Universidad de Valparaíso
Chile.

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Algunos aspectos dinámicos asociados a una singularidad silla-foco: el 1-ciclo de Silnikov.

Profesor: Eduardo Stange Sturla
Alumno: Ricardo Reyes Carocca

Valparaíso, Enero 2011

TRABAJO DE GRADO

Presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el Grado de Licenciado en Mención Matemática de la Universidad de Valparaíso 2011.

Firmas del Jurado:

Prof. Eduardo Stange S ____________________________-

Prof. Raúl Fierro P. ____________________________-

Prof. Iván Szantó ____________________________-

Valparaíso, Chile, 21 de Enero del 2011.

AGRADECIMIENTOS

La presente Tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, opinando, corrigiendo, teniendo paciencia, dandome ánimo y acompañandome en el proceso del trabajo.

Agradezco a mi madre que me apoyo en todo momento y en todo lugar, que me crió y formó como una persona capaz de lograr mis objetivos. Además, por su comprensión, dedidación y al estar a mi lado siempre.

Debo agradecer de manera especial y sincera al Profesor Eduardo Stange por aceptarme para realizar esta tesis de Licenciatura bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar ha sido un aporte importante, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en la formación como estudiante.

A mis amigos, compañeros, familiares y en especial a mi hermano apoyándome en este proceso tan importante.

Gracias a todos.

Índice general

Introducción

En esta tesis se aborda un tema relevante en la Teoría de los Sistemas Dinámicos sobre campos de vectores 3-dimensionales que presentan singularidades y órbitas homoclínicas. El trabajo se centra en el caso en que la singularidad es única y de tipo silla-foco y este fenómeno se conoce como el 1-ciclo de Silnikov. El objetivo principal es estudiar la estructura de la dinámica que presenta el campo de vectores en una vecindad de la órbita homoclínica.

El desarrollo del trabajo se distribuirá en cuatro capítulos y en el primero de ellos se introducirán las definiciones y conceptos básicos asociados al tema de estudio.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de un difeomorfismo en el plano que admite un conjunto invariante sobre el cual presenta dinámica caótica. Este fenómeno es conocido como la Herradura de Smale. Se hará una construcción geométrica de este conjunto y demostraremos que la dinámica asociada a este conjunto invariante es modelada a través de la dinámica simbólica construida sobre el espacio de las sucesiones bi-infinitas de dos símbolos; de hecho, construiremos una conjugación topológica entre el difeomorfismo y la aplicación shift definida sobre el espacio de sucesiones. Al final de este capítulo se presenta el teorema de Moser que generaliza lo anterior al caso de sucesiones bi-infinitas de n-símbolos.

En el tercer capítulo se presentan y se estudian algunas bifurcaciones de familias a 1- parámetro de difeomorfismos, definidos en el plano, que aparecerán en el estudio posterior de la dinámica asociada una órbita homoclínica de campos de vectores. Las bifurcaciones que estudiaremos son las tipo silla-nodo, pitchfork y de duplicación de período (flip).

El capítulo cuarto y final, se dedica al estudio del problema central de esta tesis: entender y caracterizar, en lo posible, la dinámica que presenta tal campo de vectores en la vecindad de la órbita homoclínica. El estudio de este problema consistirá de dos etapas. Primero, construiremos una aplicación asociada al campo de vectores (transformación de Poincaré), definida en una región 2-dimensional, la cual presentará, bajo hipótesis bien generales, toda la dinámica del ejemplo de Smale visto en el capítulo dos y, en consecuencia, será caótica. Segundo: se estudiarán los cambios que puede presentar la dinámica del campo de vectores cuando la órbita homoclínica se desdobla (o se destruye) a través de un parámetro. Esta situación mostrará la existencia de bifurcaciones y entre estas aparecerán las estudiadas en el capítulo tres y, más aún, se demostrará que existe una sucesión de valores del parámetro de manera que, para cada uno de estos, el campo de vectores asociado presenta nuevamente el 1-ciclo de Silnikov.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Fijemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Trataremos aquí con difeomorfismos $f : U \to f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ de clase C^r, $r \geq 1$. Denotemos por $\mathrm{Di}f^r(U)$ el conjunto de todos los difeomorfismos sobre U de clase C^r, esto es, aplicaciones biyectivas, diferenciables y con inversa diferenciable.

$$\mathrm{Di}f^r(U) = \{\varphi : \ \varphi \text{ difeomorfismo sobre U de clase } C^r\}$$

Denotemos por

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{n-veces}}$$

Definición 1. La órbita de x por φ es el conjunto de puntos formado por los iterados positivos y negativos de x, esto es, el conjunto

$$O(x) = \{\varphi^n(x) : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

donde

$$\begin{aligned} O^+(x) &= \{x, \varphi(x), \varphi^2(x), \cdots\} \\ O^-(x) &= \{x, \varphi^{-1}(x), \varphi^{-2}(x), \cdots\} \end{aligned}$$

denotan, respectivamente, la órbita positiva y negativa de x.

Definición 2. Un punto $p \in U$ es un punto fijo de φ, si $\varphi(p) = p$. El punto p se dice periódico de período n si $\varphi^n(p) = p$, donde n es el menor entero positivo con tal propiedad.

Denotemos los conjuntos de puntos fijos y de puntos periódicos de φ de periódo n, respectivamente como

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}(\varphi) &= \{x \in U : \ \varphi(x) = x\} \\ \mathrm{Per}_n(\varphi) &= \{x \in U : \ \varphi^n(x) = x \ \wedge \ \varphi^m(x) \neq x, \ \text{si}, 0 < m < n\}, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1. La función identidad $f(x) = x$, tiene todos los números reales como puntos fijos.

Ejemplo 1.2. La función $h(x) = x^2 - 1$, tiene a $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ como puntos fijos y a $x = 0$ y $x = -1$ como puntos periódicos de período 2.

En efecto, resolvamos $h(x) = x$

$$\begin{aligned} h(x) = x &\Leftrightarrow x^2 - 1 = x \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces son $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, los puntos fijos son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Como $h^2(x) = h(h(x)) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$, tenemos que $x = 0$ y $x = -1$ son puntos periódicos de período 2.
En efecto, resolvamos $h^2(x) = x$

$$\begin{aligned} h^2(x) = x &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{aligned}$$

cuyas raíces son: 0, -1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, $0, -1 \in \mathrm{Per}_2(h)$.

Observación 1. *Sea $p \in U$.*

a) *Si $p \in Fix(\varphi)$, entonces $p \in Per_n(\varphi)$, para todo $n \geq 1$.*
b) *Si p es un punto fijo de φ de período n, entonces p es un punto fijo para φ^n.*

Definición 3. Sea $p \in U$ un punto fijo de φ. Se dice que p es hiperbólico, si la derivada de φ en p, $d\varphi(p)$, tiene todos sus valores propios con módulo distinto de 1.

Definición 4. Sea $\varphi^n(p) = p$, $n \geq 1$,

1. p es un punto periódico atractor (o un pozo) si todos los valores propios de $(d\varphi^n)_p$ tienen módulo menor que 1.
2. p es un punto periódico repulsor (o una fuente) si todos los valores propios de $(d\varphi^n)_p$ tienen módulo mayor que 1.
3. p es un punto silla si $(d\varphi^n)_p$ tiene valores propios de módulo mayor que 1 y menor que 1.

Ejemplo 1.3. Consideremos el difeomorfismo $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$. Existen 3 puntos fijos hiperbólicos para f que son $0,\ -1,\ 1$.
En efecto

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^3 + x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x(x-1)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 1. \end{aligned}$$

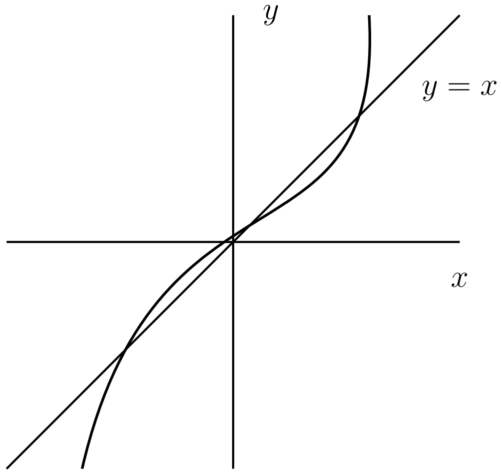
Ahora bien,

$$d\,f(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 1)$$

y, por tanto,

$$d\,f(0) = \frac{1}{2} \qquad , \qquad d\,f(\pm 1) = 2$$

Luego, 0 es un punto fijo atractor y además, 1 y -1 son puntos fijos hiperbólicos repulsores.



$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$

Definición 5. Sea $p \in U$ un punto fijo hiperbólico. Se definen los conjuntos estable e inestable de p, respectivamente, como

$$\begin{array}{rcl} W^s(p) & = & \{x \in U : \varphi^i(x) \to p;\;\; i \to +\infty\} \\ W^u(p) & = & \{x \in U :\; \varphi^i(x) \to p;\;\; i \to -\infty\} \end{array}$$

Es decir, corresponden a los conjuntos de puntos que al iterarlos positivamente o negativamente por φ convergen a p.

Proposición 1.1. *Los conjuntos $W^s(p)$ y $W^n(p)$ son invariantes por φ. Esto es, $\varphi(W^s(p)) = W^s$ y $\varphi(W^u(p)) = W^u$.*

En efecto; sea $x \in W^s$. Verifiquemos que $\varphi(x) \in W^s$,es decir, $\lim_{i\to+\infty} \varphi^i(\varphi(x)) = p$. Ahora bien, $\lim_{i\to+\infty} \varphi^i(\varphi(x)) = \lim_{i\to+\infty} \varphi^{i+1}(x) = \lim_{j\to+\infty} \varphi^j(x) = p$, tomando $j = i + 1$. Luego, $W^s(p)$ es invariante por φ. De manera análoga se verifica para $W^u(p)$.

Ejemplo 1.4. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal con valores propios de módulo distinto de 1, entonces el origen es punto fijo hiperbólico y $W^s(0)$ y $W^u(0)$ son los subespacios lineales asociados a los valores propios de módulo menor y mayor que 1, respectivamente, tal que

$$\mathbb{R}^n = W^s(0) \oplus W^u(0)$$

donde, $\dim W^s(0) = s$ y $\dim W^u(0) = u$, $n = s + u$.

A continuación, haremos uso del siguientes resultado cuya demostración puede ser encontrada en [H-P-S] y que esta fuera del contexto de esta tesis.

Teorema 1.2. *Supongamos que $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un C^k difeomorfismo, $k \geq 1$, y $p \in U$ un punto fijo hiperbólico de φ. Entonces los respectivos conjuntos estable e inestable,*

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{x \in U : \ \varphi^i(x) \to p; \ i \to +\infty\} \\ W^u(p) &= \{x \in U : \ \varphi^i(x) \to p; \ i \to -\infty\} \end{aligned}$$

son C^k subvariedades inyectivamente inmersas de $\mathbb{R}^n$.

Definición 6. Sea $p \in U$ un punto fijo hiperbólico de ϕ. Se dice que $q \in U$ es un punto homoclínico de p si $p \neq q$ y $q \in W^s(p) \cap W^u(p)$. Es decir, $p \neq q$ y $\lim_{i \to \pm\infty} \varphi^i(q) = p$

Definición 7. Se dice que q es un punto homoclínico transversal de p si $W^s(p)$ y $W^u(p)$ se intersectan transversalmente en q. Es decir, si

$$\mathbb{R}^n = T_q(W^s(p)) \oplus T_q(W^u(p))$$

donde $T_q(W^s(p))$ y $T_q(W^u(p))$ denotan los espacios tangentes de las conjuntos estables e inestables respectivamente en el punto q.

Observación 2. *Los isomorfismos lineales hiperbólicos no tienen puntos homoclínicos.*

En efecto, sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isomorfismo lineal hiperbólico y supongamos que φ tiene un punto q homoclínico de $0 \in \mathbb{R}^n$, es decir, $q \neq 0$, $q \in W^s(0) \cap W^u(0)$. Como $\mathbb{R}^n = W^s(0) \oplus W^u(0)$, implica que $W^s(0) \cap W^u(0) = \{0\}$, lo cual es absurdo. Luego φ no tiene puntos homoclínicos.

Daremos dos ejemplos de órbitas homoclínicas de aplicaciones en el plano $\mathbb{R}^2$

1) Órbitas homoclínicas de una aplicación lineal deformada
   Consideremos una aplicación lineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$.

Como 2 y $\frac{1}{2}$ son los valores propios de $D\varphi$ se tiene que los subespacios propios asociados a los autovalores de 2 y $\frac{1}{2}$ son, respectivamente

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \{(x,y) : x = 0\} \\ W^u(0) &= \{(x,y) : y = 0\} \end{aligned}$$

Consideremos además, el difeomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\Psi(x,y) = (x - f(x+y), y + f(x+y))$$

donde f es una función diferenciable tal que f es cero sobre $x + y \leq 1$ y $f(2) > 2$. Esto permite que Ψ está definida en todo $\mathbb{R}^2$ para puntos que pertenecen a rectas de la forma $l_c = \{x + y = c\}$.
Estudiemos la composición de funciones $\Psi \circ \varphi$.
Como $\Psi \circ \varphi(x,y) = (2x - f(2x + \frac{1}{2}y), \frac{1}{2}y + f(2x + \frac{1}{2}y))$ y

$$\begin{aligned} D(\Psi \circ \varphi)(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 - 2\frac{\partial f}{\partial x}(2x + \frac{1}{2}y) & 2\frac{\partial f}{\partial y}(2x + \frac{1}{2}y) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(2x + \frac{1}{2}y) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(2x + \frac{1}{2}y) \end{pmatrix} \\ D(\Psi \circ \varphi)(0,0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tiene valores propios 2 y $\frac{1}{2}$, se tiene que $W^s(0)$ y $W^u(0)$ tambien son los subespacios propios estables e inestables para el difeomorfismo $\Psi \circ \varphi$ (composición de un difeomorfismo con una aplicación lineal). De la construcción sabemos que, $\{(x,y) : x = 0, y \leq 2\}$ está contenido en $W^s(0)$ y $\{(x,y) : x \leq 1, y = 0\}$ está contenido en $W^u(0)$. Ahora bien, calcularemos $\Psi(\{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, y = 0\})$, donde $\{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$ también esta contenido en $W^u(0)$. Así tenemos que $\Psi(1,0) = (1 - f(1), f(1)) = (1,0)$, entonces $(1,0)$ es un punto fijo para Ψ (lo mismo se puede concluir para todos aquellos puntos de $\{(x,y) : x \leq 1, y = 0\}$). Por otro lado, $\Psi(2,0) = (2 - f(2), f(2)) = (a,b)$, donde $a < 0$ y $b > 2$, pues $f(2) > 2$. Como Ψ es continua, existe $(u,v) \in \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$ tal que $\Psi(u,v) \in \{(x,y) : x = 0, y \leq 2\}$. Así se tiene que $W^s(0)$ y $W^u(0)$ se intersectan afuera del origen, generado un punto homoclínico como se observa en la figura.

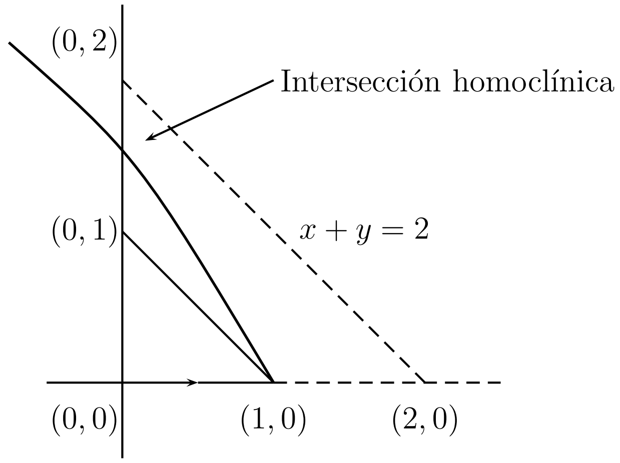


Figura 1.1

2) El Péndulo
La ecuación diferencial cuyas soluciones definen el movimiento de un p endulo está dada por

$$\ddot{\theta} = -k\sin(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R} \qquad \left(k = \frac{g}{l}\right)$$

donde l es largo de la varilla del péndulo y g es la aceleración de la gravedad. Por simplicidad nos remitiremos a

$$\ddot{\theta} = -\operatorname{sen}(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

el cual puede plantearse como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= y \\ \dot{y} &= -\operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Esta ecuación corresponde a la acción determinada por un péndulo libre de roce.
Tomemos la aplicación T inducida en el tiempo del sistema; es decir, el difeomorfismo φ tal que $\varphi(\theta, y) = (\widetilde{\theta}, \widetilde{y})$ siempre que exista una solución $(\theta(t), y(t))$ del sistema, con $(\theta(0), y(0)) = (\theta, y)$ y $(\theta(T), y(T)) = (\widetilde{\theta}, \widetilde{y})$. Los puntos fijos de φ corresponden justamente a las singularidades del campo de vectores del sistema (o bien cuando el péndulo está en reposo).
Resolviendo $X(\theta, y) = 0$ donde X es el campo de vectores, se tiene que los puntos fijos de φ son de la forma $(n\pi, 0)$, con $n \in \mathbb{Z}$. Analizaremos aquí los

puntos fijos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ (casos particulares cuando n es par e impar, respectivamente). Por lo tanto

$$(DX)_{(\theta,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix},$$

tiene valores propios $\pm i$ para $(DX)_{(0,0)}$ (lo que equivale para nuestro difeomorfismo φ, que $(d\varphi)_{(0,0)}$ tenga valores propios igual a 1), luego $(0,0)$ no es hiperbólico y $(\pi,0)$ si lo es, ya que los valores propios para $(DX)_{\pi,0}$ son ± 1. Luego las variedades estables e inestables en $(\pi,0)$ son 1-dimensionales.
Como $y=\dot{\theta}$ (velocidad angular), $\ddot{\theta}=\dot{y}=\left(\frac{dy}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\left(\frac{dy}{d\theta}\right)y$, luego, a partir de la ecuación del péndulo, se obtiene

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right) y = -\operatorname{sen}(\theta)$$

Como las variables $y\,dy = -\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta$ se pueden separar, integrando obtenemos

$$E(\theta,y) = C = \frac{1}{2}y^2 - \cos(\theta)$$

con C constante. Esta aplicación E se llama energía total del sistema y C corresponde a los niveles de energía. Además, $\frac{1}{2}y^2$ corresponde a la energía cinética y $-\cos(\theta)$ a la energía potencial. Como el péndulo no admite roce, por la ley de conservación de energía, implica que la energía es constante a lo largo de las soluciones del sistema lo cual permite exclusiva dependencia del valor de C. En la aplicación E el menor valor posible es $C=-1$; entonces $y=0$ y $\cos(\theta)=1$, de modo que el péndulo está en reposo. El péndulo cambiará la dirección de su movimiento si se tiene puntos en los cuales $y=0$; entonces por la aplicación E, $\cos(\theta)=-C$. Como $|\cos(\theta)|<1$, se tiene que para valores de C, tal que $|C|<1$ el péndulo puede oscilar en forma normal en el sentido de las agujas del reloj. Si $C>1$ entonces $y=0$ es imposible y el péndulo realiza un movimiento de remolino. Para $C=1$, $(\pi,0)$ claramente satisface la ecuación $\frac{1}{2}y^2-\cos(\theta)=1$.
Por otro lado, como los subespacios propios asociados a los valores propios -1 y 1, E_{-1} y E_1, respectivamente, estan dados por $E_{-1}=\langle(-1,1)\rangle$ y $E_1=\langle(1,1)\rangle$ nos permite establecer que las separatrices $W^s(\pi,0)$ y $W_u(\pi,0)$ están determinadas por

$$\frac{1}{2}y^2 - \cos(\theta) = 1$$

En la figura 1.2 muestra estas líneas homoclínicas junto con algunos niveles de energía.

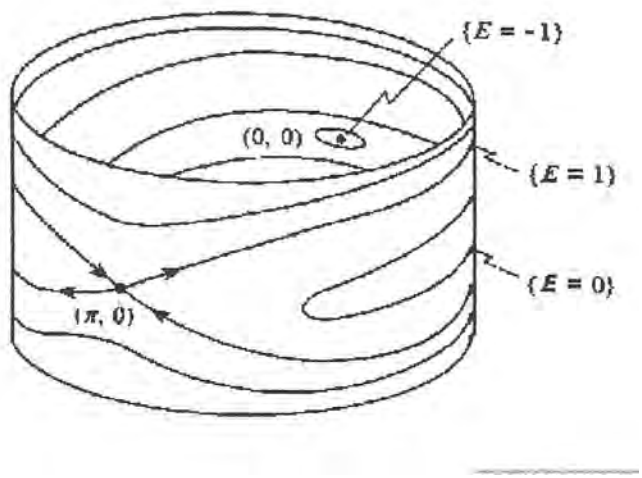


Figura 1.2

Caos:

Sea (X, d) un espacio métrico.

DEFINICIÓN 8. $f : X \to X$ se dice topológicamente transitiva si para cualquier par de conjuntos abiertos $U,\ V \subseteq X$ existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

DEFINICIÓN 9. $f : X \to X$ tiene dependencia sensitiva de las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in X$ y cualquier vecindad N de x, existe $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

DEFINICIÓN 10. Sea Λ es un conjunto contenido en X tal que $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Se dice que $f : \Lambda \to \Lambda$ caótica sobre Λ si

1. f tiene dependencia sensitiva de las condiciones iniciales.
2. f es topológicamente transitiva.
3. Los puntos periódicos de f son densos en Λ.

Nota: Veremos en los capítulos siguientes que si un difeomorfismo admite una órbita homoclínica, tendrá dinámica caótica.

CAPÍTULO 2

Difeomorfismo con dinámica no trivial

2.1. La Herradura de Smale

Consideremos el cuadrado unitario D en el plano definido por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \, , \; 0 \leq y \leq 1\}$$

Sea $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 2$. Definimos los rectángulos H_0 y H_1 mediante:

$$\begin{aligned} H_0 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq \frac{1}{\mu}\right\} \\ H_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \; 1 - \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1\right\} \end{aligned}$$

La aplicación $f : D \to \mathbb{R}^2$, compuesta de dos funciones l y g, donde l contrae el eje x, expande el eje y y la aplicación g dobla y traslada $l(D)$, como se muestra en la figura 2.1.

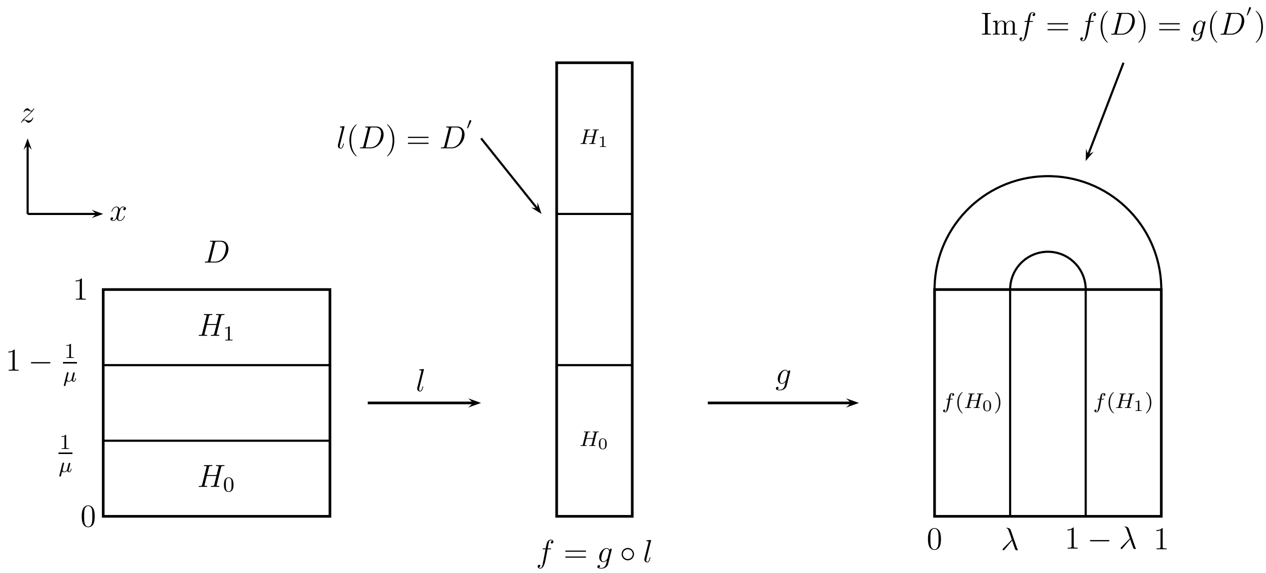


Figura 2.1

Notemos que H_0 y H_1 corresponden a dos rectángulos horizontales dentro de D y mediante f obtenemos dos rectángulos verticales V_0 y V_1, esto es,

$$\begin{aligned} f(H_0) = V_0 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \lambda,\ 0 \leq y \leq 1\right\} \\ f(H_1) = V_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1-\lambda \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\} \end{aligned}$$

Además la restricción de f sobre H_0 y H_1 esta dada por

$$\begin{aligned} H_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ H_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $\mu > 2$.

No es difícil ver que f se contrae en el eje x por un factor λ y se expande el eje y por un factor μ. H_1 es también rotado en $180°$.

Veamos primero, un lema importante para lo que sigue.

Lema 2.1. *a) Supongamos que V es un rectángulo vertical, entonces $f(V) \cap D$ consiste precisamente en dos rectángulos verticales, V_0 y V_1, con diámetro (ancho) cada uno igual a λ.*
b) Supongamos que H es un rectángulo horizontal, entonces $f^{-1}(H) \cap D$ consiste precisamente en dos rectángulos, H_0 y H_1, con diámetro cada uno igual a $\frac{1}{\mu}$.

Demostración. (a) Por la definición de f, los bordes de verticales y horizontales de H_0 y H_1 son aplicados a los bordes horizontales y verticales de V_0 y V_1 respectivamente.
Si V es un rectángulo vertical, que intercepta a los lados de H_0 y H_1, tenemos que $f(V) \cap D$ consiste en dos rectángulos verticales, uno contenido en V_0 y el otro en V_1.
Como vimos anteriormente, el rectángulo V se contrae en el eje x por un factor λ y se expande sobre en el eje y, con $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Lo anterior se puede apreciar en la siguiente figura 2.2

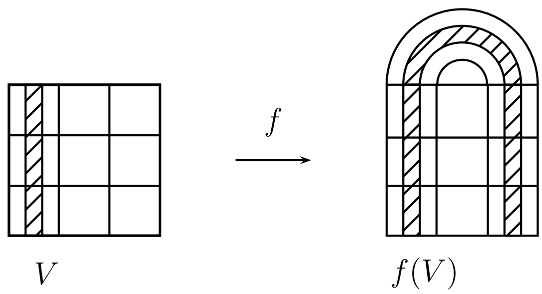


Figura 2.2

(b) Por la definición de f^{-1}, los bordes verticales y horizontales de V_0 y V_1 son aplicados por f^{-1} en los bordes horizontales y verticales de H_0 y H_1 respectivamente.

Si H un rectángulo horizontal que intercepta a V_0 y a V_1, $f^{-1}(H) \cap D$ consiste en dos rectángulos horizontales, uno contenido en H_0 y el otro en H_1. Lo anterior se puede apreciar en la siguiente figura 2.3

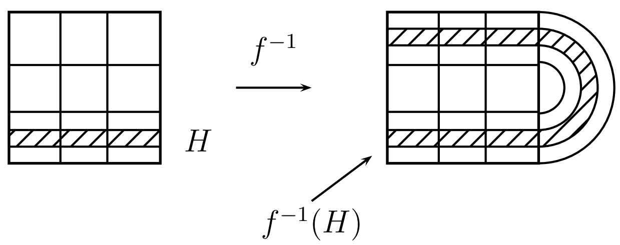


Figura 2.3

$\square$

El lema anterior sólo describe el comportamiento de f y f^{-1} en $D \cap f(D)$ y en $D \cap f^{-1}(D)$ respectivamente. Más adelante, realizaremos la construcción del conjunto maximal invariante de f, el cual corresponderá al descrito en el lema anterior para f^n, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2.2. Construcción del Conjunto Invariante

Denotaremos por Λ el conjunto que consiste de todos los elementos de D cuyos iterados por f y f^{-1} permanecen en D, esto es

$$\cdots \cap f^{-n}(D) \cap \cdots \cap f^{-1}(D) \cap D \cap f(D) \cap \cdots \cap f^{n}(D) \cap \cdots$$

o sea

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D)$$

Determinaremos este conjunto inductivamente. En primer lugar, el conjunto de iteraciones positivas y luego el conjunto de las iteraciones negativas, resultando ser Λ la intersección de ellas.

Consideraremos el conjunto $S = \{0, 1\}$ y denotaremos por $s_i \in S$ a 0 ó 1, con $i \in \mathbb{Z}$. Esta notación la usaremos más adelante.

Sea $\Lambda_+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$. Construiremos $\bigcap_{n=0}^{k} f^n(D)$ y determinaremos su estructura cuando $k \to +\infty$

1. $D \cap f(D)$: Por la definición de f, $D \cap f(D)$ consiste en dos rectángulos verticales.

$$D \cap f(D) = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} = \{p \in D : \; p \in V_{s_{-1}}, \; s_{-1} \in S\} \tag{2.1}$$

donde $V_{s_{-1}}$ es un rectángulo de ancho λ.

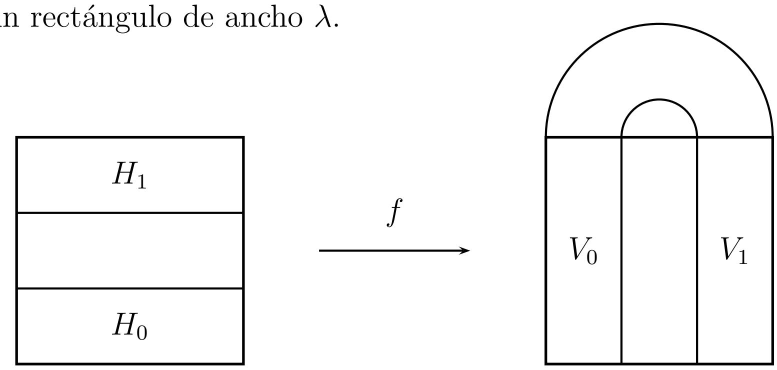


Figura 2.4

2. $D \cap f(D) \cap f^2(D)$: Este conjunto es obtenido como la intersección de D con la acción de f sobre $D \cap f(D)$, es decir

$$D \cap f(D \cap f(D)) = D \cap f(D) \cap f^2(D).$$

Por el Lema 2.1, $D \cap f(D)$ consiste en los rectángulos verticales V_0 y V_1 con cada uno intersectando a H_0 y H_1, donde los correspondientes lados horizontales de V_0 y V_1 son aplicados a los respectivos lados horizontales de H_0 y H_1. Entonces $D \cap f(D) \cap f^2(D)$ corresponde a cuatro rectángulos verticales, de los cuales dos estan contenidos V_0 y V_1 respectivamente. (Ver figura 2.5). Obtenemos que

$$D \cap f(D) \cap f^2(D) = D \cap f(D \cap f(D)) = D \cap f\left(\bigcup_{s_{-2} \in \, S} V_{s_{-2}}\right). \tag{2.2}$$

Observemos que al sustituir (2.1) en (2.2), cambiaremos el subíndice s_{-1} sobre $V_{s_{-1}}$ a $V_{s_{-2}}$. Nosotros veremos esta que notación nos ayudará en lo que sigue.

$$D \cap f\left(\bigcup_{s_{-2}\in\, S} V_{s_{-2}}\right) = \bigcup_{s_{-2}\in\, S} D \cap f(V_{s_{-2}}).$$

Aplicando el Lema 2.1, $f(V_{s_{-2}})$ tiene dos componentes, una de ellos contenida en V_0 y la otra en V_1, se tiene que

$$\begin{aligned} D \cap f(D) \cap f^2(D) &= \bigcup_{s_{-i}\in\, S} f(V_{s_{-2}}) \cap V_{s_{-1}} \\ &= \bigcup_{s_{-i}\in\, S,\; i=1,2} V_{s_{-1}\; s_{-2}} \\ &= \{p \in D :\, p \in V_{s_{-1}}, f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}},\; s_{-i} \in S,\, i = 1,2\} \end{aligned}$$

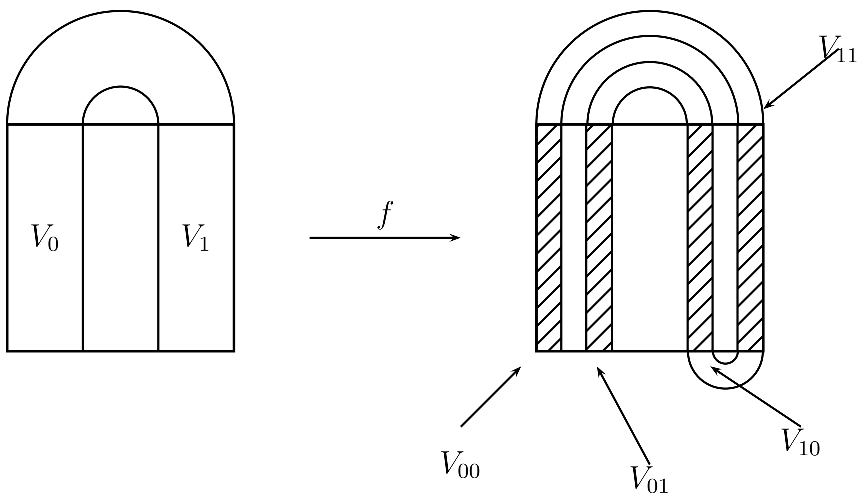


Figura 2.5

3. $D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D)$: Utilizando el mismo razonamiento que en los pasos previos, este conjunto consiste en ocho rectángulos verticales, cada uno con ancho igual a λ^3. Tenemos que

$$\begin{aligned} D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D) &= D \cap f(D \cap f(D) \cap f^2(D)) \\ &= \bigcup_{s_{-i}\in S,\;\, i=1,2,3} D \cap f(V_{s_{-1}s_{-2}}) \\ &= \bigcup_{s_{-i}\in S,\;\, i=1,2,3} V_{s_{-1}\, s_{-2}\, s_{-3}} \end{aligned}$$

$$= \{p \in D : p \in V_{s_{-1}},\ f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}},$$
$$f^{-2}(p) \in V_{s_{-3}}\ s_{-i} \in\ S,\ i = 1, 2, 3\}$$

Si realizamos este proceso k veces, obtenemos que

$$\begin{aligned}
D \cap f(D) \cap \cdots \cap f^k(D) &= \bigcup_{s_{-i} \in\ S\ ,\ i=1,\cdots k} f(V_{s_{-2}\,s_{-3}\cdots s_{-k}}) \cap V_{s_{-1}} \\
&= \bigcup_{s_{-i} \in\ S\ ,\ i=1,\cdots ,k} V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k}} \\
&= \{p \in D :\ f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-i}},\ s_{-i} \in\ S,\ i = 0, 1, \cdots\}
\end{aligned}$$

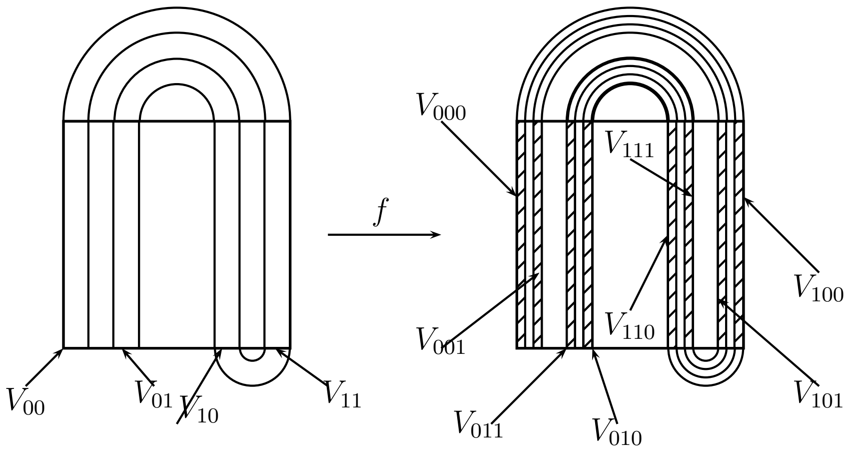


Figura 2.6

Estudiaremos que ocurre cuando $k \to +\infty$.

Notemos que para el paso k, obtenemos 2^k rectángulos verticales, donde a cada uno de estos rectángulos se le puede asociar una sucesión de longitud k de $0's$ y $1's$. (Por ejemplo: al rectángulo $V_{s_{-1}s_{-2}....s_{-k}}$ le podemos asignar la sucesión $s_{-1}s_{-2}....s_{-k}$)

El punto importante a considerar es que hay 2^k posibles distintas sucesiones de logitud k de $0's$ y $1's$ y que cada una de éstas es obtenida en este proceso de construcción de manera única por el respectivo rectángulo vertical único en cada paso. Este hecho sigue desde la definición geométrica de f y de que V_0 y V_1 son disjuntos.

Para $k \to +\infty$, la intersección decreciente de conjuntos compactos es no vacio y obtenemos un número infinito de rectángulos verticales, donde el ancho de cada uno de éstos es λ^k. Notemos que $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda^k = 0$, ya que $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.
Finalmente, el conjunto Λ_+ consiste de infinitas rectas verticales y está dada por

$$\begin{aligned}
\Lambda_+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) &= \bigcup_{s_{-i}\in\, S,\ i=1,2\cdots} f(V_{s_{-2}s_{-3}\cdots s_{-k}\cdots}) \cap V_{s_{-1}} \\
&= \bigcup_{s_{-i}\in\, S,\ i=1,2,\cdots} V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}\cdots} \\
&= \{p \in D :\ f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}},\ s_{-i} \in S,\ i = 1, 2, ...\}
\end{aligned}$$

Ahora, construiremos $\Lambda_- = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(D)$ inductivamente.

1. $D \cap f^{-1}(D)$: Usando la definición de f, este conjunto consiste de dos rectángulos horizontales H_0 y H_1 y lo denotamos por

$$D \cap f^{-1}(D) = \bigcup_{s_0\in S} H_{s_0} = \{p \in D :\ p \in H_{s_0},\ s_0 \in S\} \tag{2.3}$$

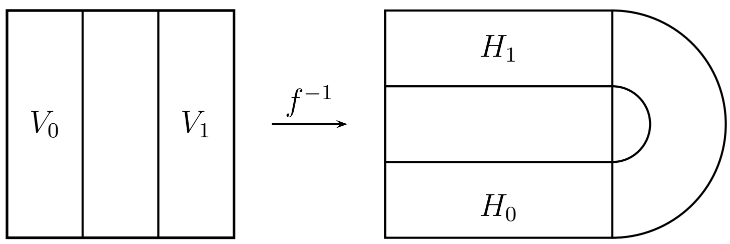


Figura 2.7

2. $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D)$: Este conjunto es obtenido como la intersección de D, con la acción de f^{-1} sobre $D \cap f^{-1}(D)$, es decir,

$$D \cap f^{-1}(D \cap f^{-1}(D)) = D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D).$$

Por el Lema 2.1, $D \cap f^{-1}(D)$ consiste en dos rectángulos horizontales H_0 y H_1 cada uno interceptando a V_0 y V_1, donde las correspondientes lados verticales de H_0 y H_1 son aplicados en los respectivos lados verticales de V_0 y V_1. Entonces $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D)$ corresponde a cuatro rectángulos horizontales, de los cuales dos están contenidos H_0 y H_1 respectivamente, cada uno de ancho $\frac{1}{\mu^2}$. Obtenemos que

$$D \cap f^{-1}(D \cap f^{-1}(D)) = D \cap f^{-1}\left(\bigcup_{s_1 \in S} H_{s_1}\right) \tag{2.4}$$

$$= \bigcup_{s_1 \in S} D \cap f^{-1}(H_{s_1}) \tag{2.5}$$

Observemos que al sustituir (2.3) en (2.4) cambiamos el subíndice s_0 sobre H_{s_0} a s_1.
Por el Lema 2.1, $f^{-1}(H_{s_1})$ tiene dos componentes una de ellas contenida en H_0 y la otra en H_1, se tiene que

$$\bigcup_{s_1 \in S} D \cap f^{-1}(H_{s_1}) = \bigcup_{s_i \in S\,,\ i=0,1} H_{s_0} \cap f^{-1}(H_{s_1})$$

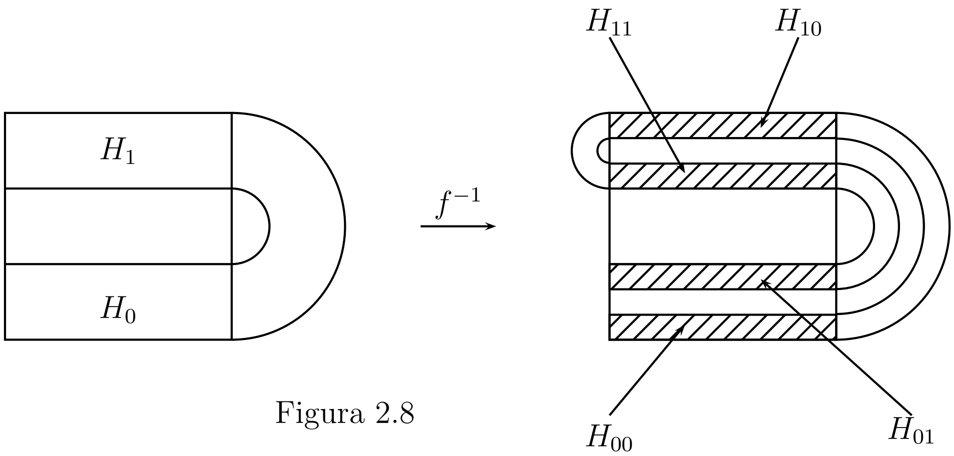


Figura 2.8

Hemos demostrado que

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) &= \bigcup_{s_i \in S,\ i=0,1} f^{-1}(H_{s_1}) \cap H_{s_0} \\ &= \bigcup_{s_i \in S,\ i=0,1} H_{s_0\, s_1} \end{aligned}$$

$$= \{p \in D : p \in H_{s_0},\ f(p) \in H_{s_1},\ s_i \in S,\ i = 0, 1\}$$

3. $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D)$: Utilizando mismo razonamiento que en los pasos previos, este conjunto consiste en ocho rectángulos horizontales, cada uno tiene ancho $\frac{1}{\mu^3}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D) &= \bigcup_{s_i \in S\,,\ i=0,1,2} f^{-1}(H_{s_1\, s_2}) \cap H_{s_0} \\ &= \bigcup_{s_i \in S\,,\ i=0,1,2} H_{s_0\, s_1\, s_2} \\ &= \{p \in D : p \in Hs_0,\ f(p) \in H_{s_1},\ f^2(p) \in H_{s_2}, \\ s_i \in S,\ i = 0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Continuando este proceso, en el k-ésimo paso, obtenemos que

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cdots \cap f^{-k}(D) &= \bigcup_{s_i \in S\,,\ i=0,1,2,\cdots,k-1} f^{-1}(H_{s_1\, s_2 \cdots s_{k-1}}) \cap H_{s_0} \\ &= \bigcup_{s_i \in S\,,\ i=0,1,2,\cdots,k-1} H_{s_0\, s_1 \cdots s_{k-1}} \\ &= \{p \in D :\ f^{i+1}(p) \in H_{s_i},\ s_i \in S,\ i = 0, 1, \cdots, k-1\} \end{aligned}$$

Observemos el importante hecho que en el paso k-ésimo del proceso inductivo, obtenemos 2^k rectángulos horizontales, donde a cada uno de estos rectángulos se le puede asociar una sucesión de longitud k de $0's$ y $1's$. (Por ejemplo: al rectángulo horizontal $H_{s_0 s_1 s_2 \ldots s_k}$ le podemos asignar una sucesión $s_0 s_1 s_2 \ldots s_k$).

Para $k \to +\infty$, la intersección decreciente de conjuntos compactos es no vacia y obtenemos un número infinito de rectángulos horizontales, donde el ancho de cada uno de éstos es $\frac{1}{\mu^k}$. Notemos que $\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{\mu^k} \right) = 0$, $(\mu > 2)$.

Finalmente el conjunto $\Lambda_- = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(D)$, consiste de infinitas rectas horizontales y está dado por

$$\begin{aligned} \Lambda_- = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(D) &= \bigcup_{s_i \in S,\ i=0,1,\cdots} f^{-1}(H_{s_1\, s_2 \cdots s_k \cdots}) \cap H_{s_0} \\ &= \bigcup_{s_i \in S,\ i=0,1,\cdots} H_{s_0\, s_1 \cdots s_k \cdots} \end{aligned}$$

$$= \{p \in D: \, f^i(p) \in H_{s_i}, \; s_i \in S, \; i = 0, 1, \cdots\}$$

Como mencionamos anteriormente

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D) = \Lambda_- \cap \Lambda_+$$

y es un conjunto que consiste en infinitos puntos, cada uno de ellos obtenido mediante la intersección de una línea horizontal contenida en Λ_- y una línea vertical contenida en Λ_+.

Observamos que $p \in \Lambda$ puede ser identificado únicamente con una sucesión bi-infinita de $0's$ y $1's$, el cual es obtenido por sucesiones asociadas a las respectivas líneas verticales y horizontales que define a p.

Por otro lado, si $s_{-1}\, s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots$ es una sucesión de $0's$ y $1's$ entonces $V_{s_{-1}\, s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots}$ corresponde a una única línea vertical (en Λ_+). Análogamente, $s_0\, s_1 \cdots s_k \cdots$ es una sucesión de $0's$ y $1's$ entonces $H_{s_0\, s_1 \cdots s_k \cdots}$ corresponde a una única línea horizontal (en Λ_-). Intersectando ambas líneas obtenemos un único punto p. De esta forma podemos definir una aplicación ϕ de Λ en el conjunto de las sucesiones bi-infinitas $\Sigma = \prod_{-\infty}^{\infty}\{0, 1\}$

$$\begin{array}{rcl} \phi : \Lambda & \to & \Sigma \\ p & \mapsto & \{\cdots s_{-k} \cdots s_{-1} s_0 \cdots s_k \cdots\} \end{array}$$

Observemos que

$$\begin{array}{rcl} V_{s_{-1}\, s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots} & = & \{p \in D: \, f^{-i+1}(D) \in V_{s_{-i}}, \; i = 1, 2, ...\} \\ & = & \{p \in D: \, f^{-i}(D) \in H_{s_{-i}}, \; i = 1, ...\}, \qquad \text{pues} \qquad f(H_{s_i}) = V_{s_i} \\ & & \\ H_{s_0 \cdots s_k \cdots} & = & \{p \in D: \, f^{i}(D) \in H_{s_i}, \; i = 0, 1, ...\} \end{array}$$

Tenemos

$$\begin{array}{rcl} p & = & V_{s_{-1} s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots} \cap H_{s_0 s_1 \cdots s_i \cdots} \\ & = & \{p \in D: \, f^i(p) \in H_{s_i}, \; i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \end{array} \tag{2.6}$$

Definición 11. Se define la aplicación *shift*, $\sigma : \sum \to \sum$ (con la topología producto). Dada $s = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \in \sum$, entonces

$$\sigma(s) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \cdots s_n \cdots\}$$

La aplicación σ consiste en desplazar un lugar el punto decimal a la derecha. Más general, el punto decimal de la sucesión asociada a p, traslada el lugar k-ésimo a la derecha al lugar $k+1$ si $k>0$ por la acción de σ. En este caso, s_k es el símbolo inmediatamente a la derecha del punto decimal.
Como vemos en (2.6), la sucesión única de $0's$ y $1's$ asociada a p contiene información concerniente al comportamiento de p bajo iteración por f, en particular, el elemento s_k en la sucesión $\{\cdots s_{-k}\cdots s_{-1}\cdot s_0 s_1\cdots s_k\cdots\}$ indica que $f^k(p)\in H_{s_k}$. Notemos que para la sucesión bi-infinita de $0's$ y $1's$ asociada a p, el punto decimal de dicha sucesión, separa las iteraciones pasadas y futuras de las órbitas de p por f.

Si consideramos un punto $p\in\Lambda$ y la sucesión bi-infinita asociada de $0's$ y $1's$, $\phi(p)$, podemos tomar cualquier iterado $f^k(p)$ de p, y asociarle una sucesión bi-infinita de $0's$ y $1's$ dada por $\sigma^k(\phi(p))$. En particular $\sigma\circ\phi=\phi\circ f$.
Por lo tanto, hay una relación directa entre las iteraciones de cualquier punto $p\in\Lambda$ bajo f e iteraciones de la sucesión asociada a p bajo la aplicación σ.

Por ahora, en este punto, no es claro aún donde vamos con esta analogía entre puntos de Λ y sucesiones bi-infinitas de $0's$ y $1's$ de $\sum$, aunque la sucesión asociada a un punto dado $p\in\Lambda$ contiene información entre las iteraciones pasadas y futuras como si p está o no en H_0 ó H_1 para cualquier iterado dado. No es difícil inmaginar que diferentes puntos, ambos contenidos en el mismo rectángulo horizontal H_0 ó H_1, después de alguna iteración dada, sus órbitas serán completamente diferentes. El hecho que esto pueda suceder para la dinámica de f sobre Λ está completamente modelada por la dinámica de la aplicación shift actuando sobre el conjunto de sucesiones de $0's$ y $1's$ siendo esto un hecho sorprendente el cual, para justificar, deberíamos ver en dinámica simbólica.

2.3. Dinámica Simbólica

Sean $S=\{0,1\}$ y $\sum$ la colección de todas las sucesión bi-infinitas de elementos de S, es decir

$$\Sigma=\prod_{-\infty}^{+\infty}S$$

Consideremos dos sucesiones bi-infinitas.

$$\begin{aligned} s &= \{\cdots s_{-n}\cdots s_{-1}\cdot s_0 s_1\cdots s_n\cdots\} \\ \overline{s} &= \{\cdots \overline{s}_{-n}\cdots \overline{s}_{-1}\cdot \overline{s}_0 \overline{s}_1\cdots \overline{s}_n\cdots\} \end{aligned}$$

Definimos $d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$, mediante

$$d(s,\overline{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}} \qquad \text{donde } \delta_i = \begin{cases} 1 & s_i \neq \overline{s}_i \\ 0 & s_i = \overline{s}_i \end{cases} \tag{2.7}$$

Es fácil ver que d es una métrica sobre $\sum$.

Vamos a estudiar la dinámica de σ sobre $\sum$ (esto es, la estructura de las órbitas de los puntos de $\sum$ bajo iteraciones de σ).
No es difícil notar que σ tiene precisamente dos puntos fijos, a saber, la sucesión cuyos elementos son todos ceros o todos unos. En particular, veremos que dadas ciertas sucesiones, al aplicarle iteraciones, retornamos a la sucesión original, obteniendo su periodo.
Daremos unos ejemplos de esta aplicación σ

Ejemplo 2.1.

1. $\sigma(\overline{10{,}10}) = \{\overline{01{,}01}\}$
   $\sigma\{\overline{01{,}01}\} = \{\overline{10{,}10}\}$

   Por lo tanto $\sigma^2\{\overline{10{,}10}\} = \{\overline{10{,}10}\}$. En otras palabras, $\{\overline{10{,}10}\}$ tiene período dos.

2. $\sigma\{\overline{10{,}01}\} = \{\overline{00{,}11}\}$
   $\sigma\{\overline{00{,}11}\} = \{\overline{01{,}10}\}$
   $\sigma\{\overline{01{,}10}\} = \{\overline{11{,}00}\}$
   $\sigma\{\overline{11{,}00}\} = \{\overline{10{,}01}\}$
   Por lo tanto $\sigma^4\{\overline{10{,}01}\} = \{\overline{10{,}01}\}$

Como vemos en estos ejemplos, para cualquier k fijo, las órbitas de σ teniendo período k corresponden a sucesiones construidas repitiendo periódicamente bloques de $0'$ y $1'$ de longitud k.

Se puede observar que iterando una sucesión periódica, ésta tiene un período que coincide según el largo de la sucesión.

Ejemplo 2.2.

1. Periodo 1: $\{\overline{0{,}0}\}, \{\overline{1{,}1}\}$
2. Periodo 2: $\{\overline{01{,}01}\}$ En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma\{\overline{01{,}01}\} &= \{\overline{10{,}10}\} \\ \sigma\{\overline{10{,}10}\} &= \{\overline{01{,}01}\} \end{aligned}$$

3. Periodo 3: $\{\overline{001{,}001}\}$, $\{\overline{010{,}010}\}$, $\{\overline{100{,}100}\}$ $\{\overline{110{,}110}\}$, $\{\overline{101{,}101}\}$, $\{\overline{011{,}011}\}$
   Tomaremos uno de ellos

$$\sigma\{\overline{001{,}001}\} = \{\overline{010{,}010}\}$$

$$\begin{aligned} \sigma\{\overline{010{,}010}\} &= \{\overline{100{,}100}\} \\ \sigma\{\overline{100{,}100}\} &= \{\overline{001{,}001}\} \end{aligned}$$

4. Periodo 4:

$$\begin{array}{l} \{\overline{1100{,}1100}\},\ \{\overline{1111{,}1111}\} \\ \{\overline{1110{,}1110}\},\ \{\overline{1101{,}1101}\} \\ \{\overline{1011{,}1011}\},\ \{\overline{1010{,}1010}\} \\ \{\overline{1000{,}1000}\},\ \{\overline{1001{,}1001}\} \\ \{\overline{0111{,}0111}\},\ \{\overline{0110{,}0110}\} \\ \{\overline{0101{,}0101}\},\ \{\overline{0100{,}0100}\} \\ \{\overline{0011{,}0011}\},\ \{\overline{0010{,}0010}\},\ \{\overline{0001{,}0001}\} \end{array}$$

5. Tomaremos uno de ellos, en efecto

$$\begin{aligned} \sigma\{\overline{1100{,}1100}\} &= \{\overline{1001{,}1001}\} \\ \sigma\{\overline{1001{,}1001}\} &= \{\overline{0011{,}0011}\} \\ \sigma\{\overline{0011{,}0011}\} &= \{\overline{0110{,}0110}\} \\ \sigma\{\overline{0110{,}0110}\} &= \{\overline{1100{,}1100}\} \end{aligned}$$

$\vdots\ \vdots$

Además, σ tiene un número no numerable de órbitas no periódicas. Para probar esto, necesitamos sólo construir una sucesión no periódica y demostrar que hay un número no numerable de este tipo de sucesiones. Probaremos este hecho:

Podemos asociar una sucesión infinita de $0's$ y $1's$, a una sucesión bi-infinita dada por

$$\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 \cdots s_n \rightarrow .s_0 s_1 s_{-1} s_2 s_{-2} \cdots$$

Tomaremos los números irracionales en el intervalo cerrado $[0,1]$ que constituyen un conjunto no numerable. Cada número real en este intervalo admite una expresión binaria de $0's$ y $1's$, además si el número es irracional, le corresponde una sucesión no repetible. Así, tenemos una correspondencia uno a uno entre un conjunto no numerable de puntos y sucesiones de $0's$ y $1's$ no repetibles. Las órbitas de esas sucesiones son órbitas no periódicas de σ y hay un número no numerable de ellas.

Estudiaremos otros hechos relacionados con la dinámica de σ sobre $\sum$: existe un elemento $s \in \sum$ cuya órbita es densa en $\sum$.
Esto quiere decir que para cualquier $s' \in \sum$ y $\varepsilon > 0$ dados existe algún entero n tal que $d(\sigma^n(s), s') < \varepsilon$.
Esto lo vemos por la construcción de s directamente. Haremos esto primero construyendo todas las posibles sucesiones de $0's$ y $1's$ teniendo longitud 1,2,3,...

Este proceso está bien definido, luego hay un número finito de posibilidades en cada paso (más específicamente hay 2^k sucesiones distintas de $0^{'}s$ y $1^{'}s$ de longitud k).

$$\begin{array}{lcl} \text{Longitud 1} & : & \{0\}, \{1\} \\ \text{Longitud 2} & : & \{00\}, \{01\}, \{10\}, \{11\} \\ \text{Longitud 3} & : & \{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\}, \{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\} \end{array}$$

Ahora podemos introducir un ordenamiento sobre la colección de sucesiones de $0^{'}s$ y $1^{'}s$. Consideremos dos sucesiones finitas

$$s = \{s_1 \cdots s_k\}, \qquad \overline{s} = \{\overline{s}_1 \cdots \overline{s}_{k'}\}$$

Diremos que:

$$s < \overline{s} \qquad \text{si } k < k^{'}$$

Si $k = k^{'}$, entonces

$$s < \overline{s} \qquad \text{si } s_i < \overline{s}_i$$

donde i es el primer entero tal que $s_i \neq \overline{s}_i$. Por ejemplo, bajo este orden tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \{0\} & < & \{1\} \\ \{0\} & < & \{00\} \\ \{00\} & < & \{01\} \end{array}$$

Este ordenamiento provee una manera de distribuir las diferentes sucesiones que tienen la misma longitud. Así, denotaremos las sucesiones de $0^{'}s$ y $1^{'}s$ teniendo longitud k por

$$s_1^k < \cdots < s_{2^k}^k$$

donde el exponente se refiere a la longitud de la sucesión y el sub-índice se refiere a una sucesión particular de longitud k la cual queda únicamente determinada por el esquema anterior.
Consideremos la siguiente sucesión

$$s = \{\cdots s_8^3 s_6^3 s_4^3 s_2^3 s_4^2 s_2^2 s_2^1 \cdot s_1^1 s_1^2 s_3^2 s_1^3 s_3^3 s_5^3 s_7^3 \cdots\}$$

s contiene todas las posibles sucesiones de $0^{'}s$ y $1^{'}s$ de cualquier longitud fija.
Demostraremos que la órbita de s es densa en $\sum$:

Sea $s^{'}$ un punto arbitrario en $\sum$ y $\varepsilon > 0$ dado. Una vecindad de $s^{'}$ de radio ε consiste en todos los puntos $s^{''} \in \sum$ tal que $d(s^{'}, s^{''}) < \varepsilon$, donde d es la métrica definida en (2.7). Por definición de esta métrica, existe un entero $N = N(\varepsilon)$ tal que $s_i^{'} = s_i^{''}$ para $|i| < N$. Por la construcción, la sucesión finita $\{s_{-N}^{'} \cdots s_{-1}^{'} \cdot s_0^{'} \cdots s_N^{'}\}$ esta contenida en alguna parte de s, por lo tanto, existe un algún entero $\overline{N}$ tal que $d(\sigma^{\overline{N}}(s), s^{'}) < \varepsilon$. Así concluimos que la órbita de s es densa en $\sum$.

2.4. La Dinámica sobre el Conjunto Invariante

En la sección 2.2 construimos el conjunto invariante (Herradura de Smale) Λ de f. En esta sección mostraremos como se relaciona la dinámica de f sobre Λ y la dinámica de la aplicación σ sobre $\sum$.
Hemos definido la aplicación ϕ, la cual para cada punto $p \in \Lambda$, asocia una sucesión bi-infinita $\phi(p)$ de $0's$ y $1's$, dada por $\phi(p) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$. Además, sabemos que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \Lambda \arrow[d, "\phi"] \\ \Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

es decir

$$\phi \circ f = \sigma \circ \phi \tag{2.8}$$

Es inmediato que

$$f^n = \phi^{-1} \circ \sigma^n \circ \phi \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Teorema 2.2. *La aplicación $\phi : \Lambda \to \sum$ es un homeomorfismo.*

Demostración. ϕ es inyectiva.
Sean p y $p' \in \Lambda$ tales que $\phi(p) = \phi(p')$.

$$\phi(p) = \phi(p') = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$$

Por la construcción de Λ, la intersección de una línea vertical $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-n}\cdots}$ y una línea horizontal $H_{s_0 s_1 \cdots s_n \cdots}$ corresponde a un único punto en Λ.
Por lo tanto, $p = p'$.

ϕ es epiyectiva.
Dada cualquier sucesión bi-infinita de $0's$ y $1's$ en $\sum$, $\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$, existe un punto $p \in \Lambda$ tal que

$$\phi(p) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$$

Recordando la construcción de $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ y $\bigcap_{-\infty}^{n=0} f^n(D)$; dada cualquier sucesión infinita de $0's$ y $1's$, $\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot\}$ existe una única línea vertical $V_{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1}}$ en $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ asociado (de manera única) a esta sucesión.

Similarmente, dada cualquier sucesión infinita de $0^{'}s$ y $1^{'}s$, $\{\cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$, existe una única línea horizontal $H_{s_0 s_1 \cdots s_n \cdots}$ en $\bigcap_{-\infty}^{n=0} f^n(D)$ asociado (de manera única) a esta sucesión.

Se vió que dadas una línea horizontal y una línea vertical, podemos asociarle una única sucesión infinita de $0^{'}s$ y $1^{'}s$, $\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$.
La intersección de $H_{s_0 s_1 \cdots s_n \cdots}$ y $V_{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1}}$ corresponde a un único punto.

ϕ es continua.

Dados $p \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ tal que

$$|p - p^{'}| < \delta \Rightarrow d(\phi(p), \phi(p^{'})) < \varepsilon$$

donde $|\,.|$ es la distancia usual de $\mathbb{R}^2$ y $d(\cdot)$ es la métrica sobre Σ.
Sea $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $N = N(\varepsilon)$ tal que si

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \\ \phi(p^{'}) &= \{\cdots s^{'}_{-n} \cdots s^{'}_{-1} \cdot s^{'}_0 s_1 \cdots s^{'}_n \cdots\} \end{aligned}$$

entonces $s_i = s^{'}_i$ para $i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N$. Asi por la construcción de Λ, p y $p^{'}$ están en el rectángulo definido por

$$H_{s_0 s_1 \cdots s_N} \cap V_{s_{-1} s_{-2} \cdots s_{-N}}$$

.

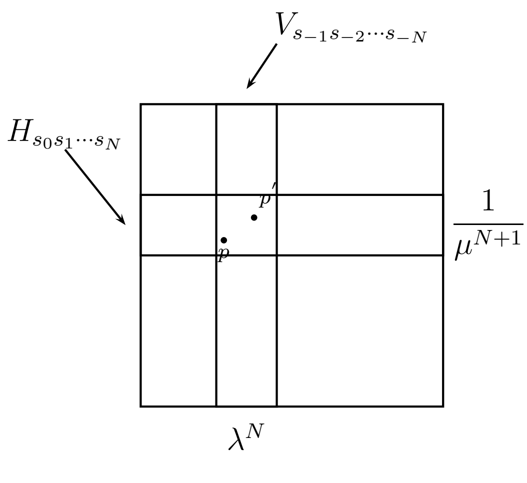


Figura 2.9

$$|p - p^{'}| < \left(\lambda^N + \frac{1}{\mu^{N+1}}\right)$$

Por lo tanto, si escogemos $\delta = \lambda^N + \dfrac{1}{\mu^{N+1}}$, ϕ es continua.

ϕ^{-1} es continua.

Como Σ es un espacio métrico entonces es un espacio de Hausdorff.
Se tiene que Λ es compacto, Σ es Haudorff y ϕ es una biyección entonces ϕ^{-1} es continua. $\square$

Conclusión:
El hecho que Λ y $\sum$ sean homeomorfos nos permite hacer varias conclusiones sobre la naturaleza del conjunto Λ. Hemos visto que $\sum$ es no numerable e indicamos (sin probar) que $\sum$ es un conjunto cerrado, perfecto (todo punto es un punto de acumulación del conjunto) y totalmente disconexo. Estas propiedades se heredan a Λ vía el homeomorfismo ϕ. Un conjunto con estas propiedades es llamado un conjunto de Cantor.
Más aún, f/Λ exhibe las tres condiciones dadas en la definición 10 de caos presentado en el capítulo 1. Es decir, Λ es un conjunto caótico de f.

2.5. El Teorema de Moser

DEFINICIÓN 12. Una curva μ_v-vertical es la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de una función $x = v(y)$ para la cual

$$0 \leq v(y) \leq 1, \qquad |v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu_v |y_1 - y_2| \qquad \text{para} \qquad 0 \leq y_1,\, y_2 \leq 1.$$

Similarmente, una curva μ_h-horizontal es la gráfica en $\mathbb{R}^2$ de una función $y = h(x)$ para la cual

$$0 \leq h(x) \leq 1, \qquad |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu_h |x_1 - x_2| \qquad \text{para} \qquad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

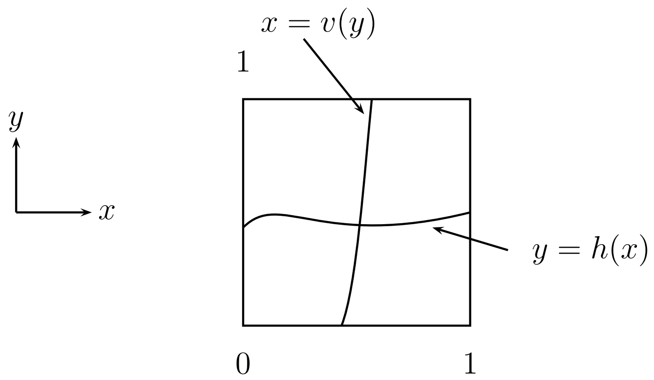


Figura 2.10

Las funciones $x = v(y)$ e $y = h(x)$ satisfaciendo la definición anterior, son llamadas funciones Lipschitz con constantes de Lipschitz μ_v y μ_h respectivamente. La constante μ_h puede ser representada como una cota sobre la pendiente de la curva definida por la gráfica de $y = h(x)$. Similar interpretación, para μ_v y la gráfica de $x = v(y)$. En particular , para $\mu_v = 0$, la gráfica de $x = v(y)$ es una línea vertical y para $\mu_h = 0$, la gráfica de $y = h(x)$ es una línea horizontal.

DEFINICIÓN 13. Dadas dos curvas μ_v-vertical $v_1(y) < v_2(y),\ y \in [0, 1]$, definimos una banda μ_v-vertical como

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in [v_1(y), v_2(y)];\, y \in [0, 1]\}$$

Similarmente, dadas dos curvas μ_h-horizontales $h_1(x) < h_2(x),\ x \in [0, 1]$, definimos una banda μ_h-horizontal como

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y \in [h_1(x), h_2(x)]\, ;\, x \in [0, 1]\}$$

El ancho (o diámetro) de las bandas horizontales y verticales están definidas por

$$d(H) \;\; = \;\; max\{|h_2(x) - h_1(x)| : \, x \in [0, 1]\}$$

$$d(V) \;=\; max\{|v_2(y) - v_1(y)| :\, y \in [0,1]\}$$

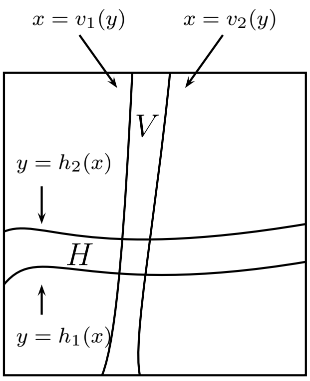


Figura 2.11

Los siguientes dos lemas juegan un rol importante en el proceso inductivo de la construcción del conjunto invariante para la aplicación f.

Lema 2.3. *i) Si $V^1 \supset V^2 \supset \cdots \supset V^k \supset \cdots$ es una sucesión ordenada de bandas μ_v-vertical con $d(V^k) \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} V^k \equiv V^{\infty}$ es una curva μ_v-vertical.*
ii) Si $H^1 \supset H^2 \supset \cdots \supset H^k \supset \cdots$ es una sucesión ordenada de bandas μ_h-horizontal con $d(H^k) \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} H^k \equiv H^{\infty}$ es una curva μ_h-horizontal.

Demostración. i) Sea $C_{\mu_v}[0,1]$ el conjunto de funciones Lipschitz con constante de Lipschitz μ_v definida en el intervalo $[0,1]$. Entonces $C_{\mu_v}[0,1]$ es un espacio métrico completo con la norma máxima.
Denotemos por $x = v_1^k(y)$ y $x = v_2^k(y)$ los bordes verticales de la banda μ_v-vertical V^k, para cada $k \geq 1$. Consideremos la sucesión $\{v_1^1(y), v_2^1(y), v_1^2(y), v_2^2(y), \cdots, v_1^k(y), v_2^k(y), \cdots\}$. Por definición de V^k, esta es una sucesión de elementos de $C_{\mu_v}[0,1]$ y dado que $d(V^k) \to 0$ cuando $k \to \infty$, tal sucesión es de Cauchy. Por lo tanto, la sucesión converge a una única curva μ_v-vertical.
Similarmente, se demuestra el caso ii).

□

Lema 2.4. *Supongamos $0 \leq \mu_h\, \mu_v < 1$. Entonces la intersección de una curva μ_v-vertical y una curva μ_h-horizontal es un único punto.*

Demostración. Sean la curva μ_h-horizontal, cuya gráfica esta dada por $y = h(x)$ y la curva μ_v-vertical que tiene por gráfica $x = v(y)$.
La condición para la intersección entre estas curvas es que existe un único punto (x, y) en el cuadrado unitario que es solución de la ecuación

$$y = h(v(y)) \tag{2.9}$$

Demostraremos que esta solución es única y para ello usaremos el Lema de la Contracción.
Consideremos la aplicación $g : M \to M$ donde M es un espacio métrico completo. Se dice que la aplicación g es una *contracción* si existe $0 < k < 1$ tal que

$$|g(m_1) - g(m_2)| \leq k|m_1 - m_2| \qquad \forall m_1,\, m_2 \in M$$

donde $|\cdot|$ denota la métrica sobre M.
El Lema de la Contracción asegura que g tiene un único punto fijo que es atractor.
Sea I un intervalo unitario definido por $I = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$. I es un espacio métrico completo. Es claro que

$$h \circ v : I \to I.$$

Si demostramos que $h\circ v$ es una contracción, entonces (1.9) tendrá una única solución.
En efecto, para $y_1,\, y_2 \in I$ tenemos que

$$\begin{aligned} |h(v(y_1)) - h(v(y_2))| &\leq \mu_h |v(y_1) - v(y_2)| \\ &\leq \mu_h\, \mu_v |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

donde $0 \leq \mu_h\, \mu_v < 1$, $h \circ v$ es una aplicación de contracción. □

Consideremos una aplicación $f : D \to \mathbb{R}^2$, continua donde D es el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$.
Sea $S = \{1, 2, \cdots, N\}$ es un conjunto de índices y sea

$$H_i\,, \qquad i = 1, \cdots, N, \qquad N \geq 2$$

un conjunto de bandas μ_h- horizontales disjuntas. Finalmente, sea

$$V_i\,, \qquad i = 1, \cdots, N,$$

un conjunto de bandas μ_v-verticales disjuntas. Supondremos que f satisface las dos condiciones siguientes:

Suposición 1. Sea $0 \leq \mu_h\, \mu_v \leq 1$ y f envía H_i homeomorficamente sobre V_i, $(f(H_i) = V_i)$ para $i = 1, 2, \cdots, N$. Por otra parte, los bordes horizontales de H_i aplicados a los correspondientes bordes horizontales de V_i y los bordes verticales de H_i son aplicados a los correspondientes bordes verticales de V_i.

Suposición 2. Supongamos que H es una banda μ_h-horizontal contenida en

$\bigcup_{i\in S} H_i$.
Entonces $f^{-1}(H)\cap H_i = \widetilde{H}_i$ es una banda μ_h-horizontal para cada $i \in S$. Además,

$$d(\widetilde{H}_i) \le \nu_h d(H) \qquad \text{para algún} \qquad 0 < \nu_h < 1.$$

Similarmente, supongamos V es una banda μ_v-vertical contenida en $\bigcup_{i\in S} V_i$. Entonces $f(V)\cap V_i = \widetilde{V}_i$ es una banda μ_v-vertical para cada $i \in S$. Más aún,

$$d(\widetilde{V}_i) \le \nu_v\ d(V) \qquad \text{para algún} \qquad 0 < \nu_v < 1$$

Teorema 2.5. **(Moser [1973])** *Supongamos que f satisface las suposiciones 1 y 2. Entonces existe un conjunto de Cantor, Λ, sobre el cual f es topológicamente conjugado a la aplicación shift de N símbolos, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \Lambda \arrow[d, "\phi"] \\ \Sigma^N \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma^N \end{tikzcd}$$

donde ϕ es un homeomorfismo de Λ en Σ^N, con $\Sigma^N = \underbrace{\Sigma\times\cdots\times\Sigma}_{N-veces}$

Demostración. La demostración de este teorema consiste en construir el conjunto invariante Λ de manera análoga a la realizada en el modelo de la herradura de Smale, pero esta vez haciendo iteraciones sobre N bandas (verticales y horizontales) simultaneamente. Daremos, apenas, algunas ideas de este proceso.
La demostración tiene cuatro pasos.

a) Construcción de Λ.
b) Definir la aplicación $\phi : \Lambda \to \Sigma^N$.
c) Demostrar que ϕ es un homeomorfismo.
d) Demostrar que $\phi\circ f = \sigma\circ\phi$

a) La construcción del conjunto invariante de la aplicación es muy similar a la construcción del conjunto invariante de la herradura en la sección 1.2. Primero construiremos un conjunto de puntos que permanecen en $\bigcup_{i\in S} V_i$ bajo todas las iteraciones negativas. Esto nos dará curvas μ_v-verticales, infinitas y no numerables.
Construiremos un conjunto invariante de puntos que permanecen en $\bigcup_{i\in S} H_i$ bajo todas las iteraciones positivas. Esto nos dará curvas μ_h-horizontales infinitas y no numerables. Entonces la intersección de estos dos conjuntos es claramente un conjunto invariante contenido en $(\bigcup_{i\in S} H_i)\cap(\bigcup_{i\in S} V_i) \subset D$.
Por la herradura sabemos como la aplicación actúa sobre todo D. No hemos

asumido tal comportamiento en la situación ahora considerada. Conocemos sólo como la aplicación f actúa sobre $\bigcup_{i\in S} H_i$ y como f^{-1} actúa sobre $\bigcup_{i\in S} V_i$.

Empezamos por inducción construyendo el conjunto de puntos en $\bigcup_{i\in S} V_i$ que permanecen en $\bigcup_{i\in S} V_i$ bajo todas las iteraciones negativas por f. Denotemos este conjunto por $\Lambda_{-\infty}$ y Λ_{-n}, $n = 1, 2, \cdots$ denotando el conjunto de puntos en $\bigcup_{i\in S} V_i$ que permanecen en $\bigcup_{i\in S} V_i$ bajo $n-1$ iteraciones negativas por f.

Λ_{-1} : es inmediato

$$\Lambda_{-1} = \bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}} \tag{2.10}$$

Λ_{-2}: se tiene que

$$\Lambda_{-2} = f(\Lambda_{-1}) \cap \left(\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}} \right) \tag{2.11}$$

es un conjunto de puntos en $\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}}$ que son aplicados en Λ_{-1} bajo f. Entonces, usando (2.10) y (2.11) se tiene que

$$\begin{aligned} \Lambda_{-2} &= \left(\bigcup_{s_{-2}\in S} f(V_{s_{-2}}) \right) \cap \left(\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}} \right) \\ &= \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2} f(V_{s_{-2}}) \cap V_{s_{-1}} = \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2} V_{s_{-1}\, s_{-2}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Observemos lo siguiente:

i. $V_{s_{-1}\, s_{-2}} = \{p \in D : \ p \in V_{s_{-1}},\ f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}\}$ con $V_{s_{-1} s_{-2}} \subset V_{s_{-1}}$

ii. De la suposición 1 y 2 $V_{s_{-1}\, s_{-2}}$, $s_{-i} \in S$, $i = 1, 2$, tiene N^2 bandas μ_v-verticales con N de ellas en cada uno de los V_i, $i \in S$. Observemos que hay N^2 sucesiones que están constituidas por elementos de S y que los conjuntos $V_{s_{-1}\, s_{-2}}$ pueden ser colocados en correspondencia uno a uno con estas sucesiones.

iii. De la suposición 2

$$d(V_{s_{-1}\ s_{-2}}) \le \nu_v d(V_{s_{-1}}) \le \nu_v$$

Λ_{-3}: Construimos Λ_{-3} desde Λ_{-2} como sigue

$$\Lambda_{-3} = f(\Lambda_{-2}) \cap \left(\bigcup_{s_1\in S} V_{s_{-1}} \right) \tag{2.13}$$

De (2.13) es el conjunto de puntos en $\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}}$ que son aplicados en Λ_{-2} bajo f^{-1}. Usando (2.12) y (2.13) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{-3} &= f\left(\bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=2,3} f(V_{s_{-3}})\cap V_{s_{-2}}\right)\cap\left(\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}}\right)\\
&= \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2,3} f^2(V_{s_{-3}})\cap f(V_{s_{-2}})\cap V_{s_{-1}}\\
&= \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2,3} V_{s_{-1}\,s_{-2}\,s_{-3}}, \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Observemos lo siguiente

i. $V_{s_{-1}\,s_{-2}\,s_{-3}} = \{p\in D:\ p\in V_{s_{-1}},\ f^{-1}(p)\in V_{s_{-2}},\ f^{-2}(p)\in V_{s_{-3}}\}$ con $V_{s_{-1}\,s_{-2}\,s_{-3}}\subset V_{s_{-1}\,V_{s_{-2}}}\subset V_{s_{-1}}$

ii. De la suposición 1 y 2 $V_{s_{-1}\,s_{-2}s_{-3}}$, $s_{-i}\in S$, $i=1,2,3$, tiene N^3 bandas μ_v-verticales con N^2 de ellas en cada uno de los V_i, $i\in S$. Observemos que hay N^3 sucesiones y que los conjuntos $V_{s_{-1}\,s_{-2}\,s_{-3}}$ pueden ser colocados en correspondencia uno a uno con estas sucesiones.

iii. De la suposición 2

$$d(V_{s_{-1}\,s_{-2}\,s_{-3}})\le \mu_v d(V_{s_{-1}\,s_{-2}})\le \nu_v^2 d(V_{s_{-1}})\le \nu_v^2$$

Este procedimiento puede continuar indefinidamente. En el paso $k+1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{-k-1} &= f(\Lambda_{-k})\cap\left(\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}}\right)\\
&= f\left(\bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=2,\cdots k+1} f^{k-1}(V_{s_{-k-1}})\cap\cdots\cap f(V_{-s_{-3}})\cap V_{s_{-2}}\right)\cap\left(\bigcup_{s_{-1}\in S} V_{s_{-1}}\right)\\
&= \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2,\cdots,k+1} f^k(V_{s_{-k-1}})\cap\cdots\cap f^2(V_{s_{-3}})\cap f(V_{s_{-2}})\cap V_{s_{-1}}\\
&= \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2,\cdots,k+1} V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k-1}},
\end{aligned}
$$

Observemos lo siguiente:

i. $V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k-1}} = \{p\in D:\ f^{-i+1}(p)\in V_{s_{-i}},\ i=1,2,\cdots k+1\}$ con $V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k-1}}\subset V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k}}\subset\cdots\subset V_{s_{-1}\,s_{-2}}\subset V_{s_{-1}}$

ii. De la suposición 1 y 2 $V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k-1}}$, $s_{-i}\in S$, $i=1,2,\cdots,k+1$, tiene N^{k+1} bandas μ_v-verticales con N^k de ellas en cada uno de los V_i, $i\in S$. Observemos que hay N^{k+1} sucesiones y que estas bandas $V_{s_{-1}\cdots s_{-k-1}}$ pueden ser colocadas en correspondencia uno a uno con estas suceciones.

iii. De la suposición 2

$$\begin{aligned} d(V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k-1}}) &\leq \nu_v\, d(V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots V_{-k}}) \leq \nu_v^2\, d(V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k+1}}) \\ &\leq \nu_v^3\, d(V_{s_{-1}\cdots s_{-k+2}}) \leq \cdots \leq \nu_v^k\, d(V_{s_{-1}}) \\ &\leq \nu_v^k \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Pasando el limite cuando $k \to \infty$, obtenemos

$$\Lambda_{-\infty} = \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2,\cdots} \cdots \cap f^k(V_{s_{-k-1}}) \cap \cdots \cap f(V_{s_{-2}}) \cap V_{s_{-1}} \qquad (2.16)$$

$$= \bigcup_{s_{-i}\in S,\ i=1,2,\cdots} V_{s_{-1}\cdots s_{-k}\cdots} \qquad (2.17)$$

el cual, por el Lema 1.5, consiste de un número infinito de curvas μ_v-verticales. Esto sigue del hecho que dado cualquier sucesión infinita compuesta de elementos de S, $s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}\cdots$, tenemos por el proceso de construcción un elemento de $\Lambda_{-\infty}$ el cual es denotado por $V_{s_{-1}\,s_{-2}\cdots s_{-k}\cdots}$ Ahora, por construcción, $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}\cdots}$ es la intersección de los siguientes conjuntos de sucesiones

$$V_{s_{-1}} \supset V_{s_{-1}s_{-2}} \supset \cdots \supset V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}} \supset \cdots$$

y por (2.17) se sigue que

$$d(V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}}) \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

Así, por el Lema 2.3,

$$V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}\cdots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{s_{-1}\cdots s_{-k}}$$

consiste en una curva μ_v-vertical.

A continuación, tendremos Λ_{∞}, el conjunto de puntos en $\bigcup_{i\in S} H_i$ que permanecen en $\bigcup_{i\in S} H_i$ bajo todas las iteraciones positivas por f.
Denotemos el conjunto de puntos que permanecen en $\bigcup_{i\in S} H_i$ bajo n iteraciones por f por Λ_n,

$$\Lambda_n = \bigcup_{s_i\in S,\ i=1,,\cdots n} H_{s_0 s_1\cdots s_n}.$$

Entonces la construcción de Λ_{∞} es similar a la construcción de $\Lambda_{-\infty}$.
Se tiene

$$\Lambda_{\infty} = \bigcup_{s_i\in S,\ i=0,1,\cdots} \cdots \cap f^{-k}(H_{s_k}) \cap \cdots \cap f^{-1}(H_{s_1}) \cap H_{s_0}$$

$$= \bigcup_{s_i \in S,\ i=0,1,\cdots} H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots} \tag{2.18}$$

donde

$$H_{s_0\, s_1 \cdots s_k \cdots} = \{p \in D :\ f^i(p) \in H_{s_i},\ i = 0, 1, \cdots\}. \tag{2.19}$$

Por el Lema 2.3, Λ_∞ consiste de un número infinito de curvas μ_h-horizontales. Esto sigue del hecho que dada cualquier sucesión compuesta por elementos de S, $s_0 s_1 \cdots s_k \cdots$ el proceso de construcción implica que existe un elemento de Λ_∞ el cual lo denotamos por $H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots}$

El conjunto invariante por f está dado por

$$\Lambda = \Lambda_{-\infty} \cap \Lambda_\infty \subset \left\{ \left(\bigcup_{i \in S} H_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in S} V_i \right) \right\} \subset D$$

Más aún, por el Lema 2.3, $0 \leq \mu_v \mu_h < 1$, Λ es un conjunto de Cantor no numerable.

b) Sea $\phi : \Lambda \to \Sigma^N$. Eligiendo cualquier punto $p \in \Lambda$, por construcción existen sólo dos sucesiones infinitas dadas por

$$s_0 s_1 \cdots s_k \cdots, \qquad s_{-1} s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots \qquad \text{con} \qquad s_i \in S,\ |i| = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

tal que

$$\{p\} = V_{-s_1 s_{-2} \cdots s_{-k} \cdots} \cap H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots} \tag{2.20}$$

Asociamos así con cada punto $p \in \Lambda$ una sucesión bi-infinita constituidos de elementos de S, es decir, un elemento de Σ^N, como sigue

$$\begin{aligned} \phi : \Lambda \ &\to \ \Sigma^N \\ p \ &\to \ \{\cdots s_{-k} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_k \cdots\} \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde la sucesión bi-infinita asociada con p, $\phi(p)$, es construido por la sucesión infinita asociada con la curva μ_v-vertical y con la sucesión infinita asociada con la curva μ_h-horizontal cuya intersección es p, como se indica en (2.20). Así una curva μ_h-horizontal y una curva μ_v-vertical puede interceptar a un único punto.

c) De manera análoga al caso de dos símbolos, se demuestra que ϕ es uno a uno, epiyectiva y continua.

d) $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$, es análogo al caso de dos símbolos.

La versión completa de esta demostración se encuentra en [1]. □

CAPÍTULO 3

Bifurcaciones y Tangencias Homoclínicas

3.1. Bifurcaciones

Estudiaremos en este capítulo las bifurcaciones silla-nodo, pitchfork y duplicación de período. Se darán las condiciones para cada uno de ellas y el comportamiento que presentan. Estas bifurcaciones serán util para el capítulo siguiente.

3.1.1. Bifurcación silla-nodo.

Definición 14. Se dice que una familia a 1-parámetro de aplicaciones de clase C^r, $r \geq 2$,

$$x \mapsto f(x,\mu) = f_\mu(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

experimenta una bifurcación silla-nodo en $(x,\mu) = (0,0)$ si

$$f(0,0) = 0 \ \ y \ \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \qquad (x = 0 \text{ es punto fijo no hiperbólico de } f_{\mu=0}). \tag{3.2}$$

Además, en $(x,\mu) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0 \qquad \text{(desdoblamiento genérico)}, \tag{3.3}$$

$$y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0 \tag{3.4}$$

Consideremos, a modo de ejemplo, la familia de 1-parámetro

$$x \mapsto f_\mu(x) = x + \mu \mp x^2 , \qquad x \in \mathbb{R} , \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Se tiene que $x = 0$ es un punto fijo no hiperbólico de $f_{\mu=0}$ pues

$$f(0,0) = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \tag{3.7}$$

Estudiaremos solamente la aplicación $f_\mu(x) = x + \mu - x^2$. El caso $f_\mu(x) = x + \mu + x^2$ es análogo.

Puntos fijos:

$$\begin{aligned} f_\mu(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad x + \mu - x^2 = x \\ &\Leftrightarrow \quad \mu - x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \mu \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = \sqrt{\mu} \qquad \vee \qquad x_2 = -\sqrt{\mu} \qquad \text{para } \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Estamos interesados en ver que ocurre con los puntos fijos de (3.1) próximos de (0,0).

Estabilidad de puntos fijos:

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x}(x) = 1 + 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\mu}{\partial x}(x_1) &= 1 + 2\sqrt{\mu} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial x}(x_1) \right| > 1 \\ \frac{\partial f_\mu}{\partial x}(x_2) &= 1 - 2\sqrt{\mu} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_\mu}{\partial x}(x_2) \right| < 1 \end{aligned}$$

Para $\mu > 0$, x_1 es punto silla y x_2 es punto fijo atractor. El diagrama de bifurcación se muestra en la figura 3.1.

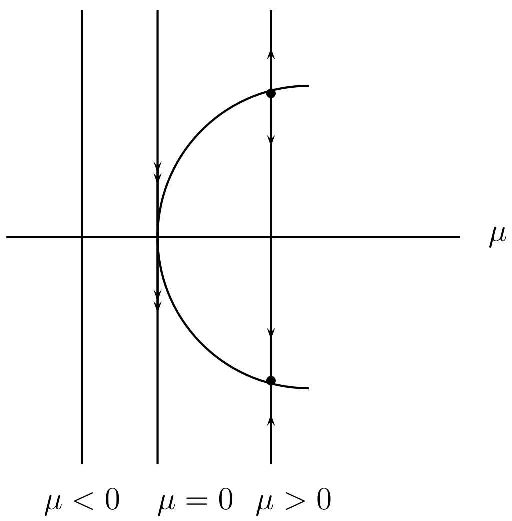


Figura 3.1

Veamos ahora que, en general, las condiciones dadas en la definición para una familia a 1-parámetro cualquiera

$$x \mapsto f(x,\mu) = f_\mu(x) \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

que experimenta una bifurcación silla-nodo que tiene como diagrama de bifurcación el que describe la figura 3.1. Estas condiciones generales están dadas en términos de las derivadas en el punto de bifurcación (0,0).

Los puntos fijos de (3.8) están dados por

$$h(x,\mu) \equiv f(x,\mu) - x = 0 \tag{3.9}$$

Por el teorema de la función implícita, dado que

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.10}$$

existe una única curva de puntos fijos pasando a través de $(x,\mu) = (0,0)$. Esto es, para x suficientemente pequeño, existe una única función $\mu(x)$ de clase C^r, $r \geq 1$ tal que

$$h(x,\mu(x)) = f(x,\mu(x)) - x = 0 \tag{3.11}$$

Buscamos las condiciones bajo la cual (3.8) define una curva en el plano $x\mu$ con las propiedades de (3.2).
Derivando (3.11) con respecto a x, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu(x))\frac{d\,\mu}{d\,x}(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \tag{3.12}$$

$$\frac{d\,\mu}{d\,x}(x) = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu(x)) - 1)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu(x))} \tag{3.13}$$

Luego,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,\mu(x)) + \frac{\partial\, h}{\partial\, \mu}(x,\mu(x))\frac{d\,\mu}{d\,x}(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d\,\mu}{d\,x}(x) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x,\mu(x))}{\frac{\partial h}{\partial \mu}(x,\mu(x))} \tag{3.14}$$

De (3.13) y (3.14)

$$\frac{d\,\mu}{d\,x} \;=\; -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial \mu}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\mu(x)) - 1)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu(x))} \tag{3.15}$$

$$\frac{d\,\mu}{d\,x}(0) \;=\; -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial h}{\partial \mu}(0,0)} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)) - 1)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)} = 0 \qquad \text{pues } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \tag{3.16}$$

Por lo tanto

$$\frac{d\,\mu}{d\,x}(0) \;=\; 0 \tag{3.17}$$

Si derivamos (2.12) y (2.14) con respecto a x, se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\mu(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial\mu}(x,\mu(x))\frac{d\,\mu}{d\,x}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial\,\mu^2}(x,\mu)\left(\frac{d\,\mu}{d\,x}(x)\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial\,\mu}(x,\mu(x))\frac{d^2\,\mu}{d\,x^2}(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,\mu(x)) + \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial\mu}(x,\mu(x))\frac{d\,\mu}{d\,x}(x) + \frac{\partial^2 h}{\partial\,\mu^2}(x,\mu)\left(\frac{d\,\mu}{d\,x}(x)\right)^2 + \frac{\partial h}{\partial\,\mu}(x,\mu(x))\frac{d^2\,\mu}{d\,x^2}(x) = 0$$

Evaluando en $(x,\mu) = (0,0)$ y usando (3.17) obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial\,\mu}(0,0)\frac{d^2\,\mu}{d\,x^2}(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2\,\mu}{d\,x^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial\,\mu}(0,0)} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial h}{\partial\,\mu}(0,0)\frac{d^2\,\mu}{d\,x^2}(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2\mu}{d\,x^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial h}{\partial\mu}(0,0)} \tag{3.19}$$

De (3.18) y (3.19)

$$\frac{d^2\mu}{d\,x^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial h}{\partial\mu}(0,0)} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial\,\mu}(0,0)} \neq 0 \tag{3.20}$$

La expansión de Taylor de $f_\mu(x)$ es de la forma

$$f_\mu(x) = x + a_1\,\mu + a_2 x^2 + O(3) \qquad \text{con } a_1,\, a_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Antes de terminar esta sección, mostraremos esta bifurcación silla-nodo describiendola geométricamente. En el plano xy, la gráfica de $f(x,\mu)$ pensando en μ fijo, esta dada por

$$\mathrm{Graf} f(x,\mu) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, y = f(x,\mu)\} \tag{3.21}$$

y la gráfica

$$\mathrm{Graf} g(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, y = x\} \tag{3.22}$$

Interceptando ambas curvas

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, y = x = f(x,\mu)\} \tag{3.23}$$

Este es el conjunto de puntos fijos de la aplicación $x \mapsto f(x,\mu)$

.

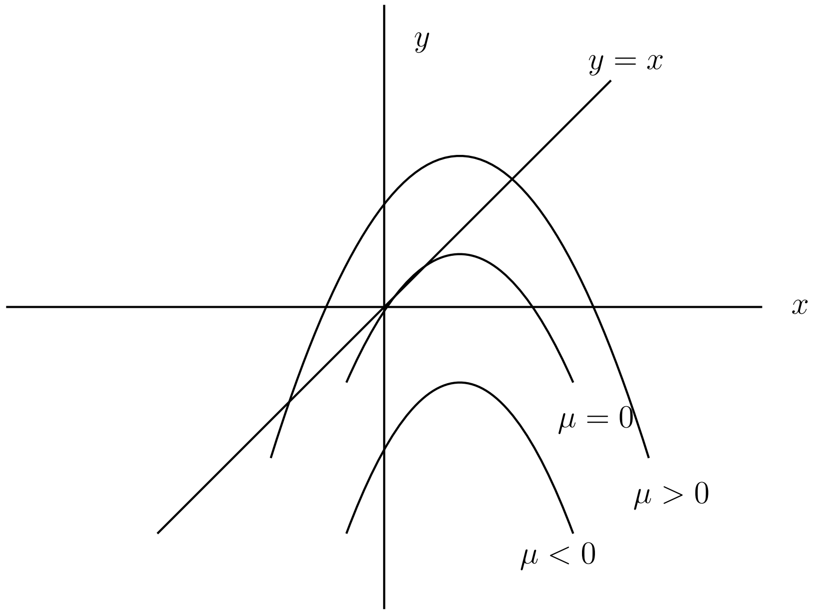


Figura 3.2

La figura 3.2, nos muestra para los diferentes valores de μ de forma gráficamente la bifurcación silla-nodo.

3.1.2. Bifurcación Pitchfork.

DEFINICIÓN 15. Se dice que una familia a 1-parámetro de aplicaciones de clase C^r, $r \geq 2$

$$x \mapsto f(x,\mu) = f_\mu(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.24}$$

experimenta una bifurcación pitchfork si

$$f(0,0) = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \tag{3.26}$$

Además,

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0 \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0 \tag{3.30}$$

Consideremos, a modo de ejemplo, la aplicación

$$x \mapsto f(x,\mu) = x + \mu x \pm x^3, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.31}$$

donde $(x,\mu) = (0,0)$ es un punto fijo no hiperbólico de (3.31) con valor propio 1, es decir,

$$f(0,0) = 0 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \tag{3.33}$$

Estudiaremos solamente la aplicación $f_\mu(x) = x + \mu - x^3$. El caso $f_\mu(x) = x + \mu + x^3$ es análogo.

Puntos fijos:

Los puntos fijos de (3.30) están dados por

$$f(x,\mu) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu x - x^3 = 0 \tag{3.34}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \qquad y \qquad \mu = x^2 \tag{3.35}$$

Hay dos curvas de puntos fijos pasando por el punto de bifurcación, como se muestra en la Figura 3.3

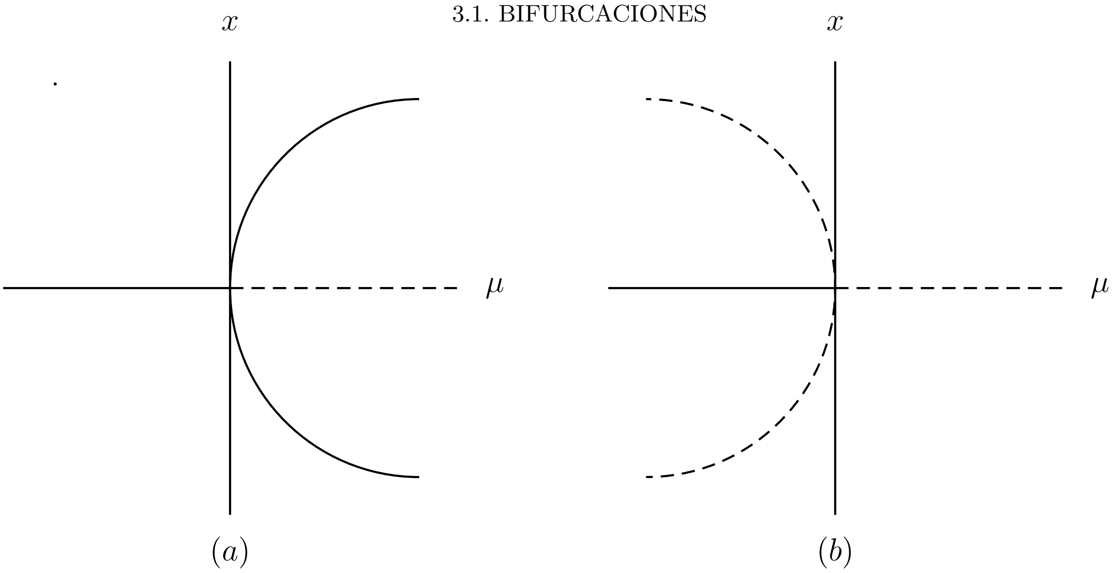
Estabilidad de puntos fijos:

$$f_\mu^{'}(x) = 1 + \mu - 3x^2$$

$$|f_\mu^{'}(0)| = |1+\mu| \qquad \text{entonces} \qquad \begin{array}{l} \text{si } \mu > 0, |f_\mu^{'}(0)| > 1 \\ \text{si } \mu < 0, |f_\mu^{'}(0)| < 1 \end{array}$$

$$|f_\mu^{'}(\pm\sqrt{\mu})| = 1 - 2\mu < 1 \qquad \text{para} \qquad \mu > 0$$

La figura 3.3 muestra el diagrama de bifurcación de la familia (3.31)



Fugura 3.3

La figura 3.4 muestra como cambia la gráfica de $y = f_\mu(x)$ a medida que el parámetro μ varía

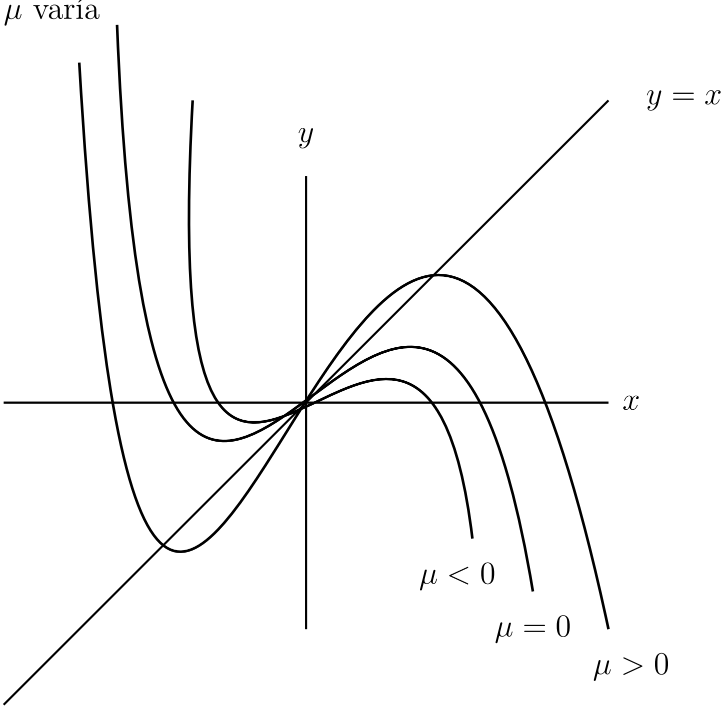


Figura 3.4

Veamos ahora que, en general las condiciones dada en la definición para una familia a 1-parámetro cualquiera

$$x \mapsto f(x, \mu) = f_\mu(x) \tag{3.36}$$

experimenta una bifurcación pitchfork como el diagrama de bifurcación en la figura 3.3. Estas condiciones generales están dadas en términos de las derivadas del punto de bifurcación $(0,0)$.

Los puntos fijos de (3.36) están dados por

$$h(x,\mu) \equiv f(x,\mu) - x = 0 \tag{3.37}$$

Por el teorema de la función implícita,

$$\frac{\partial h}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.38}$$

Estamos buscando una curva de puntos fijos que sea $x = 0$, tomando (3.37) de la forma

$$h(x,\mu) \;=\; x\,H(x,\mu) = x\,(F(x,\mu) - 1) \tag{3.39}$$

donde

$$H(x,\mu) \;=\; \begin{cases} \frac{h(x,\mu)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,\mu), & x = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

$$F(x,\mu) \;=\; \begin{cases} \frac{f(x,\mu)}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,\mu), & x = 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

Buscamos sólo una curva de puntos fijos pasando a través de $(x,\mu) = (0,0)$, exigimos que

$$\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.42}$$

Usando (3.41) y (3.42), se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.43}$$

El teorema de la función implícita y (3.43) implica que existe una única función $\mu(x)$, C^r, $r \geq 1$, (x suficientemente pequeño), tal que

$$H(x,\mu(x)) = F(x,\mu(x)) - 1 = 0 \tag{3.44}$$

Derivando implícitamente (3.44), se tiene que

$$\frac{d\mu}{dx}(0) \;=\; \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0)} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)}, \tag{3.45}$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \;=\; \frac{-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial H}{\partial \mu}(0,0)} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)}. \tag{3.46}$$

Usando (3.41), (3.45) y (3.46), se tiene que

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0)} \tag{3.47}$$

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0)} \tag{3.48}$$

En resumen, una familia a 1-parámetro de aplicaciones de clase C^r, $r \geq 1$ donde $x = 0$ es un punto fijo no hiperbólico, es decir,

$$f(0,0) = 0 \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \tag{3.50}$$

experimenta una bifurcación pitchfork en $(x, \mu) = (0,0)$ si

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0 \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0 \tag{3.54}$$

La expansión de Taylor de $f_\mu(x)$ es de la forma

$$f_\mu(x) = x + a_1\, x\mu + a_2 x^3 + O(4) \qquad \text{con } a_1,\ a_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.1.3. Bifurcación de Duplicación de Período.

Definición 16. Se dice que una familia a 1-parámetro de aplicaciones de clase C^r, $r \geq 3$

$$x \mapsto f(x, \mu) = f_\mu(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R}$$

experimenta una bifurcación de duplicación de período en $(x, \mu) = (0,0)$ si

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= -1 \qquad (x = 0 \text{ punto fijo no hiperbólico para} f_{\mu=0}) \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{\partial f^2}{\partial \mu}(0,0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(0,0) &= 0\\
\frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(0,0) &\neq 0\\
\frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(0,0) &\neq 0
\end{aligned}$$

Consideremos, a modo de ejemplo, la familia a 1-parámetro dada por

$$f(x,\mu) = -x - \mu\, x + x^3\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.55}$$

Podemos ver que $x = 0$ es un punto fijo no hiperbólico de $f_{\mu=0}$ y la parte lineal tiene valor propio -1, pues

$$f(0,0) = 0 \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \tag{3.57}$$

Puntos fijos :

$$\begin{aligned}
f_\mu(x) = x \ &\Leftrightarrow\ -x - \mu\, x + x^3 = x\\
&\Leftrightarrow\ x^3 - (\mu+2)x = 0\\
&\Leftrightarrow\ x[x^2 - (\mu+2)] = 0\\
&\Leftrightarrow\ x = 0 \ \vee\ x^2 = \mu + 2\\
&\Leftrightarrow\ x = 0 \ \vee\ x = \pm\sqrt{\mu+2}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Estabilidad de puntos fijos :

$$f_\mu'(x) = -1 - \mu + 3x^2 \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
f_\mu'(0) &= -(1+\mu)\\
\text{si } \mu < -2 &\Rightarrow |f_\mu'(0)| > 1\\
\text{si } -2 < \mu < 0 &\Rightarrow |f_\mu'(0)| < 1\\
\text{si } \mu > 0 &\Rightarrow |f_\mu'(0)| > 1
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$f_\mu'(\pm\sqrt{\mu+2}) = 5 + 2\mu \qquad \text{con } \mu \geq -2$$

$$\text{Entonces} \qquad |f_\mu'(\pm\sqrt{\mu+2})| > 1 \tag{3.61}$$

.

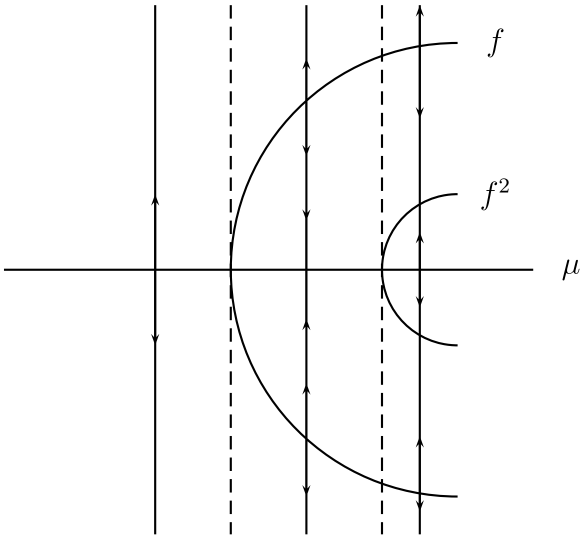


Figura 3.5

De (3.60) y (3.61) podemos ver inmediatamente que existe un problema, para $\mu > 0$, la aplicación f tiene exactamente tres puntos fijos y todos son inestables. (Ver figura 3.3).
Si consideramos la segunda iteración de f ($f^2 = f \circ f$) dada por

(3.62) $$x \mapsto f^2(x,\mu) = x + \mu(2+\mu)x - 2x^3 + \cdots$$

podemos ver que esta aplicación tiene un punto fijo no hiperbólico en $x = 0$ para $\mu = 0$ pues

(3.63) $$f^2(0,0) = 0$$

(3.64) $$\frac{\partial f^2}{\partial x}(0,0) = 1$$

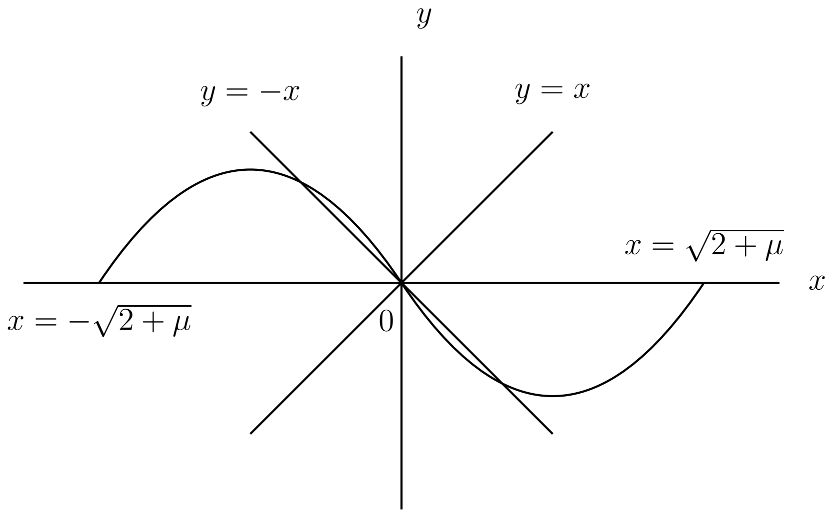
Más aún,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^2}{\partial \mu}(x,\mu) = (2+\mu)x + \mu x \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f^2}{\partial \mu}(0,0) = 0 \\
\frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(x,\mu) = 2 + 2\mu \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 2 \\
\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(x,\mu) = -12x + \theta(2) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\
\frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(x,\mu) = -12 + \theta(1) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(0,0) = -12
\end{aligned}$$

Bajo estas condiciones la familia f^2 tiene una bifurcación pitchfork en $(x,\mu) = (0,0)$. Los dos puntos fijos de $f^2(x,\mu)$ no son puntos fijos de $f(x,\mu)$, ellos son puntos de

periodo dos para $f(x,\mu)$.
Por lo tanto, $f(x,\mu)$ experimenta una bifurcación de duplicación de período en $(x,\mu) = (0,0)$.

También podemos ver la bifurcación de duplicación de periodo geométricamente para los distintos valores de μ. (Ver figura 3.6)



Fugura 3.6

En general, para una familia a 1-parámetro cualquiera

$$x \mapsto f(x,\mu), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{3.65}$$

experimenta una bifurcación de duplicación de período para las aplicaciones que tienen un punto fijo no hiperbólico con valor propio -1 y para la segunda iteración de la aplicación f experimenta una bifurcación pitchfork en el mismo punto fijo no hiperbólico. Además, usando (3.49), (3.50), (3.51), (3.52), (3.53) y (3.54) es suficiente para (3.65) satisfacer

$$f(0,0) = 0 \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1 \tag{3.67}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial \mu}(0,0) = 0 \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2}(0,0) = 0 \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0 \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3}(0,0) \quad \neq \quad 0 \tag{3.71}$$

La expansión de Taylor de f_μ está dada por

$$f_\mu(x) = -x + a_1 \mu x + a_2 x^3 + O(4) \qquad \text{con } \; a_1, \; a_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3.2. Cascadas de Tangencias Homoclínicas

Empezaremos a estudiar las tangencias homoclínicas.

Sea $\phi : D \times \mathbb{R} \to D$ una aplicación C^3, donde $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio (abierto y conexo) tal que $\varphi_\mu(x) = \phi(x, \mu)$ es un difeomorfismo sobre D para cada $\mu \in \mathbb{R}$ próximo de cero.

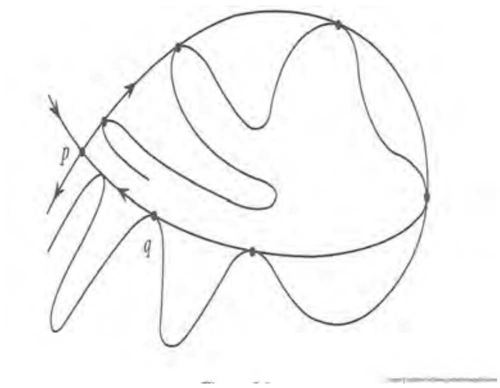


Figura 3.7

Sea $p = p_0$ un punto fijo hiperbólico para φ_0 y q una tangencia homoclínica asociada a p (q es un punto de tangencia entre $W^s(p)$ y $W^u(p)$). Asumiremos que $W^s(p)$ y $W^u(p)$ tienen un contacto cuadrático en q.
Elegimos coordenadas locales cerca de q tal que podemos expresar las componentes locales de $W^s(p)$ y $W^u(p)$ conteniendo a q por

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\} \\ W^u(p) &= \{(x_1, x_2) : x_2 = ax_1^2\} \qquad \text{con } a \neq 0 \end{aligned}$$

Como p es un punto fijo hiperbólico, tenemos para μ pequeño un único punto fijo hiperbólico p_μ cerca de p. Las componentes locales de $W^s(p_\mu)$ y $W^u(p_\mu)$ cerca de q, dependen continuamente de μ, μ próximo de cero. (Ver [2])
Podemos suponer que la componente local de $W^s(p_\mu)$ está dada por $x_2 = 0$ y de $W^u(p_\mu)$ está dada por $x_2 = ax_1^2 + b\mu$ con $a, b \neq 0$. La tangencia homoclínica es de contacto cuadrática.

Consideremos $a < 0$ y $b > 0$. Las posiciones de las componentes locales de $W^s(p_\mu)$ y $W^u(p_\mu)$ están dadas en la figura 3.8.

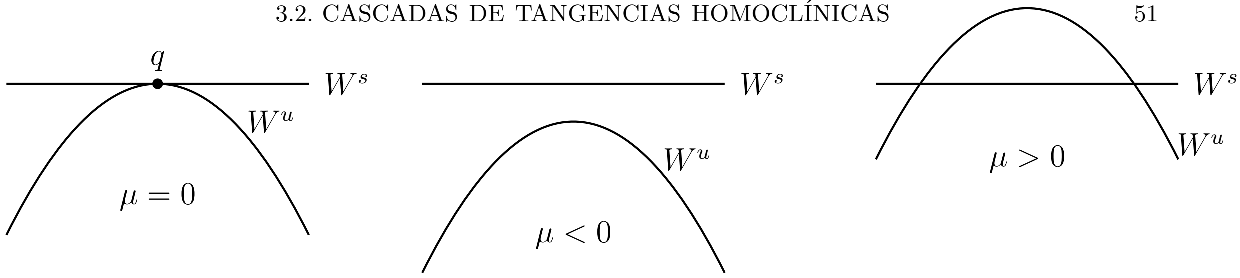


Figura 3.8

Teorema 3.1. *Sea $\{\varphi_\mu\}$ es una familia de difeomorfismo a 1-parámetro con una tangencia homoclínica cuadrática q, en $\mu = 0$, asociada a un punto fijo (periódico) silla p que desdobla genéricamente (ver figura 3.8). Entonces existe una sucesión $\mu_n \to 0$ tal que φ_{μ_n} tiene tangencia homoclínica $q_{\mu_n} \to q$ asociada a $p_{\mu_n} \to p$*

Demostración. Sea $r = \varphi_0^{-N}(q)$ para algún $N > 0$ y supongamos que la tangencia desdobla en puntos homoclínicos transversales para $\mu > 0$. Dado $\mu > 0$ próximo de cero, sean los prozos de parábolas $\Gamma_\mu^u \subset W_\mu^u$ cerca de q y $\Gamma_\mu^s \subset W_\mu^s$ cerca de r.

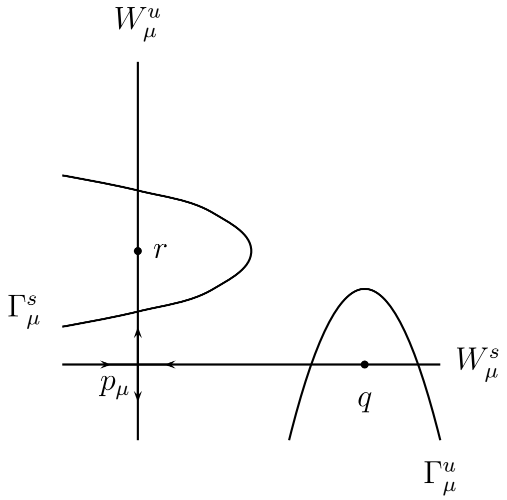


Figura 3.9

Para $\mu > 0$, las posiciones de W_μ^s y W_μ^u cerca de r y q, respectivamente, son como se muestra en la figura 3.9.

Tomamos $\mu = \widehat{\mu}$ arbitrariamente pequeño. Para $n > 0$ grande entonces $\varphi_{\widehat{\mu}}^{-n}(\Gamma_{\widehat{\mu}}^s)$ intercepta a $\Gamma_{\widehat{\mu}}^u$. Tomando $\mu > 0$ mucho más pequeño que $\widehat{\mu}$ tenemos que para algún entero n, $\varphi_\mu^{-n}(\Gamma_\mu^s) \cap \Gamma_\mu^u = \emptyset$.
Existe un μ_1, $0 < \mu_1 < \widehat{\mu}$ para lo cual $\varphi_{\mu_1}^{-n}(\Gamma_{\mu_1}^s)$ y $\Gamma_{\mu_1}^u$ son tangentes en $q_1 \in \Gamma_{\mu_1}^u$.
Luego, tomamos $\mu = \widehat{\mu}_2 < \widehat{\mu}$ arbitrariamente pequeño. Para $n > 0$ grande, $\varphi_{\widehat{\mu}_2}^{-n}(\Gamma_{\widehat{\mu}_2}^s)$ intercepta a $\Gamma_{\widehat{\mu_2}}^u$. Tomando $\mu > 0$ mucho más pequeño que $\widehat{\mu}_2$ tenemos que para

algún entero n, $\varphi_\mu^{-n}(\Gamma_\mu^u) \cap \Gamma_\mu^u = \emptyset$. Existe un μ_2, $0 < \mu_2 < \widehat{\mu}_2$ para lo cual $\varphi_{\mu_2}^{-n}(\Gamma_{\mu_2}^u)$ y $\Gamma_{\mu_2}^u$ son tangentes en q_2.
Repitiendo este proceso para valores de $\widehat{\mu}$ pequeños, podemos obtener la construcción de sucesiones μ_n, q_n (tangencias homoclínicas) donde $\mu_n \to 0$ y $q_{\mu_n} \to q$. Por hipótesis, sabemos que la tangencia homoclínica q está asociada a un punto fijo no hiperbólico p. Por lo tanto, $p_{\mu_n} \to p$ cuando $n \to \infty$. $\square$

3.2.1. Cascadas de Bifurcaciones de Duplicación de período y pozos. Sea R un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $\{\varphi_\mu\}$ una familia de difeomorfismos de R en $\mathbb{R}^2$ tal que

(1) $\varphi_{-1}(R) \cap R = \emptyset$
(2) $\varphi_\mu|_R$ es disipativo (o contractible) para $-1 \leq \mu \leq 1$ tal que $|det(d\varphi_\mu)| < 1$ sobre R
(3) φ_1 tiene puntos periódicos y todos ellos son sillas.
(4) $\varphi_\mu(R) \cap S_1 = \emptyset$, $\varphi_\mu(R) \cap S_2 = \emptyset$, $-1 \leq \mu \leq 1$ donde S_1, S_2 son los lados verticales de R
(5) $\varphi_\mu(T) \cap R = \emptyset$, $\varphi_\mu(B) \cap R = \emptyset$, $-1 \leq \mu \leq 1$, donde T y B son los lados superior e inferior de R respectivamente.

En esta sección supondremos la siguiente condición genérica sobre la familia de $\{\varphi_\mu\}$

(6) φ_μ tiene a lo más una órbita periódica para cada $\mu \in [-1, 1]$ y esta órbita corresponderá a una bifurcación silla-nodo o a una bifurcación de duplicación de período.

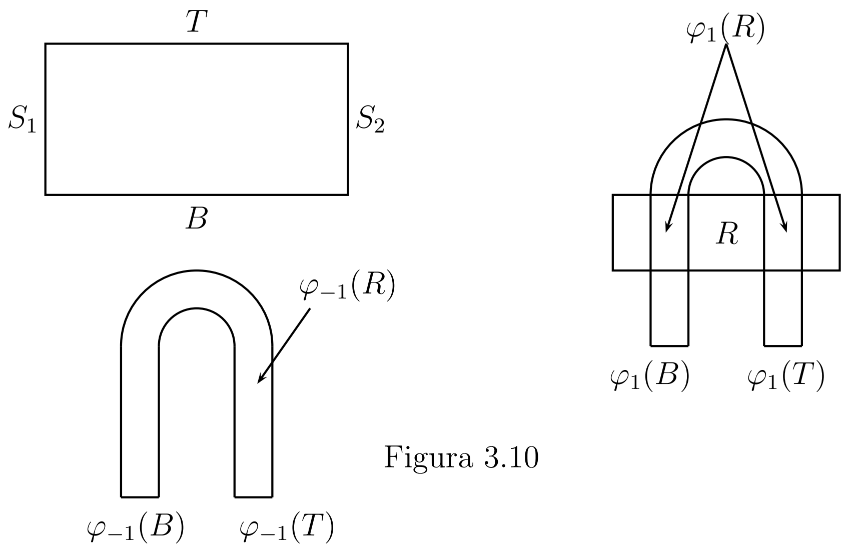


Figura 3.10

Queremos precisar las condiciones anteriores satisfaciendo un desdoblamiento genérico de una tangencia homoclínica, para ello, hemos reemplazado φ_μ por φ_μ^N tomando $-\delta < \mu < \delta$ en lugar de $-1 < \mu < 1$ y eligiendo un R adecuado. Aquí, φ_μ^N

corresponde a φ_μ^N del teorema 3.1

Veremos la creación de la Herradura.
Sea φ_μ tal que

1. φ_0 tiene un punto p fijo silla y $|det(df_0)_p| < 1$
2. Hay un desdoblamiento genérico de La tangencia homoclínica q asociada a p

Podemos indicar que para una vecindad V de q existe un rectángulo $R \subset V$, un número $\delta > 0$ y un entero $N > 0$ tal que $\varphi_\mu^N|_R$ crea una herradura para $-\delta < \mu < \delta$, tomando R muy delgado cerca de q y paralelo a la componente W_μ^s como se muestra en la figura 3.11.

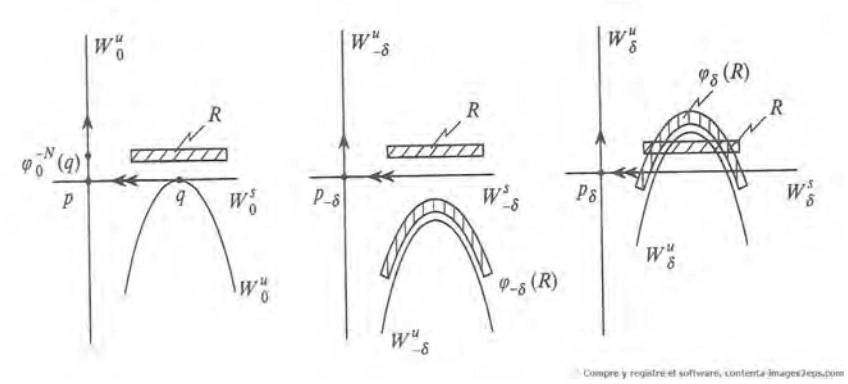


Figura 3.11

Podemos elegir un rectángulo R, δ y un N más adecuado.
Primero, para μ pequeño, elegimos las coordenadas linealizadas para cada φ_μ en una vecindad del punto fijo p que contiene un arco $l^s \subset W_0^s$ desde p a q, estas coordenadas pueden ser elegidas dependiendo continuamente de μ. (Ver [2])

Y si elegimos R adecuado, próximo a W_0^s tal que es proyección sobre W_0^u paralelo a W_0^s contiene en su interior $\varphi_0^N(q)$ para un N suficientemente grande, entonces $\varphi_0^N(R)$ será una "herradura" próxima de un arco en W_0^u próximo de q. Para μ próximo de cero, tendremos lo que muestra la figura 3.11.

Para $\varphi_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sea $\mathrm{Per}(\varphi_\mu)$ el conjunto de órbitas periódicas de φ_μ y $P = \{(x, \mu) : x \in \mathrm{Per}(\varphi_\mu)\}$. Definamos el espacio topológico $\tilde{\mathrm{P}} = P/\sim$ donde la relación de equivalencia $\sim$ es la identificación de puntos en la misma órbita. Una componente de $\tilde{\mathrm{P}}$ está dada por $(O(x), \mu)$, $O(x)$ siendo la órbita periódica del punto x.

TEOREMA 3.2. [**YA**, 1983]
Si $\varphi_\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una familia de difeomorfismos preservando orientación satisfaciendo las condiciones de* (1) *a* (6). *Entonces para cada* $(O(x), \mu) \in \tilde{P}$ *tiene una componente conteniendo órbitas periódicas atractoras (pozos) de periodo* $2^n k$ *para cada* $n \geq 0$, *donde* k *es el periodo de* x *para* φ_1

DEMOSTRACIÓN. Una demostración de este resultado puede encontrarse en [2]. $\square$

CAPÍTULO 4

Órbitas homoclínicas y caos asociado a 1-ciclo de Silnikov

En este capítulo estudiaremos la dinámica, en una vecindad de una órbita homoclínica asociada a una singularidad hiperbólica de tipo silla-foco, de un campo de vectores en $\mathbb{R}^3$. Tal fenómeno es conocido como el 1-ciclo de Silnikov y el campo de vectores tri-dimensional está dado por

(4.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x - \omega y + P(x,y,z) \\ \dot{y} = \omega x + \rho y + Q(x,y,z) \\ \dot{z} = \lambda z + R(x,y,z) \end{cases}$$

donde P, Q, R son de clase C^r, $r \geq 1$ donde $P(0,0,0) = Q(0,0,0) = R(0,0,0) = 0$ con ρ, ω, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Del sistema, el origen $(0,0,0)$ es una singularidad cuya parte lineal de (4.1) está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \rho & -\omega & 0 \\ \omega & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

con valores propios $\rho \pm i\,\omega$, λ con $\rho < 0$, $\lambda > 0$ y $\omega \neq 0$.

Haremos las siguientes suposiciones:

Hip. 1: La ecuación (3.1) posee una órbita homoclínica Γ conectando $(0,0,0)$ consigo mismo.
Hip. 2: $\lambda > -\rho > 0$

Se sigue de esto que $(0,0,0)$ es una singularidad hiperbólica que posee un conjunto estable 2- dimensional y un conjunto inestable de 1- dimensional.

Ahora estudiaremos la dinámica de la estructura de las órbitas de (4.1) próximas de Γ.

La aplicación P_0

Sean $\Pi_0 \subset \mathbb{R}^2$ el plano de ecuación $y = 0$ y el plano Π_1 paralelo al plano xy con $z = \varepsilon$.
Estudiaremos primero la dinámica cerca del origen.

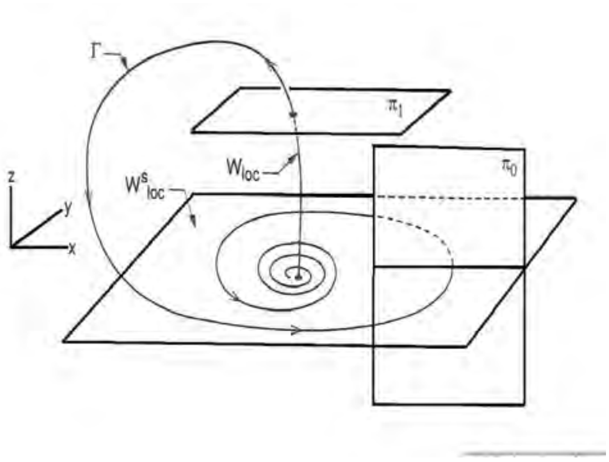


Figura 4.1

El flujo de (4.1), considerando la parte lineal próximo del origen, está dado por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{\rho t}(x\cos(\omega t) - y\,\mathrm{sen}(\omega t)) \\
y(t) &= e^{\rho t}(x\,\mathrm{sen}(\omega t) + y\cos(\omega t)) \\
z(t) &= z\,e^{\lambda t}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Se puede determinar el tiempo que demora una órbita partiendo de un punto inicial $(x, 0, z) \in \Pi_0$ llegando al punto $(x, y, \varepsilon) \in \Pi_1$.
De hecho, tenemos que

$$
\begin{aligned}
z\,e^{\lambda t} = \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\lambda t} = \frac{\varepsilon}{z} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda t = \ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)
\end{aligned}
$$

Además,

$$e^{\rho t} \;=\; e^{\rho \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)} = e^{\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}} = \left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}$$

Podemos definir, a través del flujo, una aplicación P_0 dada por

$$\begin{aligned} P_0 : \Pi_0 &\to \Pi_1 \\ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) \\ x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) \\ \varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por comodidad la denotaremos por

$$\begin{aligned} P_0 : \Pi_0 &\to \Pi_1 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) \\ x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ahora estudiaremos con más detalles el dominio de P_0 en Π_0.
Tomando un punto en Π_0, es posible que su órbita intercepte a Π_0 muchas veces antes de llegar a Π_1. Para evitar aquello, daremos las condiciones para que esto no ocurra. De (4.2), tomando el tiempo $t = \frac{2\pi}{\omega}$ para el punto $(\varepsilon,0,0)$ en el plano xz con $x > 0$, se tiene $x = \varepsilon e^{2\pi\frac{\rho}{\omega}} < \varepsilon$, $0 < z \leq \varepsilon$ y $(\varepsilon e^{2\pi\frac{\rho}{\omega}},0,0)$ es el punto en el cual la órbita de $(\varepsilon,0,0)$ intercepta Π_0 por primera vez.

Definimos entonces Π_0 dado por

$$\Pi_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, \varepsilon e^{2\pi\frac{\rho}{\omega}} \leq x \leq \varepsilon;\ 0 < z \leq \varepsilon\}$$

Queremos describir el conjunto $P_0(\Pi_0) \subset \Pi_1$.
Las coordenadas de Π_1 son x e y las denotamos por x' e y'.
Tenemos $P_0(x,z) = (x',y')$, entonces

$$(x',y') = \left(x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right), x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)\right) \tag{4.4}$$

Considerando el sistema de coordenadas polares en Π_1, se tiene que

$$r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \qquad \frac{y'}{x'} = tan(\theta)$$

De (4.4) obtenemos

$$(r,\theta) = \left(x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}, \frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) \tag{4.5}$$

Si $z = z_0$ es la recta constante horizontal en Π_0 entonces

$$(r,\theta) = \left(x\left(\frac{\varepsilon}{z_0}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}, \frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z_0}\right)\right) = \left(x\left(\frac{\varepsilon}{z_0}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}, \theta_0\right)$$

con $\theta_0 = \frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z_0}\right)$ constante.

Por lo tanto, para z constante la imagen por P_0 de esta recta, en Π_1 corresponde a un segmento del rayo $\theta = \theta_0$.
En particular, si $x = \varepsilon$ y $z = \varepsilon$ entonces

$$(r,\theta) = (\varepsilon, 0)$$

y si $x = \varepsilon e^{2\pi\frac{\rho}{\omega}}$ y $z = \varepsilon$ entonces

$$(r,\theta) = \left(\varepsilon e^{2\pi\frac{\rho}{\lambda}}\left(\frac{\varepsilon}{z_0}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}, 0\right)$$

Considerando, ahora, la recta vertical $x = x_0$ en Π_0, se sigue que

$$(r,\theta) = \left(x_0\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}, \frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)$$

Por lo tanto, la imagen de la recta $x = x_0$ por P_0 es en Π_1, una espiral logarítmica.
En particular, si $k \in \mathbb{Z}_0^+$ y $z_k = \varepsilon e^{-2\pi k\frac{\lambda}{\omega}}$ entonces

$$\begin{aligned}(r,\theta) &= \left(x_0\left(\frac{\varepsilon}{z_k}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}, \frac{\rho}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z_k}\right)\right)\\ &= (x_0 e^{2\pi k\frac{\rho}{\lambda}}, 2\pi k) \in \{(r,0) : r > 0\}\end{aligned}$$

Observación 3. *En la recta $x = \varepsilon$ el segmento desde $z_1 = \varepsilon\, e^{-2\pi\frac{\rho}{\lambda}}$ hasta $z_2 = \varepsilon\, e^{-4\pi\frac{\rho}{\lambda}}$, en $P_0(\Pi_0)$ corresponde a dar una vuelta de 0 a 2π y al mover el $x \in [\varepsilon e^{-2\pi\frac{\rho}{\lambda}}, \varepsilon]$ tenemos que r varía moviendose a la izquierda, como se muestra en la figura 4.2.*

Consideremos en Π_0 el rectángulo

$$R_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, \varepsilon e^{2\pi\frac{\rho}{\omega}} \le x \le \varepsilon,\ \varepsilon e^{-2\pi(k+1)\frac{\lambda}{\omega}} \le z \le \varepsilon e^{-2\pi k\frac{\lambda}{\omega}}\}, \qquad k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Claramente

$$\Pi_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k$$

La imagen por P_0 de un rectángulo R_k con bordes horizontales y verticales, h^l, h^u y v^l, v^r, respectivamente, son como se muestra en la figura siguiente.

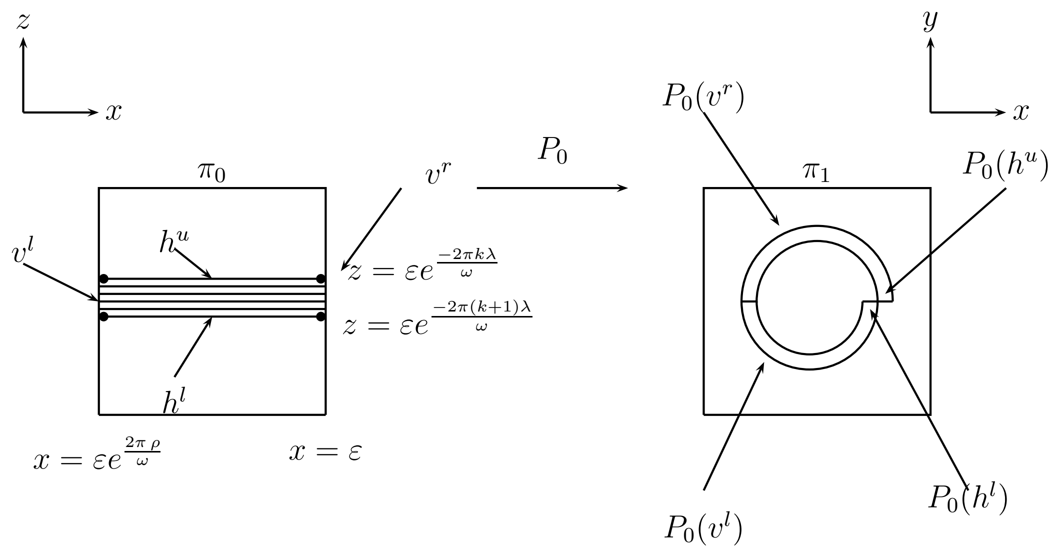


Figura 4.2

En efecto

$$
\begin{aligned}
h^u &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ z = \varepsilon\, e^{-2\pi k \frac{\lambda}{\omega}},\ \varepsilon\, e^{2\pi \frac{\rho}{\omega}} \leq x \leq \varepsilon\} \\
h^l &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ z = \varepsilon e^{-2\pi(k+1)\frac{\lambda}{\omega}},\ \varepsilon e^{2\pi \frac{\rho}{\omega}} \leq x \leq \varepsilon\} \\
v^r &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x = \varepsilon,\ \varepsilon e^{-2\pi(k+1)\frac{\lambda}{\omega}} \leq z \leq \varepsilon e^{-2\pi k \frac{\lambda}{\omega}}\} \\
v^l &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x = \varepsilon e^{2\pi \frac{\rho}{\omega}},\ \varepsilon e^{-2\pi(k+1)\frac{\lambda}{\omega}} \leq z \leq \varepsilon e^{-2\pi k \frac{\lambda}{\omega}}\}
\end{aligned}
$$

Las respectivas imágenes bajo la aplicación P_0 están dadas por

$$
\begin{aligned}
P_0(h^u) &= \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \varepsilon,\ \theta = 2\pi\, k,\ \varepsilon e^{2\pi(k+1)\frac{\rho}{\omega}} \leq r \leq \varepsilon e^{2\pi\, k \frac{\rho}{\omega}}\} \\
P_0(h^l) &= \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \varepsilon,\ \theta = 2\pi(k+1),\ \varepsilon e^{2\pi(k+1)\frac{\rho}{\omega}} \leq r \leq \varepsilon e^{2\pi k \frac{\rho}{\omega}}\} \\
P_0(v^r) &= \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \varepsilon,\ 2\pi\, k \leq \theta \leq 2\pi\, (k+1),\ r(\theta) = \varepsilon e^{\frac{\rho}{\omega}\theta}\} \\
P_0(v^l) &= \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \varepsilon,\ 2\pi(k+2) \leq \theta \leq 2\pi(k+1),\ r(\theta) = \varepsilon e^{\frac{\rho}{\omega}\theta}\}
\end{aligned}
$$

La aplicación P_1

Consideremos la aplicación afín

$$\begin{aligned} P_1 : \Pi_1 &\to \Pi_0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varepsilon \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sean $\{p_0\} = W^s \cap \Pi_0$ y $\{p_1\} = W^u \cap \Pi_1$. Usando el desarrollo de Taylor en p_1, la aplicación P_1 está dada por

$$P_1(h) = p_0 + DP_1(p_1)h + O(|h|^2)$$

donde h representa la coordenada sobre Π_1 centrado en p_1. Para Π_1 suficientemente pequeño los términos $O(|h|^2)$ en esa expresión pueden ser tomados arbitrariamente pequeños. Por lo tanto consideraremos la aplicación P_1 como

$$P_1(h) = p_0 + DP_1(p_1)h$$

Sobre Π_0 la coordenada y es fija con $y = \varepsilon$, esto justifica porque la segunda fila tiene solamente ceros en la parte lineal de (4.6). Por otra parte, la coordenada en z en Π_1 es fija $z = \varepsilon$ esto explica que la tercera columna de la parte lineal tiene solamente ceros.

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Gamma \cap \Pi_0 \text{ es la intersección de la órbita homoclínica con } \Pi_0.$$

La transformación de Poincaré $P = P_1 \circ P_0$:

Considerando las aplicaciones ya calculadas, se define la transformación

$$\begin{aligned} P = P_1 \circ P_0 : \Pi_0 &\to \Pi_0 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \left[a \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) + b \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)\right] + \overline{x} \\ x \left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} \left[c \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right) + d \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)\right] \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde Π_0 es suficientemente pequeño.

Demostraremos que Π_0 contiene un conjunto de Cantor invariante por P, el cual es topológicamente conjugado con la aplicación shift de (a lo menos) 2 símbolos.

Para esto, haremos uso del Teorema de Moser visto en el capítulo 2.

Consideremos un rectángulo R_k. En orden a verificar el comportamiento de bandas horizontales y verticales de R_k, será necesario verificar que los bordes interiores y exteriores de R_k interceptan (al menos) en dos puntos del borde superior de $P(R_k)$. En otras palabras, el borde horizontal superior de R_k intercepta, al menos, en dos puntos al borde interno de $P(R_k)$.
Adicionalmente, será útil conocer que dado un rectángulo R_k, a cuántos rectángulos R_i, con $i \geq k$, su imagen $P(R_k)$ los intercepta de modo que los bordes interiores y exteriores de $P(R_k)$ intersecten al menos en dos puntos el borde superior de R_i. (Ver figura 4.3 (a))

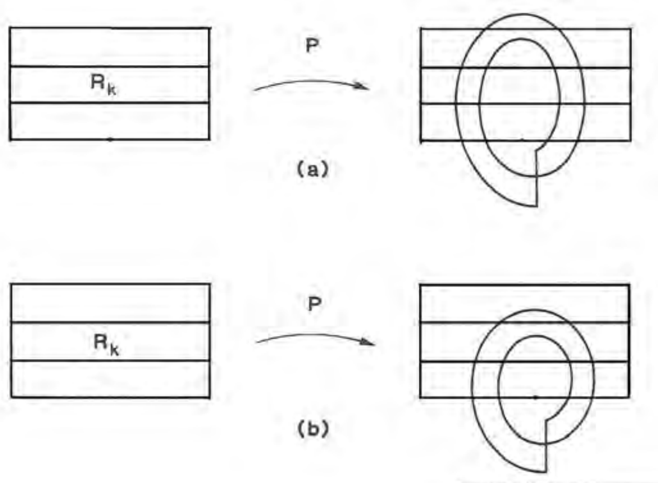


Figura 4.3

Tenemos el siguiente lema.

Lema 4.1. *Consideremos un rectángulo R_k para k fijo suficientemente grande. Entonces el borde interno de $P(R_k)$ intercepta el borde horizontal superior de R_i en (al menos) dos puntos para $i \geq \frac{k}{\alpha}$, donde $1 \leq \alpha < -\frac{\lambda}{\rho}$. Mas aún, la preimagen del borde vertical de $P(R_k) \cap R_i$ está contenido en el borde vertical de R_k*

Demostración. Sea z la coordenada del borde horizontal superior de R_i, la cual está dada por $\overline{z} = \varepsilon e^{-2\pi i \frac{\lambda}{\omega}}$. El punto sobre el borde interior de $P_0(R_k)$ cuyo radio es el más cercano a $(0, 0, \varepsilon)$ está dado por

$$r_{min} = \varepsilon e^{2\pi(k+2)\frac{\rho}{\omega}}.$$

Como vemos en la figura 4.3, estamos en presencia de dos casos posibles.
Queremos demostrar que $P(R_k)$ debe interceptar a R_i completamente (al menos) en

dos puntos del borde superior de dicho rectángulo.
Como P_1 es una aplicación afín, el borde interno de $P(R_k) = P_1 \circ P_0(R_k)$ puede ser expresado por

$$\overline{r}_{min} = K\, e^{2\pi(k+2)\frac{\rho}{\omega}} = K\, e^{4\pi\frac{\rho}{\omega}}\, e^{2\pi\, k\frac{\rho}{\omega}}$$

para algún $K > 0$.
Para que el borde interno de $P(R_k)$ intercepte al borde horizontal superior de R_i en al menos dos puntos, consideremos lo siguiente:

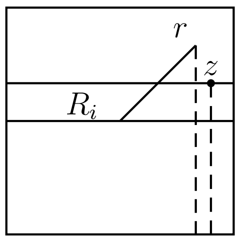


Figura 4.4

$$\begin{aligned} \frac{\overline{r}_{min}}{\overline{z}} &= \frac{K\, e^{4\pi\frac{\rho}{\omega}}\, e^{2\pi\, k\frac{\rho}{\omega}}}{e^{-2\pi i\frac{\lambda}{\omega}}} \\ &= K\, e^{4\pi\frac{\rho}{\omega}}\, e^{\frac{2\pi}{\omega}\,(k\omega+i\lambda)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $K\, e^{4\pi\frac{\rho}{\omega}}$ es una constante fija. El tamaño de (4.8) es controlado por el término $e^{\frac{2\pi}{\omega}\,(k\omega+i\lambda)}$
Queremos que $\frac{\overline{r}_{min}}{\overline{z}} > 1$. Para esto basta que sea $k\,\rho + i\,\lambda$ suficientemente grande.
Por la Hip. 2, tenemos que $\lambda > -\rho > 0$. Luego

$$1 \leq \alpha \leq -\frac{\lambda}{\rho} \Rightarrow \frac{k}{\alpha} \geq -\frac{k\,\rho}{\lambda}$$

Pero $i \geq \frac{k}{\alpha}$ entonces $i \geq -\frac{k\,\rho}{\lambda}$ y , en consecuencia, $k\rho + i\lambda > 0$ y por lo tanto, $\overline{r}_{min} > \overline{z}$.

Como se muestra en la figura 4.3, los bordes verticales de R_k son aplicados por P_0 a los bordes interno y externo del conjunto espiral. P_1 es una aplicación afín invertible así los bordes interno y externo de $P_0(R_k)$ corresponden a los bordes interiores y exteriores de $P(R_k)$. Por lo tanto, las preimagenes de los bordes verticales de $P(R_k) \cap R_i$ están contenidas en el borde vertical de R_k. $\square$

TEOREMA 4.2. *Para k suficientemente grande, R_k contiene un conjunto de Cantor invariante Λ_k, sobre el cual la aplicación de Poincaré P es topológicamente conjugada al shift de dos símbolos.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración está basada en el Teorema de Moser (Ver capítulo 2). De hecho probaremos que P satisface las hipótesis (1) y (2) de dicho teorema.

Sea $0 < \mu_h \, \mu_v < 1$ donde μ_h y μ_v son las pendientes de las curvas μ_h-horizontal y μ_v-vertical, respectivamente.
Sean H_i y V_i dos rectángulos μ_h-horizontal y μ_v-vertical respectivamente. Por el lema 4.1 y de la aplicación de Poincaré P, $P(H_i) = V_i$, donde los correspondientes lados horizontales de H_i son aplicados a los respectivos lados horizontales de V_i y los lados verticales de H_i son aplicados a los correspondientes lados verticales de V_i.

Dado un rectángulo H μ_h-horizontal contenido en $\bigcup_{i \in S} H_i$, tenemos que

$$P^{-1}(H_i) = \widetilde{H}_i = \{(x,z) \in \widetilde{H}_i \, : \, P(x,z) \in H\}$$

Queremos que la aplicación P_0 sobre $\widetilde{H}_i$ no exceda el intervalo $[\varepsilon \, e^{-2\pi(k+1)\frac{\lambda}{\omega}}, \varepsilon \, e^{-2\pi \, k \frac{\lambda}{\omega}}]$.
Obtendremos un rectángulo $\widetilde{H}_i$ de modo que $\widetilde{H}_i \subseteq H$. Para esto, usando la aplicación P_0 basta probar que existen θ_1 y θ_2 tal que $\overline{z} \in [\varepsilon e^{-2\pi\theta_1 \frac{\lambda}{\omega}}, \varepsilon e^{-2\pi\theta_2 \frac{\lambda}{\omega}}] \subseteq [\varepsilon e^{-2\pi(k+1)\frac{\lambda}{\omega}}, \varepsilon e^{-2\pi k \frac{\lambda}{\omega}}]$, donde $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$.
Sea $\overline{z} = \varepsilon \, e^{-2\pi \, i \frac{\lambda}{\omega}}$ tal que

$$P_0 \begin{pmatrix} x \\ \overline{z} \end{pmatrix} = P_0 \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

De $(\star)$, considerando solamente la segunda componente de P_0 (pues nos dá el comportamiento angular en Π_1) se tiene que

$$\varepsilon e^{2\pi \, i \frac{\rho}{\omega}} \operatorname{sen}(-2\pi \, i) \;\; = \;\; \varepsilon \, e^{-2\pi \, k \frac{\lambda}{\omega}}$$

En vista que esta ecuación no se puede resolver algebraicamente, lo haremos bajo su intepretación gráfica. Se tiene que

$$-\operatorname{sen}(2\pi \, i) \;\; = \;\; e^{-2\pi \, k \frac{\lambda}{\omega}} \, e^{-2\pi \, i \frac{\rho}{\omega}}$$

donde

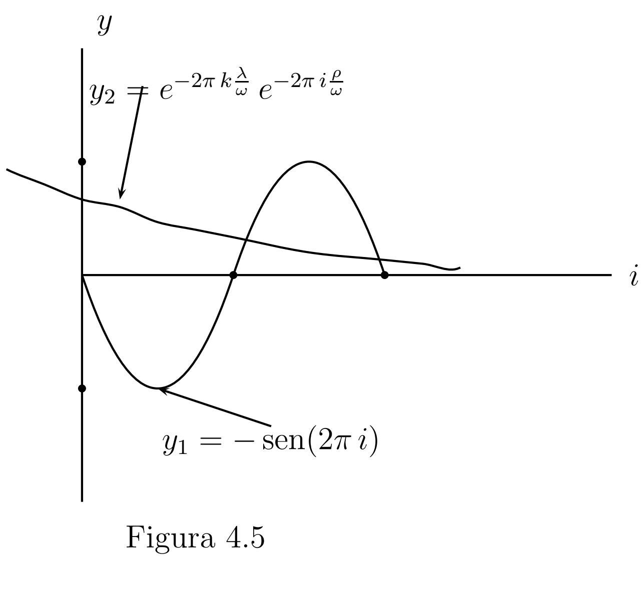


Figura 4.5

Como vemos en la figura 4.5, existen $i_1 = \theta_1$ y $i_2 = \theta_2$ tal que $\overline{z} \in [\varepsilon e^{-2\pi\,(k+1)\frac{\lambda}{\omega}}, \varepsilon e^{-2\pi\,k\frac{\lambda}{\omega}}]$ en Π_0

.

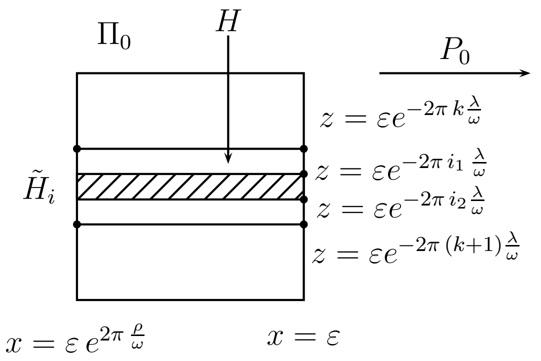
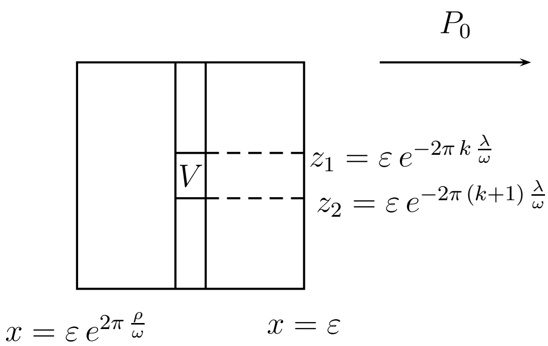


Figura 4.6

donde $0 < i_1 < i_2 < 1$
Tenemos que

$$\tilde{H}_i = \{(x,z) \in [\varepsilon\, e^{2\pi\,\frac{\rho}{\omega}}, \varepsilon] \times [\varepsilon e^{-2\pi\,\theta_1\frac{\lambda}{\omega}}, \varepsilon e^{-2\pi\,\theta_2\frac{\lambda}{\omega}}] : P(x,z) \in H\}$$

Es claro que $d(\tilde{H}_i) < d(H)$
De igual manera, dado un rectángulo $V\mu_v-$vertical contenido en $\bigcup_{i\in S} V_i$, se tiene $P(V) = \widetilde{V}_i = \{(x,z) \in \widetilde{V}_i : P^{-1}(x,z) \in V\}$, donde $P(V) \cap V_i = \widetilde{V}_i$, como se muestra en la figura 4.7.



$\square$

Figura 4.7

4.1. Análisis de Bifurcación de Glendinning y Sparrow

En esta sección estudiaremos, en una vecindad de la órbita homoclínica de un punto fijo tipo silla-foco, como cambia la dinámica de la estructura de las órbitas del campo de vectores cuando la órbita homoclínica es desdoblada. Esto se hará a través de un parámetro real μ. Un estudio general sobre esto se encuentra en [7]
Podremos ver que ocurre con la dinámica de (4.1), según los valores que toma el parámetro μ. Notaremos la relevancia de μ. Supondremos que la órbita homoclínica en (4.1) depende de $\mu \in \mathbb{R}$ y para esto haremos también depender la aplicación de Poincaré de dicho parámetro. Denotando por P_μ esta aplicación, está dada por

$$
\begin{array}{rcl}
P_\mu = P_1 \circ P_0 : \Pi_0 & \to & \Pi_0 \\
\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}\left[a\cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)+b\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)\right]+e\mu+\overline{x} \\ x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}}\left[c\cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)+d\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)\right)\right]+f\mu \end{pmatrix}
\end{array} \tag{4.9}
$$

Como hemos visto anteriormente la aplicación P_μ posee infinitas herraduras contables en $\mu = 0$ y sabemos que sobre cada herradura P_μ contiene infinitas órbitas periódicas de todos los períodos.

Estudiaremos los puntos fijos de la aplicación (4.9). Recordemos que los puntos fijos corresponden a órbitas periódicas del campo de vectores, las cuales pasan a través de una vecindad del origen una vez antes de cerrarse.
Primero, escribiremos esta aplicación en una forma más simple de trabajar. La aplicación puede ser escrita de la siguiente forma

$$
\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} p\cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)+\phi_1\right)+e\mu+\overline{x} \\ x\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^{\frac{\rho}{\lambda}} q\cos\left(\frac{\omega}{\lambda}\ln\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)+\phi_2\right)+\mu \end{pmatrix} \tag{4.10}
$$

Haciendo en (4.10), el siguiente cambio

$$
\begin{aligned}
-\delta &= \frac{\rho}{\lambda} \\
\alpha &= p\,\varepsilon^{-\delta} \\
\beta &= q\,\varepsilon^{-\delta} \\
\xi &= -\frac{\omega}{\lambda} \\
\Phi_1 &= \frac{\omega}{\lambda}\ln(\varepsilon)+\phi_1 \\
\Phi_2 &= \frac{\omega}{\lambda}\ln(z)+\phi_2
\end{aligned}
$$

podemos escribir la aplicación P_μ en la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1) + e\mu + \overline{x} \\ \beta x z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) + \mu \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Ahora estudiaremos los puntos fijos de esta aplicación, su estabilidad y las bifurcaciones asociados a ellos.

$\underline{Puntos fijos:}$

$$P_{\mu}(x, z) = (x, z)$$

implica

$$x = \alpha x z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1) + e\mu + \overline{x} \tag{4.12}$$

$$z = \beta x z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) + \mu \tag{4.13}$$

De (4.12) tenemos que

$$x = \frac{e\mu + \overline{x}}{1 - \alpha\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1)}$$

Reemplazando en (4.13) tenemos que

$$z - \mu = \frac{\beta(e\mu + \overline{x})\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2)}{1 - \alpha\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1)} \tag{4.14}$$

Asumiendo que z es muy pequeño, de la ecuación (4.14) podemos suponer que

$$1 - \alpha\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1) \sim 1 \tag{4.15}$$

Por lo tanto, la ecuación de puntos fijos esta dada por

$$z - \mu = \beta(e\mu + \overline{x})\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) \tag{4.16}$$

Ahora estudiaremos las soluciones de la ecuación de forma geométrica graficando la parte derecha e izquierda de (4.16), para poder ver la existencia de puntos fijos.

Gráficas de Soluciones para $\delta < 1$

$\mu < 0$

$\mu = 0$

$\mu > 0$

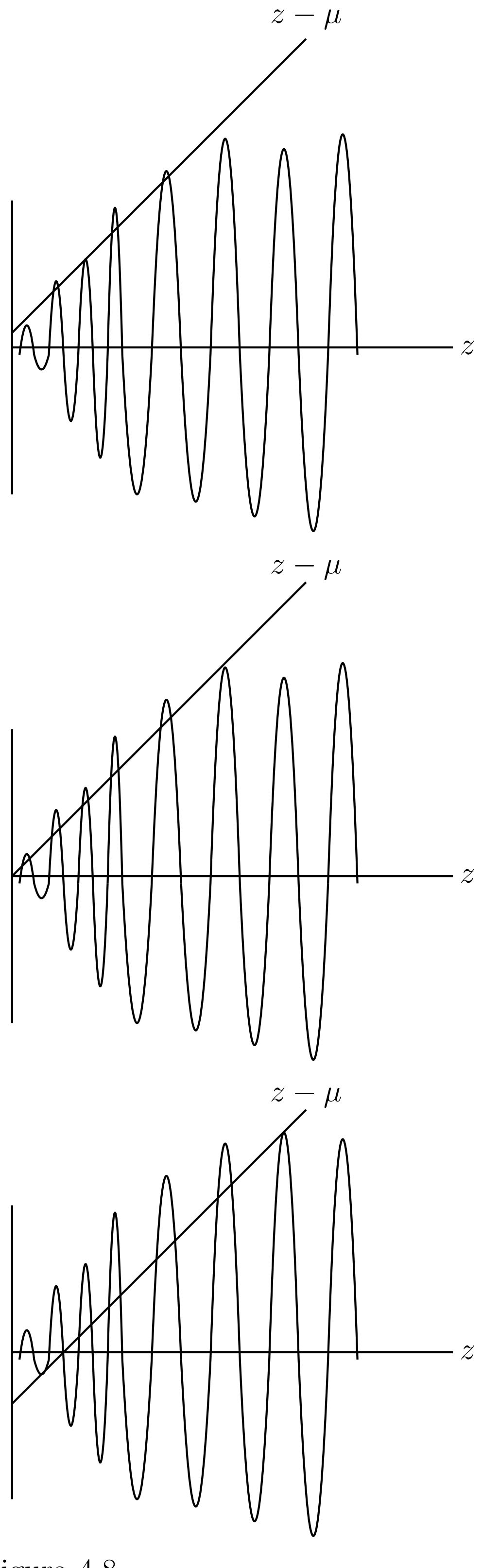


Figura 4.8

A partir de las gráficas, vemos los siguientes casos

Caso 1. $\delta < 1$
$\mu < 0$: P_μ tiene un número finito de puntos fijos.
$\mu = 0$: P_μ tiene un conjunto infinito numerable de puntos fijos.
$\mu > 0$: P_μ tiene un número finito de puntos fijos.

Para $\delta > 1$, no está considerada la Hip. 2 ($\lambda > -\rho > 0$).

Veremos los resultados para $\delta > 1$

<u>Gráficas de soluciones para $\delta > 1$</u>

$\mu < 0$

$\mu = 0$

$\mu > 0$

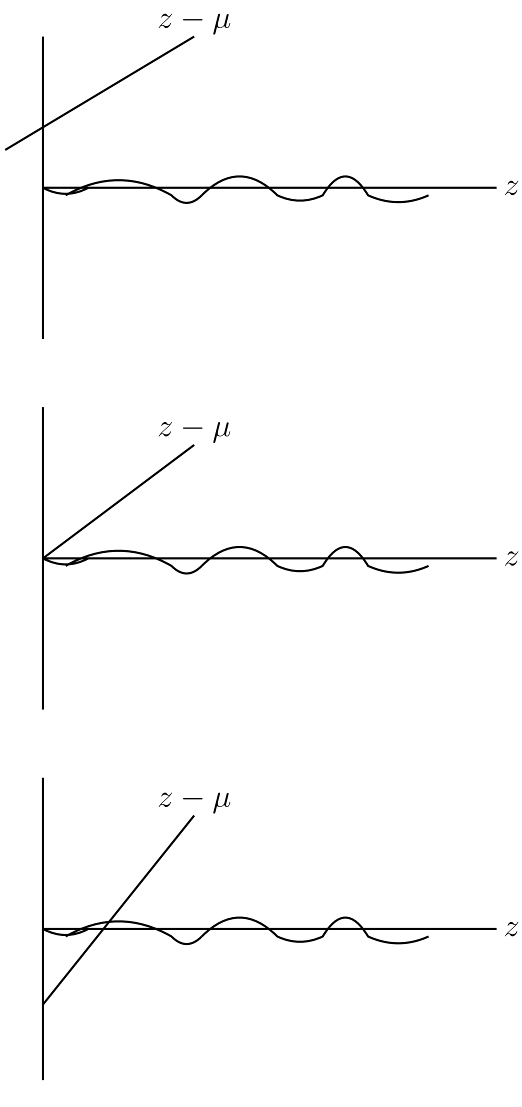


Figura 4.9

Caso 2. $\delta > 1$

$\mu \leq 0$: P_μ no tiene puntos fijos, excepto para $\mu = z = 0$ (Órbita homoclínica)

$\mu > 0$: Para $z > 0$, existe un único punto fijo de P_μ para cada $\mu > 0$.

En resumen, los puntos periódicos que hemos encontrado corresponden a órbitas periódicas de (4.1) dependiendo del parámetro μ, las cuales pasan sólo una vez por una vencidad del origen antes de cerrarse.

Un resumen de los puntos fijos para $\delta > 1$ y $\delta < 1$

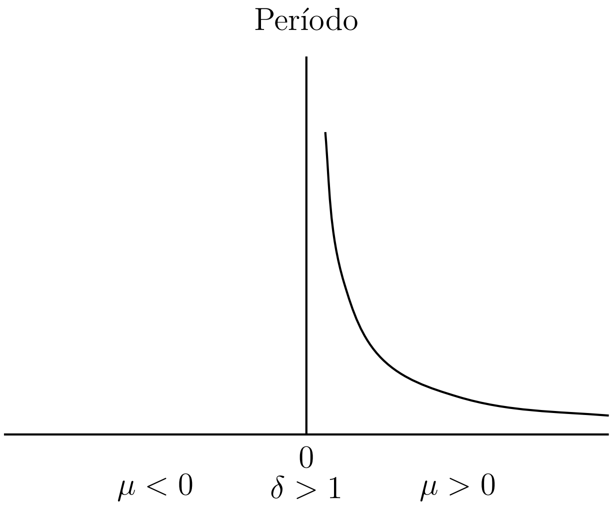


Figura 4.10

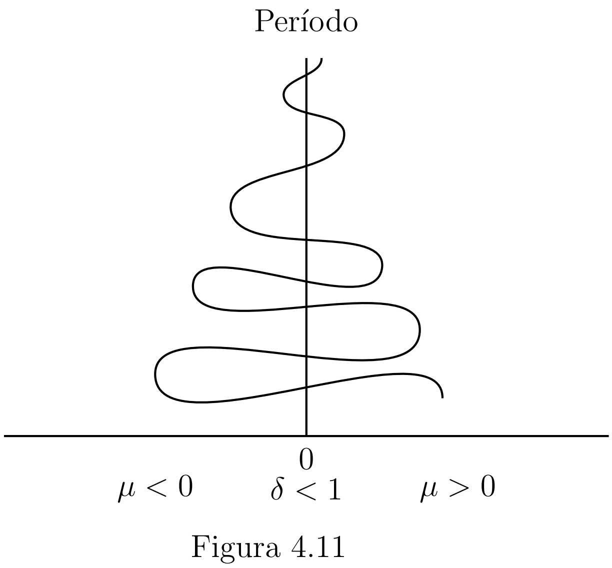


Figura 4.11

Analizaremos el diagrama para $\delta > 1$ y $\delta < 1$ para poder ver la estabilidad de los puntos fijos. Es importante destacar que para $\delta < 1$, la dinámica es más compleja de analizar para los diferentes valores de μ.

Estabilidad de los puntos fijos:

La matriz Jacobiana de la aplicación (4.11) está dada por

$$\begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \alpha z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1) && (4.18)\\
B &= \beta x z^{\delta-1}[\delta \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) - \xi \operatorname{sen}(\xi \ \ln(z) + \Phi_2)] && (4.19)\\
C &= \alpha\, x\, z^{\delta-1}[\delta \cos(\xi \ln(z) + \Phi_1) - \xi \operatorname{sen}(\xi \ \ln(z) + \Phi_1)] && (4.20)\\
D &= \beta\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) && (4.21)
\end{aligned}$$

Los valores propios son:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{(A+B) \pm \sqrt{(A+B)^2 - 4(AB - CD)}\right\}$$

Para $\delta > 1$, considerando z suficientemente pequeño, tanto z^{δ} como $z^{\delta-1}$ son pequeños, entonces los valores propios son pequeños. En consecuencia, para $\delta > 1$ existe una única órbita periódica, para $\mu > 0$, siendo ésta atractora y la órbita homoclínica también es atractora para $\mu = 0$.

Estudiaremos, ahora, el caso $\delta < 1$.
Observemos que el determinante de (4.17), dado por $AB - CD$, contiene sólo términos de orden $z^{2\delta-1}$. Luego, para z suficientemente pequeño, obtendremos:
si $0 < \delta < \frac{1}{2}$, los puntos fijos son repulsores,
si $\frac{1}{2} < \delta < 1$, los puntos fijos son atractores.

Deberíamos esperar diferentes resultados para estos dos valores de δ.
La curva cuya intersección con el plano $z\mu$ nos muestra los puntos fijos está dada por

$$g_{\mu}(z) = (e\mu + \overline{x})\, \beta z^{\delta} \cos(\xi \ \ln(z) + \Phi_2) \tag{4.22}$$

De (4.22), los puntos fijos que corresponden al máximo de esta curva satisfacen la condición $B = 0$ y también los puntos fijos correspondientes a los ceros de esta curva,

satisfacen la condición $D = 0$.
Veremos la estabilidad de aquellos puntos satisfaciendo estas dos condiciones y que ocurre entre estos puntos fijos de la curva.

Si $D = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2}\left\{(A+B) \pm \sqrt{(A+B)^2 - 4AB}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(A+B) \pm \sqrt{(A-B)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{(A+B) \pm |A-B|\right\} \\
& \lambda_1 = A\,, \qquad \lambda_2 = B
\end{aligned}$$

Para z suficientemente pequeño, λ_1 es pequeño, mientras que λ_2 es grande. Por lo tanto, el punto fijo es una silla.

Notemos que para $\mu = 0$, todas las órbitas periódicas son sillas.

Si $B = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
g_\mu(z) &= (e\mu + \overline{x})\,\beta\, z^\delta \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) \\
\Rightarrow g_\mu^{'}(z) &= (e\mu + \overline{x})\,\beta[\delta z^{\delta-1} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) - z^{\delta-1}\xi \operatorname{sen}(\xi \ln(z) + \Phi_2)] \\
&= \frac{e\mu + \overline{x}}{x}\underbrace{\beta x z^{\delta-1}[\delta \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) - \xi \operatorname{sen}(\xi \ln(z) + \Phi_2)]}_{B}
\end{aligned}$$

Luego

$$g_\mu^{'}(z) = 0 \Leftrightarrow B = 0$$

tenemos

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{A \pm \sqrt{A^2 + 4CD}\right\}$$

$$\begin{aligned}
& A^2 \sim z^{2\delta} \qquad y \qquad A \sim z^\delta \\
& CD \sim z^{2\delta-1} \qquad y \qquad \sqrt{CD} \sim z^{\delta-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

CD es grande o pequeño dependiendo claramente de δ, es decir, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2} < \delta < 1$.

Si $0 < \delta < \frac{1}{2}$, los puntos fijos son inestables
Si $\frac{1}{2} < \delta < 1$, los puntos fijos son atractores.

Ahora queremos juntar todos los valores de z para B, $D \neq 0$.
Analizaremos, observando en la figura 4.12, los puntos fijos para los diferentes valores μ

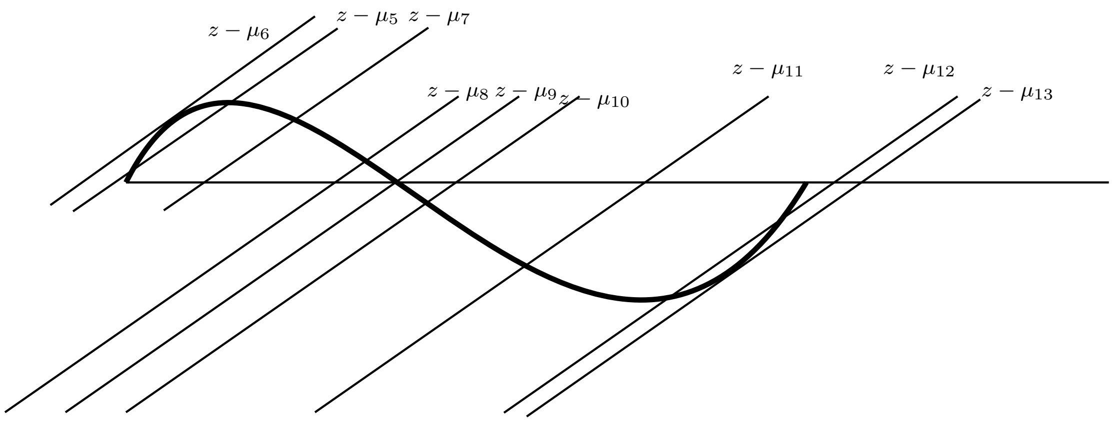


Figura 4.12

Para $\mu = \mu_5$, tenemos dos puntos fijos.
Uno está en el punto máximo de la curva ($B = 0$) es estable para $\delta > \frac{1}{2}$ y silla para $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Para $\mu = \mu_6$ hay un bifurcación silla-nodo (creada a partir de la tangencia entre la recta y la curva)
Para $\mu = \mu_9$, tenemos un punto fijo ($D = 0$) que es de tipo silla.

Como vemos, entre los puntos fijos de μ_5 y μ_9 (ó μ_8) hay un cambio de estabilidad pasando por una bifurcación de duplicación de período. Esto se produce porque para μ_5 el punto fijo es estable mientras que para μ_9 el punto fijo es silla.
Para $\mu = \mu_{12}$ tenemos dos puntos fijos.
El mínimo de la curva ($B = 0$) es estable para $\frac{1}{2} < \delta < 1$ y silla para $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

Vemos que para los puntos fijos entre μ_9 y μ_{12} se produce un cambio de estabilidad pasando por una bifurcación de duplicación de período.

Como observamos en la figura 4.12, por pequeñas perturbaciones los parámetros μ_8, μ_9 y μ_{10} la estabilidad se mantiene.

Ahora veremos el tamaño del "movimiento"de la curva en la figura 4.13, pues si el movimiento es pequeño, significa que el lazo de las órbitas periódicas son sólo visibles para un rango pequeño de parámetros.
Si el lazo es grande, la posibilidad de poder detectar las órbitas periódicas es también grande.

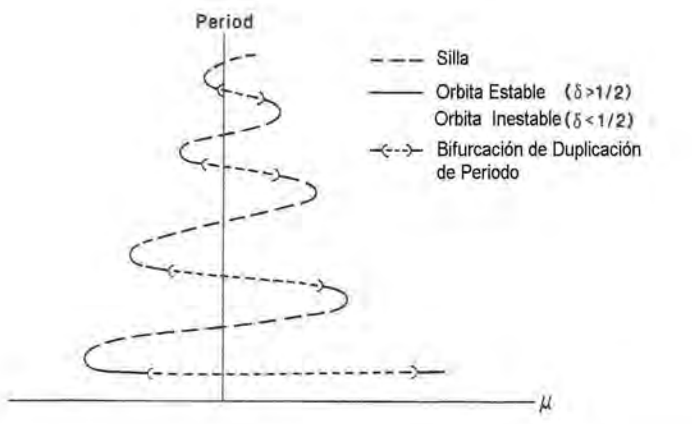


Figura 4.13

Denotemos por μ_i los parámetros los cuales la tangente a la curva es vertical. Se tiene

$$\mu_i,\ \mu_{i+1},\ \mu_{i+2}, \cdots, \mu_{i+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donde μ_i alterna el signo.

La ecuación de puntos fijos esta dada por

$$z - \mu = (e\mu - \overline{x})\,\beta\, z^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2)$$

Tenemos

$$z_i - \mu_i = (e\mu_i + \overline{x})\,\beta\, z_i^{\delta} \cos(\xi \ln(z_i) + \Phi_2) \tag{4.23}$$

$$z_{i+1} - \mu_{i+1} = (e\mu_{i+1} + \overline{x})\,\beta\, z_{i+1}^{\delta} \cos(\xi \ln(z_{i+1}) + \Phi_2) \tag{4.24}$$

Despejando μ_i y μ_{i+1} de (4.23) y (4.24) respectivamente, se tiene

$$\mu_i = \frac{z_i - \overline{x}\beta\, z_i^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z_i) + \Phi_2)}{1 + e\,\beta z_i^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z_i) + \Phi_2)}$$

$$\mu_{i+1} = \frac{z_{i+1} - \overline{x}\beta\, z_{i+1}^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z_{i+1}) + \Phi_2)}{1 + e\,\beta z_{i+1}^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z_{i+1}) + \Phi_2)}$$

Para z suficientemente pequeño, tenemos que

$$1 + e\,\beta z_{i(i+1)}^{\delta} \cos(\xi \ln(z_{i(i+1)}) + \Phi_2) \sim 1$$

Así

$$\begin{aligned}\mu_i &= z_i - \overline{x}\beta\, z_i^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z_i) + \Phi_2)\\ \mu_{i+1} &= z_{i+1} - \overline{x}\beta\, z_{i+1}^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z_{i+1}) + \Phi_2)\end{aligned}$$

Notemos que

$$\xi \ln(z_{i+1}) - \xi \ln(z_i) \approx \pi \Rightarrow \frac{z_{i+1}}{z_i} \approx e^{\frac{\pi}{\xi}}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} &= \frac{z_{i+1} - \overline{x}\,\beta\, z_{i+1}^{\delta} \cos(\xi\ \ln(z_{i+1}) + \Phi_2)}{z_i - \overline{x}\,\beta\, z_i^{\delta} \cos(\xi\ \ln(z_i) + \Phi_2)}\\ &= \frac{z_{i+1} + [\overline{x}\,\beta\, \cos(\xi\ \ln(z_i) + \Phi_2)] z_{i+1}^{\delta}}{z_i - [\overline{x}\,\beta\, \cos(\xi\ \ln(z_i) + \Phi_2)] z_i^{\delta}}\end{aligned}$$

En la última igualdad se usó $\xi \ln(z_{i+1}) \approx \pi + \xi \ln(z_i)$. Luego

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} = -\left(\frac{z_{i+1}}{z_i}\right)^{\delta} \approx -(e^{\frac{\pi}{\xi}})^{\delta} = -e^{\frac{\delta\,\pi}{\xi}}$$

Recordemos que $\delta = -\frac{\rho}{\lambda}$, $\xi = -\frac{\omega}{\lambda}$ $\quad \Rightarrow \frac{\delta}{\xi} = \frac{\rho}{\omega}$, resultando

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} = -e^{\frac{\rho\,\pi}{\omega}}$$

Demostraremos ahora que cuando destruimos la órbita homoclínica inicial, otras órbitas homoclínicas aparecen presentando diferentes características.
Queremos desconectar la órbita homoclícina inicial. Recordemos que la variedad inestable de $P = P_\mu$ intercepta a Π_0 en el punto $(e\mu - \overline{x}, \mu)$ con $\mu > 0$ y éste punto puede ser usado como condición inicial para nuestra aplicación. Cuando la imagen de este punto en la aplicación P_μ es cero, encontramos otra nueva órbita homoclínica, el cual pasa una vez por una vecindad del origen antes de encontrar dicho punto.

Tenemos la ecuación de puntos fijos dada por

$$z - \mu = \beta(e\,\mu + \overline{x})\, z^{\delta}\, \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2)$$

Luego

$$0 = \beta(e\mu + \overline{x})\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) + \mu$$

$$-\mu = \beta(e\mu + \overline{x})\, z^{\delta} \cos(\xi \ln(z) + \Phi_2) \tag{4.25}$$

Para $\delta > 1$, vemos que hay sólo una órbita homoclínica en el origen.

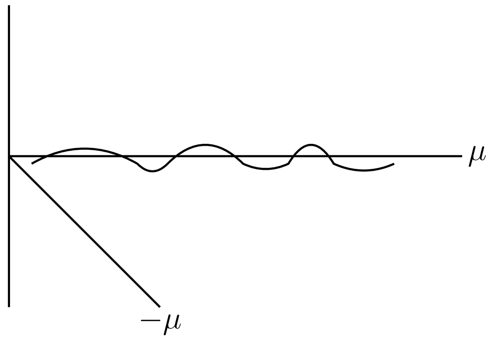


Figura 4.14

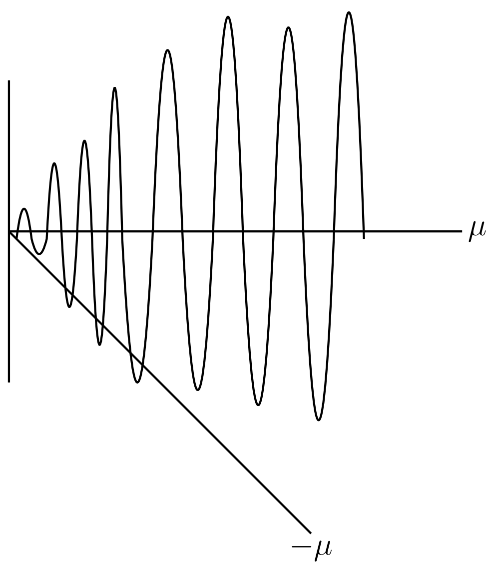


Figura 4.15

Para $\delta < 1$, tenemos para μ un conjunto de valores infinito y numerable

$$\mu_i,\ \mu_{i+1}, \cdots, \mu_{i+n} \cdots \to \infty$$

donde existe la órbita homoclínica de doble pulso, es decir, la órbita homoclínica pasa por una vecindad del origen dos veces antes de encontrar dicho punto, como se muestra en la figura 4.16.

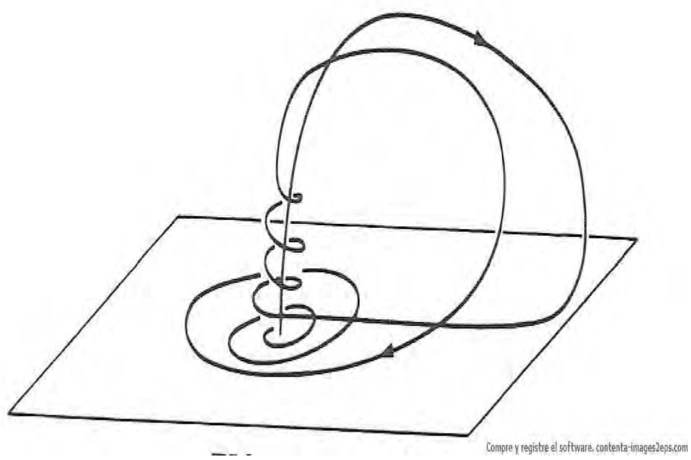


Figura 4.16

Por cada órbita homoclínica que aparece, podemos resconstruir nuestro problema original de Silnikov el cual tiene infinitas herraduras numerables.

Conclusión

De este trabajo podemos concluir varias cosas:
El conjunto de sucesiones bi-infinitas Σ es no numerable, conjunto cerrado, perfecto y totalmente disconexo. Estas propiedades se heredan a Λ vía el homeomorfismo ϕ. Este conjunto con dichas propiedades se llama Conjunto de Cantor.
Λ es caótico de f donde exhibe las tres propiedades de Caos.

Bajo el estudio de la estructura de la dinámica del campo de vectores tri-dimensional asociado a una singularidad del tipo silla-foco, en una vecindad de la órbita homoclínica, la aplicación P (la aplicación de retorno) posee infinitas herraduras contable donde cada herradura la aplicación contiene infinitas órbitas periódicas de todos los períodos.
Al romper la órbita homoclínica podemos apreciar la dinámica del campo de vectores según el parámetro $\mu \in \mathbb{R}$ concluyendo así la estabilidad de las órbitas periódicas.
Para cada $\mu > 0$ con $\delta > 1$ las órbitas periódicas son atractoras. Mientras que para $\delta < 1$, los distintos valores de μ presentan órbitas periódicas donde cada una de ellas muestran distintos tipos de estabilidad y bifurcaciones asociadas a ellas.
Al destruir la órbita homoclínica original, se presentan otras órbitas homoclínicas mostrando diferentes características. Cada una de ellas, se puede reconstruir a nuestro problema original de Silnikov, donde presentan infinitas Herraduras numerables.

Bibliografía

[1] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, New York Inc, Springer-Verlag, 1990.

[2] Palis, J. and Takens, F., *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Great Britain (1993). ISBN 0 512 39064 8. Cambridge University Press.

[3] Moser, J. [1973]. *Stable and Random Motion in Dynamical Sytems.* Princeton University Press: Princeton.

[4] Hirsch, M.W. and Smale, S.[1974]. *Diferential Equations, Dynamical Systems, and Lenear Algebra.* Academic Press: New York.

[5] Silnikov, L.P. [1965]. A Case of the Existence of a Denumerable Set of Periodic Motions. *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163-166

[6] Yorke, J.A. and Alligood, K. T. Cascades of period doubling bifurcations: a prerequisite for horseshoes, Bull. A.M.S **9** (1983), 319-322.

[7] Glendinning, P. and Sparrow, C. [1984]. Local and global behavior near homoclinic orbits. J. Statist. Phys. **35**, 645-696.