FACULTAD DE CIENCIAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LOS LOGARITMOS, A NIVEL ESCOLAR

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN DIDÁCTICA Y AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

Andrés Antonio Ampuero Riquelme
Eduardo Franco Rebolledo Báez

Profesora Guía: María Inés Pezoa Reyes

VALPARAÍSO
ENERO 2019

Agradecimientos

Quiero agradecer, a todas las personas que han ayudado en este proceso.
En primer lugar, a mi familia, mis tíos y mi padre, pero en especial a mi madre Julia Báez, mi abuela Mirtala Sandoval y mi hermana Noelia Rebolledo, las tres personas más importantes en mi vida, por que ellas son un apoyo constante en mi día a día, son las que me han llevado a ser lo que soy, y sin ellas, no podría estar en estas instancias.
En segundo lugar, a mi gran amigo y compañero Andrés Ampuero, por todo lo que ha hecho por mí en estos años, por esperarme para hacer este trabajo juntos, por ser una persona comprometida y dedicada en este trabajo, siempre con palabras de aliento y apoyo, porque sin él, esta tesis no sería lo que es, y además, por ser uno de mis mejores amigos en la vida.
También agradecer a mis compañeros de carrera, en especial a Javier Alarcón y Nicolás González, amigos que pese a las adversidades y lo complejo que ha sido este proceso en la Universidad, han estado apoyándome desde la primera vez que hablamos, sobre todo en este proceso, desde el primer día dando las mejores vibras, son unos grandes amigos y personas en mi vida.
A la profesora María Inés Pezoa, por guiarnos en esta tesis y ser una ayuda constante en nuestro trabajo, y también, por haber aceptado este desafío con nosotros.
A Gerardo Araya, por siempre ayudarnos en todo, guiarnos con nuestras dudas y por tener una disponibilidad y voluntad única para cualquier favor que le pedimos.
Al tío Jorge Sepúlveda de la cafetería “el túnel”, que junto con las tías Vicky y Paty, supieron sacarme una sonrisa siempre que pase a comer algo, por darme consejos y ánimos todos los días de clases.
Por último, a cada funcionario de la Facultad de Ciencias, los tíos de la biblioteca (Carlos y Vladimir) por hacernos reír y por su disposición, a don Eduardo el auxiliar por aconsejarme, además de cada profesor que tuve el agrado de conocer y ser su alumno.
A todos ustedes, muchas gracias por hacer esto posible.

Eduardo Franco Rebolledo Báez

Quiero agradecer a cada persona que fue parte de este proceso, de alguna u otra manera, en especial a mis padres Rosa y Richard, por estar apoyándome desde el principio, a mi hermano Esteban, por sus palabras y apoyo durante todo este tiempo.

Como no agradecer a mi compañero y amigo en este proceso, Eduardo, por su amistad, compromiso y confianza durante todo este ciclo universitario, sin su ayuda este trabajo no hubiera sido el mismo, me llevo una gran amistad.

A mis compañeros y amigos de Universidad, especialmente a Javier y Nicolás, que siempre fueron un gran apoyo a pesar de que ser parte del otro grupo, me llevo muy buenas amistades y buenos momentos vividos de este proceso.

A todos mis abuelos y tíos, por sus palabras de aliento durante todo este tiempo. Una mención especial a mi tata Gustavo, que a pesar de no encontrarse entre nosotros, siempre está presente.

También quiero agradecer a la profesora guía María Inés, sin su apoyo y consejo no hubiera sido posible terminar esta etapa.

A Gerardo, por siempre tener la mejor voluntad de ayudar y orientar durante la estadía en la universidad.

Y finalmente, a los tíos del túnel y la biblioteca, por siempre hacernos reír en este último tiempo.

Sin el apoyo de estas personas y otras que no nombre, esto no hubiera sido posible, muchas gracias a todos.

Andrés Antonio Ampuero Riquelme

ÍNDICE

Introducción *3*

Capítulo 1: Antecedentes, Problemática y Objetivos *5*

1.1 Antecedentes y Problemática **5**

1.2 Objetivos **10**

1.2.1 Objetivo General 10

1.2.2 Objetivos Específicos 10

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodológico *11*

2.1 Análisis Didáctico **11**

2.2 Dialéctica herramienta-objeto (DHO) **12**

2.3 Metodología **14**

2.3.1 Contexto y sujetos de estudio 15

2.3.2 Instrumentos para la recogida de datos 16

2.3.3 Levantamiento de categorías de análisis 16

2.3.4 Estudio de Clases Japonés 17

Capítulo 3: Análisis Conceptual *19*

3.1 Antecedentes Históricos y Epistemológicos **19**

3.1.1 Fase I: Logaritmos como transformación 19

3.1.2 Fase II: Logaritmos como modelizadores 21

3.1.3 Fase III: Logaritmos como objetos teóricos 25

3.2 Red de Contenidos y Definiciones **26**

3.2.1 Red de contenidos 26

3.2.2 Definición Experta 27

3.2.3 Definición Escolar 29

3.2.4 Distancia Entre Saberes 32

Capítulo 4: Análisis De Contenido *33*

4.1 Análisis Fenomenológico **33**

4.2 Sistemas de Representación **34**

Capítulo 5: Análisis Cognitivo *36*

5.1 Expectativas De Aprendizaje **36**

5.2 Limitaciones Del Aprendizaje **40**

5.3 Oportunidades De Aprendizaje **42**

5.3.1 Tareas del programa de estudio 43

5.3.2 Tareas del libro del estudiante 48

Capítulo 6: Análisis de Instrucción *52*

6.1 Cuestionario exploratorio **52**

6.1.1 Resultados de Aplicación 53

6.2 Diseño de clase **57**

6.2.1 Tarea 57

6.3 Plan de clase **59**

6.3.1 Dificultades y Devoluciones 62

Capítulo 7: Análisis de Actuación *63*

7.1 Análisis de Actuación 1 ..... **63**

7.1.1 Primera implementación de la clase (24/10/2018) 63

7.1.2 Contraste de implementación y planificación de la clase 65

7.1.3 Análisis de las producciones de los estudiantes 66

7.1.4 Reformulación del diseño 69

7.2 Análisis de Actuación 2 ..... **78**

7.2.1 Segunda implementación de clase (15/11/2018) 78

7.2.2 Contraste de implementación y planificación de la clase 81

7.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes 82

7.2.4 Reformulación del diseño 86

Capítulo 8: Conclusiones *88*

Proyecciones **92**

Bibliografía *96*

Introducción

Este trabajo surge a partir de la reflexión final de nuestro proceso de formación como Profesores de Matemática de la Universidad de Valparaíso, en donde la preparación en la disciplina matemática es consistente y sólida, además de la adquisición de competencias pedagógicas y prácticas integradas por medio de la didáctica de la matemática. Sin embargo, a modo general, en el desarrollo de nuestras prácticas pedagógicas evidenciamos una distancia entre lo mostrado por la teoría y lo que realmente pasa en una sala de clases. Un ejemplo, lo vemos cuando se presenta un nuevo concepto matemático, y los estudiantes presentan dificultades a la hora de entender y aplicarlo, es más fácil para el docente entregar reglas de mecanización en la secuencia de desarrollo de actividades, sin considerar los conocimientos previos involucrados, privilegiando así solo un tratamiento procedimental del contenido.

El objetivo de nuestro trabajo es realizar un estudio sobre la enseñanza del concepto de logaritmo a partir de la relación con potencias. Este estudio se desarrolla siguiendo el método del Análisis Didáctico (Rico, 2013) que se estructura en torno a cinco componentes: Análisis Conceptual, Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo, Análisis de Instrucción y Análisis de Actuación, mediante los cuales es posible analizar y describir un tema matemático para constituirlo como objeto de enseñanza.

En el Análisis Conceptual se revisa el conocimiento matemático, sus fundamentos e historia, su génesis y desarrollo, los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje, además de identificar y organizar los conceptos y procedimientos que conforman el tema. El Análisis de Contenido, permite al docente conocer las distintas representaciones del objeto, así como también ver la organización de las situaciones y problemas a los que puede dar respuesta. El Análisis Cognitivo, describe las expectativas, limitaciones y oportunidades que tienen los estudiantes en base a la progresión de la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática. En el Análisis de Instrucción, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituyen las actividades de enseñanza y aprendizaje, basados en lo mostrado en el Análisis Cognitivo. Por ultimo, en el Análisis de Actuación, el profesor determina las capacidades que los estudiantes han desarrollado, y las dificultades que puedan haber manifestado hasta ese momento.

La organización de este trabajo es la siguiente:

Los primeros dos capítulos, describen los antecedentes que sustentan la problemática de la dificultad que tienen los docentes a la hora de enseñar el concepto logaritmo, planteando además los respectivos objetivos de investigación. Posteriormente se presenta el marco teórico y metodológico, que sustenta esta investigación.

En el capítulo 3, se realiza un análisis conceptual, el cual aborda la comprensión del concepto de logaritmo desde sus orígenes, y evolución, además de conceptos básicos de este elemento.

El capítulo 4, corresponde al Análisis de Contenido, se presenta la definición experta, respecto a la construcción del logaritmo para posteriormente, mostrar la definición escolar, con el fin de establecer la distancia entre ambos saberes. Además, se incorpora el estudio de la fenomenología, los registros de representación y se diseña un mapa conceptual con el fin de tener una imagen global, de todos los saberes involucrados de acuerdo con el objeto de estudio.

En el capítulo 5, se presenta el Análisis Cognitivo, que aborda los aprendizajes de los estudiantes respecto al contenido estudiado, las expectativas de aprendizaje según lo indicado en el currículum nacional, las limitaciones de aprendizaje asociadas, describiendo errores y dificultades posibles, como también las oportunidades de aprendizaje del currículum y los textos escolares.

En el capítulo 6, se presenta el Análisis de Instrucción en el que se describe el diseño, justificación y posterior análisis de las tareas que constituyen nuestro estudio.

El capítulo 7, corresponde al Análisis de Actuación, se describe cada etapa de la implementación de la clase, con sus respectivas tareas, diseñadas en el análisis de instrucción. Se realiza una primera implementación, la cual se analiza en base a la planificación, manejo de aula y observación de pares, luego se reformula el diseño de clase, los tiempos y las tareas, para volver a implementar. Además, se analizan las producciones de las estudiantes, agrupando las diferentes estrategias de los estudiantes en categorías, incluyendo los errores y aciertos evidenciados.

Finalmente, en el capítulo 8, se recogen las conclusiones, reflexiones y proyecciones del estudio en torno a la problemática inicial y sus aportes a la formación docente.

Capítulo 1: Antecedentes, Problemática y Objetivos

1.1 Antecedentes y Problemática

Al docente de matemáticas no le basta con su preparación, adquirida en su desarrollo como estudiante y en su formación como profesor, sino que tiene la misión de tener una actitud reflexiva sobre como se desempeña en su labor como profesional de la educación, adaptándose al momento y contexto que viven sus alumnos, de manera que se mantenga actualizado y que esto le permita crear situaciones de enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes.

Según Flores (1997):

> El profesor-docente de matemáticas está en contacto con personas en formación, y no puede conformarse con dominar unas técnicas y ponerlas en juego, sino que tiene que tratar de comprender la situación que afronta, y adaptarse a las circunstancias cambiantes del grupo humano al que se dirige. Para ello, el profesor profesional tiene que mantener una actitud abierta, pero reflexiva. (p.1-2).

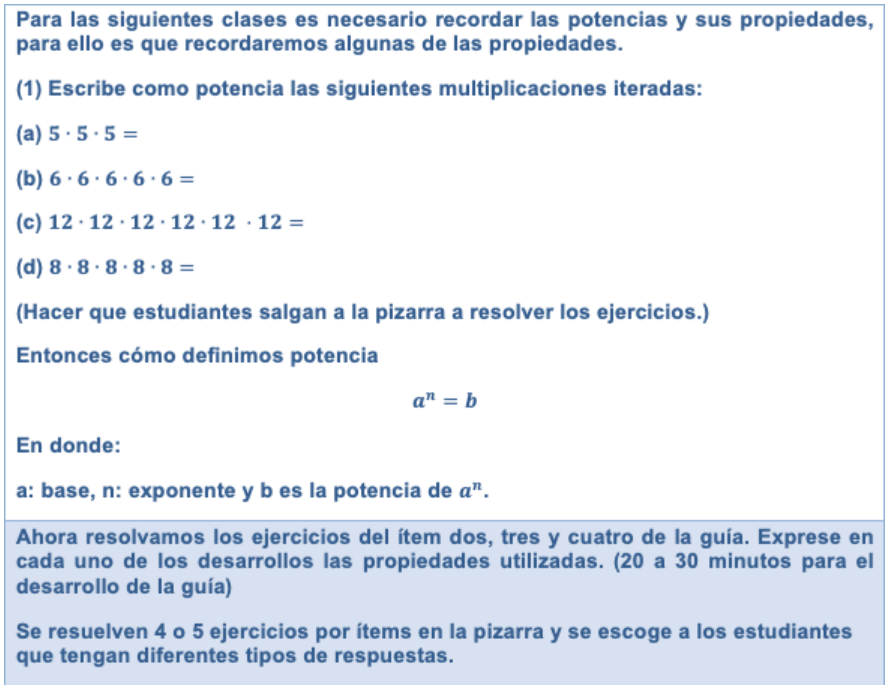
Entendiéndose reflexivo como “aquel que considera nueva o detenidamente una cosa”, Flores (1997).

Shulman (Como se citó en Bolívar, 1993), indica que al hablar de Conocimiento Didáctico del Contenido, nos estamos refiriendo a los aspectos del contenido, cuyo conocimiento es importante para la enseñanza, incluyendo en este caso:

> Los tópicos que más regularmente se enseñan en un área, las formas más útiles de representación de las ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, y, en una palabra, la forma de representar y formular la materia para hacerla comprensible a otros.

El aprendizaje de un contenido matemático debe contener ciertas normas que nos permitan adquirir, entender, razonar e implementar el objeto, si esto no ocurre, el alumno se limitará a repetir lo que el profesor este explicando, no llevando a cabo un proceso reflexivo en el que cuestione los significados de los objetos matemáticos vistos.

Desde nuestra experiencia, hemos vivenciado como docentes en formación que esto ocurre en las aulas escolares nacionales, comprometiendo el real aprendizaje de los estudiantes, los cuales sólo repiten lo explicado y hecho por el profesor para resolver los problemas o situaciones que se le presentan. A continuación, se expone un extracto de un plan de clase implementado en una de nuestras prácticas:



Para las siguientes clases es necesario recordar las potencias y sus propiedades, para ello es que recordaremos algunas de las propiedades.

(1) Escribe como potencia las siguientes multiplicaciones iteradas:

(a) $5 \cdot 5 \cdot 5 =$

(b) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$

(c) $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 =$

(d) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 =$

(Hacer que estudiantes salgan a la pizarra a resolver los ejercicios.)

Entonces cómo definimos potencia

$$a^n = b$$

En donde:

a: base, n: exponente y b es la potencia de a^n.

Ahora resolvamos los ejercicios del ítem dos, tres y cuatro de la guía. Exprese en cada uno de los desarrollos las propiedades utilizadas. (20 a 30 minutos para el desarrollo de la guía)

Se resuelven 4 o 5 ejercicios por ítems en la pizarra y se escoge a los estudiantes que tengan diferentes tipos de respuestas.

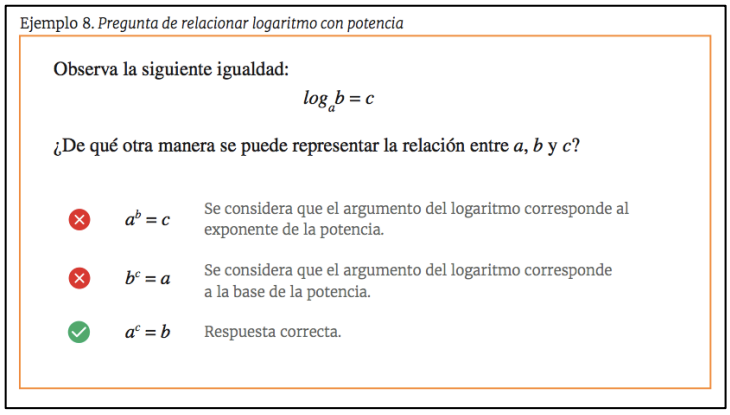
Figura 1: Extracto informe de práctica profesional. Fuente: Rebolledo, 2018.

De acuerdo con lo señalado por Godino, Batanero & Font, (2003), quienes indican que el saber matemáticas va más allá de repetir definiciones o aplicar propiedades, reglas, teoremas, etc. Es más, un sujeto que comprende matemáticas usa el lenguaje y sus conceptos para resolver problemas, y relaciona los objetos matemáticos con las situaciones en donde se utiliza.

En esta investigación abordamos el proceso de enseñanza para el concepto de logaritmo, dado que a partir de los procesos de prácticas desarrollados en nuestra formación como profesores y considerando la importancia de la reflexión en torno a la enseñanza, es que hemos identificado que existe una mecanización al momento de su aplicación y su relación con las potencias. Para resaltar la situación señalada, es que hablaremos de la poca o nula importancia que se le da a la relación entre las potencias y los logaritmos, respaldándonos en lo expresado por la Agencia de Calidad de la Educación (2017), que señala lo siguiente:

Se reporta que los resultados SIMCE, 2017 dan cuenta que más del 50% de los estudiantes de segundo año de Enseñanza Media no han consolidado la comprensión de la definición y lo que representan cada uno de los términos de un logaritmo. Además, en lo que respecta a la relación entre logaritmos y potencias, no serían capaces de identificar la potencia que se asocia a un determinado logaritmo.

Figura 2. Ejemplo de error


Ejemplo 8. *Pregunta de relacionar logaritmo con potencia*

Observa la siguiente igualdad:

$$\log_a b = c$$

¿De qué otra manera se puede representar la relación entre a, b y c?

- ✗ $a^b = c$ — Se considera que el argumento del logaritmo corresponde al exponente de la potencia.
- ✗ $b^c = a$ — Se considera que el argumento del logaritmo corresponde a la base de la potencia.
- ✓ $a^c = b$ — Respuesta correcta.

Fuente: Agencia de Calidad de la Educación, 2017, p.21.

En lo que sigue presentamos antecedentes de investigaciones que abordan en parte problemáticas asociadas al aprendizaje del concepto de logaritmo:

En Ferrari (2008) se señala que la presentación escolar de los logaritmos está totalmente desligada de sus fundamentos, sin hacer hincapié en sus significados matemáticos, esto nos proporciona un primer acercamiento del por qué los alumnos no son capaces de relacionar las distintas formas en que los logaritmos son enseñados, específicamente señalados como “el exponente al que se debe elevar una base para obtener un determinado valor”.

Gacharná (2012) indica que, desde un punto de vista histórico, en el contexto en que surgen los logaritmos, nacen como un facilitador de operaciones, reduciendo el trabajo en cálculos complejos, es más, actualmente podemos inferir que esto genera un obstáculo en los estudiantes, debido a que “están acostumbrados a que los conceptos que abordan tengan alguna aplicación inmediata en contextos de la naturaleza o de la vida cotidiana” (p.50).

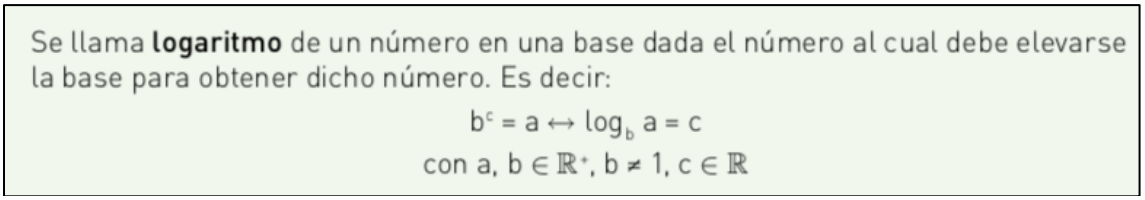
Sanabria (2016) expone otro tema importante, el cual es la enseñanza del logaritmo, más aún en la presentación escolar por parte del docente, este debería vincular la aplicación del concepto en diferentes ámbitos, repercutiendo de mejor manera en el desarrollo del concepto por parte de los estudiantes, lo cual no se cumple, por lo que el estudiante adquiere el rol de reproducir mecánicamente lo expuesto por el profesor.

Una vez propuestos nuestros antecedentes de investigaciones que respaldan la problemática, es que se hará una revisión del logaritmo en los textos oficiales:

En el Programa de Estudios del MINEDUC (2016d) de segundo año medio, se presenta como objetivo de aprendizaje (OA): “Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces enésimas y logaritmos” cuyo indicador de evaluación es “describiendo la relación entre potencias y logaritmos”.

A través de la relación entre estos dos objetos y complementando con los precedentes vistos, es que se presenta el objeto matemático logaritmo, según su definición en el libro del texto:

Figura 3. Definición de logaritmo.


Se llama **logaritmo** de un número en una base dada el número al cual debe elevarse la base para obtener dicho número. Es decir:

$$b^c = a \leftrightarrow \log_b a = c$$

con $a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1, c \in \mathbb{R}$

Fuente: Chacón, García, Rupin, Setz & Villena, 2018, p.51.

La definición de este objeto se relaciona con las potencias más por su uso práctico, que por su comprensión, dejando un vacío en la comprensión del objeto logaritmo, limitándolo sólo para un uso mecanizado.

Lo señalado anteriormente, es nuestra motivación para realizar esta investigación, donde indicaremos la relación entre lo vivido en nuestras prácticas en el aula, lo propuesto en el currículum actual y nuestra formación desde los ámbitos didáctico, pedagógico y matemático.

Las preguntas orientadoras para nuestra investigación son las siguientes:

- ¿Qué tipo de actividades facilitan la comprensión por sobre la mecanización de los conceptos de potencias y logaritmos?
- ¿Qué conocimientos previos son los necesarios para que los estudiantes establezcan la relación entre potencias y logaritmos?

1.2 Objetivos

De acuerdo con los antecedentes y la problemática descrita anteriormente, definimos los siguientes objetivos de investigación a realizar en nuestro trabajo:

1.2.1 Objetivo General

Realizar un Análisis Didáctico (Rico, 2013) del concepto logaritmo que permita diseñar e implementar una actividad de aprendizaje que posibilite a los estudiantes establecer la relación entre potencias y logaritmos.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar un estudio del concepto de logaritmo a partir de su génesis, fundamentación y algunas concepciones básicas.
- Elaborar una propuesta de aprendizaje de carácter exploratoria, basados en la Dialéctica Herramienta–Objeto (Díaz, 2014).
- Elaborar e implementar propuestas de enseñanza-aprendizaje en base al cuestionario exploratorio.
- Analizar los conocimientos adquiridos a través de las propuestas de enseñanza-aprendizaje, basados en el Estudio de Clase Japonés para el análisis de diseño e implementación de la propuesta.

Capítulo 2: Marco Teórico y Metodológico

En este capítulo se presenta el Análisis Didáctico (Rico, 2013) como marco referencial, que estructura nuestro estudio orientando su diseño, aplicación, reformulación y análisis de los objetivos propuestos. En cuanto a la Metodología se describe el tipo de investigación y procedimientos utilizados para analizar de acuerdo con objetivo propuesto.

2.1 Análisis Didáctico

El Análisis Didáctico (Rico, 2013) es un método de investigación cíclico el cual señala cómo el docente debiera fundamentar, diseñar, organizar y llevar a la práctica los procesos de enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático específico; está situado tanto con el contenido como con el contexto. Gómez (2002, p.252) señala que el Análisis Didáctico "es un procedimiento que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar para efecto de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza-aprendizaje". El Análisis Didáctico (Rico, 2013) consta de los siguientes análisis:

1. Análisis Conceptual, permite validar lo que se quiere investigar a partir de su génesis y fundamentación, su evolución en la historia, algunas concepciones básicas, y su desarrollo.
2. Análisis de Contenido, otorga un conocimiento aproximado de los distintos significados y representaciones del concepto, y también muestra como el concepto es utilizado en diversos ámbitos.
3. Análisis Cognitivo, se centran en las investigaciones en revisar lo relacionado con el aprendizaje del concepto; se muestran las expectativas de aprendizaje que propone el programa de estudio actual, y sus limitaciones con las oportunidades pertinentes, que se encargan de tratar de alcanzar los objetivos planteados en la clase.
4. Análisis de Instrucción, el docente crea una propuesta de aprendizaje que aplicará, mostrando y describiendo las tareas de enseñanza-aprendizaje.

5. Análisis de Actuación, es aquí donde el profesor basándose en los resultados obtenidos en las producciones de los estudiantes, determina los conocimientos y aprendizajes que adquirieron por medio de la propuesta de enseñanza-aprendizaje. Además, se indican las dificultades y errores que se presentaron, y si fueron o no superados.

2.2 Dialéctica herramienta-objeto (DHO)

Desarrollada por Douady (citado en Díaz, 2014) es un proceso que consiste en hacer uso de los conocimientos previos (o existentes) de los alumnos como herramienta en el proceso de construcción de un nuevo conocimiento u objeto, a su vez este último podría ser utilizado en el proceso de construcción de un objeto nuevo como herramienta, formando así un nuevo ciclo de la Dialéctica Herramienta-Objeto aplicado en una nueva situación.

Para Díaz (2014) el concepto matemático tiene el estatus de herramienta (instrumento), cuando nuestro interés en este se centra en la utilidad que nos puede brindar para resolver un problema o formular un nuevo concepto. En cambio, el concepto matemático es objeto cuando se entiende como un ente cultural insertado en una estructura científica; es el saber erudito socialmente validado o reconocido.

Bajo esta afirmación podemos decir que el "instrumento" entra en acción a la hora de enfrentar un problema que requiere solución y puede ser utilizado tanto por el estudiante como por el investigador matemático que resuelve el problema. Por otra parte, el "objeto" es ocupado a la hora de formalizar un concepto que usualmente es realizado por el profesor y que proviene de procesos anteriormente realizados como lo son la fundamentación y la validación de conocimientos. Godino et al. (Como se citó en Díaz, 2014) comenta que:

> El concepto-instrumento se pone en juego en las fases o momentos de exploración en la resolución de problemas, y está de lado del estudiante o del investigador matemático que resuelve el problema. El concepto-objeto se pone en juego en las fases de institucionalización, normalmente hechas por el profesor, pero también es resultado de los procesos de fundamentación y validación de los conocimientos entendidos como entidades culturales. (p.128).

A continuación, definiremos las fases de la Dialéctica Herramienta-Objeto (Díaz, 2014):

Fase 1. Antigua

En está primera etapa los alumnos utilizarán un conocimiento previo ya adquirido (herramienta) para resolver un problema propuesto o, al menos tener una idea clara de cómo resolver en parte el problema.

Fase 2. Investigación

Los alumnos ahora encontrarán ciertas dificultades a la hora de desarrollar el problema, buscando nuevos conceptos o métodos que lo lleven a una solución concreta, o puede ser que estas dificultades salgan a luz a raíz de utilizar una mala estrategia de una confusión de conceptos o de una mala aplicación de estos. Es aquí donde el profesor o guía buscará ayudar y orientar al estudiante en base a preguntas para encontrar una solución al problema contextualizando su situación.

Fase 3. Explicitación

En esta etapa surge el nuevo conocimiento como tal, en donde para algunos estudiantes, al presentar dificultades, requieren del apoyo del docente o guía para complementar el conocimiento.

Fase 4. Institucionalización

En esta cuarta etapa el profesor realza la importancia del nuevo conocimiento matemático para convertirlo en el denominado objeto matemático, que a su vez gracias a lo ya conocido de la Dialéctica Herramienta-Objeto (Díaz, 2014) se convertirá en un conocimiento antiguo y será utilizado como herramienta posteriormente. Podemos decir entonces que en esta fase el profesor conecta los saberes conocidos constituyendo el nuevo conocimiento (objeto).

Fase 5. Familiarización

En este nivel el profesor mostrará diversos problemas o situaciones con el propósito de que este nuevo conocimiento entre en un funcionamiento y sea adquirido, adaptado y aplicado por el estudiante. Douady (Como se citó en Díaz, 2014) señala que, “Antes de poder reutilizar lo aprendido, necesitan familiarizarse con su nuevo conocimiento. Un medio para lograr esto es proponerles primero abordar ejemplos de problemas cercanos al que ya han estudiado” (p.91).

Díaz (2014) resume esta idea diciendo que el nuevo concepto que ha sido institucionalizado anteriormente es utilizado como herramienta para resolver una situación nueva. En este transcurso de familiarización del nuevo objeto, los alumnos deberán desarrollar hábitos y habilidades para integrarlos a su esquema mental como un saber social y cultural.

Fase 6. Reutilización

En este último nivel el concepto matemático es usado como herramienta en situaciones más complejas.

2.3 Metodología

Considerando la problemática y los correspondientes objetivos de la investigación, este estudio se afrontará desde el paradigma cualitativo interpretativo. Será de carácter descriptivo, a decir de Hernández, Fernández y Baptista (2010), estos estudios “*pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren*” (p.80). Lo anterior, se busca que sea “*con la mayor exactitud posible*” (Hernández et al., 2010, p.82).

Además, el investigador en esta clase de estudio debe ser capaz de definir, o al menos visualizar, qué se medirá y cómo va a lograr esta medición, es decir, sobre qué o quienes se recolectarán los datos (Hernández et al., 2010).

En una investigación de corte descriptiva, Fernández (2006) estipula cuatro pasos que la constituyen como tal, estos son:

1. Obtener la información: hace referencia a los instrumentos para la recogida de información.
2. Capturar y ordenar la información: toda la información obtenida debe ser transcrita en un formato legible.
3. Codificar la información: este paso indica que se deben realizar categorías de análisis, que concentren las ideas y conceptos claves que rigen a la investigación.
4. Integrar la información: relacionar las categorías obtenidas entre sí.

Para efectos de esta investigación, los pasos señalados anteriormente se detallan a continuación, comenzando por la descripción del contexto y los instrumentos para la recogida de datos (pasos 1 y 2), posteriormente se presenta el levantamiento de categorías de análisis (paso 3) y por último se contrasta las categorías, con el análisis a priori.

2.3.1 Contexto y sujetos de estudio

El grupo de sujetos al cual se le presentó la propuesta didáctica está constituido por estudiantes del nivel segundo y tercer año de enseñanza media de un colegio, ubicado en la comuna de Quintero, Valparaíso. Fueron 70 los individuos estudiados, cuyas edades fluctúan entre los 14 y los 17 años. El establecimiento educacional es particular subvencionado y cumple con entregar una formación tanto Científico Humanista como Técnico Profesional, pertenece además a una congregación religiosa.

El lugar donde se llevo a cabo la clase es una sala estrecha en comparación a la cantidad de alumnos que estaban en ese momento, cuenta con los recursos necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, a saber, el aula posee una pizarra acrílica y un proyector de data show. En el siguiente apartado se precisan los instrumentos utilizados para la recogida de datos.

2.3.2 Instrumentos para la recogida de datos

Una vez seleccionado el tipo de investigación que se utilizará, que se rige bajo el paradigma cualitativo, y también el contexto del grupo de personas que son partícipes de este estudio, es preciso establecer cuáles serán los instrumentos para la recogida de los datos. Éstos serán:

1. Las tareas de clase, es decir, el material que se les facilitó a los alumnos para que lo trabajaran durante la sesión de clases.

   Es a partir de este instrumento que se obtienen evidencias empíricas del trabajo de los sujetos de estudio. Dicho instrumento se presenta en los Anexos I, III y VII.
2. Las evidencias escritas, tienen relación directa con las tareas de clase, porque en ellas los estudiantes plasmarán sus ideas y posibles estrategias de resolución al problema que se les planteará. Estas evidencias se encuentran en la sección de Anexos.

En el apartado siguiente, se describe el levantamiento de las categorías de análisis para este trabajo de investigación.

2.3.3 Levantamiento de categorías de análisis

Al analizar datos de tipo cualitativos, cobra suma importancia el modo a través del cual se examinarán los datos recogidos. Respecto a este entendido, se vuelve necesario etiquetar la información, es decir, agrupar los datos obtenidos en categorías que concentren las ideas, conceptos o temas revelados por el investigador (Rubin y Rubin, 1995; Fernández, 2006).

El proceso de levantamiento de categorías de análisis permite llevar a cabo comparaciones y contrastes, bajo una estructura organizada que posibilita establecer las ideas más importantes, los descubrimientos y las conclusiones.

Es en esta línea, que las categorías que se utilizarán en este estudio para examinar los datos obtenidos se diseñarán a partir de las estrategias que realicen los sujetos de estudio, para dar respuesta a la problemática que conlleva el plan de acción. De este modo, se analizarán los aciertos y los errores que se constaten en cada categoría.

En seguida, se presenta el Estudio de Clases Japonés y sus fundamentos en función de ser utilizado como una herramienta metodológica para la planificación y análisis de una clase, para efectos del plan de acción estipulado en esta investigación.

2.3.4 Estudio de Clases Japonés

Para realizar el análisis de la clase que se implementará, se utilizará el Estudio de Clases o *Jugyou Kenkyu,* el cual es un "*método japonés de mejoramiento de clases diseñado para llevar su desarrollo a la más alta calidad"* (Arcavi, Isoda y Mena, 2007, p.12). En este proceso, los docentes trabajan en conjunto, examinando y criticando sus distintas técnicas de enseñanza, para que de manera progresiva, puedan ir mejorando en sus respectivos métodos de enseñanza. Además de compartir conocimientos, y obtener retroalimentaciones unos de otros, los docentes actúan como investigadores de su propia práctica, aportando así, al desarrollo educativo del país (Arcavi et al., 2007).

La mayor importancia del Estudio de Clases radica en que todos sus procesos se realizan siempre en colaboración con otros docentes. El Estudio de Clases se compone de las siguientes tres etapas:

- La primera etapa, llamada Preparación, consiste en la selección de un contenido propuesto en los programas de estudio, para que sea implementado en el aula. Una vez que se conoce dicho contenido, se comienza a planificar la clase, evidenciando los recursos a utilizar y los elementos más relevantes para la implementación.
- La segunda etapa, denominada Clase a Investigar, radica en observar la clase que se implementa en el aula, basada en la planificación que se construyó en la primera etapa. En esta clase, se encuentran presentes otros docentes que están observando el actuar del profesor que lleva a cabo la implementación de la enseñanza.
- La tercera y última etapa, se conoce como Sesiones de Revisión, en ella los docentes observadores se reúnen con el profesor que realizó la clase, en una sesión en que todos participan dando a conocer sus opiniones respecto de la clase observada, buscando su mejora. Con esta reunión se pretende reformular la clase, dando término a las tres etapas del Estudio de Clases, y de esta manera comenzar nuevamente el mismo ciclo desde la planificación.

El Estudio de Clases es un apoyo metodológico que permitirá desarrollar el análisis de actuación, pues su estructura se enfoca en la discusión entre pares para retroalimentar una clase, obteniendo información relevante para su mejora.

En resumen, para este trabajo nos basaremos en el siguiente esquema en donde definiremos nuestra metodología de investigación. En base a los primeros tres análisis es que desarrollaremos el Análisis de Instrucción apoyados por la Dialéctica Herramienta–Objeto (Díaz, 2014), la cual nos permitirá elaborar una propuesta de carácter exploratorio, luego, se diseñarán actividades basadas en los resultados de esta propuesta con el fin de que sean implementadas en el Análisis de Actuación, y que considere una reformulación de ser necesario.

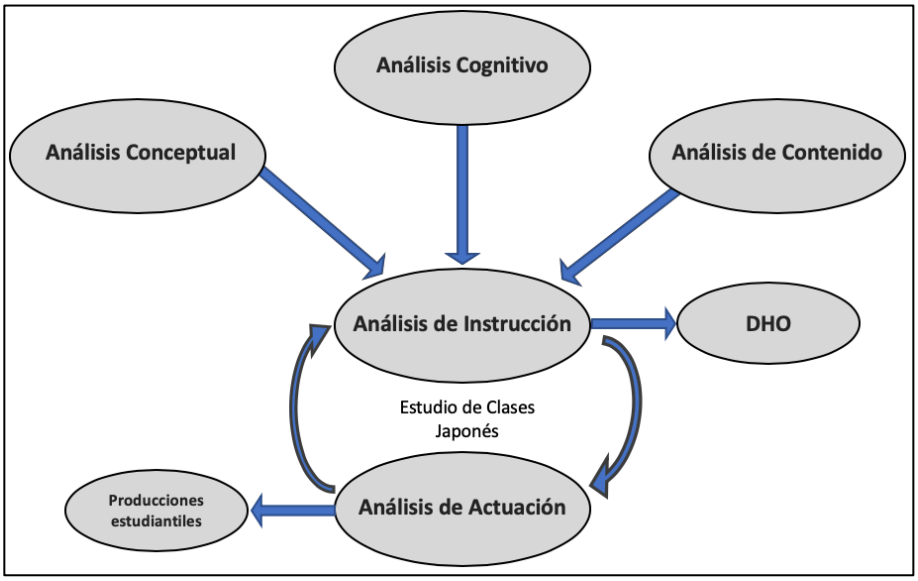


Figura 4: Esquema metodológico. Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 3: Análisis Conceptual

En este Capítulo, se muestran los antecedentes históricos y epistemológicos del logaritmo, sus distintos avances en el tiempo, iniciando como un "facilitador de operaciones complejas", así como también, la forma en que este objeto es mostrado en el contexto escolar, comparándolo con su definición formal.

3.1 Antecedentes Históricos y Epistemológicos

Para mostrar el siguiente análisis nos basamos en la investigación: Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo, desarrollada por Ferrari (2001), en donde se dan a conocer tres fases de la vida de los logaritmos que describen como una breve síntesis, la evolución de estos.

Desde su inicio, el logaritmo fue "inventado" con el fin de expresar de una manera más conveniente las operaciones (multiplicaciones y divisiones) en sumas y restas, además de facilitar el cálculo de potencias y raíces a través de multiplicaciones y divisiones. Podemos decir, entonces, que el logaritmo surge como una herramienta facilitadora de cálculos algebraicos más complejos.

3.1.1 Fase I: Logaritmos como transformación

En esta primera etapa los logaritmos están definidos y enmarcados en el registro numérico en el cual, pese a que no habían sido formalmente definidos, se explora la relación entre progresión geométrica y aritmética, en busca de extender el rango de los números y de facilitar los cálculos que, por la magnitud de las cifras involucradas, demandaban tediosas y complicadas operaciones. (Ferrari, 2001).

Es en esta fase donde podemos ver el surgimiento de los logaritmos dentro de la historia de la matemática, la cual no es una historia reciente, ya Arquímedes en sus diversos estudios realiza una comparación entre una progresión aritmética y geométrica, de aquí, los valores anotados en la progresión aritmética son llamados "Logaritmos", y los valores de la progresión geométrica son llamados "Antilogaritmos".

Figura 5: Tabla de relación entre progresión aritmética y geométrica

Progresión Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Progresión Geométrica	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9

Fuente: Sanabria, 2016.

Para Lefort (Como se citó en Sanabria, 2016), Arquímedes es el precursor de la idea principal que daría paso a los logaritmos, señalando:

> Cuando varios números están en proporción continua a partir de la unidad, y algunos de estos números se multiplican entre sí, el producto estará en la misma progresión, alejado del más grande de los números multiplicados tantos números como el más pequeño de los números multiplicados lo está de la unidad en la progresión, y alejado de la unidad la suma menos uno de los números de lugares que los números multiplicados están alejados de la unidad. (Arenario, trad. Verecke).

Por ejemplo, si tomamos las siguientes progresiones:

P.A.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P.G.	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Tabla 1: Ejemplo entre progresiones de base 2. Fuente: Elaboración propia.

Si queremos hallar el producto de 16×32 se realiza lo siguiente:

Primer paso: Encontrar en que casilla están los números de la multiplicación:

Como el 16 está ubicado en el cuarto casillero de la P.G., se le asigna la P.A. con valor 4, lo mismo para el 32 que está ubicado en el quinto casillero de la P.G., se le asigna la P.A. con valor 5.

Segundo paso: Una vez que encontramos estos valores, los sumamos, es decir:

$$4 + 5 = 9$$

Tercer paso: Buscamos, en este caso, la novena casilla de la P.A. y su valor asignado en la PG., que es 512, el cual, es el resultado de la multiplicación 16×32 . Añadiendo también, que $2^9 = 512$

3.1.2 Fase II: Logaritmos como modelizadores

En esta fase es donde surge el momento de definición de la noción de extensión y caracterización de esta en otros registros y contextos en donde la relación entre las progresiones se torna fundamental. (Ferrari, 2001).

Ya para el siglo XVI, en los trabajos de Chuquet y Stifel, siendo este último el más importante dentro de los avances en los logaritmos, se retoma la idea de Arquímedes, destacando la obra "Arithmetica Integra" del año 1544, siendo la primera que muestra el cálculo de potencias con exponente racional, añadiendo también la regla de la multiplicación de potencias de igual base. Stifel también es el primero que, de forma muy primitiva, entrega la primera tabla de logaritmos que existe, basada en la potencia de base dos, con exponentes que van entre los valores -3 al 6.

Tabla 2: Tabla de logaritmos de Stifel.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Fuente: Elaboración propia.

En su libro, Stifel hace la siguiente observación:

> La adición en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica, lo mismo que la sustracción en aquella corresponde a la división en ésta. La simple multiplicación en la sucesión aritmética corresponde a la multiplicación por sí mismo, potenciación, en la geométrica; y la división en la primera corresponde a la extracción de la raíz en la segunda, algo así como la división por dos, corresponde a la extracción de la raíz cuadrada. Tapia (2003, p.7).

Stifel llamaba a la potenciación como la “multiplicación de un número por sí mismo”, y para calcularla, se debe hacer la suma “consigo mismo” del correspondiente término de la progresión aritmética. Por ejemplo, para hacer el 64, se debe sumar tres veces el 2, el cual a su vez corresponde a la sucesión aritmética 4, es decir, $2 + 2 + 2 = 6$ o $2 \times 3 = 6$, debajo del cual se encuentra el 64, lo que nos dice que el 64 es el cubo de 4.

John Napier:

John Napier o John Neper fue un matemático escocés conocido por ser el primero en definir y calcular los logaritmos a través de las denominadas “tablas de logaritmos”.

En 1614, tres años antes de su muerte publicó el “Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, ejusque usus in utroque Trigonometría; ut etiam in omni logística mathematica, amplissimi, facillimi, et expeditissimi explicatio” en la que por primera vez da a conocer los logaritmos (llamados por él “Números artificiales”) y usando una aproximación física (visto desde la cinemática) relaciona una progresión aritmética y geométrica, retomando esta idea tal como lo había hecho Stifel.

En el año 1619 se publica como obra póstuma "Mirifici logarithmorum canonis constructio" donde explicita como calcular logaritmos por medio de las tablas de logaritmos, pero con una variación con respecto a sus precursores; Napier no entregaba los logaritmos de la sucesión de números naturales, sino con los valores de senos entre 0º y 90º. Napier, además, pensó en la complicación que traería estos cálculos con los números negativos, y en que los términos de su progresión geométrica fueran potencias muy cercanas a un seno dado, ocupa como razón un valor muy cercano a uno, usando un valor aproximado de 0,9999. Las tablas de logaritmos de Napier tenían una ventaja muy importante, las largas multiplicaciones podían ser reemplazadas por sumas, el producto de dos términos de una progresión geométrica, en este caso a^m y a^n está asociado con la suma de los términos m y n de la progresión aritmética.

Por ejemplo, dada la siguiente tabla de progresiones con base 2.

Figura 6: Tabla de progresiones.

P.A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P. G	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

Fuente: Sanabria, 2016.

Napier ocupa la palabra logaritmos en el sentido de “un número que entrega una proporción”, (Logos = Razón y Arithmos = Número).

Henry Briggs:

Los trabajos de Napier llamaron la atención de otro matemático de la época, Henry Briggs, el cuál, retomando la idea principal de estos, pero realizando una pequeña variación, es cambiar de la base 2 por la base 10, a raíz de esto, publica una tabla de logaritmos, con al menos 8 decimales, quedando definido así el logaritmo de un número cualquiera, llamémoslo “x”, como el exponente n de 10, tal que “x” sea igual a 10 elevado a n.

En 1617, Briggs publica “Logarithmorum chilias prima”, que contiene los logaritmos de los números 1 al 1000, con una exactitud de 14 decimales. Para el año 1624 publicó “Arithmetica Logarithmica” que comprende los logaritmos para enteros entre 1 a 20.000 y de 90.000 a 100.000 con una precisión de 14 decimales. Es importante recalcar que, en esta obra, Briggs usa la palabra “característica” (parte entera) y la palabra mantisa (parte decimal). Los valores comprendidos entre 20.000 y 90.000 fueron completados por Ezechiel De Decker (agrimensor holandés y profesor de matemáticas) y Adriaan Vlacq (editor, autor de tablas matemáticas holandés), los cuales publicaron en 1627 una tabla de logaritmos completa.

Briggs describe su aporte de la siguiente manera:

> Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos. A través de ello se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, transformándolo en algo completamente simple a través de la sustitución de la multiplicación por la adición y la división por la substracción. Además, el cálculo de las raíces se realiza también con gran facilidad. (Como se citó en Sanabria, 2016).

Joost Bürgi:

Luego de estos avances, surgieron otras tablas que permitieron la difusión del método, en particular en el continente. En realidad, la idea estaba en el aire; un colaborador de Kepler, el suizo Bürgi, proponía en la misma época, para simplificar los cálculos que debía realizar, hacer corresponder una progresión aritmética y una progresión geométrica; sin embargo, sus trabajos no fueron publicados hasta 1620, siendo el principal: "*Arithmetische und geometrische Progress Tabulen"* donde exponía sus tablas logarítmicas. Bürgi se dio cuenta de que las propiedades logarítmicas no eran aplicables solamente sobre la sucesión de potencias con base dos, sino sobre sucesiones con cualquier razón racional. Bürgi, entonces, utilizó como base, el siguiente número:

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \approx 2,7184593$$

Valor muy cercano al número e = 2,7182818281…

Así, lo que hoy conocemos como logaritmo neperiano (en honor a Napier, su supuesto descubridor), nacen de una idea de Bürgi.

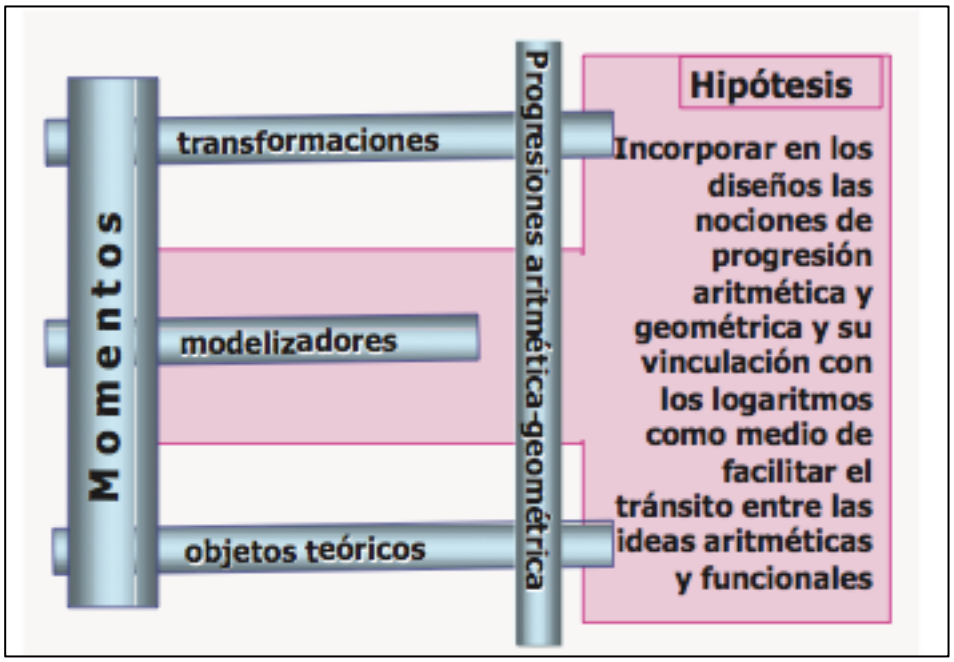
La idea de que Napier trabajara originalmente con senos nos dice que el enfoque de su trabajo fue geométrico. Bürgi, por el contrario, habla de un enfoque algebraico pues su trabajo se basa más en la relación entre series aritméticas y geométricas.

3.1.3 Fase III: Logaritmos como objetos teóricos

Para Ferrari (2001), en la fase III, es en donde los logaritmos adquieren un "cuerpo teórico matemático", acompañado de una definición formal, muy diferente a lo publicado por Napier y en donde conservan aún la esencia del logaritmo como tal, pero desaparece la relación explícita entre sus progresiones (Aritmética y geométrica).

Además, considerando la enseñanza actual del logaritmo, podemos observar que esta carece de las argumentaciones necesarias, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento (Hernández & Ferrari, 2005), generando así una "dislexia" en el aprendizaje, gracias a su enseñanza, en la cual se prioriza una presentación axiomática con una exagerada algoritmización de los pasos a seguir para resolver un problema que los involucre (Ferrari, 2001).

Figura 7. Momentos de los logaritmos



Fuente: Ferrari & Farfán, 2002, p.67.

3.2 Red de Contenidos y Definiciones

3.2.1 Red de contenidos

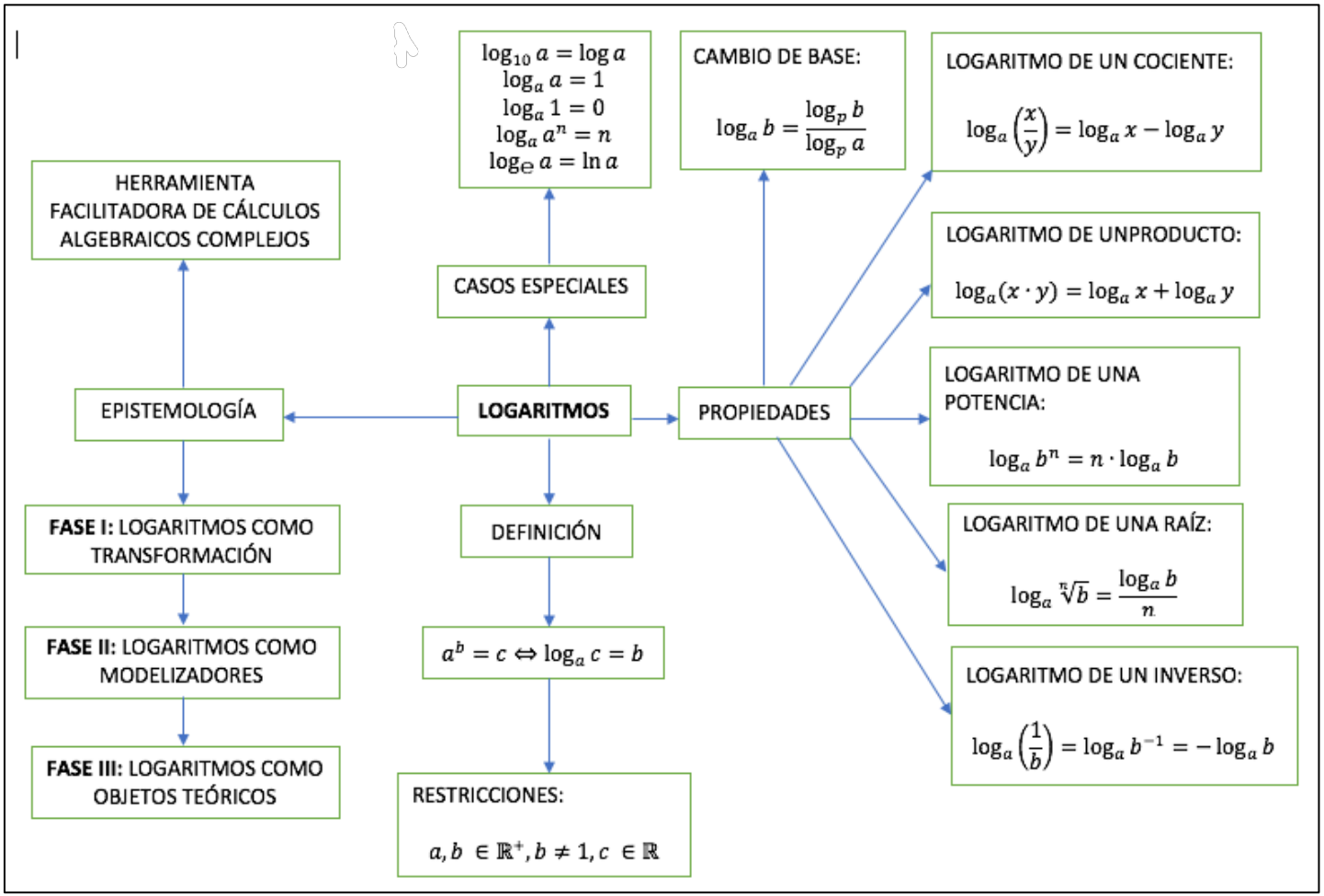


Figura 8: Mapa conceptual de logaritmos. Fuente: Elaboración propia.

3.2.2 Definición Experta

Según Jiménez (2013, p.177):

Teorema 57 Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, entonces la función exponencial en base a es biyectiva, por lo tanto, existe la función inversa.

Definición 46 La función inversa de la exponencial en base a se llama función logaritmo en base a y la denotaremos como log_a, es decir:

$$\log_a x = y \iff exp_a(y) = x$$

Si $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ podemos definir la función como:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a(x) = y$$

Las Gráfica correspondiente son:

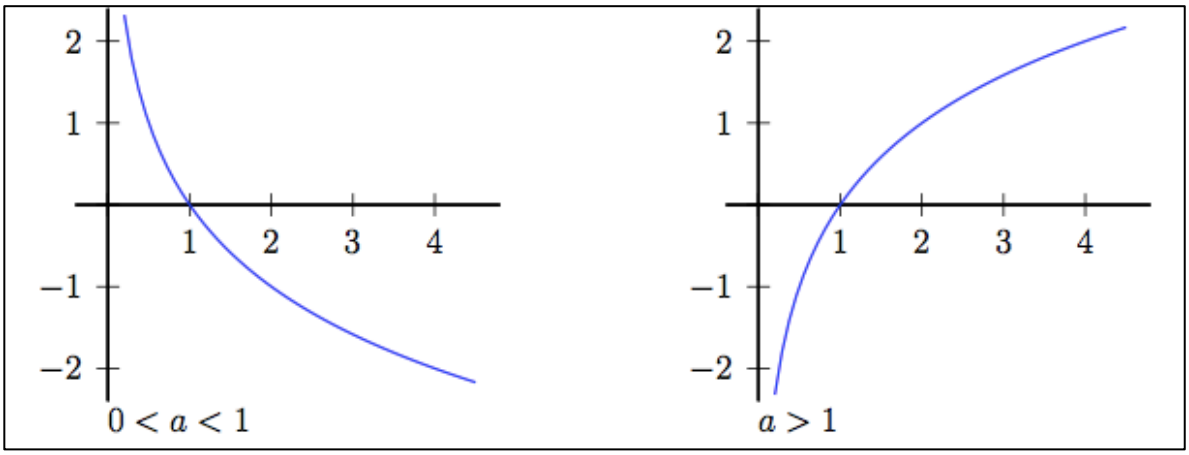


Figura 9. Fuente: Jiménez, 2013, p.177.

Propiedad 58 Sean $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$
4. $\log_a(1) = 0$

5. $\log_a (a^r) = r$
6. $\log_a (x) = \log_a (y) \Leftrightarrow x = y$
7. Si $0 < a < 1$ entonces $\log_a$ es una función decreciente.
8. Si $a > 1$ entonces $\log_a$ es una función decreciente.

Demostración: Sea $u = \log_a$ x y $v = \log_a y$ entonces $a^u = x$ y $a^v = y$

Para (1) tenemos que

$$\log_a(xy) = \log_a(a^u a^v) = \log_a a^{u+v} = u + v$$

Luego

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En (2)

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(a^u a^{-v}) = \log_a a^{u-v} = u - v$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

En (3)

$$\log_a (x^r) = \log_a (a^u)^r = \log_a a^{ru} = ru$$

$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Teorema 59 (Cambio de Base) Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x, \in \mathbb{R}$, entonces

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración: Sea $u = \log_a$ x y $v = \log_a y$ entonces $a^u = x$ y $b^v = x$ así tenemos

$$a^u = b^v$$

$$\log_a a^u = \log_a b^v$$

$$u = v \log_a b$$

$$\log_a x = \log_b x \log_a b$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

3.2.3 Definición Escolar

En los textos entregados por el MINEDUC se presentan contenidos relacionados con logaritmos, en donde destacan la definición, sus propiedades y aplicaciones. Cabe resaltar que estos contenidos se encuentran antes de las actividades a realizar, como resumen de los contenidos abordados en la unidad.

En segundo año medio en el texto para el estudiante del 2018, se presenta la definición de logaritmo en las siguientes figuras:

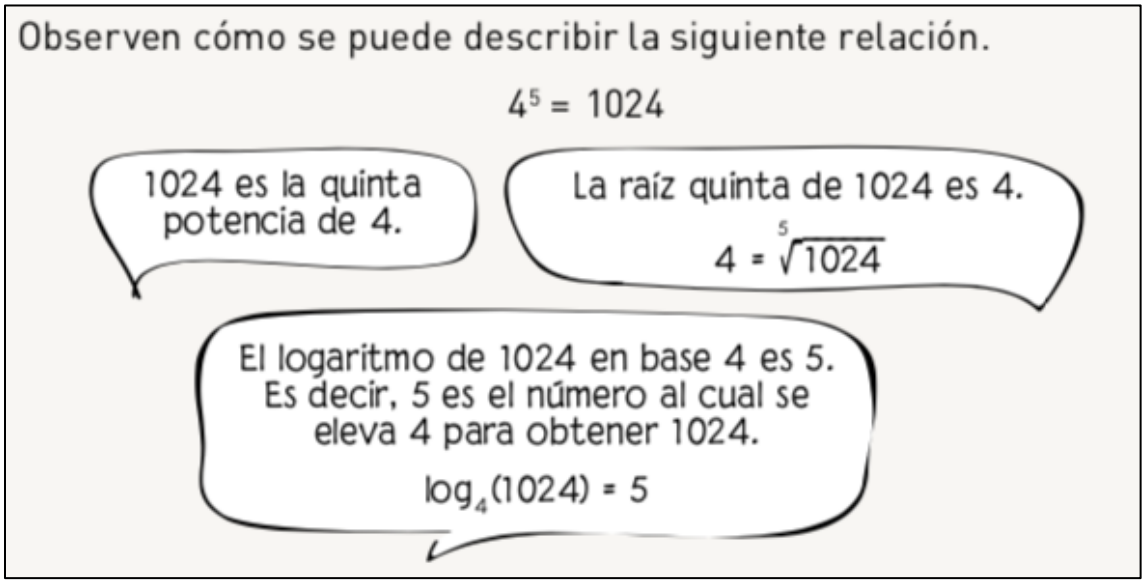


Figura 10: Relación potencia, raíz y logaritmo.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.50.

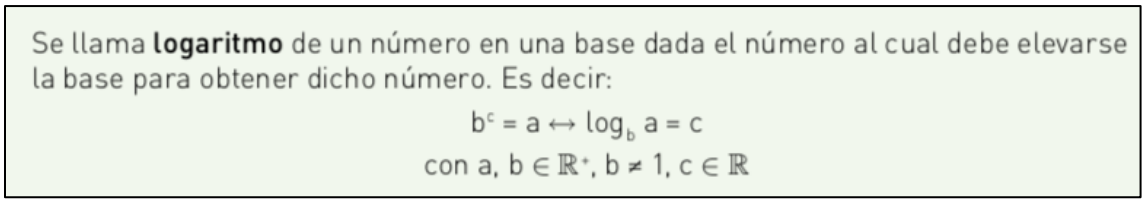
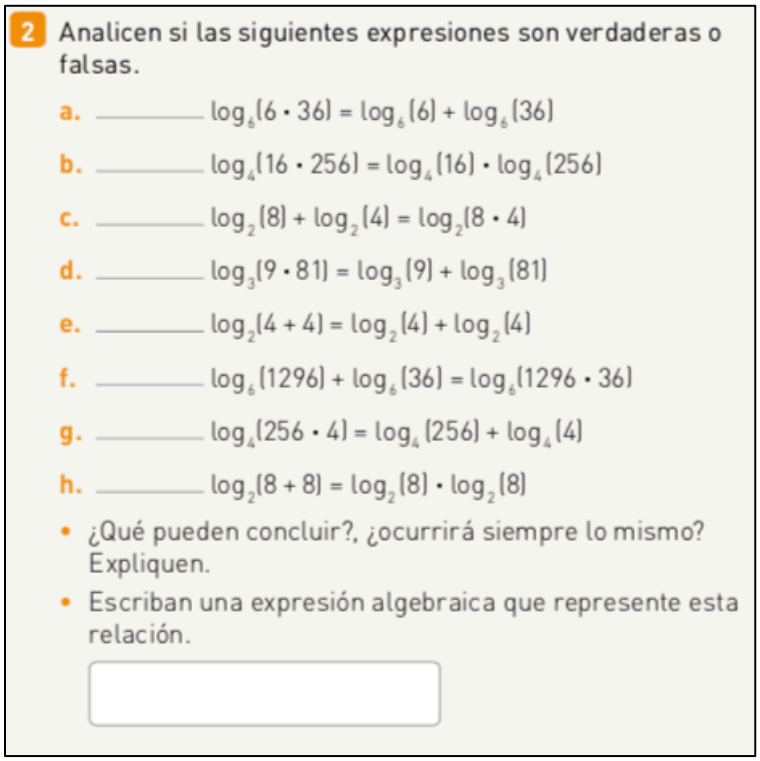


Figura 11: Definición de logaritmo.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.51.

En el texto del estudiante de segundo año medio del 2018 se modelan las propiedades de la siguiente forma:



2 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. _____ $\log_6(6 \cdot 36) = \log_6(6) + \log_6(36)$

b. _____ $\log_4(16 \cdot 256) = \log_4(16) \cdot \log_4(256)$

c. _____ $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$

d. _____ $\log_3(9 \cdot 81) = \log_3(9) + \log_3(81)$

e. _____ $\log_2(4 + 4) = \log_2(4) + \log_2(4)$

f. _____ $\log_6(1296) + \log_6(36) = \log_6(1296 \cdot 36)$

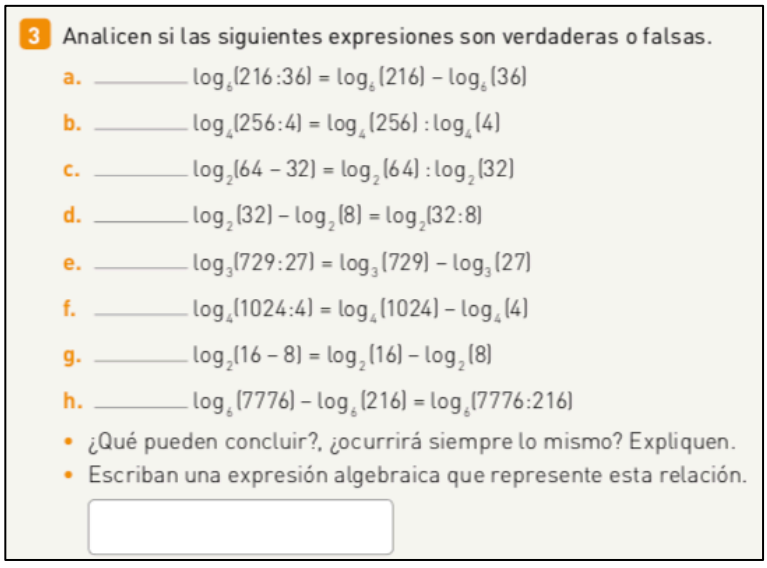
g. _____ $\log_4(256 \cdot 4) = \log_4(256) + \log_4(4)$

h. _____ $\log_2(8 + 8) = \log_2(8) \cdot \log_2(8)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Figura 12: Modelación de propiedad logaritmo de un producto.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.54.



3 Analicen si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a. _____ $\log_6(216:36) = \log_6(216) - \log_6(36)$

b. _____ $\log_4(256:4) = \log_4(256) : \log_4(4)$

c. _____ $\log_2(64 - 32) = \log_2(64) : \log_2(32)$

d. _____ $\log_2(32) - \log_2(8) = \log_2(32:8)$

e. _____ $\log_3(729:27) = \log_3(729) - \log_3(27)$

f. _____ $\log_4(1024:4) = \log_4(1024) - \log_4(4)$

g. _____ $\log_2(16 - 8) = \log_2(16) - \log_2(8)$

h. _____ $\log_6(7776) - \log_6(216) = \log_6(7776:216)$

- ¿Qué pueden concluir?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Expliquen.
- Escriban una expresión algebraica que represente esta relación.

Figura 13: Modelación de propiedad logaritmo de un cociente.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.55.

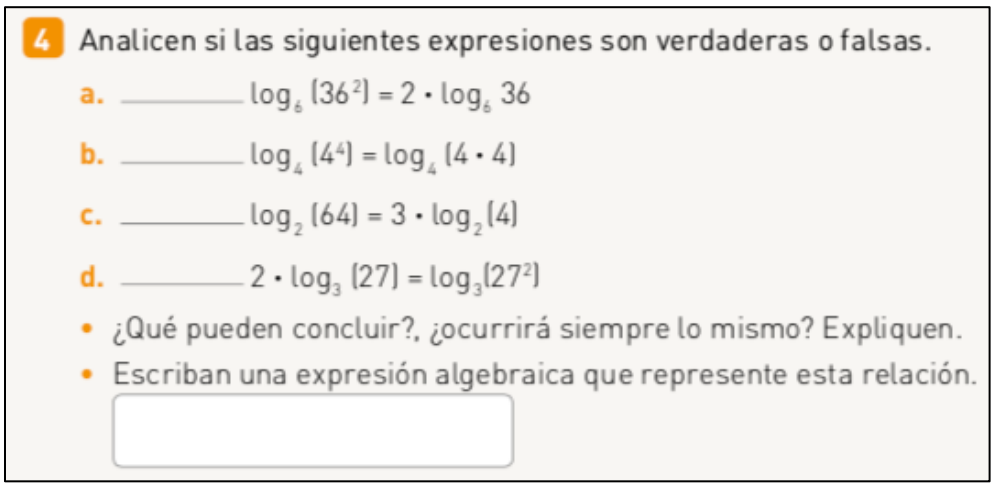


Figura 14: Modelación de propiedad logaritmo de una potencia

Fuente: Chacón et al., 2018, p.55.

En el texto del estudiante del 2018 se mencionan todas las propiedades en la siguiente figura:

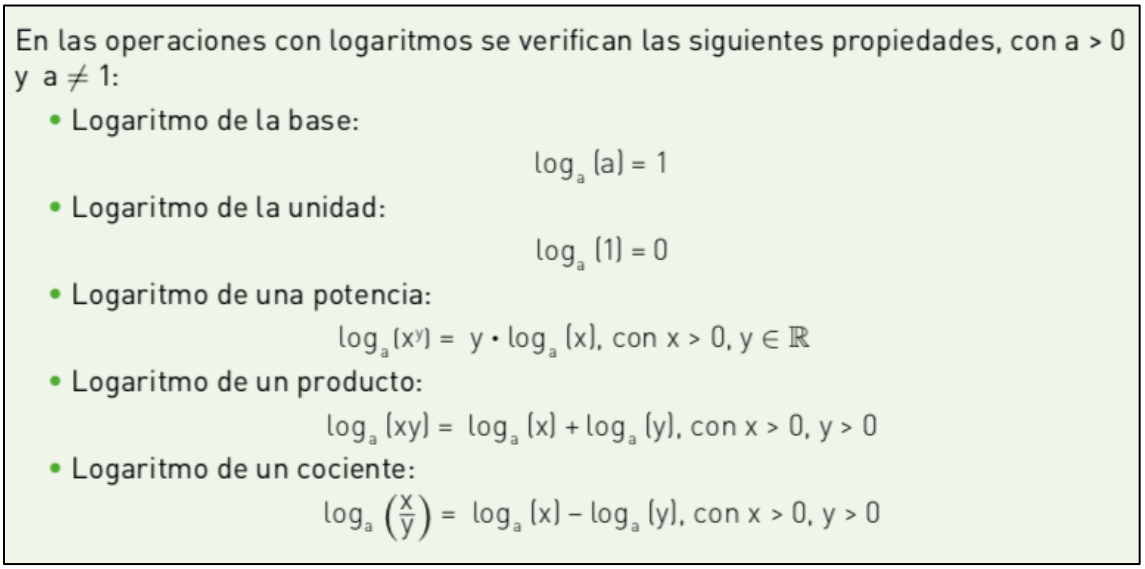


Figura 15: Propiedades de logaritmos.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.57.

3.2.4 Distancia Entre Saberes

Comparando la definición experta con la definición escolar se puede observar que, en la primera, se muestra el logaritmo como una función, la cual proviene de la función exponencial, definida como "la función inversa de la exponencial en base a" (Jiménez, 2013), definida para valores reales positivos. Posteriormente, se presentan las gráficas cuando la base adquiere valores entre 0 y 1 (gráfica izquierda) y para valores mayores que 1 (gráfica derecha). (Véase Figura 9, p.23)

En el caso contrario, la definición escolar del logaritmo se establece una relación con las potencias, resaltando que el valor numérico del logaritmo es el exponente de una potencia, cuya base coincide con la base del logaritmo.

En la definición experta, se consideran ocho propiedades, destacando que las primeras cinco concuerdan con las de la definición escolar, la sexta propiedad establece una igualdad entre logaritmos de distintos argumentos, pero igual base, mientras que la séptima y octava propiedad son más bien la explicación de las gráficas anteriormente mencionadas. Para el caso de la propiedad cambio de base, el autor la señala como un teorema aparte, demostrándolo usando potencias.

Por parte de la definición escolar, se modelan las propiedades de una base, de una unidad, de un producto, de un cociente y de una potencia a través de ejercicios, en donde al final de cada ejercicio se puede concluir dichas propiedades.

Capítulo 4: Análisis De Contenido

En este capítulo, se desarrolla el análisis fenomenológico, es decir, “los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en que se utilizan y aquellas situaciones en la que se presenta y en las cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos de estudio” (Rico, 2013, p.18). Además, se muestran los distintos tipos de representación del objeto estudiado. Esto es de vital importancia dentro de nuestro trabajo, debido a que le da validez a la hora de mostrar el porque de la elección del objeto.

4.1 Análisis Fenomenológico

Para los profesores, especificamente, los de matemática, les resulta cotidiano buscar una relación entre lo que se pretende enseñar con la experiencia, debido a que son los propios alumnos los que cuestionan el uso de lo que se va a aprender, puesto que no le encuentran una utilidad cotidiana. Es por esto que el fin de este análisis para nuestra investigación, consistirá en enumerar ciertas utilidades que estén relacionadas a los logaritmos en diferentes contextos, y su modelamiento en alguna estructura derivada de la estructura matemática original. Más aún, este análisis hace relación a los distintos problemas o situaciones que le dan sentido a este objeto matemático.

A continuación, detallaremos algunas situaciones asociadas a los logaritmos y el ámbito donde es aplicado.

Tabla 3: Resumen de situaciones relacionadas a los logaritmos.

Fenómeno	Ámbito
Aplicación de ecuaciones logarítmicas para la medición de un evento sísmico. $log\, E = 11{,}8 + 1{,}5\, M$ E= Energía liberada por el sismo M= Magnitud en escala Richter	Sismología (Escala de Richter)
Medición del pH: $pH = -\log[H^+]$ Donde: H^+ = Concentración de iones de hidrógeno.	Química
Cálculo de peso animal a través de una escala logarítmica.	Zoología

Medición de la intensidad del sonido. $$I(dB) = 10 \log[\frac{I}{I_o}]$$ Donde: I = Intensidad dada. I_o = Intensidad del umbral de audición estándar.	Física
Cálculo de intereses. $$n = \frac{\log C_f - \log C_i}{\log(1+r)}$$ Donde: n =Tiempo transcurrido C_f = Capital final C_i = Capital inicial r = Interés aplicado	Matemáticas financieras
Cálculo de la antigüedad de restos arqueológicos por método del carbono 14 (C_{14}). $$t = \frac{\log \frac{N_f}{N_0}}{\log 0{,}886}$$ Donde: t = Tiempo estimado de la antigüedad del fósil. N_f= Cantidad de C_{14} al encontrar el fósil. N_0= Cantidad de C_{14} al morir el fósil.	Arqueología

Fuente: Elaboración propia.

4.2 Sistemas de Representación

Los sistemas de representación que analizaremos para las potencias y los logaritmos son los siguientes:

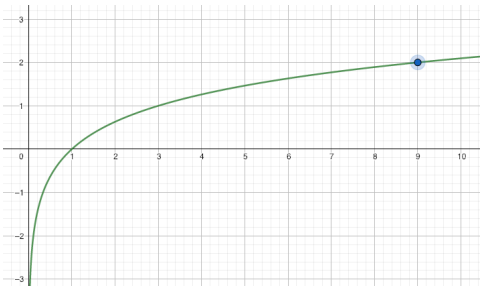
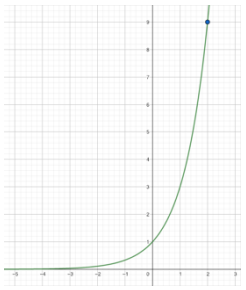
Representación Verbal: Esta representación trata de entregar una expresión por medio del lenguaje escrito, siendo este el método más importante en lo cotidiano, no obstante, carecería de sentido sin las demás representaciones.

Representación Simbólica: Este tipo de representación expresa una potencia o logaritmo por medio de una combinación de nomenclaturas que involucran números y letras.

Representación Gráfica: Es aquí en donde los objetos tratan de ser vistos de manera visual. Para este caso esta representación se toma como funciones en un plano cartesiano.

A continuación, se presentan ejemplos mediante una tabla, de los distintos tipos de representación para potencia y logaritmo considerados en nuestro trabajo.

Tabla 4: Sistema de representación de logaritmos y potencias.

Representación verbal	Al elevar la base tres al cuadrado tiene como resultado nueve	Tres al cuadrado es nueve.
Representación algebraica simbólica	$\log_3 9 = 2$	$3^2 = 9$
Representación gráfica		

Fuente: Elaboración propia.

Conforme con lo señalado en este Análisis es que se dieron a conocer los diversos contextos y situaciones en donde el logaritmo es utilizado en la actualidad para facilitar cálculos asociados a situaciones en el área científica. Considerando la utilidad práctica de los logaritmos y las potencias, es que también se mostraron los distintos sistemas de representación, contrastando así los objetos con la intención de diferenciar las distintas formas en que se puede presentar una misma expresión matemática utilizando ambos objetos matemáticos.

Capítulo 5: Análisis Cognitivo

En conformidad con Rico (2013), el Análisis Cognitivo busca organizar “el para qué” estudiar un conocimiento, junto con el “hasta dónde” llegar en su aprendizaje: Para ello, utilizaremos los documentos oficiales que orientan el currículum escolar vigente, que nos permitan, describir las expectativas de aprendizaje y las limitaciones asociadas, analizando con ello los posibles errores y dificultades que podrían presentar los estudiantes durante su proceso de aprendizaje.

5.1 Expectativas De Aprendizaje

Con respecto al Programa de Estudio (2016d) de segundo año medio, que entra en vigencia el año 2018, se afirma lo siguiente:

> Establecen la relación que existe entre potencias, raíces y logaritmos, mediante representaciones simbólicas y pictóricas, por medio de gráficos o metáforas. Se espera que aprendan a aplicar el concepto de potencias, raíces o logaritmos para resolver problemas rutinarios o no rutinarios en diferentes contextos, y modelar situaciones utilizando el concepto de potencia o raíz. Se pretende también que sean capaces de representar y analizar problemas que pueden resolver mediante las operaciones de logaritmos, y establecer restricciones según la naturaleza del problema. MINEDUC (2016d, p. 64).

El objetivo de aprendizaje (OA) de acuerdo con el Programa de Estudio (MINEDUC, 2016d, p. 66), es:

OA2: Mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces y logaritmos:

- *Comparando representaciones de potencias de exponente racional con raíces enésimas en la recta numérica.*
- *Convirtiendo raíces enésimas a potencias de exponente racional y viceversa.*
- ***Describiendo la relación entre potencias y logaritmos.***
- *Resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que involucren potencias, logaritmos y raíces enésimas.*

Además, para este objetivo se presentan los siguientes indicadores de evaluación que permiten evidenciar que los estudiantes han alcanzado este aprendizaje:

- *Relacionan y caracterizan las raíces por medio de potencias de exponente racional.*
- *Derivan y determinan propiedades relativas a multiplicaciones y divisiones con raíces.*
- *Resuelven problemas que involucren raíces y números racionales.*
- ***Establecen relaciones entre potencias**, raíces y **logaritmos.***
- *Comparan representaciones de potencias con exponente racional, con raíces enésimas, y las representan en la recta numérica.*
- ***Explican la relación entre potencias y logaritmos**.*
- ***Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir**, desde potencias a raíces y viceversa, y desde **potencias a logaritmos y viceversa**.*
- *Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos.*

Las actividades que predominan en el programa de estudio son del tipo de reproducción según la clasificación de Lupiáñez (2009), las cuales serán detalladas más adelante en este capítulo. Para el contenido logaritmo, es entendible que predominen las tareas de reproducción, ya que como afirma Sanabria (2016), "generalmente en la mayoría de las situaciones escolares, la enseñanza de logaritmo se realiza de manera mecánica y fuera de contexto", siendo el único papel del estudiante reproducir los logaritmos.

En rigor, para tener todos los antecedentes necesarios para cumplir con los objetivos planteados en este trabajo, a continuación, entregaremos un resumen de las exigencias curriculares que entrega el Ministerio sobre potencia (MINEDUC, 2016a, 2016b, 2016c). Para ello incorporamos la siguiente tabla:

Tabla 5: Objetivos de aprendizaje relacionados a los logaritmos.

Nivel	Objetivo de Aprendizaje	Indicadores de Evaluación
Séptimo año de enseñanza básica	OA5: Utilizar potencias de base 10 con exponente natural: - Usando los términos potencia, base, exponente, elevado. - Definiendo y usando el exponente 0 en el sistema decimal. - Expresando números naturales en notación científica (sistema decimal). - Resolviendo problemas, usando la notación científica.	- Representan potencias de base 10 de manera concreta, pictórica y simbólica. - Reconocen potencias como productos de factores iguales, identificando la base y el exponente. - Transforman potencias de base 10 en números naturales y viceversa. - Descomponen números en potencias de base 10. - Identifican los valores posicionales del sistema posicional como potencias y completan tablas posicionales. - Describen la relación entre los números escritos en sistema métrico decimal y su notación científica. - Resuelven problemas que involucra notación científica.
Octavo año de enseñanza básica	OA3: Explicar la multiplicación y la división de potencias de base natural y exponente natural hasta 3, de manera concreta, pictórica y simbólica.	- Representan potencias de base y exponente natural hasta 3 con material concreto, como candados con clave de dígitos, trompo poligonal con números, dados didácticos, diagramas de árbol, etc. - Representan pictóricamente la multiplicación de potencias de igual base o de igual exponente natural hasta 3. - Representan la división de potencias de igual base o de igual exponente natural hasta 3. - Descubren, comunican y aplican las propiedades de la multiplicación y división de potencias, incluyendo el significado del exponente cero, en forma pictórica o simbólica. - Representan la potencia de potencia de manera concreta (combinación de máquinas que amplifican imágenes). - Relacionan situaciones reales con multiplicación, división y potencias de potencias. - Resuelven ejercicios rutinarios, aplicando la multiplicación, la división y la potenciación de potencias.

Primer año de enseñanza media	OA2: Mostar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero: • Transfiriendo propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes. • Relacionándolas con el crecimiento y decrecimiento de cantidades. • Resolviendo problemas de la vida diaria y otras asignaturas.	- Reconocen que la potencia de potencia es una multiplicación iterativa. - Reconocen el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos. - Aplican las propiedades de la multiplicación, la división y la potenciación de potencias en ejercicios. - Modelan procesos de crecimiento y decrecimiento en Economía y en Ciencias Naturales. - Resuelven problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, relacionados con potencias de base racional y exponente entero.

Fuente: Elaboración propia.

Vemos que para comprender logaritmos se necesita el conocimiento previo de potencias. La noción de potencia se estudia desde séptimo básico hasta segundo medio, comenzando en séptimo utilizando la notación científica para reescribir un número de manera más simplificada, hasta llegar a segundo medio donde las potencias se relacionan con los logaritmos.

En segundo medio, es donde está el objetivo de aprendizaje de logaritmos, que tiene como propósito: “mostrar que comprenden las relaciones entre potencias, raíces y logaritmos” enfocándonos en “describiendo la relación entre potencias y logaritmos” (MINEDUC, 2016d, p. 30), lo cual se acerca a la problemática ya descrita en los capítulos anteriores.

5.2 Limitaciones Del Aprendizaje

Debido a la gran importancia que tienen los logaritmos dentro de las ciencias generales o de ciertas áreas, es de vital importancia reconocer los posibles errores que pueden presentarse tanto en el uso de propiedades como en la aplicación del logaritmo. Es por esto por lo que es necesario saber las posibles dificultades que pueden ocurrir con el uso de este objeto.

En Sanabria (2016) se expone que una adecuada presentación de este objeto por partes de los profesores hacia los estudiantes repercutirá de mejor manera en una aplicación del contenido en cualquier ámbito a desarrollar; lamentablemente, a la hora de introducir el concepto se dan a conocer las propiedades con ejemplos sin demostración alguna, dejando solo al alumno, el rol de reproducir mecánicamente lo que el profesor expuso.

En un estudio realizado por la Agencia de Calidad de la Educación (2017), en alumnos de segundo medio que realizaron el SIMCE, se señala lo siguiente:

> La evidencia revisada muestra que los estudiantes de II medio comúnmente presentan errores al responder preguntas que requieren comprensión del conjunto de los números racionales, de las potencias, de raíces y logaritmos. Lo anterior repercute, además, en la presencia de errores en la realización de operaciones dentro de cada uno de estos ámbitos. (p.14)

A continuación, presentaremos las posibles dificultades que pueden aparecer en el desarrollo de los logaritmos:

Tabla 6: Errores y dificultades de los Logaritmos

Dificultades	Errores
Comprensión de la definición de logaritmo.	No maneja las relaciones entre logaritmo, potencia y raíz, y establece una relación errónea entre dichos conceptos. • Multiplicar la base con el argumento para encontrar el valor de logaritmo. $\log_a b = c \iff a \cdot b = c$ • Dividir la base con el argumento para encontrar el valor del logaritmo. $\log_a b = c \iff a \div b = c$ • Relacionar logaritmos con potencias: ➢ Considera que el argumento corresponde al exponente de la potencia. $\log_a b = c \iff a^b = c$ ➢ Considera que el argumento del logaritmo corresponde a la base de la potencia. $\log_a b = c \iff b^a = c$
Deducir y aplicar propiedades de logaritmos.	Puede presentar dificultades al reducir o desarrollar las expresiones logarítmicas. • Propiedad multiplicación: la forma correcta es: $\log_a(b \cdot d) \iff \log_a b + \log_a d$ Un ejemplo de un error: $\log 3 + \log(x+1) = \log 3 + \log x + \log 1$ • Propiedad división: la forma correcta es: $\log_a(b \div d) \iff \log_a b - \log_a d$ Un ejemplo de un error: $\log x - \log 3 = \log(x-3)$ • Cambio de base: la forma correcta es: $\log_a b \iff \frac{\log_d b}{\log_d a}$ Un ejemplo de un error: $\frac{\log x}{\log 5} = \log_x 5$
	Pueden presentar dificultades fruto de las notaciones y la longitud de las expresiones. Puede ser que los estudiantes no apliquen bien alguna de las propiedades dada una expresión muy extensa que contenga logaritmos, al igual que los ejemplos anteriores.

Resolver problemas aplicando logaritmos.	Pueden existir errores debido a la aplicación incorrecta de propiedades en expresiones no definidas. • Logaritmo de argumento negativo: Como sabemos, no existe el argumento negativo a la hora de calcular logaritmos • Logaritmo de 0 El logaritmo de 0 no existe, si lo queremos ver desde las potencias, podemos decir que "todo número elevado a un exponente real, su resultado será un número distinto de 0" • No existe logaritmo de base negativa Podemos concluir esta propiedad de la definición de logaritmos, donde las restricciones dicen: $\log_a b = c \ ; \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$

Fuente: Elaboración propia.

5.3 Oportunidades De Aprendizaje

Analizaremos las tareas que se encuentran en el programa de estudio de segundo año de enseñanza media y del libro del estudiante del mismo nivel, las cuales promueven el logro del objetivo de aprendizaje del logaritmo.

Para analizar las tareas las clasificaremos en indicadores de grados de complejidad (Lupiáñez, 2009), los cuales fueron recogidos en el marco del proyecto PISA en tres conjuntos de tareas, en función de las demandas cognitivas que son necesarias para resolverlas. Para mostrar los indicadores de grados de complejidad, presentamos la siguiente tabla:

Tabla 7: Indicadores para los grados de complejidad de las tareas.

Reproducción	Conexión	Reflexión
Contextos familiares Conocimientos ya practicados Aplicación de algoritmos estándar Realización de operaciones sencillas Uso de fórmulas elementales	Contextos menos familiares Interpretar y explicar Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	Tareas que requieren comprensión y reflexión Creatividad Ejemplificación y uso de conceptos Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos Generalizar y justificar resultados obtenidos

Fuente: Lupiáñez, 2009.

A través de estos conjuntos clasificaremos las tareas relacionadas con el objetivo de aprendizaje propuestas en el programa de estudio y del libro del estudiante.

5.3.1 Tareas del programa de estudio

Se encontraron siete tareas relacionadas con el objeto logaritmo, las cuales fueron clasificadas según tabla anterior.

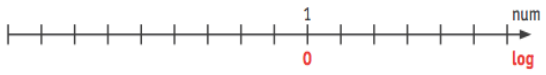
Tabla 8: Tarea 1

<table>
<tr>
<td>Representar
Elegir y elaborar representaciones e identificar sus límites y su validez. (OA i)

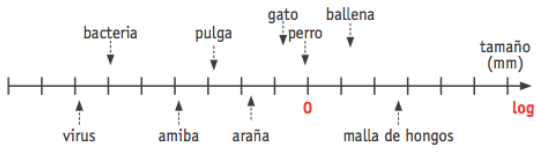
4. Representan números positivos con su logaritmo de base 10.
a. Relacionan los valores posicionales de los números dados en la primera columna, con las potencias de 10 y su exponente. Completan la tabla siguiente:

<table>
<tr><th>VALOR POSICIONAL</th><th>POTENCIA DE 10</th><th>EXPONENTE</th><th>EXPRESIÓN CON LOGARITMO</th></tr>
<tr><td>0,000 000 1</td><td>10^{-7}</td><td>−7</td><td>log(0,000 000 1) = −7</td></tr>
<tr><td>0,000 001</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,000 01</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,000 1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,001</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,01</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>0,1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>100</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1 000</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>4.a

Reproducción:
Aplicación de algoritmos estándar.</td>
</tr>
<tr>
<td>b. Completan la siguiente recta numérica logarítmica con los valores posicionales y sus logaritmos correspondientes:

 
</td>
<td>4.b

Conexión: Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación.</td>
</tr>
<tr>
<td>c. Leen y anotan los tamaños aproximados (estatura, diámetro, etc.) de algunos seres vivos, en la recta numérica logarítmica que se presenta a continuación:

® Ciencias Naturales OA j de 2° medio.</td>
<td>4.c

Reflexión: Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.</td>
</tr>
</table>

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.78-79.

Tabla 9: Tarea 2.

<table>
<tr>
<td>
5. Calculan productos, cocientes y potencias de números mediante operaciones de sus logaritmos correspondientes.
a. Completan la tabla siguiente:
Resolver problemas
Utilizar estrategias avanzadas. (OA a)
<table>
<tr><th>NÚMERO 1</th><th>NÚMERO 2</th><th>PRODUCTO</th><th>LOGARITMO 1</th><th>LOGARITMO 2</th><th>LOGARITMO DEL PRODUCTO</th></tr>
<tr><td>100</td><td>10 000</td><td>1 000 000</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>10^3</td><td>10^5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>100 000</td><td>1 000</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10^a</td><td>10^b</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th>NÚMERO 1</th><th>NÚMERO 2</th><th>COCIENTE</th><th>LOGARITMO 1</th><th>LOGARITMO 2</th><th>LOGARITMO DEL COCIENTE</th></tr>
<tr><td>1 000 000</td><td>100</td><td>10 000</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Responden:
• ¿Qué regularidad existe entre el producto de los números, los logaritmos y el logaritmo del producto?
• ¿Qué regularidad existe entre el cociente de los números, los logaritmos y el logaritmo del cociente?
</td>
<td>5.a
Reproducción:
Aplicación de algoritmos estándar.</td>
</tr>
<tr>
<td>
b. Determinan los logaritmos de potencias de base 2:
• $\log_2 128$
• $\log_2 1\,024$
• $\log_2 32$
• $\log_2 \frac{1}{4}$
• $\log_2 0{,}125$
• $\log_2 1$
</td>
<td>5.b
Reproducción: uso de fórmulas elementales.</td>
</tr>
<tr>
<td>
c. Calculan los siguientes productos y cocientes de las potencias de base 2, aplicando las reglas de los logaritmos de base 2:
• $64 \cdot 32$
• $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$
• $1\,024 : 64$
• $512 : \frac{1}{16}$
</td>
<td>5.c
Conexión: seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.</td>
</tr>
</table>

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.79-80.

Tabla 10: Tarea 3.

<table>
<tr><td>Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

6. La acidez de una sustancia se determina mediante el valor pH. Entre la concentración c de los iones de hidrógeno en mol/litro y el valor del pH, existe la relación pH = –log c.
a. Calculan el valor pH de:
• lejía de bicarbonato c = 2 · 10^{-14} mol/litro
• tomates c = 6,3 · 10^{-5} mol/litro
• jugo de limones c = 3,2 · 10^{-3} mol/litro</td><td>6.a

Reproducción: uso de fórmulas elementales.</td></tr>
<tr><td>b. Calculan la concentración de los iones de hidrógeno de:
• agua jabonada pH = 10
• sangre pH = 7,5
• agua mineral pH = 4,5
 </td><td>6.b

Representación: uso de fórmulas elementales.</td></tr>
</table>

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.80.

Tabla 11: Tarea 4.

<table>
<tr><td>7. En el agua de un pozo se puede determinar la profundidad x, en dependencia del porcentaje p de la intensidad de la luz entrante que queda en el lugar: $x = \frac{\log p}{-0,9}$ (x en metros).

a. Determinan la profundidad en la cual existen las siguientes intensidades de luz:
• p = 80 %
• p = 40 %
• p = 20 %
• p = 10 %

b. ¿La reducción de la intensidad sigue una función afín? Explican y comunican la respuesta.

Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)</td><td>7.a

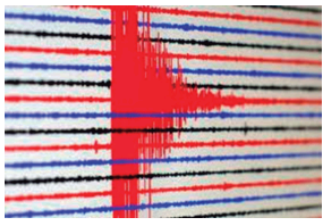
Reproducción: uso de fórmulas elementales.

7.b

Conexión: interpretar y explicar.</td></tr>
</table>

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.81.

Tabla 12: Tarea 5.

8. La magnitud de un terremoto se mide en grados de la escala Richter. Si un sismógrafo está a una distancia de 100 km del epicentro y registra la amplitud de la oscilación de 1 mm, que corresponde a 10^3 µm (micrómetro), la magnitud del terremoto en el epicentro es 3, lo que coincide con el exponente 3 de la potencia en base 10, que corresponde, a su vez, a la amplitud medida en micrómetros. • Desarrollan la expresión matemática con la cual se determina la magnitud **M** de un terremoto, en dependencia de la amplitud **A** registrada por el sismógrafo. • Calculan las magnitudes de los terremotos registrados a 100 km de distancia del epicentro. Completan la tabla. **Resolver problemas** Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)  **® Ciencias Naturales OA 9 de 7° básico, OA 13 de 1° medio y OA a de 2° medio.**	8.a Conexión: interpretar y explicar. 8.b Reproducción: aplicación de algoritmos estándar.

AMPLITUD EN mm	AMPLITUD EN µm (MICRÓMETROS)	MAGNITUD (RICHTER)
1	10^3	3
2,5		
47,3		
60		
120		

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.81-82.

Tabla 13: Tarea 6.

Resolver problemas Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b) 9. Una planta nuclear está diseñada para resistir un terremoto de magnitud 8,25 Richter. • Si se aumenta la magnitud en un punto en la escala de Richter, ¿cuántas veces más grande es la amplitud de la oscilación del movimiento de la Tierra? • Si ocurre un terremoto de magnitud 9,0, ¿cuánto más grande es la amplitud del movimiento en comparación con la amplitud máxima esperada de 8,25? • Entre la energía **E** de la oscilación de la Tierra y la magnitud **M** del terremoto, existe una fórmula de aproximación: log E = 1,5M. Calculan el aumento de la energía **E** si la magnitud **M** del terremoto sube un grado. **® Ciencias Naturales OA 9 de 7° básico, OA 13 de 1° medio y OA a de 2° medio.**	9.a Conexión: interpretar y explicar. 9.b Conexión: interpretar y explicar. 9.c Reproducción: uso de fórmulas elementales.

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.82.

Tabla 14: Tarea 7.

<table>
<tr>
<td rowspan="4">10. El nivel del volumen L de un sonido depende de la Intensidad I del sonido según la ecuación: L(I) = 10logI +120[dB]. La intensidad mínima a partir de la cual el oído humano puede registrar un tono es de 10^{-12} [Watt/m^2].

Resolver problemas
Comprobar resultados propios y evaluar procesos. (OA b)

• Calculan mediante las intensidades el nivel del volumen de los sonidos en dB.
• Completan la tabla con los niveles.

<table>
<tr><th>FUENTE DEL SONIDO</th><th>NIVEL DEL VOLUMEN L(I) EN dB</th><th>RIESGO DE EXPOSICIÓN</th></tr>
<tr><td></td><td>140</td><td>Daña la audición en poco tiempo.</td></tr>
<tr><td></td><td>130</td><td>Daña la audición en poco tiempo.</td></tr>
<tr><td></td><td>100</td><td>Exposición máxima: 15 min.</td></tr>
<tr><td></td><td>90</td><td>Exposición máxima: 3 h.</td></tr>
<tr><td></td><td>80</td><td>Baja la concentración por largo tiempo.</td></tr>
<tr><td></td><td>70</td><td>Baja la concentración por largo tiempo.</td></tr>
<tr><td></td><td>40</td><td>No hay.</td></tr>
</table>
</td>
<td>10.a</td>
</tr>
<tr>
<td>Reproducción: uso de fórmulas elementales.</td>
</tr>
<tr>
<td>10.b</td>
</tr>
<tr>
<td>Conexión: manejar y relacionar diferentes sistemas de representación.</td>
</tr>
</table>

Fuente: MINEDUC, 2016d, p.83.

Como hemos visto anteriormente en lo propuesto por el programa de estudio de segundo medio, predominan más las tareas de reproducción que conexión como logro de objetivo de aprendizaje.

5.3.2 Tareas del libro del estudiante

Se seleccionan siete tareas relacionadas con el objeto logaritmo, las cuales fueron clasificadas según tabla anterior.

Tabla 15: Tarea 1.

2 Completen la siguiente tabla, siguiendo el ejemplo. Potencia | Base | Exponente | Logaritmo $8^3 = 512$ | 8 | 3 | $\log_8(512) = 3$ $10^4 = 10000$ | | | | 6 | −2 | | | | $\log_9(1) = 0$ $5^{-3} = 0{,}008$ | | | | | | $\log_{64}(4) = \frac{1}{3}$	2 Reproducción: aplicación de algoritmos estándar.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.50.

Tabla 16: Tarea 2.

1. Aplicando la definición de logaritmo, comprueba si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica. **a.** $\log_5(25) = 2$ **b.** $\log_2(0{,}25) = 0{,}5$ **c.** $\log_9(-3) = 2$ **d.** $\log_1(3{,}78) = 0$ **e.** $\log(2) = 100$ **f.** $\log(10) = 1$ **g.** $\log_4(0{,}25) = -2$ **h.** $\log_{36}(6) = 0{,}5$ **i.** $\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{81}}\right) = -\frac{8}{5}$ **j.** $\log_{\frac{1}{5}}(125) = -3$ **k.** $\log(10^5) = 5$ **l.** $\log_8\left(\sqrt[3]{64}\right) = \frac{3}{2}$	1.a – 1. l Reproducción: aplicación de algoritmos estándar.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.52.

Tabla 17: Tarea 3.

3. Determina en cada caso el valor de a. **a.** $\log_4(2) = a$ **b.** $\log_a(8) = 3$ **c.** $\log_a(2048) = 11$ **d.** $\log_9(a) = 4$ **e.** $\log_5(0{,}04) = a$ **f.** $\log_{\frac{1}{81}}(9) = a$ **g.** $\log_{\frac{1}{64}}(2) = a$ **h.** $\log_{0,2}(a) = -2$ **i.** $\log_7(a) = 3$ **j.** $\log_{1000}(a) = -\frac{1}{3}$	3.a – 3. j Reproducción: aplicación de algoritmos estándar.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.52.

Tabla 18: Tarea 4.

4. Ciencias naturales. Para describir la intensidad del sonido y relacionarla con su magnitud en watts por metro cuadrado (W/m^2) se utilizan los decibeles. La intensidad en decibeles y la magnitud (I) se relacionan mediante la fórmula $dB = 120 + 10\log(I)$ **a.** Analiza las siguientes situaciones y completa la tabla con la magnitud del sonido correspondiente. **b.** Investiga: ¿qué umbrales de sonido, en decibeles, corresponden a un ambiente saludable?, ¿y al comienzo del dolor? Compara con tus compañeros.	4.a Reproducción: aplicación de algoritmos estándar. 4.b Reflexión: relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.

Situación	Intensidad del sonido (dB)	Magnitud del sonido (W/m^2)
Pasos en el suelo	10	
Viento en los árboles	20	
Tráfico en hora de congestión	80	
Motocicleta	100	
Despegue de un avión	150	
Explosión	180	

Fuente: Chacón et al., 2018, p.53.

Tabla 19: Tarea 5.

1. Calcula los siguientes logaritmos, desarrollando cada expresión de modo de utilizar los valores de la tabla y una calculadora con adición, sustracción, multiplicación y división. Observa el ejemplo. $\log(6) = \log(2 \cdot 3) = \log(2) + \log(3) \approx 0{,}30 + 0{,}48 \approx 0{,}78$ $\log(2) \approx 0{,}30$ | $\log(11) \approx 1{,}04$ $\log(3) \approx 0{,}48$ | $\log(13) \approx 1{,}11$ $\log(5) \approx 0{,}70$ | $\log(17) \approx 1{,}23$ $\log(7) \approx 0{,}85$ | $\log(19) \approx 1{,}28$ a. $\log(14)$ b. $\log(35)$ c. $\log(57)$ d. $\log(63)$ e. $\log(98)$ f. $\log(120)$ g. $\log(91)$ h. $\log(128)$	1.a – 1.h Reproducción: aplicación de un algoritmo estándar.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.58.

Tabla 20: Tarea 6.

3. Aplica las propiedades para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo. Considera a, b, p, q, r, s $\in \mathbb{R}^+$. a. $\log(5) + \log(8)$ b. $\log(15) + \log(15) - \log(5)$ c. $\frac{1}{2}\log(5) + 3\log(125)$ d. $\log(a^2 + b) - \log(a)$ e. $a\log(p) - 3c\log(q)$ f. $\log(\sqrt{p}) - 4\log(q) + \frac{1}{3}[\log(\sqrt{r}) + 2\log(s)]$	3.a – 3.f Reproducción: uso de fórmulas elementales.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.58.

Tabla 21: Tarea 7.

21 **Ciencias naturales.** El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una sustancia. Se mide de acuerdo con la concentración de moles de hidrógeno utilizando la fórmula: $pH = -\log[H^+]$ Donde $[H^+]$ corresponde a la concentración de iones de hidrógeno, medida en moles por litro. a. Calcula el pH de una sustancia cuya concentración de iones de hidrógeno es de 0,00000038 moles por litro. b. En algunos lugares muy contaminados se produce el fenómeno llamado "lluvia ácida". Calcula la concentración de iones de hidrógeno de una lluvia ácida cuyo pH es 2,8. c. Calcula la concentración de iones de hidrógeno de las siguientes sustancias, conociendo su pH aproximado. Sustancia / pH Vinagre 2,9 Jugo gástrico 1,5 Jugo de naranja 4,5 Orina 6,5 Jabón de manos 9,5	21.a Reproducción: aplicación de algoritmos estándar. 21.b Reproducción: aplicación de algoritmos estándar. 21.c Reproducción: aplicación de algoritmos estándar.

Fuente: Chacón et al., 2018, p.74.

Hemos visto que al igual que las tareas propuestas por el programa de estudio, en el libro del estudiante predominan las tareas de reproducción, por ser mecánicas con la aplicación del logaritmo y sus propiedades. La aplicación del logaritmo puede ser un problema, ya que como Sanabria (2016) afirma "puede existir un obstáculo en la enseñanza de logaritmos como forma de aplicación evaluando en una fórmula", siendo la dificultad pasar desde lo mecánico a la aplicación de este objeto.

Capítulo 6: Análisis de Instrucción

Siguiendo con las fases del Análisis Didáctico (Rico, 2013), presentaremos en este capítulo el Análisis de Instrucción, que considera el diseño de tareas para la clase y su gestión en el aula, mediante la planificación. El diseño de tareas se realiza de acuerdo con lo señalado por Watson y Sullivan (Como se citó en Lupiáñez, 2009, p.62) "cuando el profesor decide emplear unas tareas particulares, o una clase de tareas, están tomando decisiones acerca de la actividad matemática, del aprendizaje que podría producirse y sobre las propias matemáticas".

6.1 Cuestionario exploratorio

Este cuestionario exploratorio tiene el propósito de saber los conocimientos de los estudiantes sobre potencias, como herramienta necesaria para el diseño de una propuesta que relacione las potencias con los logaritmos, bajo la perspectiva de la Dialéctica Herramienta-Objeto (Díaz, 2014). El tiempo estimado para el desarrollo es de una hora pedagógica.

En la siguiente tabla se presenta el cuestionario con la respectiva justificación de las respuestas esperadas por parte de los estudiantes.

Cuestionario: Noción y aplicación de las potencias

Preguntas	Justificación
a) ¿Qué significa para ti una potencia?	La respuesta esperada es la definición de concepto de potencia que se entrega en octavo año de enseñanza básica.
b) Representa la siguiente multiplicación como potencia. $25 \cdot 25 \cdot 5 =$	Las posibles respuestas consideran que identifiquen la representación de una potencia en términos de un valor ya entregado en la expresión (5).
c) Resuelva el siguiente ejercicio. ¿Cuál es la mitad de 2^6?	La respuesta esperada es que el estudiante tenga conocimientos de las propiedades de potencias, específicamente de división de potencias de igual base.
d) Don Pedro instaló un estanque cúbico en su casa para almacenar agua. Si la arista del estanque es de 8 cm. ¿Qué potencia representa al volumen de este estanque?	El estudiante debe establecer una relación entre la situación y su representación geométrica, y que posteriormente concluya que el problema puede ser resuelto a través de una expresión con potencias.

Tabla 22. Justificación cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

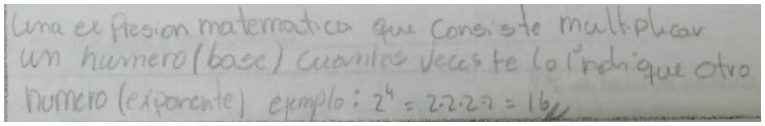
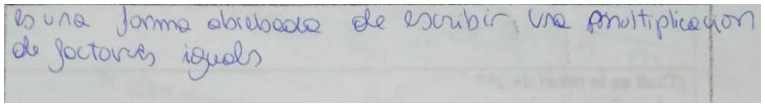
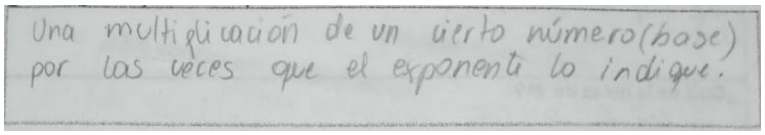
6.1.1 Resultados de Aplicación

A partir de las respuestas de los estudiantes, se levantan categorías que permite el análisis de acuerdo con el objetivo planteado para este cuestionario.

Pregunta 1

- Categoría 1: Identifican los elementos de una potencia y entregan un ejemplo numérico.
- Categoría 2: Asocian que sólo el producto está ligado a este objeto.
- Categoría 3: Mencionan sólo los elementos de una potencia.
- Categoría 4: Sólo señalan la multiplicación y exponente.

Cuestionario: Noción y aplicación de las potencias

Pregunta 1:	¿Qué significa para ti una potencia?
CATEGORÍA 1	
	
R: *Una expresión matemática que consiste multiplicar un numero (base) cuantas veces te lo indique otro número (exponente).* Ejemplo: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	
CATEGORÍA 2	
	
R: *Es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales.*	
CATEGORÍA 3	
	
R: *Una multiplicación de un cierto número (base) por las veces que el exponente lo indique.*	

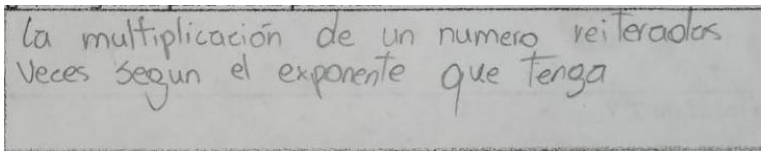
CATEGORÍA 4

R: *La multiplicación de un número reiteradas veces según el exponente que tenga.*

Tabla 23. Evidencia cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia.

Pregunta 2

- Categoría 1: Expresan el número que se repite como una potencia.
- Categoría 2: Reducen la expresión a una multiplicación de factores comunes.
- Categoría 3: Descomponen el número mayor como potencias de igual base.
- Categoría 4: Expresan el número que se repite como una potencia, pero el otro factor es expresado como el exponente de la potencia anterior.

Cuestionario: Noción y aplicación de las potencias

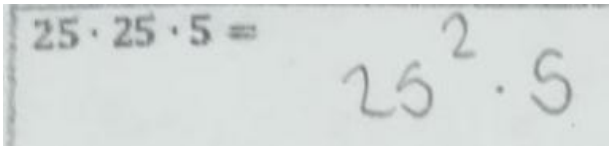
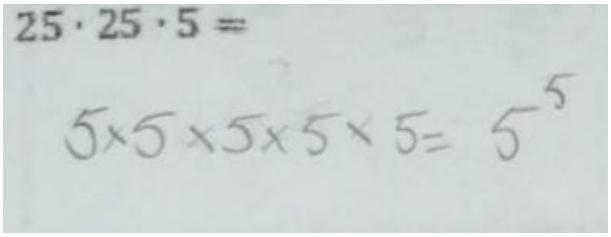
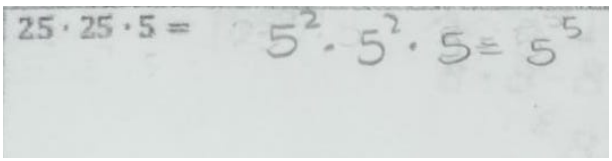
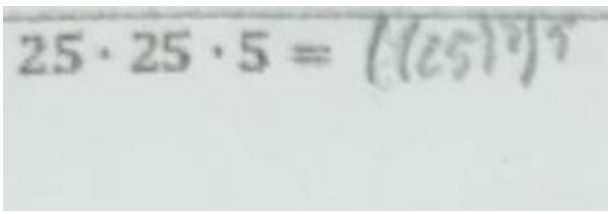
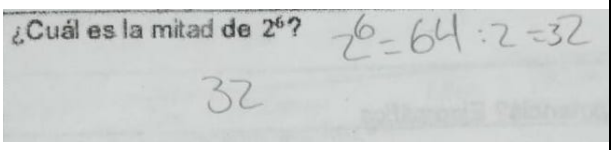
Pregunta 2: Representa la siguiente multiplicación como potencia	
CATEGORÍA 1	**CATEGORÍA 2**
	
R: $25^2 \cdot 5$	R: $5x5x5x5x5 = 5^5$
CATEGORÍA 3	**CATEGORÍA 4**
	
R: $5^2 \cdot 5^2 \cdot 5 = 5^5$	R: $((25)^2)^5$

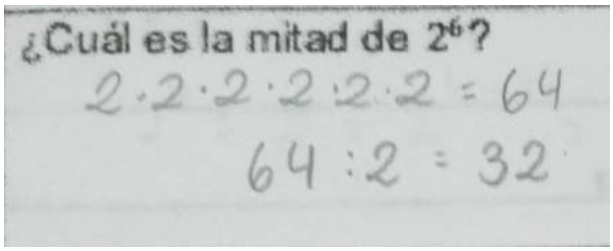
Tabla 24. Evidencia cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

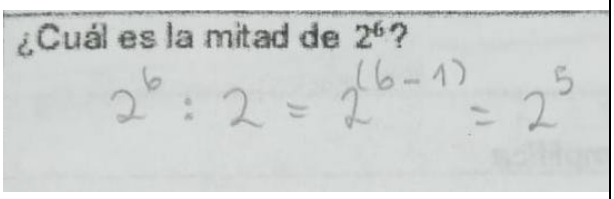
Pregunta 3

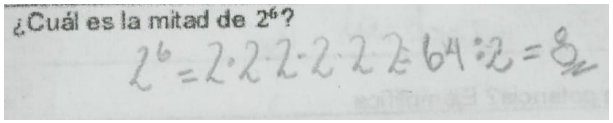
- Categoría 1: Calculan el resultado de la potencia de manera directa y lo dividen por 2.
- Categoría 2: Expresan la potencia como una multiplicación iterada, calculando su valor y dividiendo por 2.
- Categoría 3: Utilizan la propiedad involucrada en el ejercicio.
- Categoría 4: Escriben la potencia como una multiplicación iterada, calculando su valor, pero encontrando un resultado errado.

Cuestionario: Noción y aplicación de las potencias

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 3: Resuelva el siguiente ejercicio</td></tr>
<tr><td>CATEGORÍA 1
 

R: $2^6 = 64 : 2 = 32$</td><td>CATEGORÍA 2
 

R: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$; $64 : 2 = 32$</td></tr>
<tr><td>CATEGORÍA 3
 

R: $2^6 : 2 = 2^{(6-1)} = 2^5$</td><td>CATEGORÍA 4
 

R: $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64 : 2 = 8$</td></tr>
</table>

Tabla 25. Evidencia cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

En la última pregunta de este cuestionario busca mostrar la capacidad de vincular el objeto matemático con una situación cotidiana y al mismo tiempo entregar una respuesta correcta utilizando potencias, es por lo que se elaboraron las siguientes categorías.

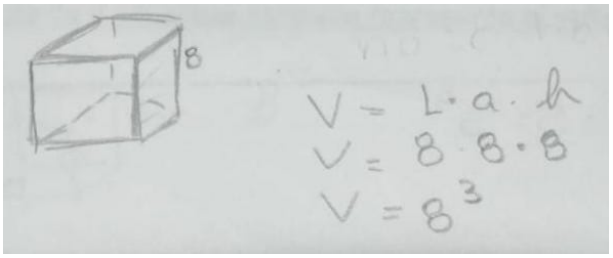
Pregunta 4

- Categoría 1: Utilizan la fórmula del volumen un paralelepípedo para encontrar la potencia.
- Categoría 2: Consideran el total de aristas del cubo como el exponente de la potencia.
- Categoría 3: Calcula y/o expresa de forma verbal su respuesta

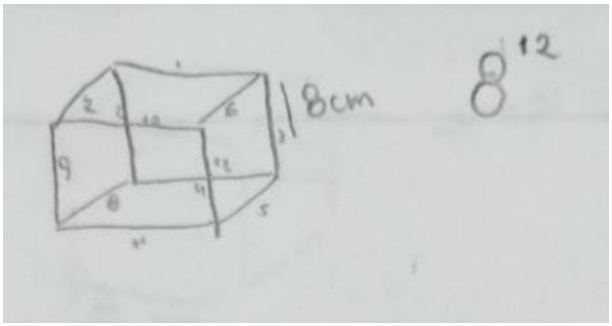
Cuestionario: noción y aplicación de las potencias

Pregunta 4: Don Pedro instaló un estanque cúbico en su casa….

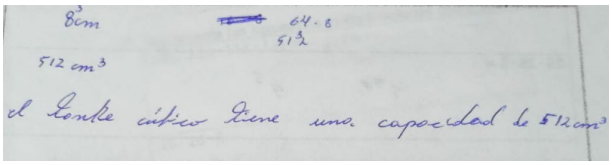
CATEGORÍA 1



CATEGORÍA 2



CATEGORÍA 3



R: *El tanque cúbico tiene una capacidad de 512* cm^3.

Tabla 26. Evidencia cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia

A partir del análisis de este cuestionario exploratorio, vemos que los estudiantes en general poseen distintas concepciones acerca de lo que es una potencia, y también conocen de manera clara los distintos elementos que la componen. En los problemas posteriores se puede evidenciar, que la mayoría maneja el concepto, en cambio en su aplicación, sólo algunos son capaces de utilizar la propiedad cuando es necesaria. Ahora nos interesa que pongan en juego el conocimiento en una actividad de resolución de problemas, en donde el uso de la potencia estará implícito, y que nos servirá como "herramienta" para introducir el nuevo "objeto", logaritmos. A continuación, se clasifican las dificultades y errores en función a los resultados obtenidos:

Dificultad	Error (como se manifiesta la dificultad)
D1: Identificar los elementos de una potencia.	E.1.1: No identifican las componentes de base y exponente en la potencia E.1.2: No identifican que la multiplicación esta involucrada en la potencia.

Tabla 27: Dificultades y Errores cuestionario exploratorio. Fuente: Elaboración propia.

6.2 Diseño de clase

En base a los resultados obtenidos en el cuestionario exploratorio, es que diseñaremos una tarea, con el fin de que el alumno ponga en juego los conocimientos de potencias, mostrados en el cuestionario anterior, para que construya un nuevo concepto matemático con la ayuda de estas. Es aquí donde se pone de manifiesto la primera etapa del Estudio de Clases Japonés, se presenta una propuesta de diseño a un grupo de profesores quienes entregan observaciones y en forma colaborativa se define un plan de clase de acuerdo con objetivo propuesto y considerando lo señalado por Lupiáñez (2009) el escolar debe "poner de manifiesto su actitud e interés hacia la propuesta de trabajo y que explicite su conocimiento de unos conceptos y procedimientos determinados y el dominio de determinadas capacidades".

6.2.1 Tarea

El modelo de tarea elegido para está actividad es del tipo conexión, tomando en cuenta lo propuesto por Lupiáñez (2009), ya que los estudiantes tendrán que seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios. El objetivo del diseño de esta tarea es intencionar que los estudiantes establezcan una relación entre los conceptos de potencias y logaritmos; en donde se proponen dos preguntas, en las cuales la primera busca que el estudiante encuentre una relación con los datos, en donde el uso de potencias está implícito; y en la segunda se busca encontrar una expresión con potencias que no puede calcularse con dicho objeto, y nos servirá para introducir los logaritmos, a través de lo propuesto por la Dialéctica Herramienta-Objeto (Díaz, 2014), en donde la potencia cumple, en este caso, el rol de "herramienta", para así poder introducir el "objeto" logaritmo. Para el diseño se involucran personajes de película "Avengers: Infinity war".

Actividad

Thanos ya habiendo cumplido su propósito de conseguir las seis gemas del infinito y de eliminar la mitad de la vida en el universo, llega a Titán herido por su combate con los Vengadores, a consecuencia de sus actos, se da cuenta que el guantelete del infinito está destruido y que sólo puede ocupar una gema a la vez.

Unos meses después, Thanos se entera a través de un vidente que Ant-Man (hombre hormiga) ha salido del mundo cuántico con la intención de vengarse, y que con ayuda de los Vengadores llegará en 4 horas para atacarlo. Además, el vidente le informa a Thanos que Ant-Man llegará al ataque midiendo 18 metros. Thanos, para pelear en igualdad de condiciones con Ant-Man utilizará la gema de la realidad, pero esta está trizada, por lo que ahora solamente tiene la capacidad de duplicar su altura en el transcurso de una hora. Donde además su altura inicial al ocupar la gema es de 1 metro y lo máximo que puede llegar a medir son 32 metros.

a) ¿Cuánto tiempo demorará Thanos en alcanzar la altura de Ant-Man?

b) ¿Qué expresión matemática permite determinar dicho tiempo?

6.3 Plan de clase

Para la creación del plan de clase fue necesario tomar las ideas de los profesores investigadores, además de considerar sugerencias por parte de profesores colaboradores, los cuales una vez presentada la propuesta con base en los resultados del cuestionario exploratorio ayudaron a diseñar un plan de clase acorde a los conocimientos demostrados por los estudiantes.

Fecha: 24 de octubre de 2018 Nivel: 2º Medio Profesores: Andrés Ampuero Riquelme – Eduardo Rebolledo Báez
Objetivo de la clase: Identifican la relación entre potencias y logaritmos.
Descripción de la clase: La clase está planificada para introducir el concepto de logaritmo a través de una actividad en la cual los estudiantes darán solución a diferentes preguntas contextualizadas en una situación ficticia. En primera parte, se da la introducción a la situación haciendo unas preguntas validadoras para ver si los alumnos conocen el tema. Posteriormente, se presenta la actividad y se da tiempo para su resolución, dando tiempo para que los alumnos compartan sus respuestas para toda la clase, con el fin de que se conozcan las posibles respuestas al mismo problema y sus justificaciones. Por ultimo, el profesor indica las respuestas correctas de la actividad apoyándose en las producciones de los estudiantes, haciendo una conexión con la última pregunta para introducir el concepto de logaritmo. Se piensa, en un principio, en una clase de 60 minutos aproximadamente, dejando alrededor de 30 minutos para cualquier eventualidad no contemplada.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE
1. Introducción al tema Se procede a indicar las instrucciones necesarias para la realización de la actividad. Se plantean las siguientes preguntas: a) ¿Vieron la última película de los Vengadores? b) ¿Han escuchado hablar de Thanos? c) ¿Conocen al personaje de Ant-Man? ¿Cuáles son sus habilidades?	a) Si, Infinity war se llamaba. - Creo que si, donde morían los vengadores. - No la vi. b) Si. - Creo, el hacia desaparecer a los vengadores. - No sé quien es. c) Si, podía hacerse más pequeño, como una hormiga con el traje. - Creo que es el hombre que podía hacerse más pequeño o más grande. - No lo conozco.	El profesor escucha atento las respuestas de los estudiantes, haciendo participar de manera aleatoria a los estudiantes. El docente afirma o refuta las respuestas de los estudiantes con ayuda de sus compañeros.	¿Los alumnos conocen el tema? ¿Los alumnos reconocen a los personajes utilizados para la actividad?
2. Presentación de la actividad Se entrega la siguiente actividad: **Actividad** Thanos ya habiendo cumplido su propósito de conseguir las seis gemas del infinito y de eliminar la mitad de la vida en el universo, llega a Titán herido por su combate con los Vengadores, a consecuencia de sus actos, se da cuenta que el guantelete del infinito está destruido y que sólo puede ocupar una gema a la vez. Unos meses después, Thanos se entera a través de un vidente que Ant-Man (hombre hormiga) ha salido del mundo cuántico con la intención de vengarse, y que con ayuda de los Vengadores llegará en 4 horas para atacarlo. Además, el vidente le informa a Thanos que Ant-Man llegará al ataque midiendo 18 metros. Thanos, para pelear en igualdad de condiciones con Ant-Man utilizará la gema de la realidad, pero esta está trizada, por lo que ahora solamente tiene la capacidad de duplicar su altura en el transcurso de una hora. Donde además su altura inicial al ocupar la gema es de 1 metro y lo máximo que puede llegar a medir son 32 metros. a) ¿Cuánto tiempo demorará Thanos en alcanzar la altura de Ant-Man? b) ¿Qué expresión matemática permite determinar dicho tiempo?	Los alumnos escuchan la lectura de la actividad. - Se comprenden las instrucciones previas y el contexto de la actividad. - Los alumnos trabajan en grupo y no comprenden el contexto de la actividad.	El docente lee la actividad con las preguntas. Se pregunta si existe alguna duda.	¿Muestran interés por la actividad? ¿Comprenden el contexto de la actividad?
3. Resolución de la actividad El trabajo se realizará de manera individual durante 15 minutos. Los estudiantes argumentan en sus hojas para dar respuesta a las preguntas.	Posibles respuestas: a) “Tiene que ser entre 4 y 5 horas”. b) “No existe un número que tenga base 2 y de como resultado 18”.	Posibles devoluciones: a) ¿En que te apoyaste para concluir ese dato? b) ¿podrías expresarlo como una potencia?	¿Logran comprender los datos entregados en la actividad?

4. Compartiendo ideas y estrategias de resolución Los alumnos son seleccionados para exponer sus justificaciones a sus compañeros, argumentando el por qué piensan que es la respuesta correcta. El criterio de selección es una respuesta correcta, una media completa y una incorrecta.	Los estudiantes escuchan los argumentos que exponen sus compañeros, afirmando o refutando las explicaciones que se exponen.	El profesor pregunta a ciertos estudiantes que resultado obtuvieron y sus argumentos para concluir porqué es la respuesta correcta.	¿Expresan claramente sus respuestas y justificaciones ante sus compañeros?
5. Sintetizando ideas desde los aprendizajes de los alumnos El docente realiza sus propias conclusiones de la actividad de acuerdo con las justificaciones de los estudiantes. Se introduce al concepto de logaritmo como un nuevo método de resolución de problemas que involucran potencias. La actividad concluye con las siguientes preguntas: i. ¿Se dieron cuenta que estaban utilizando potencias? ii. ¿Qué otro objeto matemático utilizó para responder la actividad?	Los alumnos escuchan las conclusiones del profesor y exponen sus dudas sobre la actividad. i. Si, porque el dos se duplicaba cada hora y se podía escribir como una potencia. ii. Podría ser los logaritmos, como una nueva forma de reescribir la potencia.	El profesor da a conocer la respuesta correcta apoyándose en las producciones de los estudiantes. i. ¿Qué importancia cumplía las horas en las potencias? ii. ¿se podrían utilizar los logaritmos para resolver esta actividad?	¿Entregan las respuestas de manera correcta? ¿Identifican el uso del logaritmo para la actividad?

6.3.1 Dificultades y Devoluciones

Dentro de lo que es necesario abordar para una correcta planificación de la clase, son las dificultades y las devoluciones por parte del docente que permitirán el logro del objetivo de la clase. Es importante señalar que estas dificultades y errores asociados a la tarea están relacionadas con las limitaciones del aprendizaje presentadas anteriormente. En la siguiente tabla, se presentan las dificultades que pueden estar involucradas en la tarea, con sus correspondientes devoluciones.

Dificultades	Devoluciones o intervención docente
Tarea D1: Comprensión de la situación D2: Crear una relación con los datos entregados D3: Establecer relación con potencias	D1.1: ¿Reconocen los personajes involucrados? D1.2 ¿Cuál la altura mínima de Thanos? ¿Y la altura máxima? D1.3: ¿Cuánto va a llegar midiendo Ant-Man al enfrentamiento? D1.4: ¿En cuanto tiempo llegará Ant-Man? D2.1: ¿Cuánto medirá Thanos si han pasado 3 horas? D2.2: Si Thanos mide 16 metros ¿Cuánto tiempo ha pasado? D3.1: ¿En que te apoyaste para concluir ese dato? D3.2: ¿Encontraste algún tipo de relación en los datos entregados con potencias? D3.3: ¿Podrías expresarlo como una potencia? D3.4: ¿Cuál sería la base? D3.5: ¿Qué importancia cumple el exponente?
Síntesis D4: Establecer relación con logaritmos	D4.1: ¿Qué importancia cumplía las horas en las potencias? D4.2: ¿Se podrían utilizar los logaritmos para resolver esta actividad? D4.3: ¿Cómo quedaría escrita la ultima expresión utilizando logaritmos?

Tabla 28. Posibles dificultades y de preguntas de devolución. Fuente: Elaboración propia.

Se espera que este plan de clases permita a los estudiantes profundizar sus conocimientos matemáticos y no solo se queden con la idea de llegar al resultado de un ejercicio.

Capítulo 7: Análisis de Actuación

En este capítulo presentado a continuación, se describe el Análisis de Actuación, el cual aborda y describe la tarea desarrollada por los alumnos. En el análisis se describe cada etapa de la implementación de una clase, con sus respectiva tarea y propuesta, diseñadas y formuladas en el Análisis anterior.

En una primera parte se detallará lo correspondiente a la implementación inicial, la que más adelante es analizada y sometida a una reformulación que conlleva a su reimplementación.

En cada una de estas implementaciones se describirán las percepciones de la clase por parte de los docentes y observadores. Luego, se analizarán las producciones de los estudiantes, categorizando las distintas formas y/o estrategias de estos, incluyendo los aciertos y errores mostrados.

En la última parte se detalla la reformulación de la segunda implementación de la clase, considerando las apreciaciones de los investigadores, el análisis del desarrollo de la actividad y las producciones de los estudiantes, formando una acabada versión de la clase diseñada.

7.1 Análisis de Actuación 1

7.1.1 Primera implementación de la clase (24/10/2018)

Esta implementación se realiza en los cursos de 2º y 3º año de enseñanza media, la cual contó con la presencia de un docente observador.

7.1.1.1 Percepción de docente que implementa la clase

Al llegar a la sala de clases, los alumnos se sienten sorprendidos, puesto que para ellos es extraño que dos profesores vengan a realizar una actividad. Luego de la presentación de los profesores, se describe la actividad a realizar, mientras algunos estudiantes mantienen silencio.

Luego de esto, se les realiza unas preguntas introductorias, con el fin de contextualizar a los estudiantes con la situación del problema, las preguntas fueron:

- ¿Vieron la última película de “Los Vengadores”?

La respuesta en una gran mayoría fue positiva, pero hubo estudiantes que manifestaron abiertamente no haber visto la película.

- ¿Han escuchado hablar de Thanos?

Al igual que en la pregunta anterior, un porcentaje bastante amplio manifestó conocer al personaje, mientras el resto no contestó.

- ¿Conocen al personaje de Ant-Man? ¿Cuáles son sus habilidades?

En esta pregunta, una parte de los estudiantes que respondió afirmativamente disminuyó de manera considerable, puesto que este personaje aparece en otra película, la cual, no todos los alumnos habían visto. Los que sí conocían a Ant-Man, contestan que sí conocen sus habilidades, dando una respuesta concreta y correcta.

Posteriormente, los alumnos reciben la hoja con la actividad, a lo cual, luego de unos minutos, con la explicación por parte del docente, se empiezan a escuchar ciertos comentarios por parte de los estudiantes, tales como “No entiendo” o “No vi la película”. La situación vuelve a explicarse, de modo que los alumnos entiendan bien el problema propuesto.

A continuación, y luego de preguntar a los estudiantes si entendieron el problema, se prosigue con el desarrollo de la actividad, en el cual, los alumnos siguen manifestando ciertas dudas, al momento de leer las preguntas y, posteriormente, a como contestarlas.

A medida que la clase avanza, los estudiantes manifiestan que ya terminaron, por lo que se pregunta rápidamente cuantos alumnos faltan, los cuales, son muy pocos.

Una vez que los estudiantes han terminado, se procede a recoger las actividades, y a hacer que entreguen de manera explícita el razonamiento ocupado, momento en el cual se da cuenta de que la mayoría de los alumnos llegan a un resultado muy similar, lo que hace pensar que su razonamiento fue diferente, pero llegaron a un resultado muy parecido. Con respecto a la segunda pregunta, la mayoría de los estudiantes no la entendieron, puesto que las respuestas entregadas correspondían a los objetos matemáticos necesarios para resolver la actividad (Potencias) más que la expresión como tal, o también, se manifiesta que estos no vieron la película. Por otro lado, la mínima parte de estos llegaron a un

resultado muy cercano a lo que se pedía, pero no concluían de forma correcta o no formalizaban la expresión.

7.1.1.2 Percepción de docente que observa la clase

Es en esta parte donde ocurre la segunda etapa del Estudio de Clases Japonés, en donde se considera la visión de un docente observador, el cual entregó las siguientes apreciaciones sobre la implementación:

Mi perspectiva sobre la implementación comentada, fue que el curso tuvo una buena aceptación, lo trabajaron de buena forma, en donde hubo un porcentaje menor de estudiantes que por el hecho de no ver la película y de no conocer el contexto, no se motivaron a realizar la actividad, entonces ese fue un pequeño error, quizás la actividad para esos estudiantes no tuvo una buena llegada, pero en general, el curso trabajó de muy buena forma, hubieron estudiantes que aunque no vieron la película igual trataron de realizar la actividad y la desarrollaron de manera óptima. Luego de terminar, el profesor recogió la actividad y se fue comentando la experiencia de cada uno, lo que respondieron, porque respondieron eso y así se fue trabajando hasta darle un cierre a la actividad. (Transcripción de audio – Anexo VI)

7.1.2 Contraste de implementación y planificación de la clase

En la siguiente tabla se presentan los logros y dificultades que ocurrieron en transcurso de la clase, lo que permite contrastar lo realizado en la implementación de la clase con el plan de clases.

Tabla 29: Contraste planificación - implementación

Momento	Logros	Dificultades
Inicio	• La mayoría de los estudiantes muestran interés al responder las preguntas. • Se utilizan las preguntas de devolución, respecto a la comprensión de la actividad.	• No se considera el objetivo de la actividad en el plan de clase. • Los alumnos no ponen atención al momento de indicar las instrucciones. • Algunos alumnos no responden las preguntas porque no conocen a los personajes. • No existe apoyo visual para llamar la atención de los estudiantes. • Algunos alumnos se desmotivan al no conocer a los personajes.
Desarrollo	• Los alumnos ponen atención al momento de leer la actividad. • Los alumnos se muestran participativos a la hora de dar a conocer sus respuestas. • La mayor parte del curso comprende la primera interrogante. • La mayoría de las respuestas tanto correctas como erróneas se considera en el plan de clase.	• Algunos alumnos empiezan a trabajar en la actividad mientras se está explicando. • Los alumnos consideran muy extenso el contexto de la actividad. • La actividad se tiene que volver a explicar. • Los alumnos trabajan en grupos de más de tres personas. • Se excede del tiempo estimado para la actividad. • Algunos alumnos no consideran el uso de potencias. • Los alumnos no comprenden la segunda interrogante, lo que dificulta la consecución del objetivo de la DHO.
Cierre		No se realiza cierre planificado porque los alumnos no interpretaron de manera correcta la segunda interrogante.

Fuente: Elaboración propia.

7.1.3 Análisis de las producciones de los estudiantes

A continuación, se presenta un análisis de las producciones de los estudiantes de acuerdo con la primera implementación. Se presentan evidencias de acuerdo con categorías que se consideran a partir de las respuestas.

7.1.3.1 Tarea

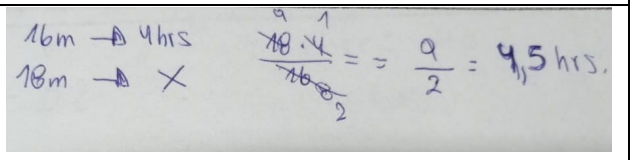
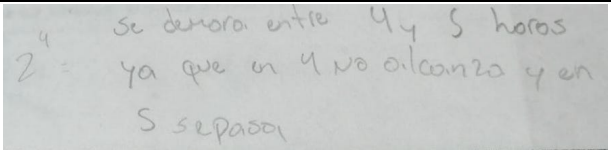
Pregunta a)

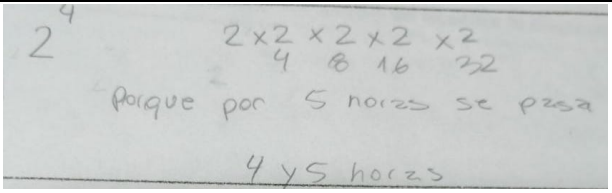
- Categoría 1: Expresan el resultado como potencia.
- Categoría 2: Utilizan otros procedimientos matemáticos para llegar a un resultado exacto.
- Categoría 3: Exponen una potencia y justifican verbalmente su respuesta.
- Categoría 4: Expresan la potencia como una multiplicación iterada.

La mayor parte del curso pudo desarrollar la pregunta “a)”, pero al determinar un rango especifico de altura, sólo algunos determinaron que el dato se encontraba entre las 4 y 5 horas. Algunos de ellos concluyeron que las respuestas eran 4 horas exactas o más de 4 horas, apoyándose en la altura para determinar su respuesta, ya que si transcurrían 5 horas se superaba la altura solicitada; en cambio otros grupos sólo mostraban la respuesta, sin un desarrollo previo o simplemente no respondían. Un error común fue que algunos trataron de terminar la respuesta de manera concreta, utilizando la regla de tres y concluyendo que transcurrirían 4,5 horas.

Tabla 30: Evidencias Pregunta a), implementación 1.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta:
¿Cuánto tiempo demorará Thanos en alcanzar la altura de Ant-Man?</td></tr>
<tr><td colspan="2">CATEGORÍAS</td></tr>
<tr><td>CATEGORÍA 1</td><td>CATEGORÍA 2</td></tr>
<tr><td>

R: Entre 4 a 5 horas.</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>CATEGORÍA 3</td><td>CATEGORÍA 4</td></tr>
<tr><td> 

R: Se demora entre 4 y 5 horas ya que en 4 no alcanza y en 5 se pasa</td><td> 

R: porque por 5 hora se pasa. 4 y 5 horas.</td></tr>
</table>

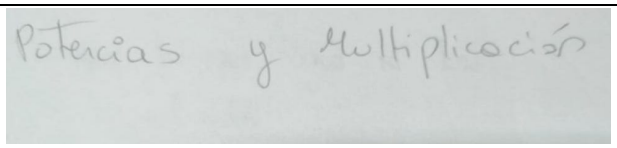
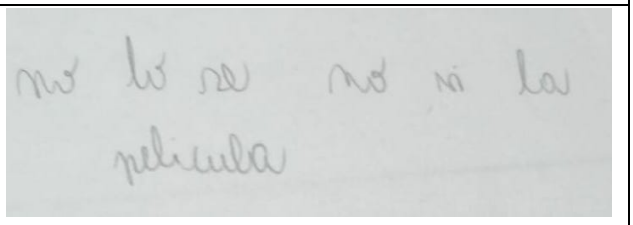
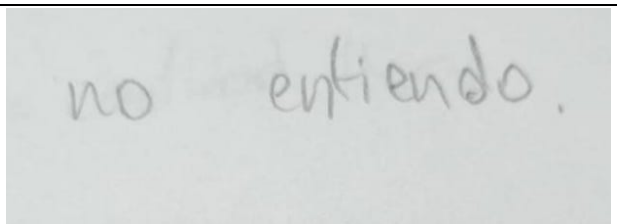
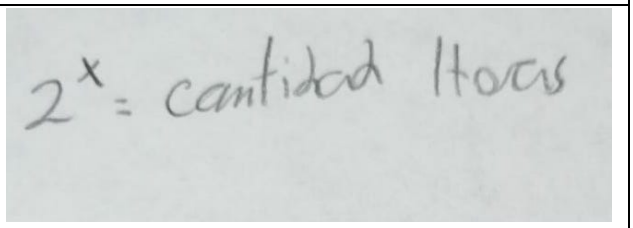
Fuente: Elaboración propia.

Pregunta b)

- Categoría 1: Identifican los objetos matemáticos involucrados.
- Categoría 2: Señalan no conocer la película.
- Categoría 3: No comprenden la situación.
- Categoría 4: Señalan una expresión que determina la cantidad de horas.

Respecto a la pregunta “b)”, sólo unos pocos estudiantes se acercaron a una expresión, pero no hacían la relación con la altura. Otro grupo de los estudiantes no comprendió la pregunta, ya que, en vez de dar una expresión matemática, indican las “herramientas” que son necesarias para la resolución de esta pregunta. El resto de los estudiantes respondía que no comprendía la situación ya que no había visto la película o simplemente no sabía.

Tabla 31: Evidencias Pregunta b), implementación 1.

Pregunta: ¿Qué expresión matemática permite determinar dicho tiempo?	
CATEGORÍAS	
CATEGORÍA 1	CATEGORÍA 2
 *R: Potencias y multiplicación*	 *R: No lo se no vi la película*
CATEGORÍA 3	CATEGORÍA 4
 *R: No entiendo*	 *R: 2^x = cantidad horas*

Fuente: Elaboración propia.

A través de estos análisis hemos visto que el proceso de Dialéctica Herramienta-Objeto (Díaz, 2014) no está presente en las producciones estudiantes, ya que los alumnos en la segunda interrogante no son capaces de relacionar la “herramienta” potencia con el “objeto” logaritmo. Es por lo que hemos decidido reformular el diseño de la actividad.

7.1.4 Reformulación del diseño

En esta sección del análisis se presentan las modificaciones realizadas al diseño de la clase, en base a logros y dificultades presentadas en la primera implementación, además, se modifican tanto la tarea como el plan de clase. Es aquí en donde se presenta la tercera parte del Estudio de Clases Japonés, en donde con ayuda de los docentes tanto investigadores y observadores se realizan las siguientes mejoras.

7.1.4.1 Reformulación de tarea

Actividad

En primera parte, se agregan las instrucciones en la primera hoja, de manera tal que el alumno las conozca y las cumpla con los criterios de la actividad en pos del buen desarrollo de esta, resaltando la instrucción que el desarrollo de la actividad es en duplas, y no individual como la propuesta anterior.

Se modifica completamente la situación de la actividad, a raíz de que la situación presentada anteriormente dependía de un contexto puntual, basado en una película que no todos los estudiantes conocían y que dificultaba el desarrollo de esta, es por esto, que se introducen personajes genéricos que buscan captar la atención del alumno y que no obedecen necesariamente a un contexto que los alumnos deban conocer previamente.

Para complementar de mejor manera la nueva situación, es que se añaden imágenes que apoyan la narrativa de la propuesta, contando datos y cualidades de los personajes. Todo esto diseñado e implementado en un formato cómic para así atraer la atención del estudiante y evitar textos extensos.

Consideramos un cambio en las preguntas ya planteadas debido a que los alumnos manifiestan dificultades en la captación de las interrogantes en sí misma, y estimamos

conveniente agregar dos preguntas más, bajo la misma lógica que las anteriores, una pregunta que nos muestre que los estudiantes comprenden la situación, y la otra que nos indique que los estudiantes pueden hacer la relación desde las potencias a los logaritmos, apoyando este último cambio, es que la reformularemos en función de que el alumno se vea con la necesidad de contestar la pregunta con un nuevo objeto matemático, el cual surge a raíz del uso de las potencias, completando así el ciclo de la DHO.

De esta forma las preguntas a) y b) de la primera aplicación son:

a) ¿Cuántos tiempo demorará Thanos en alcanzar la altura de Ant-Man?
b) ¿Qué expresión matemática permite determinar dicho tiempo?

Así, estas preguntas a) y b) quedan renombradas como 2) y 3), y redactadas como:

2) ¿Cuánto tiempo demorará el Dr. Riemann en alcanzar la altura de Goliath?
3) Escribe la expresión matemática (o fórmula) que permite determinar dicho tiempo

Las nuevas preguntas consideradas quedan redactadas de la siguiente forma, siendo en la nueva la aplicación nombradas como 1) y 4):

1) ¿Cuánto tiempo creen que demorará el Dr. Riemann en alcanzar los 8 metros como mínimo, que le permiten vencer a Maxximus?
4) Escriban la expresión anterior utilizando logaritmos

7.1.4.2 Tarea

Actividad

Instrucciones:

- *El desarrollo de la actividad es en parejas.*
- *Desarrolle y exprese el procedimiento según corresponda en cada ejercicio con lápiz pasta azul o negro.*
- *Levante la mano para cualquier consulta.*
- *Guarde el teléfono celular o calculadora.*

En un universo paralelo, existen muchos superhéroes que ayudan a mantener la paz y tranquilidad en la tierra, a su vez existen villanos que intentan destruir el planeta a toda costa. El más poderoso de estos es el malvado Dr. Riemann

Para evitar que sus planes sean exitosos, está su archirrival llamado Goliath, el cual tiene la capacidad de aumentar su altura considerablemente

Sabiendo esto, el Dr. Riemann creó un dispositivo que le permite duplicar su altura cada una hora, porque para vencer a su enemigo en batalla, necesita ser más alto que su rival

El Dr. Riemann está probando su dispositivo, y lo hará contra su dinosaurio mutante "Maxximus" de inalcanzables 7 metros de altura. Si la altura inicial del Dr. Riemann es de 1 metro, responda las siguientes preguntas:

1) ¿Cuánto tiempo creen que demorará el Dr. Riemann en alcanzar los 8 metros como mínimo, que le permiten vencer a "Maxximus"?

…Ahora el Dr. Riemann está listo para la batalla…

2) ¿Cuánto tiempo demorará el Dr. Riemann en alcanzar la altura de Goliath?

Esta vez, el Dr. Riemann ha vencido…

Si pudiéramos volver atrás, para evitar que el mal triunfe, Goliath necesita saber cuanto tiempo tiene para destruir el dispositivo antes de que el doctor lo supere en altura…

3) Escribe la expresión matemática (o fórmula) que permite determinar dicho tiempo

4) Escriban la expresión anterior utilizando logaritmos

¡¡¡Muchas gracias!!!

7.1.4.3 Reformulación plan de clase

A continuación, presentaremos la reformulación del plan de clase, respecto a la primera implementación realizada.

Respecto de la introducción y presentación de la situación

Se decide mantener la forma en como los docentes se presentarán al curso, debido a que se obtuvo una buena recepción por parte de los estudiantes, en donde explicando quienes son y de donde vienen permite que los alumnos se sientan cómodos, generando un ambiente distendido. La introducción de la actividad se hará mediante un PowerPoint, en donde se presentarán el objetivo, la situación y los personajes de la actividad, con la intención de que los estudiantes capten la situación que se trabajará. Para ir corroborando la idea de que los alumnos van entendiendo la actividad, se realizan preguntas de la información entregada en el PPT.

Respecto de la actividad

Luego de la introducción a la situación, se entregarán tanto las instrucciones como la actividad a los estudiantes, las cuales estarán tanto en el PPT como en la hoja de la actividad. Posteriormente se dará un tiempo adecuado para la resolución de la actividad, dando el espacio para contestar dudas y consultas que surjan en el transcurso de la clase, pero que no influyan en el desarrollo de los estudiantes, debido a que se busca que el alumno no responda todo correcto, sino que sea él quien razone y entregue una respuesta en función del uso del logaritmo. Finalizando este momento, se procederá a exponer las respuestas de la actividad, en donde los estudiantes serán seleccionados de forma aleatoria por el docente para que entregue su respuesta de manera verbal, también se plantea hacer una breve encuesta para ver quien responde de la manera correcta.

Respecto a la síntesis

Se mostrarán las respuestas correctas a las interrogantes a través del PPT, con el objetivo de darlas a conocer y llegar a la expresión en la tercera pregunta. A través de está interrogante se introducirá a los logaritmos como un nuevo método de resolución.

Posteriormente se entrega una última pregunta, en donde los estudiantes en grupos de a cuatro personas deberán reescribir la expresión, pero ahora utilizando logaritmos, dando un tiempo adecuado para la resolución. La respuesta no se dará a conocer para ver si el procedimiento lo realizaron de manera correcta y la clase terminará con preguntas de modo tal que se concluya la actividad.

7.1.4.4 Plan de clase

Al igual que el plan de clase elaborado anteriormente, fue necesario considerar ideas y comentarios de profesores colaboradores, los cuales en base a los resultados de la primera implementación ayudaron a mejorar el plan de clase acorde a los conocimientos demostrados por los estudiantes.

Fecha: 15 de noviembre de 2018 Grado: 2º Medio / 3º Medio Profesores: Andrés Ampuero Riquelme – Eduardo Rebolledo Báez
Objetivo de la clase: Identifican la relación entre potencias y logaritmos.
Lección de estudio A. Objetivo de la clase: Identificar un nuevo método de resolución de problemas. B. Descripción de la clase: La clase está planificada para introducir el concepto de Logaritmo a través de una actividad en la cual los estudiantes darán solución a diferentes preguntas contextualizadas en una situación ficticia creada por el profesor. En primera parte, se da la introducción a la situación con ayuda de un PPT que tiene apoyo visual (Gifs y memes) que permite que el alumno muestre interés y logre motivarse. Luego, se realizarán preguntas validadoras con el objetivo de ver si el estudiante está entendiendo la situación presentada. Posteriormente, los alumnos comparten sus respuestas de manera grupal para toda la clase, con el fin de que se conozcan las posibles respuestas al mismo problema y sus justificaciones. Por último, el profesor da a conocer las respuestas de la actividad, tomando la última pregunta como base para introducir el concepto de Logaritmo, proponiendo una nueva pregunta relacionada a este tema. Se piensa, en un principio, una clase de 70 minutos aproximadamente, dejando alrededor de 20 minutos para cualquier eventualidad no contemplada.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	ACTIVIDAD DE LOS ALUMNOS	INTERVENCIÓN DOCENTE	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE
1. Introducción al tema (10 Min.) Se muestra un PPT en donde se da a conocer el contexto del problema propuesto para la clase. Una vez mostrada la situación y los personajes, se plantean las siguientes preguntas: a) ¿Cuál es la altura del Dr. Riemann? b) ¿Cuánto deberá medir, por lo menos, el Dr. Riemann para poder derrotar a Goliath? c) ¿Cuánto debe medir el Dr. Riemann para vencer a Maxximus?	a) 1 metro. - 7 metros creo. - 2 metros. b) 18 metros. - Más de 18 metros. - El doble de la altura de Goliath. c) 8 metros - 18 metros parece. - Más de 8 metros.	El profesor escucha atento a cada una de las respuestas de los estudiantes, si no existen voluntarios para responder, el profesor asigna de manera aleatoria a algún estudiante para que responda. El docente corrige las respuestas de los estudiantes apoyándose de la información del PPT.	¿Los alumnos se interesan por el tema? ¿Los estudiantes identifican a los principales personajes de la actividad? ¿Identifican los datos relevantes de la actividad?
2. Presentación de la actividad (2-3 Min.) Se entrega la siguiente actividad: 	Los estudiantes escuchan al profesor. Se reúnen en grupos de dos personas. - Comprenden las instrucciones y el contexto de la actividad. - No entiendo lo que hay que hacer.	Lee las instrucciones y la actividad con las preguntas. Posteriormente pregunta si hay alguna duda.	¿Se muestra interés de los alumnos por la actividad? ¿Comprenden la actividad?
3. Resolución de la actividad (20 Min.) El trabajo se realizará de manera cooperativa durante 20 minutos. Los estudiantes infieren de manera grupal para dar respuesta a las preguntas con la información ya entregada, compartiendo sus ideas entre ellos.	Posibles respuestas: 1) “Son 3 horas, porque se va duplicando su altura cada hora” 2) “Tiene que ser entre 4 y 5 horas” 3) “No existe un número que tenga base dos y que me de como resultado 18”	Posibles devoluciones: 1) ¿Me podrías explicar cómo llegaste a ese resultado? 2) ¿En que te apoyaste para concluir eso? 3) ¿Puedes expresarlo como una potencia?	¿Logran entender el significado de los datos?

4. Compartiendo ideas y estrategias de resolución (15 Min.) Los alumnos exponen sus respuestas y justificaciones a sus compañeros, argumentando por qué piensan que es la respuesta correcta.	Los estudiantes escuchan atentos los argumentos que exponen sus pares, afirman o refutan sus explicaciones en un ambiente de respeto mutuo.	El profesor pregunta a cada grupo los resultados que obtuvieron y sus argumentos para llegar al resultado, realizando una breve encuesta para verificar los resultados obtenidos por los estudiantes.	¿Expresan de manera clara sus respuestas y justificaciones?
5. Sintetizando ideas desde los aprendizajes de los alumnos (20 Min.) El profesor da a conocer las respuestas de la actividad, concluyendo que, para la tercera pregunta, la expresión encontrada se puede resolver utilizando logaritmos. Se introduce el logaritmo, relacionándolo con las potencias, como un nuevo método de resolución. Se procede a reescribir la expresión encontraba utilizando logaritmos. El docente realiza un resumen de la actividad, la cual concluye realizando las siguientes preguntas: i. ¿Se dieron cuenta que estábamos utilizando potencias? ii. ¿Ustedes relacionaban las potencias con los logaritmos antes de esta actividad?	Los estudiantes escuchan atentos a la explicación del profesor y plantean las dudas que puedan surgir. i. Si, porque cuando duplicaba la altura cada hora, se iba multiplicando por el mismo número. ii. No, sólo me aprendía la posición de los valores para poder calcular el logaritmo.	El profesor da a conocer las respuestas de la actividad a través del PPT, poniendo una especial atención a la tercera pregunta, por es aquí, donde se introduce a logaritmo. El docente procede a introducir el concepto de logaritmo, dando un ejemplo y reescribiendo la expresión de forma logarítmica. i. ¿Y podrías expresar una sola hora como potencia? ii. ¿Es la única forma que resolvía los logaritmos?	¿Entregan las respuestas de manera correcta? ¿Los estudiantes comprenden lo explicado por el profesor?

7.2 Análisis de Actuación 2

7.2.1 Segunda implementación de clase (15/11/2018)

Luego del análisis de nuestra primera implementación de la clase y de la reformulación de esta, es que se implementa el nuevo diseño, en los niveles de segundo[1] y tercer año de enseñanza media, los cuales tienen en promedio entre 40 y 45 estudiantes. La implementación contó con la presencia de un docente observador el cual realizará su percepción sobre la clase. En este nivel los alumnos ya han estudiado el concepto logaritmo y sus conceptos asociados, por lo que resulta más apropiado la aplicación de la clase. Para esta ocasión se incorpora el contenido de la actividad en un PowerPoint en ayuda del tiempo y de la captación de la atención de los alumnos, también la actividad esta pensada para ser desarrollada en duplas. En los Anexos se encuentra una grabación de audio e imágenes de la segunda implementación (Ver Anexos XI y XII).

7.2.1.1 Percepción del docente que implementa la clase

Desde el momento en que se hace ingreso a la sala de clase, se percibe un ambiente muy distendido, los estudiantes se muestran muy alegres y receptivos a desarrollar la actividad, sobre todo porque en la hora de la implementación, los alumnos tenían prueba de matemáticas, por ende, no la realizaron.

Luego del saludo protocolar, los alumnos se mantienen en silencio, mientras escuchan atentamente la explicación sobre lo que harán en la clase.

Se presenta el PowerPoint con el objetivo de la actividad, y posteriormente la situación, a lo que los estudiantes reaccionan de manera positiva, puesto que el PPT fue diseñado con imágenes (Gifs) de “Memes”, para que se produjera un quiebre en la dinámica habitual que ellos poseen, y creara un ambiente mucho más relajado, para que existiera la confianza necesaria.

A medida que las diapositivas van pasando, se les realiza preguntas con el fin de cerciorarse de que los alumnos entiendan el contexto, la situación y el posterior desarrollo de la actividad, obteniendo positivos resultados con esta dinámica, debido que las

[1] Este curso realizó la primera implementación.

respuestas por parte de ellos están correctas. Para la pregunta 2, queda la impresión de que se debe corregir la redacción de esta, para que la respuesta sea con un número exacto y no una estimación.

Los estudiantes expresan que las preguntas son sencillas, que ellos saben responder debido a que les gusta la situación que se les presentó.

Para el momento de entregar la actividad en la hoja, los alumnos escuchan de manera atenta las instrucciones y la lectura rápida de la situación, que, a diferencia del PowerPoint, trae las preguntas, que necesitan una respuesta escrita.

Los estudiantes desarrollan la actividad sin contratiempos, y sólo hacen consultas sobre como resolver la pregunta 2 de la hoja, puesto que no entienden bien si la altura cambia cada una hora exacta o dentro de la hora, por lo tanto, las respuestas entregadas arrojan resultados con minutos y segundos, y otras son una estimación, cosa que se considerará para la reformulación posterior.

Para la revisión de las preguntas, los estudiantes reaccionan de forma positiva, ya que consideran que las respuestas entregadas por ellos están correctas, explicando ellos sus procedimientos, concordando con lo mostrado en el PPT. Para la revisión de la tercera pregunta, se plantea la expresión considerando la pregunta hecha por los docentes: ¿Cómo encontramos el valor exacto de x?, teniendo como devolución respuestas como: Igualar las bases a base 2, aplicar la raíz, etc. Es aquí donde la fase tres de la DHO se hace presente, en donde de contrasta la herramienta y el nuevo objeto, logaritmos.

En la última pregunta, cuando se les pide a los estudiantes trabajar en grupos de 4 personas, se ve que estos comparten sus ideas y llegan en general a la misma expresión, puesto que, luego del planteamiento de la pregunta 3, se presenta una definición de logaritmos con un pequeño ejemplo, y es en base a ese ejemplo que ellos deben dar solución a la pregunta.

7.2.1.2 Percepción de docente que observa la clase

Respecto a la segunda implementación que tuvieron los docentes en el establecimiento, dentro de las apreciaciones que pude observar es la buena aceptación de los estudiantes respecto de lo importante que es acercar el contenido mediante métodos que sean de contingencia, en ese sentido creo que fue un acierto tomar en cuenta lo que son los cómics, pero no comprometerse con un cómic en particular, sino que darle un contexto a lo que los docentes estaban haciendo, creo que esa fue la clave para la buena aceptación y el entendimiento que tuvieron los alumnos. De mi parte, creo que un 100% de los estudiantes estaba muy atento a la actividad, a pesar de que habían algunos que se sentían muy bien con la actividad y la pudieron resolver rápido, también habían otro grupo de estudiantes a los que les costaba mucho, pero en líneas generales, creo que a nivel de curso un 80% se mantuvo atento a lo que estaban diciendo los profesores, en ese sentido, como se presenta la actividad a nivel de producción en papel también es súper atractiva para el curso en el que se trata de impartir, entonces, creo que tuvo un buen impacto en los estudiantes y creo que fue una clase dinámica para el estudiante, para lo que a el le interesa aprender introduciendo el contenido que el profesor le interesa manejar en ese sentido. (Transcripción de audio – Anexo XIII)

En un sentido más matemático y no tan pedagógico de la actividad, creo que se logra el cometido que tenían los profesores respecto de querer acercar y conectar el logaritmo de tal forma que surgiera de manera natural dentro de los estudiantes, como una forma de resolver ciertas situaciones que a veces no están consideradas por ellos. En ese sentido parte de los estudiantes, no sabría decir que porcentaje, pero una parte de ellos logra este cometido, y yo creo que esta es la vía para que los otros también lo logren. El validar lo que se está haciendo en ese sentido, creo que en el aspecto pedagógico y el aspecto matemático tuvieron un buen rol dentro de la clase que se intentó planificar y con esto se logra lo que estaba presupuestado. (Transcripción de audio – Anexo XIV)

7.2.2 Contraste de implementación y planificación de la clase

A continuación, se presenta una tabla con los logros y dificultades que fueron ocurriendo en transcurso de la clase, lo que permite contrastar lo realizado en la implementación de la clase con el plan de clase.

Tabla 32. Contraste planificación - implementación

Momento	Logros	Dificultades
Inicio	• Se plantea el objetivo de la clase. • Existe apoyo visual para ayudar al contexto y llamar la atención de los estudiantes. • Los alumnos responden las preguntas propuestas en el PPT. • Se utilizan las respuestas de devolución, respecto a la comprensión de la actividad. • Los alumnos ponen atención al momento de indicar las instrucciones. •	• Un pequeño grupo de alumnos se desaminan al escuchar el objetivo de la clase.
Desarrollo	• Los alumnos ponen atención al momento de leer la actividad. • No se presentan dificultades con el contexto ni con las interrogantes de la actividad. • Los alumnos se muestran participativos a la hora de dar a conocer sus respuestas. • Los alumnos ponen atención a la hora de conocer las respuestas correctas. • La mayoría de las respuestas tanto correctas como erróneas se consideran en el plan de clase. •	• Algunos alumnos empiezan a trabajar en la actividad mientras se está explicando. • No se cumple con el tiempo planificado, ya que los estudiantes responden rápidamente las interrogantes. • Los alumnos sólo indicaban las respuestas de la actividad, sin previo desarrollo. • Pocos alumnos no consideran el uso de potencias.
Cierre	• Se introduce a los logaritmos a través de la última interrogante, cumpliendo con el proceso DHO. • Se reescribe la expresión usando logaritmos. • Los alumnos responden las últimas interrogantes de la actividad. • La mayoría de los estudiantes se dio cuenta del uso de potencias en la actividad. •	• No se cumple con el tiempo estimado para el cierre de la clase.

Fuente: Elaboración propia

7.2.3 Análisis de las producciones de los estudiantes

En esta parte, se analizarán las producciones de las duplas de estudiantes de 2º y 3º año de enseñanza media que participaron de la clase. Para cada pregunta de la tarea implementada, presentada en el análisis anterior, se muestran las evidencias más significativas que nos permiten identificar los aciertos y errores de está implementación. Los resultados de la aplicación de esta actividad se presentan a continuación, mostrando evidencias del tipo de respuestas.

Tarea (Dr. Riemann y Goliath) implementación 2.

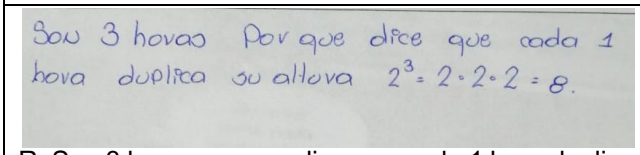
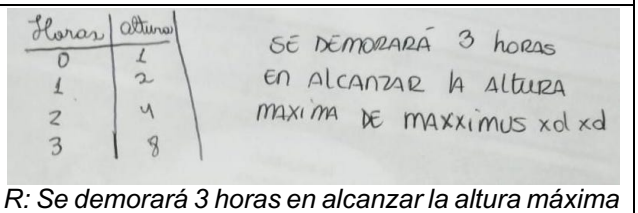
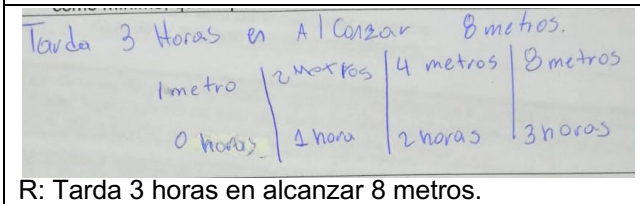
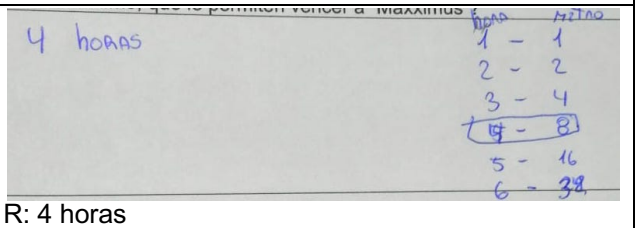
En esta tarea, ya reformulada, se pretende que los alumnos activen conocimientos previos del concepto de potencias en una situación que les resulte más atrayente. Las respuestas a estas preguntas por parte de los estudiantes son, en su mayoría correctas.

Pregunta 1

- Categoría 1: Redactan registros verbal y numérico para ejemplificar.
- Categoría 2: Exponen registros tabular y verbal.
- Categoría 3: Indican un registro tabular, pero no identifican las variables.
- Categoría 4: Exponen un registro tabular, pero establecen erróneamente la relación entre los datos.

Tabla 33: Evidencias Pregunta 1, implementación 2.

Pregunta: ¿Cuánto tiempo creen que demorará el Dr. Riemann en alcanzar los 8 metros como mínimo, que le permiten vencer a Maxximus?
Aciertos: Los estudiantes en general responden de manera correcta, realizando tablas y dando la respuesta en un costado, sólo una pareja escribió el procedimiento con potencias. **Errores:** Un mínimo de duplas, se confunde con que el Dr. Riemann en una hora mide un metro, llegando a calcular erróneamente que en 4 horas alcanza los 8 metros. Otra pareja, realiza un pensamiento lineal, expresando que cada una hora, crece un metro.

CATEGORÍA 1	CATEGORÍA 2
 R: Son 3 horas por que dice que cada 1 hora duplica su altura.	 *R: Se demorará 3 horas en alcanzar la altura máxima de Maxximus.*
CATEGORÍA 3	CATEGORÍA 4
 R: Tarda 3 horas en alcanzar 8 metros.	 R: 4 horas

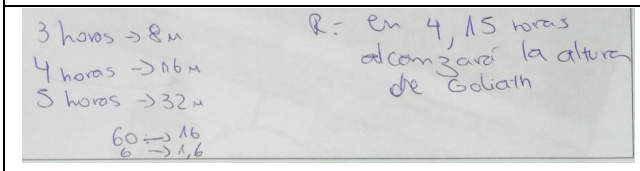
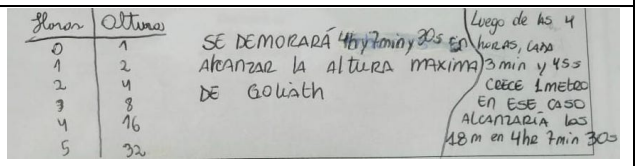
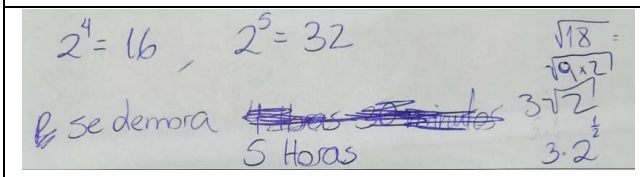
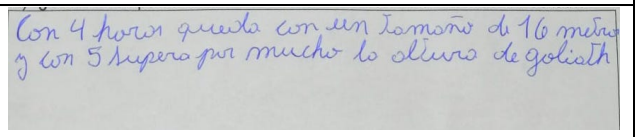
Fuente: Elaboración propia

Pregunta 2:

- Categoría 1: Establecen una relación errónea entre variables.
- Categoría 2: Expresan en un registro tabular los datos.
- Categoría 3: Redactan registro verbal y numérico.
- Categoría 4: Utilizan sólo registro verbal.

Tabla 34: Evidencias Pregunta 2, implementación 2.

Pregunta: ¿Cuánto tiempo demorará el Dr. Riemann en alcanzar la altura de Goliath?
Aciertos: Un grupo considerable de estudiantes realizan un cálculo "exacto" entre las horas, llegando a dos resultados icónicos: 4,15 horas y 4 horas, 7 minutos y 30 segundos. El resto, estima el resultado entre 4 y 5 horas. Además, una pareja señala que entre los valores 4 quedará con 16 metros, y con 5 horas supera por mucho la altura de Goliath, no verbalizando que entre las 4 y 5 horas se llega a la altura requerida. **Errores**: Una pareja, calcula que son 5 horas exactas, al costado, calculan la raíz cuadrada de 18, realizando una descomposición de raíces, llegando a 3 por raíz de 2.

CATEGORÍA 1	CATEGORÍA 2
	
R: En 4,15 horas alcanzará la altura de Goliath.	*R: Se demorará 4h, 7 min y 30 seg. en alcanzar la altura máxima de Goliath. / Luego de las 4 horas, cada 3 minutos y 45 seg. crece un metro, en ese caso alcanzaría los 18m en 4 hrs., 7 min. y 30 seg.*
CATEGORÍA 3	CATEGORÍA 4
	
R: Se demora 5 horas.	*R: Con 4 horas queda con un tamaño de 16 metros y con 5 supera por mucho la altura de Goliath.*

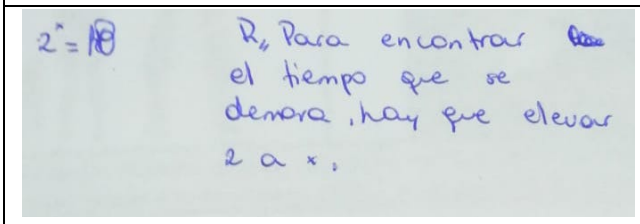
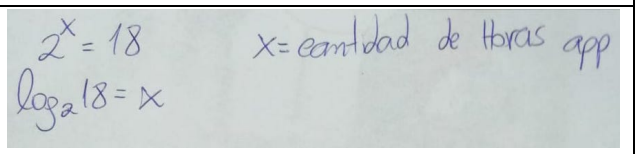
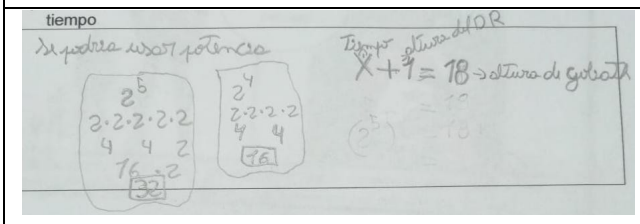
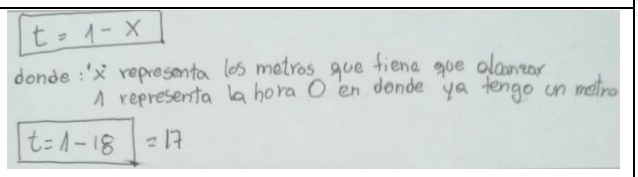
Fuente: Elaboración propia.

Pregunta 3

- Categoría 1: Expresan un registro numérico y redacta su respuesta.
- Categoría 2: Concluyen una expresión algebraica utilizando potencias y logaritmos, cuantifica la variable.
- Categoría 3: Identifican el objeto involucrado, pero entregan una expresión algebraica errónea.
- Categoría 4: Establecen una expresión algebraica errónea, identificando variables involucradas.

Tabla 35: Evidencias Pregunta 3, implementación 2.

Pregunta: Escribe la expresión matemática (o fórmula) que permite determinar dicho tiempo.
Aciertos: Aproximadamente, la mitad de las duplas encuentran la expresión de manera correcta, siendo sólo una pareja la que escribe la expresión con potencias y logaritmos, incluso añadiendo que x (en este caso, el exponente) es la cantidad de horas aproximadas. **Errores**: El resto de las duplas escribe una expresión muy similar, en la cual expresan el tiempo en función de la altura del Dr. Riemann y la altura máxima de Goliath, llegando a una expresión equivocada.

CATEGORÍA 1	CATEGORÍA 2
 *R: Para encontrar el tiempo que se demora, hay que elevar 2 a x.*	 *R: X= Cantidad de horas app.*
CATEGORÍA 3	**CATEGORÍA 4**
 *R: Se puede usar potencia.* *Tiempo= X* *1= Altura del Dr.* *X + 1= 18 altura de Goliath.*	 *R: Donde "x" representa los metros que tiene que alcanzar. 1 representa la hora 0 en donde ya tengo un metro.*

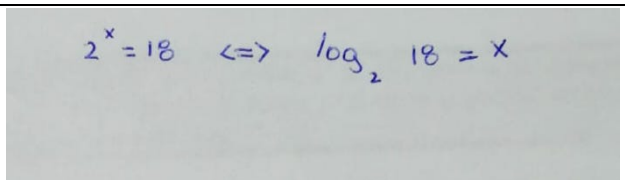
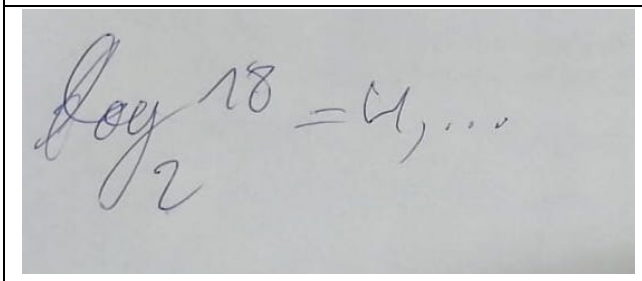
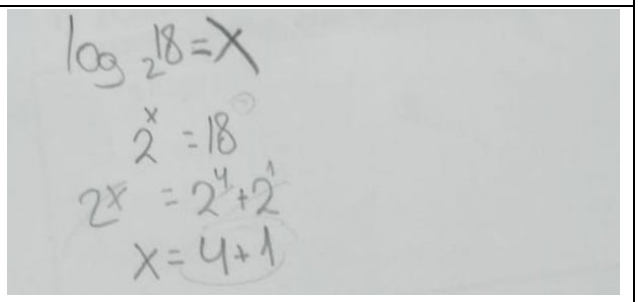
Fuente: Elaboración propia.

Pregunta 4

- Categoría 1: Establecen la relación entre potencias y logaritmos.
- Categoría 2: Expresan sólo el logaritmo y lo calculan aproximadamente.
- Categoría 3: Expresan el logaritmo y lo calculan erróneamente.

Tabla 36: Evidencias Pregunta 4, implementación 2.

Pregunta: Escriban la expresión anterior utilizando logaritmos
Aciertos: Alrededor del 90% de las duplas responde con la expresión, relacionándola con la potencia, cabe destacar que esta respuesta no fue mostrada a los estudiantes, y esta respuesta fue escrita después de dar un ejemplo en el cual se mostraba como escribir la potencia en forma de logaritmo. Hubo un caso en el cual, dijeron que el logaritmo en base dos de 18 es 4…; suponiendo así que pudo establecer que esa expresión equivale a la estimación hecha en la pregunta 2. **Errores**: El resto de las duplas, realizó un procedimiento de igualar las bases, es decir, 18 es igual a 2 elevado a 4 más 2 elevado a 1, luego, siguen con que x equivale a 4 más 1 (sumando los exponentes), lo cual es errado suponer.

CATEGORÍA 1	
	
CATEGORÍA 2	CATEGORÍA 3
	

Fuente: Elaboración propia.

7.2.4 Reformulación del diseño

Se presentan a continuación los cambios realizados al diseño de clase, en base a los logros y dificultades expuestas en la segunda implementación. Cabe destacar, que sólo se modificará la tarea propuesta. Es aquí en donde nuevamente se presenta la tercera parte del Estudio de Clases Japonés, en donde con ayuda de los docentes tanto investigadores y observadores se realizan los siguientes cambios.

7.2.4.1 Reformulación de tarea

Actividad

Para esta actividad se considera modificar pequeñas partes para realizar un mejor desarrollo. En las instrucciones, se detallará de mejor manera el punto "*Desarrolle y exprese el procedimiento según corresponda en cada ejercicio con lápiz pasta azul o negro*" acotando la instrucción y añadiendo que el procedimiento debe ser expresado completamente en la hoja y no sólo la respuesta. Además, se decide añadir otra instrucción, la que señale que los estudiantes deben empezar a trabajar después de la explicación expuesta por el docente.

Para el contexto de la actividad no se realizará ningún cambio, pero en las preguntas se reformularán tanto la primera como la segunda interrogante. Para la primera se consideran cortar la pregunta, siendo más concreta y quedando: *"¿Cuánto tiempo demorará el Dr. Riemann en alcanzar los 8 metros como mínimo, para vencer a "Maxximus"?"*. La segunda interrogante queda de la siguiente forma: "*¿Cuál es el tiempo estimado en que el Dr. Riemann alcanzará la altura de Goliath?"*; esto con el fin de que los estudiantes no calculen una hora exacta y sólo determinen un rango específico de horas.

Se considera añadir una quinta pregunta, en la cual los estudiantes deban reescribir potencias utilizando logaritmos. Las potencias serán indicadas en la hoja entregada por el docente. Esto tendrá el objetivo de ejercitar la relación existente entre estos dos objetos matemáticos.

Capítulo 8: Conclusiones

La problemática planteada en este trabajo está basada en el proceso de enseñanza para el concepto de logaritmo, considerando esto, es que se planteó el objetivo general de Realizar un Análisis Didáctico (Rico, 2013) del logaritmo, que nos permita estudiar las dificultades que tengan los docentes a la hora de enseñar este concepto, lo que deriva en que los estudiantes presenten problemas al trabajar con este objeto matemático.

Los objetivos específicos de este estudio están relacionados con el Análisis Didáctico (Rico, 2013), el cual nos permitió contrastar los conocimientos adquiridos en nuestra formación, con los lineamientos propuestos por el currículum escolar. En base a cada uno de sus componentes, es posible articular los ámbitos disciplinares, pedagógicos y didácticos, requeridos para elaborar una clase referente al objeto matemático tratado. A través de los Análisis Conceptual, de Contenido y Cognitivo, es que se prepararon actividades con el fin de evidenciar lo propuesto en la problemática de este trabajo. Mediante estos análisis es que se dieron los fundamentos principales para elaborar un diseño de clase acorde para la implementación de una propuesta de aprendizaje.

Los Análisis de Instrucción y de Actuación están estrechamente ligados, debido a que a partir de la reformulación de actividades propuestas en el primero de estos análisis es que definimos de forma definitiva una actividad para ser desarrollada de manera concreta en el Análisis de Actuación; este tuvo la finalidad de analizar los resultados obtenidos en la implementación de la actividad final, la cual fue llevada a cabo en estudiantes de un colegio de la comuna de Quintero, pertenecientes a los cursos de segundo y tercer año de enseñanza media. Cabe señalar, que el Análisis de Instrucción fue elaborado en base a la Dialéctica Herramienta – Objeto (Díaz, 2014), la cual nos permite, a través de un conocimiento previo por parte de los estudiantes (Potencias), diseñar una propuesta que tome este conocimiento y sea el nexo para construir un nuevo objeto matemático (Logaritmos).

Considerando las preguntas orientadoras de nuestro trabajo:

- ¿Qué tipo de actividades facilitan la comprensión por sobre la mecanización de los conceptos de potencias y logaritmos?
- ¿Qué conocimientos previos son los necesarios para que los estudiantes establezcan la relación entre potencias y logaritmos?

Dando una respuesta a la primera pregunta, es que concluimos que las actividades deben ser pensadas para que el estudiante pueda, en primera parte, tener un contexto que sustente el entendimiento del problema, y que además este contexto debe ser cercano, sumergido en una situación actual, para que el alumno se interese en saber como resolverla. La actividad además debe contener un apoyo audiovisual, para sustentar las ideas y conceptos (definiciones, propiedades) que surjan en su desarrollo, ayudando al docente en la labor de reforzar ideas y ver el estado en el cual están sus estudiantes. En base a esta idea, es que además, se debe tener en consideración que no sólo planifiquemos actividades que permitan al estudiante abandonar la rutina de repetir lo que el docente dice y limitar la aplicación de los contenidos a un par de guías de trabajo, sino que además les propongan un desafío para ellos que los lleve a seguir investigando sobre el tema expuesto.

Con respecto a la segunda pregunta, consideramos que los conocimientos previos que deben tener son las potencias y todo lo relacionado a ella, es por lo que el análisis exploratorio realizado en esta investigación hace alusión a los conocimientos de potencias que los estudiantes debieran tener adquiridos, y cuyos resultados nos ayudaron a crear la Tarea, apoyados por la Dialéctica Herramienta–Objeto (Díaz, 2014), con el fin de que los estudiantes pudieran usar dichos conocimientos en la actividad que fue implementada satisfactoriamente. Como profesores el no conocer un concepto que está predestinado a conocerse por parte del currículum supone una problemática mayor a la hora de enfrentarse a nuevos conocimientos que requieran del concepto no visto, apoyados en esto es que con la Dialéctica Herramienta-Objeto pudimos dimensionar el error que se comete en las aulas nacionales, quizá no sólo con potencias y logaritmos, si no que también con muchos conceptos matemáticos. Más aún, una vez corregido esto, cuando ocurre la adquisición de un nuevo contenido, las dificultades que surgen deben ser atendidas a la brevedad, ya que, en caso contrario, se crea una construcción errónea del conocimiento matemático.

Considerando el punto de vista del marco metodológico utilizado, la Dialéctica Herramienta-Objeto cumple un papel fundamental en nuestro estudio, debido a que cumple un papel de facilitador de nuestra labor como investigadores en la creación de actividades, la cual nos permitieron introducir un nuevo concepto (Objeto) a partir de un concepto ya adquirido (Herramienta). Además, el Estudio de Clases Japonés nos permitió enfatizar en

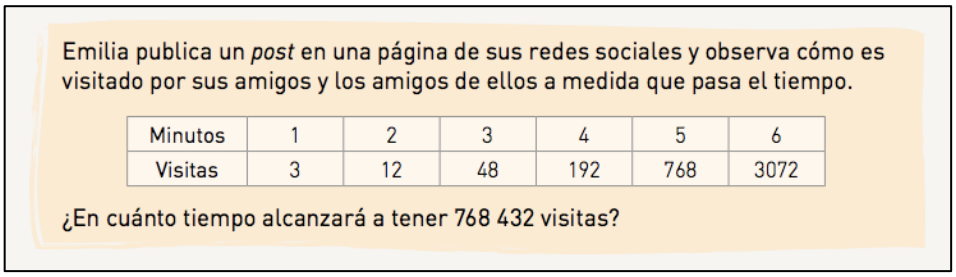
el proceso de resolución de problemas, apoyados por la preparación de las clases a través de un grupo de profesores, los cuales seleccionan materiales relevantes para cumplir con el propósito de la clase, en donde se además se afina un primer diseño acorde a las necesidades de los estudiantes, para finalizar con la creación de un plan de clases.

Resulta imperativo señalar que, dentro de la realización de este trabajo, sentimos la necesidad de seguir investigando diferentes formas de entregar un contenido matemático, cualquiera sea este, para lograr que nuestros estudiantes sientan el deber de no conformarse con el conocimiento transmitido por nuestra parte, sino que puedan reflexionar sobre lo visto en la clase, de manera que no ocurra una mecanización del concepto por sobre la comprensión de este.

Debido a las circunstancias ocurridas en nuestra formación escolar, es que el concepto de logaritmo no fue conocido por nosotros, lo que generó un vacío que perduró hasta que como profesores en formación y mediante los cursos introductorios de la carrera universitaria, pudimos conocer este concepto importante, pero como función logarítmica, lo que derivó en que nuestro conocimiento de este objeto sea a través de la función, y desde allí, surge el saber del logaritmo como se conoce hoy en día, como un facilitador de operaciones. Por lo tanto, es que consideramos importante que la enseñanza de la función logarítmica sea considerada inmediatamente después que la enseñanza del logaritmo, es decir, luego de conocer el logaritmo, sus propiedades, restricciones y aplicaciones, se conozca la función logaritmo, la que es una derivación de este objeto matemático, y que no sea tratada como un conocimiento aparte del logaritmo.

Tomando en consideración la epistemología del logaritmo, es que nos damos cuenta de que hoy en el libro del estudiante, se propone conocer el surgimiento de este objeto matemático, pero de manera tácita, es decir, se muestra como un ejercicio más que el docente puede o no incorporar para su clase, pero al ser una sugerencia de actividad no se profundiza su historia, dejando a merced del conocimiento del docente su implementación. El profesor puede tomar este ejercicio y a su vez, introducir la epistemología del logaritmo; en este ejercicio, como veremos a continuación, involucra aspectos de la cotidianeidad que pueden llamar la atención del estudiante, el cual, en este caso, sólo está limitado a modelar la fórmula que permita entregar una solución a la pregunta.

Figura 16. Ejercicio Texto del estudiante 2018.



Emilia publica un *post* en una página de sus redes sociales y observa cómo es visitado por sus amigos y los amigos de ellos a medida que pasa el tiempo.

Minutos	1	2	3	4	5	6
Visitas	3	12	48	192	768	3072

¿En cuánto tiempo alcanzará a tener 768 432 visitas?

Fuente: Chacón, García, Rupin, Setz & Villena, 2018, p.60.

Un aspecto positivo dentro de nuestra experiencia en el aula en este trabajo es que el proponer una actividad que salga de la rutina, en el sentido de que no sólo basta con mostrar fórmulas y propiedades, sino que se proponga una situación en que ya no sea sólo una clase tradicional, mostrar tareas concretas apoyadas de un contexto llamativo a los alumnos, supone una actitud positiva por parte de estos, los cuales mostrarán un interés y una motivación genuina respecto de la utilidad real de la matemática. En resumen, el proponer una situación que vaya más allá de un trabajo en pizarra por parte de los profesores, y de un desarrollo de tareas repetitivas y aburridas para los alumnos, supone un reencantamiento por parte de los estudiantes hacia las matemáticas.

Como contraparte de esto, es que debemos tener en claro que proponer una actividad “interesante” a los estudiantes para la introducción de un nuevo concepto, no implica un verdadero aprendizaje. Puede que la actividad cumpla el propósito de ser entretenida y que dentro del período de la clase, los estudiantes puedan responder de manera correcta la actividad, pero dentro de un tiempo puede que se recuerde más la actividad en sí que el contenido que se trató de entregar.

La realización de este estudio nos permite reflexionar sobre la importancia de preparación de una clase, implementarla y evaluar el logro de los objetivos propuestos a partir de las evidencias de aprendizaje de los estudiantes. Identificamos un aprendizaje y crecimiento, que nos permitirá en un futuro continuar con desarrollo profesional docente. Hemos visto que la labor del docente va más allá de estar parado frente a un curso tratando de explicar conceptos y fórmulas, su trabajo consiste en investigar, indagar, cuestionar, razonar y adecuar los contenidos propuestos para que sus alumnos sean capaces de entablar puentes de conocimientos ya adquiridos con nuevos conocimientos, que le permitan, a la larga, desarrollar un aprendizaje significativo. Además, si se presenta una

problemática como la señalada en este trabajo, al realizar un Análisis Didáctico (Rico, 2013) a un concepto matemático ayudará al docente a dotarlo de un rol investigativo, que le permita analizar esta problemática que pueda surgir en su sala de clases, permitiéndole así la posibilidad de enriquecer aún más su labor docente.

Proyecciones

Se espera que las actividades propuestas en este trabajo puedan ser implementadas por otros docentes y continuar con un estudio de la relación existente entre la potencia, la raíz y el logaritmo, utilizando este trabajo como un primer acercamiento, considerando la epistemología del concepto logaritmo, además de su existencia en distintos contextos y aplicaciones.

Acerca de como se continua después de la actividad, es que ahora los alumnos sean capaces de reescribir un logaritmo como una potencia, donde lo mecánico queda nuevamente de manifiesto, es por esto, que queda entablado un desafío para los docentes, los cuales deberán proponer ejercicios en donde el estudiante pueda establecer nuevamente la relación, es por esto que se sugiere utilizar el mismo contexto de la actividad, pero ahora adaptándola como una continuación de la historia, añadiendo nuevos personajes, cambiando la situación con el fin de que el estudiante se vea en la necesidad ahora de reescribir el logaritmo como potencia.

Con respecto de como se continuaría con las propiedades y aplicaciones del logaritmo, se sugiere deducir las propiedades por medio de las propiedades ya conocidas del objeto potencia, esto nos permite seguir fortaleciendo la relación entre dichos conceptos. En torno a las aplicaciones, se sugiere que el saber los distintos ámbitos en donde se aplica este objeto, resultaría motivador para el estudiante, puesto que este podrá conocer otras áreas no matemáticas que puedan ser de su interés, como áreas de la química, física, entre otras.

A continuación, se presenta un plan de unidad de los contenidos posteriores a la actividad implementada, sugiriendo lo mencionado anteriormente sobre el objeto de logaritmo.

Unidad 1: Números			
Subunidad: Potencia, raíces enésimas y logaritmos			
Objetivo de Aprendizaje: Mostrar que comprenden la relación entre potencias, raíces enésimas y logaritmos			
Indicadores de Evaluación	**Contenidos**		
	Conceptuales	**Procedimentales**	**Tiempo**
1. Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir, desde potencias a raíces y viceversa, y desde potencias a logaritmos y viceversa.	Potencia Logaritmo Propiedades de potencia Propiedades del logaritmo	Establecen condiciones para la existencia de un logaritmo, a través de restricciones para la base y el argumento. Realizan actividades contextualizadas en donde expresan una potencia como un logaritmo y viceversa. Calcular el valor de logaritmos exactos en ejercicios planteados. (Actividad 1) Resuelven actividades que les permiten conjeturar las propiedades de logaritmos mediante las propiedades de potencias. Aplican las propiedades de raíces o logaritmo para reducir expresiones numéricas. (Actividad 2 y 3)	10 horas
2. Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos.	Situaciones y contextos involucrados Propiedades del logaritmo	Investigan contextos en donde está involucrado el logaritmo. Resolver problemas con logaritmos que contengan los contextos vistos anteriormente. (Actividades 4 y 5)	6 horas

Actividades sugeridas	
Convierten desde un tipo de registro a otro; es decir, desde potencias a raíces y viceversa, y desde potencias a logaritmos y viceversa.	**Actividad 1** Consideren el valor de las siguientes potencias para resolver los ejercicios: $2^0 = 1$ | $3^0 = 1$ | $4^0 = 1$ | $6^0 = 1$ $2^1 = 2$ | $3^1 = 3$ | $4^1 = 4$ | $6^1 = 6$ $2^2 = 4$ | $3^2 = 9$ | $4^2 = 16$ | $6^2 = 36$ $2^3 = 8$ | $3^3 = 27$ | $4^3 = 64$ | $6^3 = 216$ $2^4 = 16$ | $3^4 = 81$ | $4^4 = 256$ | $6^4 = 1296$ $2^5 = 32$ | $3^5 = 243$ | $4^5 = 1024$ | $6^5 = 7776$ $2^6 = 64$ | $3^6 = 729$ | $4^6 = 4096$ | $6^6 = 46\,656$ **1** Calculen los siguientes logaritmos: a. $\log_4(4) =$ ☐ d. $\log_2(2) =$ ☐ b. $\log_6(1) =$ ☐ e. $\log_5(5) =$ ☐ c. $\log_3(1) =$ ☐ f. $\log_4(1) =$ ☐ Fuente: Chacón et al., 2018, p.54. **Actividad 2** 3. Aplica las propiedades para reducir las siguientes expresiones a un solo logaritmo. Considera a, b, p, q, r, s $\in \mathbb{R}^+$. a. $\log(5) + \log(8)$ b. $\log(15) + \log(15) - \log(5)$ c. $\frac{1}{2}\log(5) + 3\log(125)$ d. $\log(a^2 + b) - \log(a)$ e. $a\log(p) - 3c\log(q)$ f. $\log(\sqrt{p}) - 4\log(q) + \frac{1}{3}[\log(\sqrt{r}) + 2\log(s)]$ Fuente: Chacón et al., 2018, p.58.

Actividad 3

7 Calcula el valor de cada una de las siguientes expresiones.

a. $\log_4(64) + \log(1000) + \log_5(125) =$

b. $2\log(100\,000) - 2\log_4(256) + 4\log_2(32) =$

c. $2\log_5(25) - 3\log_7(49) + 4\log_8(4096) =$

d. $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right) - \log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{125}{216}\right) + \log(10000) =$

e. $3\log_{\frac{1}{4}}(32) + 7\log_{\frac{1}{5}}(125) - 6\log_{\frac{1}{3}}(243) =$

f. $4\log_{\frac{5}{7}}\left(\frac{25}{49}\right) + 2\log_{\frac{9}{5}}\left(\frac{81}{25}\right) - 5\log_{\frac{6}{7}}\left(\frac{216}{343}\right) =$

Fuente: Chacón et al., 2018, p.64.

Resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que involucran logaritmos.

Actividad 4

Un médico detecta que un paciente requiere mantener los niveles de un medicamento en la sangre. La cantidad C de miligramos que hay presentes en ella va disminuyendo con el tiempo t en horas de acuerdo a la relación

$$\log C = 1 - 0{,}087t$$

a. ¿Cuál es la dosis que se administra del medicamento?

b. ¿Al cabo de cuántas horas quedan 0,5 mg del medicamento?

c. ¿Cuántos miligramos quedan en la sangre 8 horas después?

d. Si el medicamento se administra a las 8 A.M. y no debe bajar de 0,3 mg, ¿a qué hora debe recibir la siguiente dosis?

Fuente: Chacón et al., 2018, p.53.

Actividad 5

10 **Ciencias naturales.** Para determinar el diámetro d de un asteroide (en kilómetros), los astrónomos utilizan la expresión: $\log(d) = 3{,}7 - 0{,}2 \cdot g$, donde g corresponde a la magnitud absoluta del asteroide.

a. Determina el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 30.

b. Calcula el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es 20. ¿Qué puedes concluir?

c. ¿Cuál es la magnitud absoluta de un asteroide si su diámetro mide 5,8 kilómetros?

Fuente: Chacón et al., 2018, p.65.

Bibliografía

Agencia de Calidad de la Educación. (2017). Aprendiendo de los errores. Santiago, Chile.

Arcavi, A., Isoda, M., & Mena, A. (2007). El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas, Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Bolívar, A. (1993). "Conocimiento didáctico del contenido" y formación del profesorado: El programa de L. Shulman.

Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J., & Villena, M. (2018). Texto del estudiante, Matemática 2º Medio . Chile : Ediciones SM.

Díaz, R. (2014). La construcción del concepto circunferencia desde la dialéctica herramienta herramienta-objeto con el apoyo del software geogebra en estudiantes de quinto de secundaria. Tesis para optar el grado acádemico de magister en enseñanza de las matemáticas , Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

Farfán, R., & Ferrari, M. (2002). Una visión socioepistemológica, Estudio de la función logaritmo. Cinvestav-IPN, México.

Fernández, L. (2006). ¿Cómo analizar datos cualitativos? Butlletí LaRecerca. Institut de Ciències de l'Educació, Universitat de Barcelona. ISSN: 1886-1946.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logarítmo. Tesis inédita de maestría, Cinvestav-IPN, México.

Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva . Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Flores, P. (1997). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

Gacharná, O. (2012). Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades enla educación básica y media. Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de: Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales , Universidad Nacional de Colombia , Facultad de Ciencias, Bogotá D.C.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

Gómez, P. (2002). Análisis Didáctico Y Diseño Curricular En Matemáticas. Revista EMA, VII(3), 251-292.

Hernández, M., & Ferrari, M. (2005). Logaritmos a partir de la covariación de sucesiones. Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, México.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). Metodología de la Investigación. México D.F.: McGraw-Hill.

Jiménez, D. (2013). Introducción al Cálculo (3ª edición ed.). Valparaíso.

Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral , Universidad de Granada , Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

MINEDUC . (2016a). Matemática. Programa de Estudio para Séptimo Básico. Santiago.

MINEDUC . (2016b). Matemática. Programa de Estudio para Octavo Básico. Santiago.

MINEDUC . (2016c). Matemática. Programa de Estudio para Primero Medio. Santiago.

MINEDUC . (2016d). Matemática. Programa de Estudio para Segundo Medio. Santiago.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico (Vol. 33). Revista Iberoamericana de Educación Matemática.

Rubin, H., & Rubin, I. (1995). Qualitative intervierwing. The art of hearing data. Thousand Oaks, California : Sage Publicatios.

Sanabria, M. D. (2016). El concepto de logaritmo: Una revisión histórica, bibliográfica y una propuesta didáctica en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires, Departamento de Formación Docente, Buenos Aires.

Tapia, F. (2003). Historia de los logaritmos. Apuntes de la Historia de las Matemáticas. Obtenido de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-2-1-logaritmos.pdf