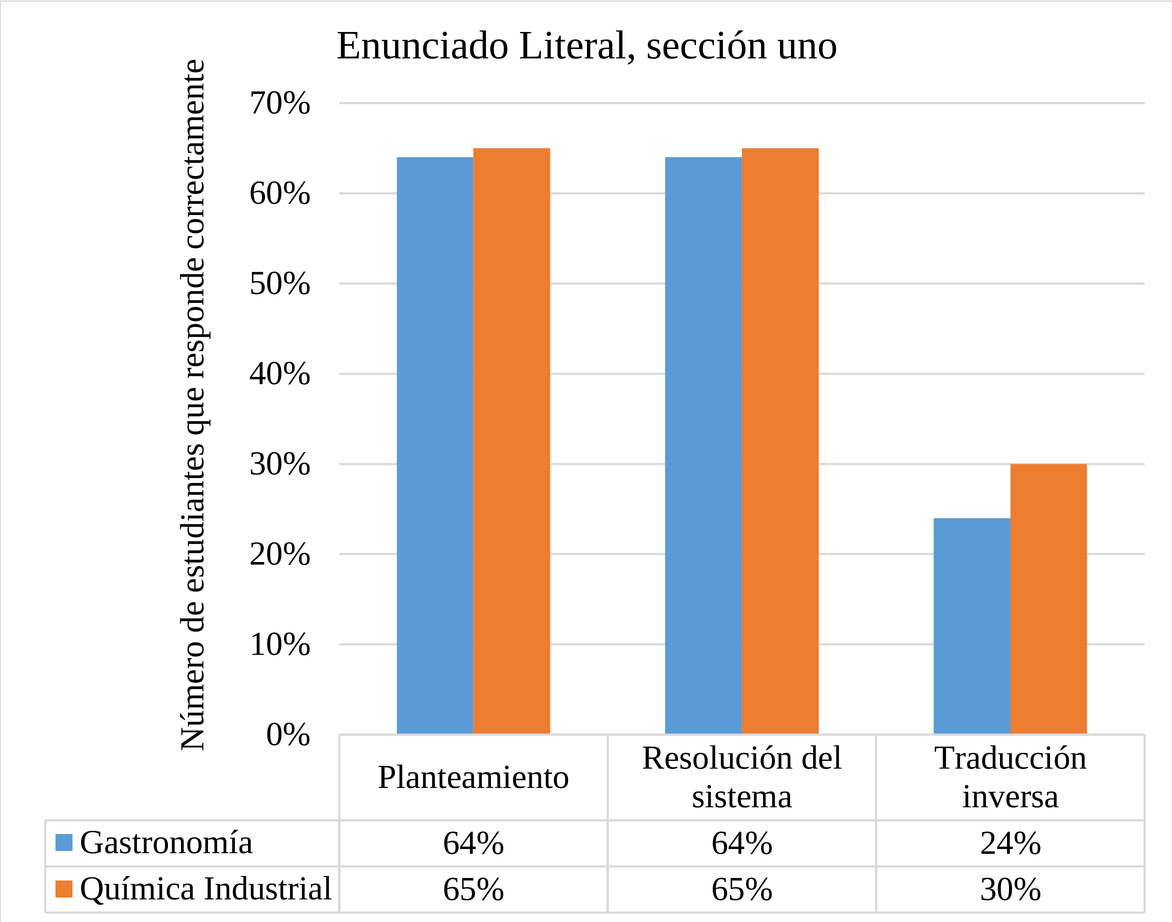
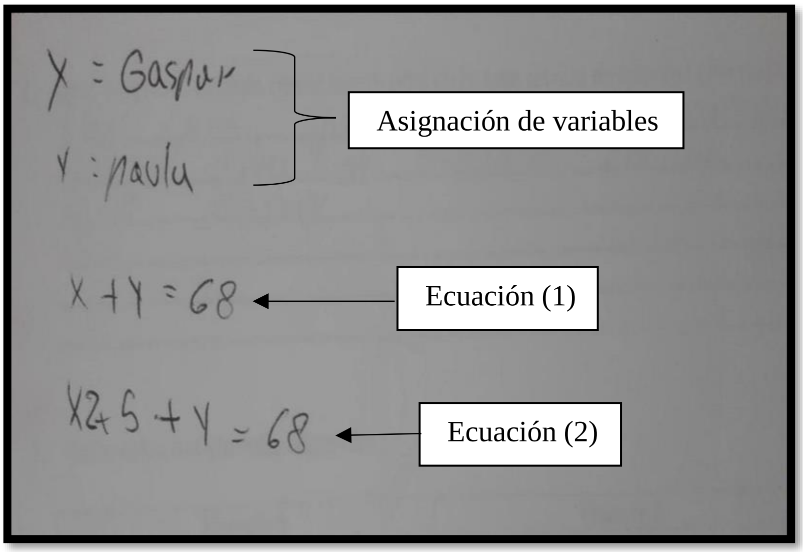


Gráfico 5.1: Enunciado Literal, sección uno, Contexto Cotidiano.

De los veinticinco sujetos de Gastronomía (G.) estudiados en el problema desarrollado en un Contexto Cotidiano (C.C.), nueve no realizaron el planteamiento de la situación problemática, porcentualmente más del 35% de los sujetos fueron incapaces de comprender la situación descrita, a pesar de que el contexto del problema Fuente (C.C.) es de naturaleza similar al contexto del problema Diana (problema a resolver por el estudiante). A partir de esto hemos comprobado la noción de que el proceso de Transferencia Analógica demanda la construcción de una matriz más profunda que la mera asociación directa entre problemas Fuente y Diana, ya que es un proceso no trivial que requiere de un trabajo específico en las aulas (Oliva, 2004).

En lo relativo a las dificultades que presentan estos sujetos en la comprensión de la situación descrita, los resultados para ambas muestras demuestran que todos los sujetos que fueron capaces de plantear correctamente el sistema de ecuaciones (MP) no presentaron errores en los métodos de resolución (herramientas matemáticas), lo que viene a servir de sustento a la hipótesis expuesta en el presente estudio, donde las dificultades provienen principalmente en la construcción del MP y/o MS y no de las herramientas matemáticas involucradas.

En particular, sólo un estudiante de la muestra G. (ver Figura 5.1) cometió errores en la representación algebraica del problema, asociando las frases del enunciado (Nivel BT) con los esquemas preexistentes de manera incorrecta, y generando la construcción de las representaciones mentales de la situación de forma inadecuada (construcción MP).



Problema Enunciado Literal, sección uno:

Las edades de Gaspar y Paula suman 68 años. Si la edad de Gaspar excede en 5 años el doble de la edad de Paula, señale las edades de cada uno.

Figura 5.1: E1 perteneciente a la muestra G.

En el problema Diana (a resolver por el estudiante) los objetos se asocian a *edad*, sus atributos corresponden a la *cantidad años* y las relaciones entre estos, se designan en una dependencia generada por el enunciado, las que se establecen como; *"Si la edad de Gaspar excede en cinco años el doble de la edad de Paula"* y *"Las edades de Gaspar y de Paula suman 68"*.

Como se observa, el estudiante (E1) inicialmente realiza la designación de las variables, es decir, distingue los objetos del problema. En el planteamiento, el estudiante comete errores asociados a la relación entre los objetos y sus atributos. En la ecuación (2), cuando el estudiante establece el objeto y atributo de la "edad de Paula" y su relación con el objeto y atributo de "edad de Gaspar", asoció "edad de Gaspar" con la relación establecida hacia "edad de Paula". En síntesis, cuando la frase del enunciado menciona *"Si la edad de Gaspar excede en cinco años el doble de la edad de Paula"* el estudiante E1, construye el MP de forma incorrecta (ver Figura 5.1), ya que vincula "edad de Gaspar" (x) con la relación entre el objeto y atributo de "edad de Paula" (y). Bajo esta misma lógica, el estudiante E1 comete errores en la traducción (del lenguaje natural al algebraico) en las relaciones establecidas por el enunciado. Por otra parte, el sujeto presentó errores en la operación al establecer la ecuación (2), a partir de lo que se podría conjeturar que la elección de la operación fue conducida por la palabra clave *excede*, en donde sugiere la operación de adición.

Respuesta E1: Ecuación (2)	Respuesta Experta: Ecuación (2)
$x2 + 5 + y = 68$	$2y = x - 5$

Tabla 5.1: Comparación respuesta estudiantil-respuesta experta

Para el caso de los sujetos de Q.I., no se presentan diferencias significativas en esta categoría.

En relación a la reinterpretación de datos, esto es, en la traducción del lenguaje matemático al lenguaje natural, tanto los participantes del grupo de G. como los de Q.I. se encuentran por debajo del 50% de los sujetos que responde a las preguntas que se hacen en la situación problemática, de acuerdo con Sanjosé et. al (2007) podemos inferir que los sujetos presentan dificultades en la traducción inversa relacionando los conceptos abstractos con los acontecimientos con objetos del mundo tangible (traducción inversa: conexión entre MP y MS).

Situación problemática de Enunciado Evocador: Sesión extra, Contexto Cotidiano

Al igual que el resto del análisis de los problemas Diana, el presente problema se categorizó dependiendo de las dificultades presentes en la resolución de la situación, es decir, el planteamiento (MP), resolución del sistema (herramientas matemáticas) y traducción inversa (conexión entre el MP y MS). Cabe destacar que la implementación de esta sesión, se desarrolló con las mismas muestras del resto del estudio (Estudiantes de Gastronomía y Química Industrial).

A continuación, se reflejan (ver Gráfica 5.2) los resultados obtenidos en Problema Diana Extra (PDE), el que se desarrolla en un Contexto Cotidiano (C.C.) para los sujetos, involucrando un tipo de Enunciado Evocador (Olazábal, 2005).

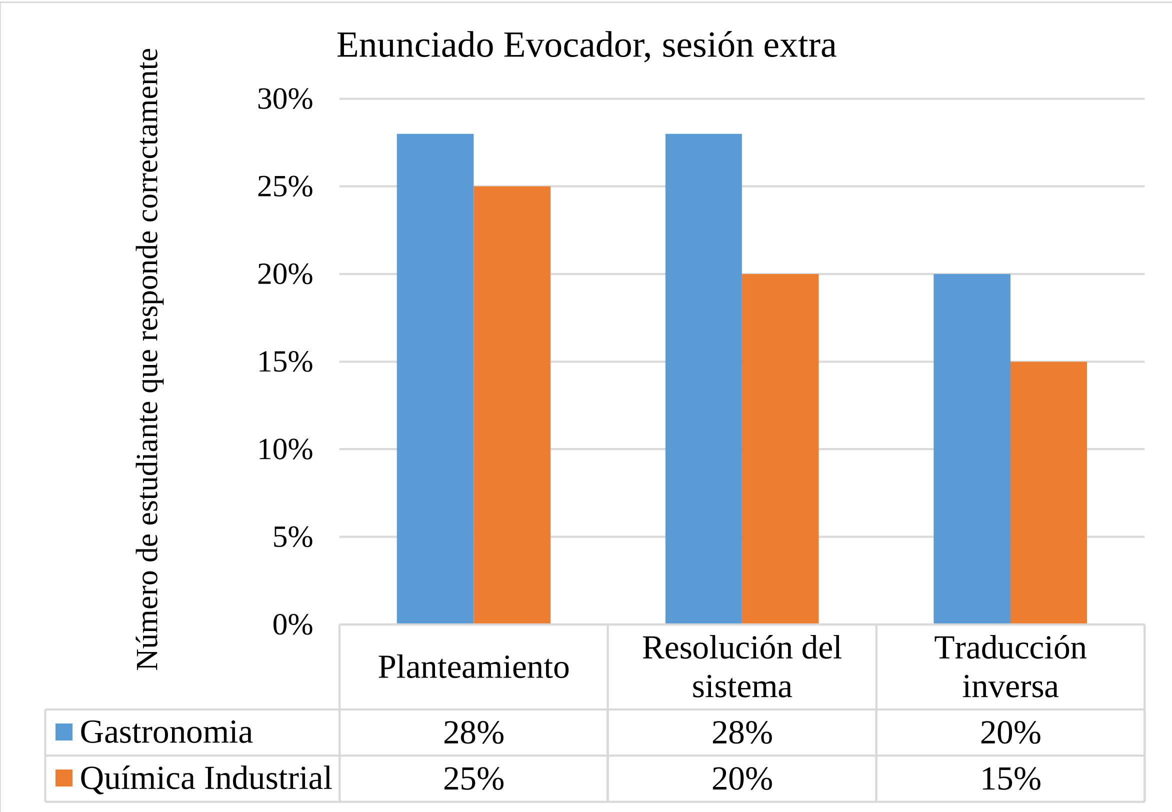


Gráfico 5.2: Enunciado Evocador, sesión extra

Para la situación problemática (PDE), con características de E.E.-C.C., en ambas muestras (G.-Q.I.) se observan aumentos considerables en la cantidad de sujetos que no comprenden la situación descrita en el enunciado en comparación con el problema (PD1) que involucra el mismo Contexto (ver Gráficos 5.1 y 5.2), pero distinta complejidad en el tipo de Enunciado (Literal- Evocador); en otras palabras, se presentaron disminuciones en la cantidad de sujetos (en ambas muestras) que plantea la situación descrita por el enunciado en términos algebraicos (construcción del MP). Este resultado está en la misma línea que los obtenidos por Olazábal (2005), quién constató que a medida que la categorización aumenta en su complejidad disminuye el número de sujetos que establece el Modelo Matemático de la situación. Además, conjeturamos a partir de esta comparación (PD1-PDE) que las dificultades presentadas en los estudiantes provienen del tipo de Enunciado que se involucre en el problema y no del Contexto en el que se desarrolla la situación descrita por el enunciado.

Por otro lado, se observa a partir del Gráfico 5.2 que de manera similar en ambas muestras, los sujetos no cometieron errores en el uso de las herramientas matemáticas en la resolución del sistema, pero se presentaron disminuciones en la reinterpretación de datos, evidenciando que la principal fuente de obstáculos para la resolución de un problema contextualizado relacionado con el objeto matemático de estudio, se focaliza en la comprensión de la situación descrita y su correcta traducción, del lenguaje natural al matemático (construcción del MP) y viceversa (conexión entre el MP y MS).

En relación a la Estrategia Propuesta (Transferencia Analógica) se observan semejanzas entre los Problemas Fuente (PF) y el problema Diana Extra (PDE), las que en términos proporcionales se establecieron como:

$$\frac{Objeto\ (PF)}{Dimensiones} : \frac{Objeto\ (PDE)}{Dimensiones}$$

$$\frac{Objeto\ (PF)}{Perímetro - Área} : \frac{Objeto\ (PDE)}{Perímetro}$$

A pesar de estas semejanzas, alrededor del 50% de los sujetos de ambas muestras, no plantea el modelo matemático de la situación de forma correcta, constatando la necesidad de aprender el proceso interno vía Transferencia Analógica, por medio de la construcción de modelos apropiados y profundos, que vayan más allá de la asociación directa entre atributos de los contenidos Fuente y Diana (Sanjosé et al., 2007), resulta crucial para el éxito de la tarea. En este caso en particular, a pesar de que los objetos y atributos entre los problemas (PF-PDE) son de naturaleza similar, los estudiantes no realizan la construcción del MP de manera adecuada, esto puede deberse a la complejidad cognitiva que conlleva la analogía.

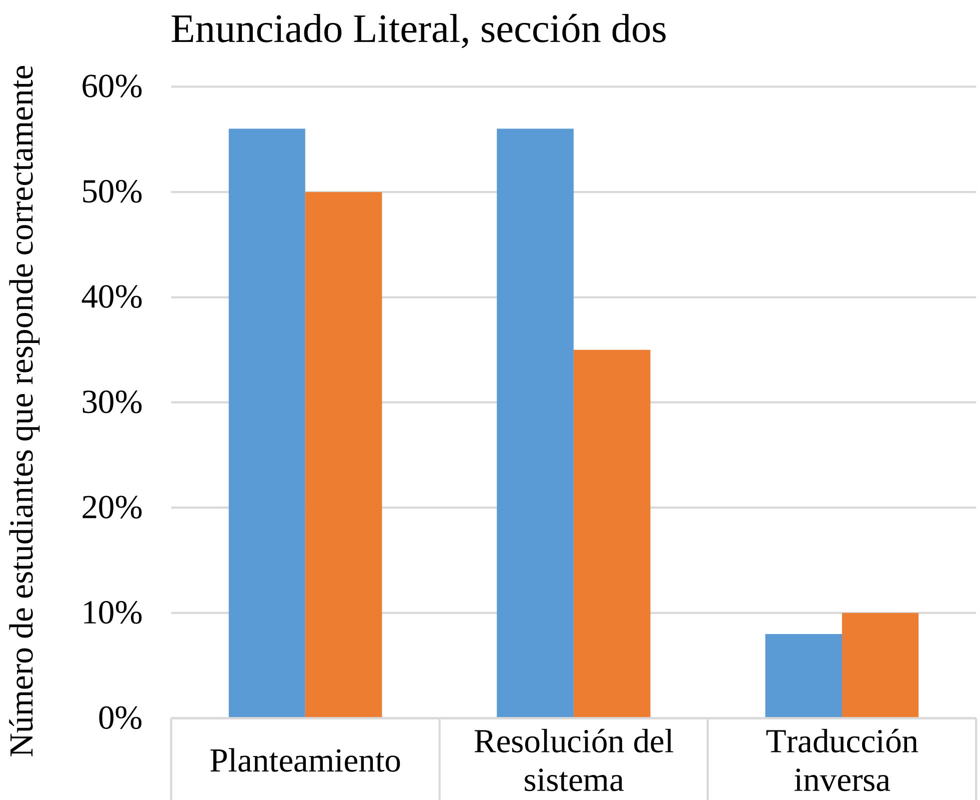
Situación problemática de Enunciado Literal: Sección dos, Contexto Área Técnica de Estudio

Desde el análisis del problema Diana (a resolver por lo estudiantes), es necesario señalar que los problemas aplicados a ambas muestras (G. y Q.I.) contiene el mismo modelo matemático, pero la situación en la que se desarrolla el problema (Contexto) fue modificado dependiendo de los conocimientos específicos del Área Técnica de Estudio (A.T.E.) de los participantes.

Respecto al problema Fuente (problema que explica y desarrolla el docente), este es el mismo utilizado en la sección anterior y se caracteriza por desarrollarse en un Contexto Cotidiano (C.C.) y estar contenido en un Enunciado de tipo Evocador, donde el resolutor debe evocar otro modelo.

El Gráfico 5.3 que se presenta a continuación, muestra los resultados alcanzados por los sujetos de ambas muestras al responder el problema (PD3) con Enunciado Literal, es decir, el modelo matemático se extrae directamente del enunciado, asociado a un contexto en su Área Técnica de Estudio (A.T.E.).

El problema se categorizó dependiendo del planteamiento (MP), resolución del sistema (herramientas matemáticas) y traducción inversa (conexión entre el MP y MS).



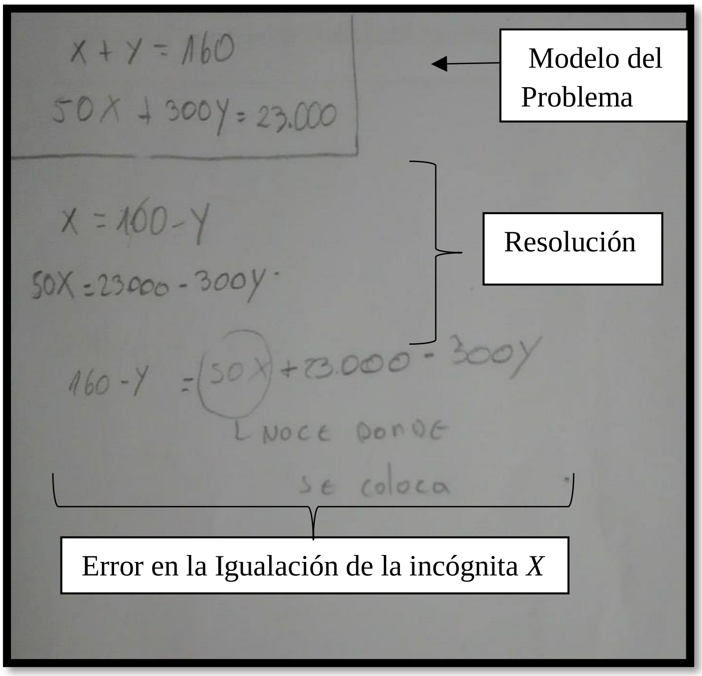
	Planteamiento	Resolución del sistema	Traducción inversa
Gastronomía	56%	56%	8%
Química Industrial	50%	35%	10%

Gráfico 5.3: Enunciado Literal, sección dos, Área Técnica de Estudio

Del Gráfico 5.3 se observa que de la muestra de ambas categorías (G.-Q.I.), en comparación con los resultados del Enunciado Literal en Contexto C.C. (ver Gráficos 5.1 y 5.3), se incrementó la cantidad de estudiantes que no comprenden la situación descrita, puesto que alrededor de un 50% de los sujetos no realizan el planteamiento del problema Diana. Estos resultados pueden estar vinculados con la estructura y el contexto presentes en el problema Fuente (E.E.- C.C.) dado que al no estar relacionados con el problema Diana (E.L.- A.T.E.) dificultan la extracción de los factores comunes importantes en ambos problemas (Sanjosé et al., 2007) factores que no se encuentran en el PF en conjunción con el PD3.

Para la muestra G. se observa que la totalidad de los sujetos que construye el MP correctamente, involucra a su vez adecuadamente las herramientas matemáticas necesarias para su resolución. A pesar de lo anterior, al momento de la reinterpretación de datos (conexión entre el MP y MS) menos del 15% respondió adecuadamente a las preguntas que involucra el problema.

En contraposición a lo mencionado en el párrafo anterior, sobre los sujetos de la muestra Q.I., se aprecia que no todos los que lograron plantear la situación descrita de manera adecuada, resolvieron satisfactoriamente el sistema de ecuaciones. En particular, el estudiante E2 perteneciente a Q.I. desarrolla el problema Diana, Enunciado Literal y Contexto A.T.E. como se observa en la Figura 5.2.



Problema Enunciado Literal, sección dos:

En una farmacia se realizan inventarios diarios de la venta de Vitaminas C de distintos laboratorios: uno Estatal y otro Particular. En total se recaudan 23 mil pesos. El precio del laboratorio estatal por unidad es de 50 pesos y del laboratorio Particular es de 300 pesos. Calcular el número de Vitaminas C vendidas de cada laboratorio si el total de ventas fue de 160.

Figura 5.2: E2 perteneciente a Q.I (Enunciado Literal- Contexto A.T.E.).

Como se advierte en la Figura 5.2, el estudiante construye adecuadamente el MP de la situación, mas no integra las herramientas matemáticas necesarias para su resolución (desde la igualación de la incógnita “*x*”), identificando por parte del estudiante la dificultad en la resolución a través del método de Igualación.

Con respecto a la traducción inversa, los sujetos presentaron dificultades al momento de definir los resultados numéricos y unidades en torno a la interpretación, en términos de objetos, atributos y sucesos del mundo concreto. En otras palabras, los estudiantes no realizaron la interpretación de los datos en relación con el MS. Dado que de los sujetos que construyen el MP, alrededor de un 20% consiguen vincularlo con el MS.

En relación a los resultados obtenidos de ambas muestras (G.-Q.I.), no se presentan diferencias significativas. Se destaca que los estudiantes pertenecientes a la muestra G. no presentan dificultades en las herramientas matemáticas, en oposición a los resultados de la muestra Q.I., donde el 30% de los sujetos comete errores en la resolución del sistema. Estos resultados pueden estar apoyados en la relación existente entre los problemas contextualizados hacia una ciencia más específica, como lo son los propuestos para ambas muestras, con la cantidad de modelos mentales que deben ser construidos y procesados simultáneamente para su resolución (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2008), dificultando con esto la construcción del MS y/o MP.

Al contrastar los resultados de resolver los problemas con Enunciados Literales de ambas sesiones (ver Gráficos 5.1 y 5.3), se observó una leve disminución en el número de estudiantes que plantean la situación descrita, en términos algebraicos (MP) en el problema que involucró un Contexto A.T.E. Inferimos entonces que se facilitó en los sujetos la asociación entre las frases del enunciado (nivel BT) con esquemas preexistentes que sirven tanto como vehículos en la construcción de representaciones matemáticas adecuadas (MP) como de guías para la acción resolutiva (Kintsch & Greeno, 1985), por lo que entendemos que se presentaron mejores resultados en la construcción del MP como en la reinterpretación de resultados (conexión entre MP y MS) cuando el contexto que se describe en el enunciado es cercano al área social y/o familiar de los estudiantes.

Situación problemática de Enunciado Evocador: Sesión dos, Contexto Área Técnica de Estudio

Para el análisis de los resultados obtenidos en el problema (PD4), correspondientes al Enunciado Evocador, que involucra un contexto A.T.E., primeramente, a los sujetos a partir de la estrategia propuesta (Transfer) se les facilitó el mismo problema Fuente (Apéndice B).

En lo referente a los resultados, se categorizó según: el correcto planteamiento del problema (MP), la resolución del sistema (herramientas matemáticas involucradas) y la traducción inversa (conexión entre el MP y MS).

Con respecto a la categoría de planteamiento, disminuye considerablemente la cantidad de sujetos que plantean la situación descrita en comparación al problema (PDE) que involucró el mismo tipo de enunciado (E.E.) pero en Contextos distintos (C.C.- A.T.E.). Solo uno de los sujetos en cada muestra (G.-Q.I.) fue capaz de plantear el sistema de ecuaciones de forma correcta, a pesar de ello ninguno de los sujetos utilizó las herramientas matemáticas adecuada para su resolución. Esto pudo verse influenciado por las diferencias existentes entre los problemas Fuente y Diana, obstruyendo las asociaciones necesarias para el proceso de Transferencia de Analógica por parte del estudiante, específicamente en los contextos presentes de los enunciados (C.C.- A.T.E.), donde el problema Diana vincula un contexto perteneciente a una ciencia más específica, además de la complejidad representada en el tipo de enunciado que este problema (PD4) involucra. Bajo esta línea de estudio, Solaz-Portolés y Sanjosé (2008) comprobaron que la dificultad en la resolución de problemas de ciencias está relacionada con la cantidad de modelos mentales que deben ser construidos y procesados simultáneamente. Es por ello que ha de esperarse que cuando se trabaja en contextos disciplinares semánticamente muy elaborados, las leyes y sus expresiones, los modelos y sus aplicaciones, y los principios y sus condiciones suponen fuentes de dificultad añadidas (Sanjosé et al., 2007).

En líneas generales, en el análisis de ambos problemas de Enunciados Literales, al contrario de los problemas de Enunciados Evocadores, se observan mayores dificultades en estos últimos, en los procesos de construcción del MS y/o MP así como en la traducción inversa (reinterpretación de resultados) estos hallazgos están relacionados con los obtenidos por Olazábal (2005), que en síntesis concluye que para la resolución de un problema con Enunciado Evocador, los conocimientos previos de la ciencia del contexto determinan de una manera importante el éxito en la traducción al lenguaje algebraico.

Análisis de la invención de problemas

Para la realización de la invención de problemas los estudiantes conformaron grupos de cuatro a cinco sujetos, por afinidad, es decir en función del número de integrantes por grupo señalado los sujetos determinaron libremente el grupo que conformaron. Para la categorización de esta tarea, los grupos se distribuyeron de la siguiente manera:

- Muestra:
    - Grupos de Química Industrial (G.Q.I.): G1, G2, G3 y G4.
    - Grupos de Gastronomía (G.G.): G5, G6, G7 y G8.

Las subcategorías se relacionan con las dificultades observadas en la invención:

- Coherencia: Involucra la viabilidad de la situación en la realidad.
- Planteamiento: Construcción del MP.
- Resolución del sistema: Herramientas matemáticas utilizadas.

- Traducción Inversa: Reinterpretación de resultados (conexión entre el MP y MS).

Es necesario recordar que, la invención de problemas por parte de los sujetos, se realizó en condición libre, en donde no se exigió restricciones en su creación.

En la siguiente Tabla 5.2, se presentan las categorías y subcategorías que se elaboraron para el análisis de la actividad. Se presenta la categorización dependiendo de si se observó Transferencia Analógica en su invención y de ser así, qué problema utilizaron como Fuente para el proceso. Es importante señalar que, para la invención de problemas, todos los problemas vistos durante el desarrollo del cuadernillo y activación de conocimientos, son posibles problemas Fuentes para los sujetos (Apéndice B), categorizándose:

- Problema Fuente (PF1): Problema presentado en la activación de conocimientos.
- Problema Fuente (PF2): Problema Fuente presentado en el cuadernillo (Rectángulo).
- Problema Fuente (PF3): Problema Diana, tipo de Enunciado Literal, sección uno del cuadernillo.
- Problema Fuente (PF4): Problema Diana, tipo de Enunciado Evocador, sección uno del cuadernillo.
- Problema Fuente (PF5): Problema Diana, tipo de Enunciado Literal, sección dos del cuadernillo.
- Problema Fuente (PF6): Problema Diana, tipo de Enunciado Evocador, sección dos el cuadernillo.
- Problema Fuente (PF7): Problema comparativo presentado en el cuestionario del cuadernillo sección uno.

De igual modo, la actividad se analizó según el Contexto involucrado en la creación de los problemas por parte de los sujetos, en otras palabras, se categorizó en función de la situación descrita en el problema (Contexto Figurativo), siendo relacionado por los investigadores con el Contexto Cotidiano (C.C.) o Contexto Área Técnica de Estudio (A.T.E.).

Variables	Contexto Cotidiano				Área técnica de estudio			
	Gastronomía		Química Industrial		Gastronomía		Química Industrial	
	Fuente	Diana	Fuente	Diana	Fuente	Diana	Fuente	Diana
Coherencia	G7	-	G1, G4	G2	-	G5, G6	-	-
Planteamiento	G7	G8	G4	G2	-	G6	-	-
Resolución del sistema	G7	G8	G4	G2	-	G6	-	-
Traducción inversa	-	G8	G4	G2	-	G6	-	-

Tabla 5.2: Invención de problemas

Como se observa en la tabla 5.2, para la muestra Q.I. la totalidad de los grupos analizados desarrolló la invención en un C.C., mientras, la muestra G. el 50% de los grupos, involucró un contexto cercano a su Área Técnica de Estudio (A.T.E.). Aquellos resultados están relacionados con los presentados por Olazábal (2005), quien argumenta que el grado de familiaridad que tenga el estudiante con las relaciones que se describen en el enunciado (Contexto Figurativo) resulta definitivo para el éxito en la traducción literal del lenguaje natural al lenguaje algebraico y, por ende, en el planteamiento y resolución del problema. Suponiendo con lo anterior, que la elección de los C.C. o A.T.E. por parte de los estudiantes, en la invención de problemas, se vio influenciada por el alto grado de familiaridad que tienen con aquellos Contextos.

Particularmente el grupo G7 (ver Figura 5.3) perteneciente a la muestra G. utilizó como analogía el PF7, ya que se evidenciaron semejanzas en las relaciones existentes, entre los objetos y atributos, de los problemas.

PF7: Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

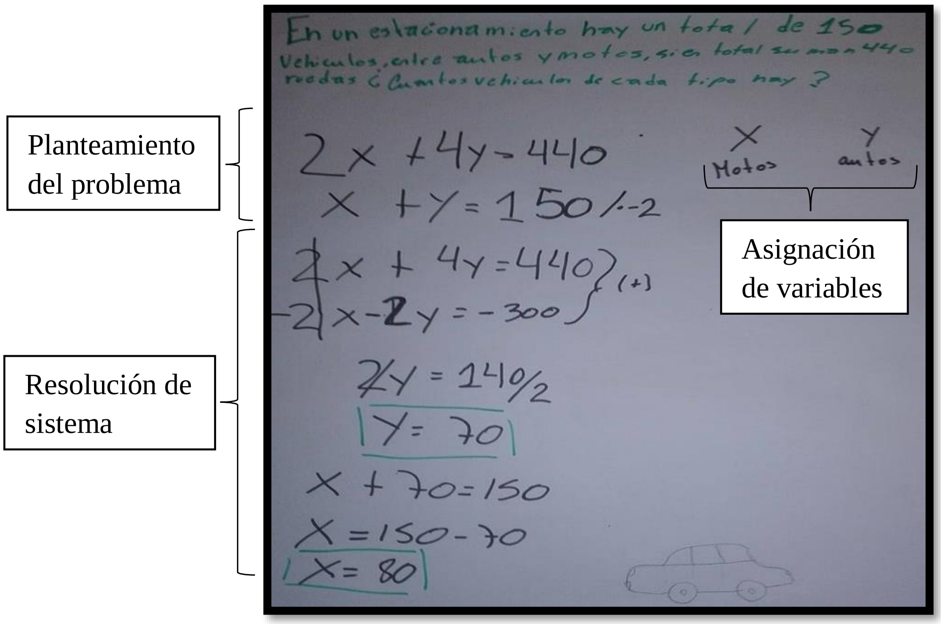
Caracterizando a PF7, en vía de establecer las semejanzas en las relaciones (entre objetos y atributos) con la invención de problema del grupo G7, se observa a partir del Transfer:

Objetos: Cerdos; Pavos

Atributos: Cabezas; Patas

Relación (designada por una dependencia generada por el Enunciado):

$$\frac{Objetos\ (PF7)}{Total\ de\ cabezas} \quad ; \quad \frac{Pavos}{Patas} \quad ; \quad \frac{Cerdos}{Patas}$$



Transcripción invención de problema G7:

En un estacionamiento hay un total de 150 vehículos, entre autos y motos, si en total suman 440 ruedas ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay?

Figura 5.3: Invención de problema G7, Gastronomía

Desde el análisis del enunciado de la invención del problema del grupo G7 se identifican como objetos: Autos y Motos; como atributos: Ruedas y su relación establecida:

$$\frac{Objetos\ (G7)}{Total\ de\ ruedas} \quad ; \quad \frac{Motos}{Ruedas} \quad ; \quad \frac{Autos}{Ruedas}$$

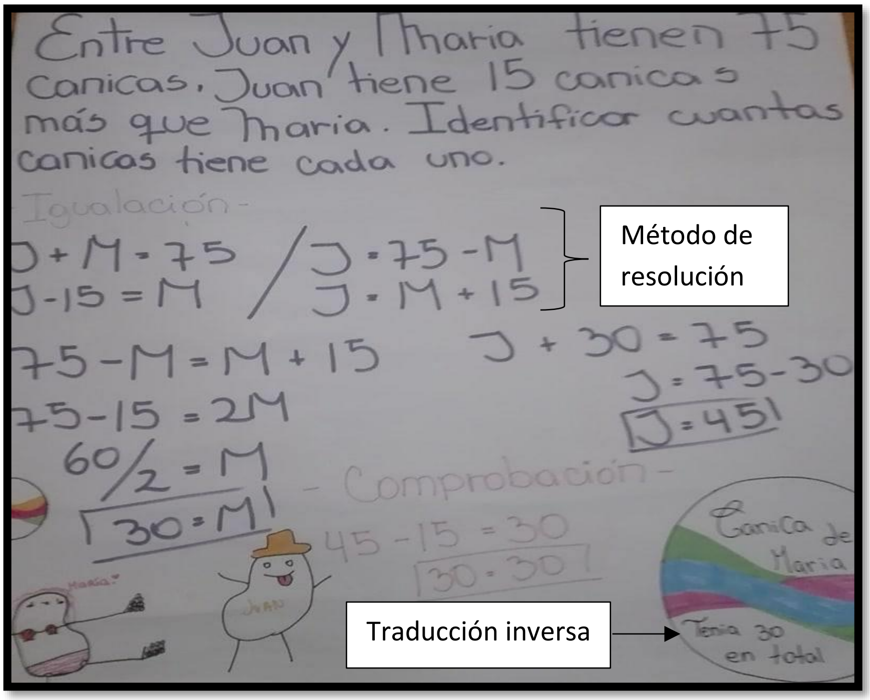
Interpretando la relación entre Problema Fuente (PF7) con el problema Diana (G7) en términos proporcionales como:

$$\frac{Objetos\ (PF7)}{Total\ de\ Cabezas} : \frac{Objetos\ (G7)}{Total\ de\ ruedas}; \quad \frac{Pavos}{Patas} : \frac{Motos}{Ruedas}; \quad \frac{Cerdos}{Patas} : \frac{Autos}{Ruedas}$$

A partir de estas relaciones, se observa que los objetos (elementos del mundo) y atributos (propiedades de los objetos) entre los problemas (PF7-G7) no son similares, dado que los objetos del PF7 pertenecen a elementos de un conjunto de animales y sus atributos, las cabezas y patas de esos elementos, a diferencia del problema propuesto por el grupo G7, en donde los objetos son elementos de un conjunto de vehículos y sus atributos, las ruedas de esos elementos. No obstante, se observan similitudes entre estos problemas (PF7-G7) en la relación entre los objetos y atributos, dado que se comportan de forma similar, marcando la estructura en común de los problemas. Se considera que este aspecto posiblemente benefició la construcción del MS por parte de los estudiantes, dado que la estructura en común de los problemas (relación entre los objetos y atributos) beneficia los rasgos analógicos y de esta manera establecer exitosamente la analogía.

Es importante señalar que el grupo G7 creó el problema utilizando un Enunciado Literal, donde se "expresa literalmente a los conceptos, situaciones, objetos y/o fenómenos y la relación entre ellos, para llegar al modelo matemático del problema" (Olazábal, 2005, p. 36) y construyendo el planteamiento (MP) correctamente. Por otro lado, el grupo G7 inicialmente asigna las variables (x e y) a los objetos que involucra el problema (autos y motos). En lo referente a la resolución del sistema, el grupo G7 no presenta dificultades en el desarrollo utilizando el método de reducción, pero a pesar de ello, no logran la traducción inversa: conexión entre MP y MS (Sanjosé et al., 2007) evidenciando la complejidad entre esta conexión.

El Grupo G1 presenta similitudes en la relación entre objetos y atributos del problema presentado en el cuestionario PF7 (construcción de la analogía similar a G7), pero no lograron construir el MP a pesar de utilizar un enunciado Literal en la invención. Por otro, el grupo G4 (ver Figura 5.4) empleó como problema Fuente a PF1, ya que se caracteriza, como objetos *edades* del padre y su hijo, atributos la *cantidad de años* y su relación generada por el enunciado como: *"las edades de un padre y su hijo suman 83" y "La edad del padre excede en tres años el triple de la edad del hijo".*



Transcripción invención de problema G4:

Entre Juan y Maria tienen 75 canicas, Juan tiene 15 canicas más que Maria. Identificar cuantas canicas tiene cada uno.

Figura 5.4: Invención de problema G4, Química Industrial

Nuevamente se identifican similitudes en la relación entre objetos y atributos, siendo este un factor posibilitador en la construcción del MS, ya que a partir del problema propuesto por el grupo G4 se distinguen como objetos a *"canicas de Juan" y "canicas de María*", por atributos a la cantidad de canicas y su relación dependiente del enunciado. La analógica entre los problemas (PF1-G4) se estableció proporcionalmente como:

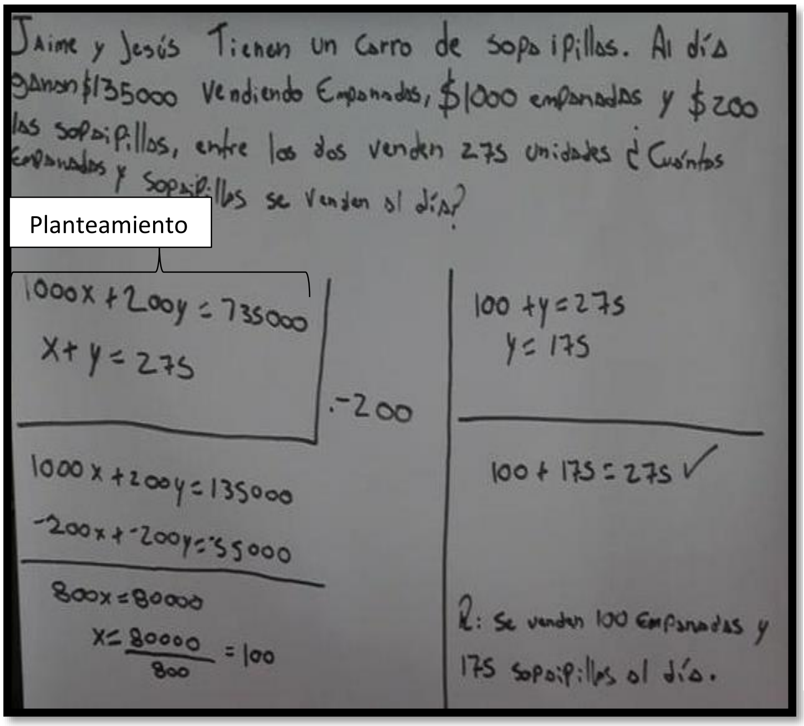
$$\frac{Objetos\ (PF1)}{Años} : \frac{Objetos\ (G4)}{Canicas}$$

$$\frac{Condicion\ entre\ objetos\ y\ atributos\ (PF1)}{Total\ de\ años} : \frac{Condicion\ entre\ objetos\ y\ atributos\ (G4)}{Total\ de\ Canicas}$$

Demostrando de esta manera, como se estableció la analogía en el grupo G4. Desde la resolución de la invención se observa que los estudiantes resuelven el sistema a través del método de igualación realizado de manera exitosa. Por otro lado, logran la traducción inversa (conexión entre el MP y el MS) al vincular los resultados obtenidos con la situación problemática propuesta.

Se observa que ambos grupos (G1-G4) realizan la invención del problema a través de un Enunciado Literal, y que, a pesar de que la condición de la actividad era de situación libre, la totalidad de los sujetos reformuló un problema dado o cambió la condiciones del mismo (situación estructurada) (Espinoza et al., 2014) realizando una transferencia analógica espontánea por parte de los estudiantes (Ross, 1987, citado en Sanjosé et al., 2007).

Para la muestra Q.I. solo un grupo realizó la invención del problema (ver Figura 5.5), ocupando como problema fuente a PF5 que se caracteriza como: objetos *vitamina C Estatal* y *vitamina C Particulares*, sus atributos *los precios* de la vitamina C y su relación la *recaudación*.



Transcripción invención de problema G2:

Jaime y Jesús tienen un carro de sopaipillas. Al día ganaron $135000 vendiendo empanadas, $1000 empanadas y $200 las sopaipillas, entre los dos se venden 275 unidades ¿Cuántas empanadas y sopaipillas se venden al día?

Figura 5.5: Invención de problema G2, Química Industrial

Desde las características del problema propuesto por G2 se distinguen, como objetos las empanadas y sopaipillas, sus atributos sus precios y su relación la venta total, estableciendo la analogía proporcionalmente como:

$$\frac{Objetos\ (PF5)}{Precios} : \frac{Objetos\ (G2)}{Precios}$$

$$\frac{Condicion\ entre\ objetos\ y\ atributos\ (PF5)}{Venta\ total} : \frac{Condicion\ entre\ objetos\ y\ atributos\ (G2)}{Venta\ total}$$

Como se observa en la Figura 5.5 el grupo G2 presentó dificultades en la redacción de la situación, a pesar de ello, este obstáculo no impidió el planteamiento de la situación descrita en el problema, en términos algebraicos (construcción del MP).

Por medio de las entrevistas grupales refiriéndose al contexto (Contexto Cotidiano) de la creación E5 perteneciente a G2, señala *"…estos problemas son más simples, el hecho de solo agregar términos químicos ya lo dificulta" (2'06'')*. Apunta a la construcción del MP por parte del sujeto, el cual observa mayor dificultad en su construcción cuando el contexto del enunciado pertenece a su A.T.E.

Con respecto al tipo de contexto que utilizaron lo sujetos, para la crear la situación problemática, se observan inclinaciones hacia el Contexto Cotidiano. Podemos inferir que esta inclinación se debe a un desapego del objeto matemático respecto de su A.T.E. Esto puede sustentarse en lo señalado durante las entrevistas semiestructuradas, en la que se destacan los estudiantes E1 y E2. El estudiante E1, perteneciente a la muestra G., mencionó, respecto a los aprendizajes en el A.T.E. *"... allá lo único que usamos, cuando sacamos costos y solo usamos la suma, la resta, multiplicación, gramajes…no esto" (8'28'')*; por otro lado, el estudiante E2 de la muestra Q.I., señaló *"... aún no le veo el cómo podría utilizar esto"*. Manifestando el desapego del objeto matemático con los aprendizajes en su A.T.E.

A través de las entrevistas grupales posteriores a la invención, se destaca lo señalado por el estudiante E3 (perteneciente al grupo G6) referente a qué estrategia utilizaron para la creación de la problemática. E3 mencionó *"...tomamos el mismo ejemplo del problema uno y cambiamos los valores, el producto e hicimos la misma lógica" (10'48''),* declarando la Transferencia Analógica entre su invención y el problema ocupado como Fuente para su creación.

Referente al contexto involucrado en su invención (A.T.E) el estudiante E4, también perteneciente al grupo G6, señaló *"... porque es más fácil para nosotros entender la lógica del problema" (10`29``).* Lo anteriormente señalado por el estudiante E4 insinúa que el factor de la metacognición se encuentra presente en los problemas. Cuando la persona está en el proceso de resolución de un evento, la metacognición es el elemento que se encarga de que el individuo se pregunte a sí mismo si va correctamente dirigido hacia el objetivo propuesto en la actividad. Señalado esto, es que entendemos, a partir de lo que mencionó el estudiante E4, que un problema en donde se involucre un contexto cercano al A.T.E. disminuiría los obstáculos para el estudiante. Camarena (2015) lo denomina «puntos de control de error», mencionado también por el estudiante E4, como un factor que disminuye la dificultad en problemas en Contextos cercanos a su área de estudio.

Por otro lado, el grupo G3 perteneciente Q.I. realizó la invención del problema sin realizar Transferencia Analógica de alguno de los problemas presentados en la implementación. Para su creación vincularon un Contexto Cotidiano, pero no es sustentable en la realidad y que no construyen el MP.

Para finalizar, se vislumbra la complejidad de la estrategia de Transferencia Analógica y de la forma en que ésta influye en los procesos de resolución de un problema, ya que, como se señaló anteriormente el Transfer, es una estrategia que proporciona al estudiante un camino a recorrer desde los procesos de solución. La influencia de la transferencia analógica va dirigida hacia los instrumentos matemáticos involucrados (Oliva, 2004), alejándose de proporcionar herramientas a la comprensión de la situación por parte del estudiante. En los resultados presentados en este capítulo, desde la invención de problemas, la transferencia analógica influenció en casi la totalidad de las creaciones, que, a pesar de tener la condición de ser libre, la mayoría de los grupos posiblemente ocupó algún problema presentado en las sesiones como Fuente, generando analogías para la construcción de la situación.

Capítulo VI

Conclusiones

La investigación en la que se basa esta tesis estuvo destinada a conocer las dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, así como la incidencia del Contexto en dichas dificultades, cuando se utiliza una estrategia de Transferencia Analógica. A partir de un análisis reflexivo, hemos extraído las conclusiones que se expondrán a continuación.

La propuesta didáctica que se buscó desarrollar a lo largo del presente documento, centró sus bases en la Estrategia de Transferencia Analógica (Transfer). Este enfoque nos permitió realizar un acercamiento reflexivo a la representación mental del modelo matemático por parte de los sujetos. Cuando iniciamos nuestra investigación surgieron las interrogantes sobre *¿Cuáles son las influencias del Contexto en la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, cuando se usa una estrategia de Transferencia Analógica?,* y *¿Qué dificultades presentan los estudiantes cuando resuelven y responden un problema que involucre plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, cuando se usa una estrategia de Transferencia Analógica?* Sobre esto, el Contexto demostró ser un elemento que, por su importancia, necesariamente debe ser considerado por parte del docente a la hora de planificar cualquier estrategia didáctica en aula. Consideramos, a partir de lo extraído de los cuestionarios desarrollados al finalizar cada sesión, que la disposición conductual y la valoración al enfrentar particularmente las disciplinas asociadas a las ciencias exactas, logran ser resignificadas cuando se dota al estudiante de nuevas herramientas actitudinales, aportando además al desarrollo de los objetivos fundamentales transversales recomendados por el Mineduc (2011).

No queremos dejar de señalar que durante el desarrollo del Marco Conceptual en lo relativo a nuestro objeto de estudio, no fue reportado a través de la literatura una relación directa entre el Contexto de un enunciado y la comprensión de una situación problemática cuando se utiliza una estrategia de Transferencia Analógica. Siendo la presente investigación una alternativa para el estudio de dichos elementos en vía a mejorar la calidad de acción dentro del aula.

Si nos introducimos en un plano más concreto, podemos recomendar que, para una correcta implementación de esta Estrategia en el aula, es necesario recurrir, como menciona Oliva (2004) a la explicación activa por parte del docente, es decir, de forma explícita e intencionada de las semejanzas entre los problemas Fuente y Diana.

Lo anterior se debe a que el pensamiento analógico conlleva la aplicación y desarrollo de mecanismos tales como analizar, comparar, relacionar, sintetizar, diferenciar, etc., procedimientos que no son innatos y deben ser propiciados por el docente, para que el estudiante decida qué relaciones se mantienen entre ambos problemas, para luego acomodar dichas relaciones al nuevo dominio.

Siguiendo esta misma línea, se constató en este estudio, que la principal fuente de obstáculos en la resolución de problemas que involucra un sistema de ecuaciones con dos variables, cuando se usa el Transfer como estrategia de aprendizaje, procede de la representación mental del problema por parte del resolutor, lo que se materializa en el planteamiento (construcción del MP) o en la reinterpretación de datos (conexión MP entre MS), dado que los resultados arrojan (ambas muestras), que más allá del tipo de Enunciado (Literal- Evocador) que involucre el problema, un porcentaje mínimo de los estudiantes comete errores en las herramientas matemáticas una vez planteado el problema en términos algebraicos.

Finalmente, y como ya hemos mencionado, lo que se buscaba era que los estudiantes comprendieran, desarrollaran y construyeran modelos matemáticos para 4 situaciones (con distinto tipo de Enunciado) problemáticas que conducen a sistemas de ecuaciones. Los resultados observados reflejan que el principal origen de las dificultades presentadas por parte de los estudiantes, están en los procesos de traducción (del lenguaje natural al algebraico y viceversa), en otras palabras, en la construcción del MS y/o MP, como en la conexión entre estos modelos.

Del mismo modo, desde el análisis de las dificultades presentadas según el tipo de Enunciado (Olazábal, 2005) que involucra el problema, se constató que el éxito en la resolución del problema disminuye a medida que aumenta la complejidad de establecer el modelo matemático a partir de lo que menciona el enunciado, focalizando los obstáculos en el proceso de construcción del MP. En lo relacionado con los problemas Literales (PD1-PD3), los estudiantes de Gastronomía (G.) obtuvieron mejores resultados, en lo referente a las herramientas matemáticas involucradas, en otras palabras, se observó a través del análisis de resultados que el 100% de los sujetos de la muestra G., que plantea el problema no comete errores en el desarrollo del método de resolución. No obstante, al momento de reinterpretar los resultados (conexión entre MP y MS) la muestra de Química Industrial (Q.I.) presentó menos dificultades al vincula los resultados con los eventos del mundo.

Estos hallazgos están en la misma línea que los alcanzados por Olazábal (2005), quien señala que el éxito en la traducción (del lenguaje natural al algebraico) depende en gran medida del grado de familiaridad que tenga el estudiante con los conceptos y modelos mencionados por el enunciado, infiriendo entonces que los estudiantes pertenecientes a Gastronomía, en relación a los Contextos de problemas propuestos, se involucraron significativamente en la situación descrita por el enunciado, alcanzando mejores resultados en la construcción del MP.

En relación a los problemas de tipo Evocador (PDE-PD4) los estudiantes de ambas muestras presentan mayores obstáculos que en los problemas de tipo Literal (PD1-PD3), centrándose principalmente en el planteamiento en términos algebraicos de la situación descrita y en la traducción inversa. Por otro lado, no se observaron influencias sustantivas, a partir del Contexto que involucran los problemas, en las dificultades presentadas, concluyendo que el motivo de este resultado se encuentra en la estrategia propuesta (Transfer) ya que proporcionó al estudiante herramientas dirigidas hacia el plan de acción en el proceso de resolución del sistema de ecuaciones, desde la esquematización de dicho proceso, y no desde la comprensión de la situación descrita por el problema, siendo el Contexto un factor tal vez irrelevante entonces desde el Transfer, al estar inmersa en la compresión propiamente tal del problema.

Los resultados obtenidos para la invención del problema por parte de los sujetos y las entrevistas semiestructuradas, se conjetura que que la Transferencia Analógica se produce espontáneamente en la mayoría de las creaciones, probablemente utilizada por los estudiantes, dado que, posibilita la construcción del MS y de esa manera apoyar la coherencia de la situación descrita por enunciado y construcción del MP.

No obstante, a lo anterior, no se pueden extender dichos resultados y catalogarlos como concluyentes, puesto que se relacionan con un Contexto en particular y sólo prefiguran una pauta a futuras investigaciones que estén orientadas a clasificar, desarrollar y potenciar los niveles de conocimiento y comprensión en torno a los problemas contextualizados que conducen los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Referencias

Aguilar, S., & Barroso, J. (2015). La triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. *Revista de Medios y Educación, 47(5), 73-88.*

Ayllón, M. (2012). *Invención-Resolución de problemas por alumnos de educación primaria* (Tesis doctoral. Universidad de Granada: Granada).

Bonfante, L. (2003). *Leyendo el pasado: antiguas escrituras del cuneiforme al alfabeto*, Ed. Akal, Madrid.

Burgos, S., Concha, A., Segura, Y., Silva, C., & Villegas, K. (2016). *Creencias y concepciones de profesores guías y futuros profesores de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la UCSC de la práctica IV del año académico 2015, sobre la contextualización matemática.*(Tesis pregrado. Universidad Católica de la Santísima Concepción: Concepción).

Camarena, P. (Mayo de 2015). Teoría de las ciencias en contexto y su relación con las competencias. *Ingenium, 16(31), 108-127.*

Clarke, D. J., & Helme, S. (1998). *Context as construction.* In O. Björkqvist (Ed.), Mathematics teaching from a constructivist point of view Vasa, Finland: Faculty of Education, *ÅboAkademi University, 3, 129-147.*

Eisenhart, M. (1991). *Psychology of matemathics*, Ed. Underhill, Blacksburg.

Espinoza, J., Lupiañez, J., & Segovia, I. (2013). Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento en matemática: un estudio exploratorio. *CEMACYC*, (págs. 1-13). República Dominicana.

Espinoza, J., Lupiañez, J., & Segovia, I. (Agosto de 2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Matemática, Educación e Internet, 14(2), 1-12.*

Fernández, F. (2001). *El problema de los “problemas algebraicos”.* Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro, Ed. Universidad de Granada, Granada, 137-147.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 293-307.

Hegarty, M., Mayer, R., & Monk, C. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of educational psychology, 87(1), 18-32.*

Kintsch, W., & Greeno, J. (1985). Understanding and Solving Word Arithmetic Problems. *Psychological Review, 92(1), 109-129.*

Lipschutz, S. (1992). Algebra lineal. Temple University, segunda edición, 1-44.

Luzardo, D., & Peña, A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14, 153–170.*

Ministerio de Educación, Chile (2011). *Programa de estudio matemática. Gobierno de Chile.*

Ministerio de Educación, Chile (2015). *Bases curriculares 7º a 8º básico y 1º y 2º medio, matemática.* Recuperado de: http://www.curriculumnacional.cl/

Moreira, M., Greca, I., & Rodríguez, M. L. (2002). Modelos mentales y modelos conceptuales en la enseñanza & aprendizaje de las ciencias. *Revista Brasileira de Investigação em Educação em Ciências, 2(3), 84-96.*

Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas.* (Tesis magistral. Pontificia Universidad Católica del Perú: Lima).

Olazábal, A. (2005). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto.* (Tesis Magistral. Instituto Politécnico Nacional: México D.F).

Oliva, J. (2004). Pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 3(3), 363-384.*

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22nd ed.). Madrid, España: Diccionario de la real academia española. Recuperado de: http://www.rae.es.

Rodríguez, M., Marrero, J., & Moreira, M. (2001). La teoría de los modelos mentales de Jhonson-Laird y sus principios una aplicación con modelos mentales: con célula en estudiantes del curso orientación universitaria. *Investigações em Ensino de Ciências*, 243-268.

Sadín, M. (2003). Investigación Cualitativa en Educación., (pág. 61), Barcelona.

Sampieri, R., Collado, C., & Baptista, M. (2014). *Diseños del proceso de investigación cualitativo,* Ed. Mc-Graw-Hill, México D.F.

Sánchez, A. (2000). Astronomía y matemáticas en el antiguo Egipto, Ed. Alderabán, Madrid.

Sanjosé, V., Valenzuela, T., Fortes, M. C., & Solaz-Portolés, J. J. (2007). Dificultades algebraicas en la resolución de problemas por transferencia. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 6*, 538-561.

Solaz-Portolés, J., & Sanjosé, V. (2008). Conocimientos y procesos cognitivos en la resolución de problemas de ciencias: consecuencias para la enseñanza. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 1(1), 147-162.*

Trejo, E., & Camarena, P. (2009). Problemas contextualizados: Una estrategia didáctica para aprender matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22, 831-840.*

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante, 11(1), 49-59.*

Apéndice A

Planificación de las sesiones

Para realizar la implementación de nuestra investigación, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

Aprendizaje esperado	AE 06: Resolver sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente (Mineduc, 2011, p. 63) AE 07: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mineduc, 2011, p. 64)	AE 06: Resolver sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente (Mineduc, 2011, p. 63) AE 07: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mineduc, 2011, p. 64)
Indicadores de evaluación	*Para AE 06: Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución, reducción e igualación (Mineduc, 2011, p. 63) *Para AE 07: Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema (Mineduc, 2011, p. 64)	*Para AE 06: Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución, reducción e igualación (Mineduc, 2011, p. 63) *Para AE 07: Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema (Mineduc, 2011, p. 64)

<table>
<tr><td colspan="2">Contenidos</td><td colspan="2">*Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

*Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mineduc, 2011, p. 61)</td><td colspan="2">*Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

*Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mineduc, 2011, p. 61)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivo de la clase</td><td colspan="2">Recordar y resolver los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través de problemas contextualizados.</td><td colspan="2">Recordar y resolver los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través de problemas contextualizados.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Momentos de la clase</td><td></td><td>Momentos de sesión 1</td><td>Tiempo</td><td>Momentos de sesión 2</td><td>Tiempo</td></tr>
<tr><td>Inicio</td><td>Se presenta la investigación a realizar.</td><td>5 minutos</td><td>Se inicia presentando el objetivo de clase para luego, presenta</td><td>10 minutos</td></tr>
</table>

		Se inicia la sesión presentando el objetivo de la clase, y los docentes realizan (por medio de apoyo visual) se realiza una pregunta abierta, a modo de conectar el objetivo de la clase con la vida cotidiana de los estudiantes. Luego se realiza una la formalización matemática de sistemas de ecuaciones lineales, para a continuación ejemplificar un sistema de ecuación lineal, en su representación algebraica, que será resuelto por tres métodos de resolución: Reducción, Sustitución e Igualación.	25 minutos	un sistema de ecuaciones por medio de una representación pictórica (de caracol y caballos de mar) a resolver por los estudiantes a voz alzada.	
	Desarrollo	Se les entrega un cuadernillo (sección uno) el que incluye, un problema (Fuente) resuelto por los tres	30 minutos	Se entregan el cuadernillo, en su sección dos, que incluye, el mismo problema Fuente de la	25 minutos

		métodos y dos problemas contexto cotidiano (Diana) a resolver.		sesión anterior y dos situaciones (Contexto Área Técnica de Estudio) a resolver.	
				Se les pide que respondan cuestionario.	12 minutos
		Se les pide a los estudiantes que respondan cuestionario.	20 minutos	Los estudiantes, se reúnen en grupos (4-5- sujetos), a libre elección en su conformación, para la creación de una situación (tema libre).	25 minutos

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Cierre</td><td rowspan="2">Se les hace una retroalimentación de un problema de contexto cotidiano.</td><td rowspan="2">10 minutos</td><td>Se comienza con la entrevista semiestructurada, de forma grupal. Teniendo como guía las siguientes preguntas:

*¿Qué dificultades presentaron en la creación del problema?

*Comenten sobre la situación involucrada en el problema propuesto.

*¿Qué método utilizaron para la resolución de su creación?

*¿De qué manera respondieron a la o las preguntas conceptuales sugeridas por el problema creado?</td><td>12 minutos</td></tr>
<tr><td>Se cierra con una discusión, guiada por el docente, sobre las dificultades presentadas durante la</td><td>6 minutos</td></tr>
</table>

				invención del problema.	

Planificación sesión Extra

Aprendizaje esperado	AE 06: Resolver sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente (Mineduc, 2011, p. 63) AE 07: Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mineduc, 2011, p. 64)
Indicadores de evaluación	*Para AE 06: Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución, reducción e igualación (Mineduc, 2011, p. 63) *Para AE 07: Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema (Mineduc, 2011, p. 64)
Contenidos	*Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (Mineduc, 2011, p. 61)
Objetivo de la clase	Recordar y resolver los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a través de problemas contextualizados.

		Momentos de sesión extra	Tiempo
Momentos de la clase	Inicio	Se inicia la sesión presentando el objetivo de la clase, y los docentes realizan (por medio de apoyo visual) un problema que involucró un de sistemas de ecuaciones lineales (Neira, 2012, p.68), además de recordar uno de los métodos de resolución (reducción).	15 minutos
	Desarrollo	Se les entrega el mismo cuadernillo utilizado en la sección uno, que contiene, un problema (Fuente) desarrollado por los tres métodos de resolución y el problema extra (Enunciado Evocador, problema Diana)	20 minutos
	Cierre	Se realiza la retroalimentación del problema Diana, resolviéndose en pizarra con el apoyo del docente.	10 minutos

Apéndice B

<u>Actividad Sesión 1</u>

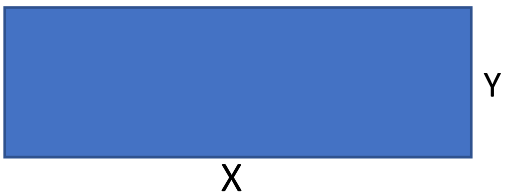
Nombre: ______________________________ Fecha: ____________ Curso: ________

Observa este ejemplo.

<table>
<tr><th>Ejemplo</th><th>Métodos de solución</th></tr>
<tr><td>¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide $\frac{48}{3}$ cm y que su largo es el triple de su ancho?</td><td>

<u>Planteamiento:</u>

Llamemos: Largo del rectángulo: x   Ancho del rectángulo: y



Perímetro: 2x+2y = $\frac{48}{3}$

Largo triple que la ancho: x = 3y

<u>Método de reducción:</u>

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \frac{48}{3} & * (1) \\ x &= 3y & * (-2) \end{aligned}$$

Amplificamos y luego sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \frac{48}{3} \\ -2x &= -6y \end{aligned}$$

(+): $2y + 6y = \frac{48}{3}$

$$8y = \frac{48}{3}$$

$y = 2 \Rightarrow x = 6$

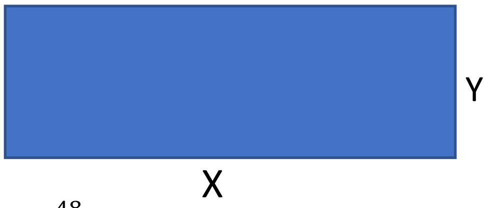
Luego calculamos el área: Largo∗Ancho= $x * y = 6 * 2 = 12$

Respuesta: El área del jardín es 12cm^2

</td></tr>
</table>

Planteamiento:

Llamemos: Largo del rectángulo: x   Ancho del rectángulo: y



Perímetro: 2x+2y = $\frac{48}{3}$

Largo triple que la ancho: x = 3y

Método de sustitución:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= \frac{48}{3} \\ x &= 3y \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x de la segunda ecuación en la primera ecuación:

$$2(3y) + 2y = \frac{48}{3}$$

$$6y + 2y = \frac{48}{3}$$

$$8y = \frac{48}{3}$$

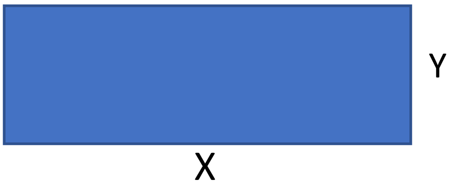
$$y = 2 \Rightarrow x = 6$$

Luego calculamos el área: Largo$*$Ancho= $x * y = 6 * 2 = 12$

Respuesta: El área del jardín es 12cm^2

Planteamiento:

Llamemos: Largo del rectángulo: x   Ancho del rectángulo: y



Perímetro: $2x+2y = \frac{48}{3}$

Largo triple que la ancho: $x = 3y$

Método de igualación:

$$2x + 2y = \frac{48}{3} \longrightarrow x = \frac{48-6y}{6}$$

$$x = 3y$$

Igualamos los valores de x

$$\frac{48-6y}{6} = 3y$$

$$48 - 6y = 18y$$

$$48 = 24y$$

$$2 = y \Rightarrow x = 6$$

Luego calculamos el área: Largo∗Ancho= $x * y = 6 * 2 = 12$

Respuesta: El área del jardín es $12cm^2$

¡Ahora tú! Resuelve estos ejercicios.

1) Las edades de Gaspar y Paula suman 68 años. Si la edad de Gaspar excede en 5 años el doble de la edad de Paula, señale las edades de cada uno.
2) Las dimensiones de una caja rectangular son 6 cm, 8 cm y 12 cm. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm. Calcular esta cantidad.

Actividad Sesión 2 (muestra Q.I)

Nombre: ___________________________________ Fecha: ________ Curso: ________

¡Ahora tú! Resuelve estos ejercicios.

1) En una farmacia se realizan inventarios diarios de la venta de Vitaminas C de distintos laboratorios, uno Estatal y otro Particular. Ambos laboratorios recaudan 23 mil pesos. El precio de la vitamina C, del laboratorio estatal es de 50 pesos y del laboratorio Particular es de 300 pesos. Calcular el número de Vitaminas C vendidas de cada laboratorio si el total de ventas fue de 160.

2) Un laboratorio químico de la ciudad de Valparaíso prepara una aleación de bronce (Cobre y concentrado de Estaño) con una cantidad muy precisa de sus ingredientes. La relación entre las cantidades de Cobre y concentrado de Estaño es

$$Gr_{Sn} = \frac{2Gr_{Cu}}{5}$$

donde Gr_{Sn} representa los gramos de concentrado de Estaño y Gr_{Cu} los gramos de Cobre.

Si se necesitan 20 granos de Estaño para obtener un gramo de este concentrado de Estaño ¿Cuántos granos de Estaño se necesitan para elaborar 1230 barras de 2Gr de esta aleación de bronce?

Actividad Sesión 2 (muestra G.)

Nombre: ___________________________________ Fecha: _________ Curso: _______

¡Ahora tú! Resuelve estos ejercicios.

1) En una pastelería se venden todos los cupcakes del día y se recaudan 23 mil pesos. El precio de un cupcake simple es de 50 pesos y de uno relleno es de 300 pesos. Calcular el número de cupcake vendidos de cada tipo si el total de ventas fue de 160.

2) Una cafetería de la ciudad de Valparaíso prepara un chocolate caliente (agua y concentrado de cacao) con una cantidad muy precisa de sus ingredientes. La relación entre las cantidades de agua y concentrado de cacao es:

$$L_C = \frac{2L_A}{5}$$

donde L_C representa los litros de concentrado de cacao y L_A los litros de agua. Si se necesitan 20 granos de cacao para obtener un litro de este concentrado ¿Cuántos granos de cacao se necesitan para elaborar 1230 botellas de 2L de este chocolate caliente?

Cuestionario Sesión 1

Nombre: ____Curso: ______________________

1. De la actividad realizada ¿crees que te sirva en tu área técnica de estudio? ¿Por qué?

____
____
____
____
____

2. Dados estos dos ejemplos responda:

Ejemplo 1	Ejemplo 2
$x + y = 58$ $2x + 4y = 168$	Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas ¿Cuántos cerdos y pavos hay? x $\longrightarrow$ número de pavos y $\longrightarrow$ número de cerdos $x + y = 58$ $2x + 4y = 168$

a) Desde tu opinión ¿Cómo te gustaría aprender a resolver ecuaciones lineales con dos variables? ¿Por qué?

____
____
____
____

b) ¿Cuál de estos ejemplos crees tú que sea más útil para tu formación técnica? ¿Por qué?

____
____
____
____

Cuestionario Sesión 2

Nombre: ____ Curso: ____________________

1. Luego de haber realizado la actividad anterior ¿Crees que fue más cercano a tu interés o para tu formación técnica el planteamiento del problema? ¿Por qué?

2. ¿Fue más sencillo hacer problemas relacionado a tu área de estudio? ¿Por qué?

3. De los ejercicios trabajados en las dos sesiones ¿cuál consideras más útil para tu formación de estudio? ¿Por qué?