UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DIDÁCTICA FACILITADORA DEL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA BASADA EN METÁFORAS

Memoria presentada para optar al Título de Profesor de Educación Media en Matemáticas mención Didáctica.

Alumnas:

Lorena Cristina Briones Durán

Katherine Nicole Labbé Yáñez

Profesor guía:

Jairo Navarrete

Valparaíso 2011

INDICE

6CONCLUSIONES

7BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

INDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

Tomando en cuenta los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) de 4ºmedio, se observa que la función logarítmica y exponencial presentan un desafío didáctico a los profesores del área. Si consideramos que este contenido corresponde a unos de los cuatro ejes temáticos evaluados en la PSU, éste se transforma en un elemento de vital importancia en los planes y currículum. Roberto Araya en su articulo "¿Que significa comprender una idea matemática?", destaca que el problema en el aprendizaje de la matemática, es la debilidad de los alumnos para entender conceptos matemáticos ya que la enseñanza matemática promueve la práctica de una aplicación rígida de algoritmos, es por esto que dada la compleja naturaleza de estas funciones es que generalmente los procesos de enseñanzas aplicados no producen aprendizaje, ya que en la enseñanza tradicional se muestran estas funciones sin ningún antecedente analítico y es por esto que los alumnos no logran relacionar el contenido con la vida cotidiana.

En las últimas versiones de la PSU, los logaritmos sólo han ocupado 2 preguntas del total de las preguntas de la prueba de matemáticas. Incluso se ha omitido el tema en algunas versiones[1]. El departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional de la Universidad de Chile (DEMRE) realiza un análisis de cada pregunta en la PSU de cada año. En su sitio web se menciona que la única pregunta de logaritmo en la PSU del año 2010 fue contestada correctamente sólo por el 25% de los estudiantes que la abordaron mientras que el nivel de omisión alcanzó el 54%. Debido a la mínima cantidad de preguntas que se realizan en la PSU sobre este contenido, es que se ha extendido el hábito de no profundizar la unidad en 4º medios ni en preuniversitarios.

En contraposición a lo anterior, las funciones exponencial y logarítmica tienen una amplia aplicación en carreras técnicas y científicas. Diversos fenómenos

[1]Fuente: www.demre.cl

y parámetros son modelados gracias a ellas. El pH para evaluar el nivel de acidez de una solución, el decibel como un parámetro de comparación de niveles de presión sonora o ganancia, las tasas de decaimiento térmico o microbiológico son algunos ejemplos de aplicación de estas funciones.

"La metáfora constituye uno de los mecanismos conceptuales fundamentales por medio del cual representamos el mundo y lo expresamos en relativa concordancia con la manera como lo experimentamos" (George Lakoff y Mark Johnson, 1980, p.39)[2]. Esto sugiere que la metáfora se presenta como un mecanismo fundamental para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues relacionan conceptos más complejos con elementos de la vida cotidiana. Las metáforas nos permiten hablar de un concepto abstracto (en nuestro caso, los logaritmos), utilizando conceptos más concretos. El primer acercamiento de las personas a las matemáticas se basa en la utilización de elementos cotidianos, por ejemplo, la adición de números está relacionada con añadir elementos de cierta agrupación de objetos (porotos, por ejemplo). En estos casos, intuitivamente, se utilizan metáforas. Por ejemplo, $2 + 3$ es tomar 2 dulces y agregarle 3; sumar entonces es agregar. Eso lo vuelve más intuitivo (Araya, 2000).

Considerando lo expuesto este trabajo se centra en el diseño, aplicación, análisis y evaluación de una propuesta de enseñanza que toma en cuenta aspectos importantes para el aprendizaje de la función exponencial y logarítmica.

Se presenta una secuencia de situaciones usando el juego creado, se analiza la experiencia a nivel de aula para luego evaluar a los alumnos mediante una prueba de selección múltiple.

---

[2] Véase en "¿Sedentarismo o Nomadismo?: la Metáfora en el ámbito de la concepción de la vida en el habla cotidiana", Héctor Ramírez Cruz, 2007.

1.1 PROBLEMATICA

Los logaritmos son un contenido de gran relevancia y de amplia aplicación en estudiantes y profesionales de ciencias e ingeniería. Dicho contenido se encuentra inserto en los planes y programas de 4º año medio del Ministerio de Educación. Es una materia que genera bajos índices de aprendizaje y altos niveles de fracaso académico debido a su difícil abstracción a la vida cotidiana.

Una de las ventajas que presentan las metáforas, es que resultan fáciles de recordar. Por ejemplo para recordar información verbal es más fácil si el material está ordenado, es interesante, provoca emociones no demasiado intensas y tiene anclajes sensoriales (Otto 2000), esto cumple con lo que una metáfora puede proporcionar. En publicidad son muy vistas las metáforas por la facilidad para ser recordadas, prueba de esto es la cantidad de anuncios que las utilizan. Lo mismo pasa con las metáforas matemáticas, son atractivas para el estudiante y más fáciles de recordar que una explicación tradicional del contenido. Es por esto que se han desarrollado exitosas experiencias de aplicación de metáforas como una herramienta didáctica en el aprendizaje de matemáticas. El Proyecto FONDEF "Estrategias y Herramientas para la Enseñanza de las Matemáticas basada en Metáforas, revela que una investigación realizada recientemente con 240 estudiantes de 10 colegios de diversas regiones y niveles socio-económicos del país, logró confirmar que estudiantes con notas inferiores a 5,1 en matemáticas, a través de la utilización de metáforas lograron obtener mejores calificaciones alcanzando incluso a los alumnos más destacados de cada curso, lo que muestra un enorme impacto de las metáforas en las matemáticas.

Roberto Araya en su proyecto "metáforas" destaca por ejemplo que no es óptimo utilizar la metáfora de quitar objetos para que un niño entienda los números enteros, en éste caso es más fácil que el alumno lo relacione con posiciones. Por ejemplo ubicar al niño en el segundo piso de un departamento y que luego baje 3 pisos, después de este procedimiento el alumno observará que puede quedar sin problema en el lugar -1, lo que no pasa cuando se explica con objetos, el niño no logra ver la posibilidad, que si tiene dos porotos pueda quitarle tres.

Lo anterior sugiere que es posible crear estrategias de enseñanza basadas en metáforas apropiadas para distintos contenidos de matemática. En este caso que faciliten la comprensión del concepto “logaritmo” de mejor manera que estrategias de enseñanza más tradicionales. Nuestro trabajo pretende sustentar esta afirmación. De manera más precisa, la presente memoria aborda la hipótesis siguiente:

1.2 HIPOTESIS

"La aplicación de metáforas en la enseñanza de los logaritmos facilita su aprendizaje en alumnos de 4º año medio con respecto a una enseñanza mas tradicional".

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Diseñar, aplicar y evaluar una propuesta didáctica basada en metáforas matemáticas que sirva como facilitador del aprendizaje para la función exponencial y la función logaritmo.

1.3.2 OBJETICOS ESPECIFICOS

- Diagnosticar las competencias de entrada de 2 cursos de cuarto medio, para ello se ha escogido el Colegio Apumanque de La Calera.
- Desarrollar un método de enseñanza de las funciones logaritmo y exponencial, basado en metáforas, para ello se diseñará y posteriormente se aplicará en la sala de clases. Aplicar el método de enseñanza a uno de los cursos seleccionados mientras que al segundo curso se aplicarán clases de logaritmos de manera tradicional.
- Evaluar la propuesta en los dos cursos mediante la aplicación de un instrumento de evaluación para el desarrollo de problemas de logaritmos.

2. MARCO TEÓRICO

Howard Gardner citado por Araya (2005) señala que *“la enseñanza de las matemáticas se basa en la práctica de una aplicación rígida de algoritmos, los estudiantes fijan la atención en consideraciones sintácticas y no en un verdadero entendimiento”.* El psicólogo educacional Kurt Vanlehn, también citado por Araya (2005), afirma que *“en la substracción de números naturales hay más de 120 errores sistemáticos, que en su mayoría derivan de las reglas mecánicas que por falta de comprensión profunda el estudiante inicialmente las imita mal y luego las repite y memoriza con errores”.* A través de estos dos pequeños fragmentos se puede apreciar que la matemática aprendida por los niños y jóvenes sólo es, en general, de forma superficial.(Boix-Mansilla & Gardner, 1994, pág. 25). Araya (2005) indica que en Francia, la revista *Sciece & Vie* realizó una encuesta a una población de adultos de 35 a 46 años, en la que muestra que “*un 66% de la población no puede resolver ecuaciones simples como* $8x + 4 = 0$ *y un porcentaje similar no comprende que diez elevado a 6 es un millón”.*

El lenguaje matemático escrito se vuelve difícil de comprender por la abstracción las generan las nuevas marcas sobre marcas. En este sentido la orientación pedagógica en el área de Matemática debiera estar enfocada a buscar estrategias de enseñanza para lograr reinterpretar las secuencias de procedimientos y acciones de tal manera que se presenten de forma natural a la mente, es decir, buscar caminos accesibles desde los cuales sea fácil ver las conexiones originales con lo concreto.

Lakoff y Núñez (2000) afirman que las estructuras matemáticas construidas por las personas (e instituciones) tienen que ver con los procesos cognoscitivos cotidianos como el pensamiento metafórico y los esquemas de las imágenes, que a su vez están relacionados con cómo se percibe el mundo y cómo aprendemos de él, es decir, cómo se relaciona el “cuerpo-mente” con los objetos. Estos elementos, como el pensamiento metafórico y los esquemas, son útiles en el ámbito pedagógico tanto para el profesor como para el alumno pues sirven para entender y explicar conceptos matemáticos.

Consideremos las siguientes frases:

"Las pinzas son como los dedos"

"La escuela es como tu hogar"

Al leer estas frases personas que conozca las pinzas o que ha ido a una escuela, puede fácilmente entender las ideas que aquí se quieren expresar, pues son elementos cotidianos, o por lo menos conocidos, y el "cuerpo-mente" se relaciona con ellos con frecuencia, creando un puente para entender un objeto o idea a partir de otro, por ejemplo: los dedos índice y pulgar tienen la función de tomar cosas a disposición de cada uno, por lo tanto se asemeja a la idea de pinza cuya función (dependiendo el tipo de pinza) es, en general, el tomar o sostener elementos que se estén utilizando. En la segunda frase, la idea de escuela que tiende a ser un lugar donde los niños y jóvenes están seguros, crecen como personas, aprenden valores para su vida, elementos esenciales dentro de un hogar, pues la idea de ser familia tiene ese peso valórico y social.

La metáfora se define como "Tropo que consiste en expresar, en leguaje figurado, una idea de analogía o semejanza, como cuando se dice *el ocaso de la vida;* para expresar la idea de vejez."[3]. Si se lee con cuidado esta definición, se logra apreciar que no dista mucho de lo que la educación matemática persigue, el fin o propósito lingüístico de la metáfora; como bien dice su definición, es expresar al menos una característica importante de un elemento o idea a través de otro.

[3] Definición de la Real Academia de la Lengua Española.

Una de las características esenciales de la metáfora es de la construir puentes conceptuales entre estos dominios (el de partida y el de llegada). Otra característica de la metáfora consiste en que se muestran sólo algunos aspectos del dominio de partida, en especial aquel o aquellos que se requieren evidenciar, la metáfora también propicia conectar diferentes sentidos lo que amplía el significado personal del objeto matemático que se quiere aprender (la idea surge, pues hay más de una forma de recordar, tal vez manipulando algo, escuchando una frase, etc.).

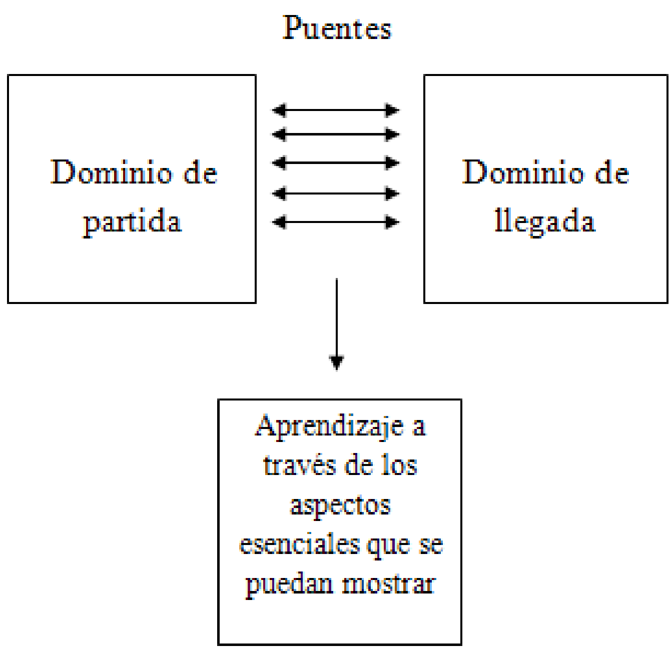


Figura 1: Representación esquemática de las relaciones entre las estructuras del dominio de metáforas.

Lakoff y Núñez (2000) distinguen 2 tipos de metáforas conceptuales para la matemática: las grounding metáforas y las de tipo linking.

- *Grounding metáforas: son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo "los puntos son objetos"*
- *Linking metáforas: tienen su dominio de partida y de llegada dentro de la misma matemática. Por ejemplo "la intersección de dos rectas es la solución a un sistema de ecuaciones"*

(Vincent Font y Jorge Acevedo, 2004, p.2)

Existen variados ejemplos de las *grounding metáforas*, en aritmética se puede ver que es común, que incluso nosotros mismos asociemos elementos fuera de la matemática para poder comprender mejor los conceptos, es frecuente que nosotros mismos nos viéramos tratando de enseñar a nuestros hermanos pequeños, hijos u otra persona, diciéndole cosas como "si tu caminas hacia adelante representa un número positivo pero si caminas hacia atrás este representa un número negativo, o si un avión vuela 2343 metros sobre el nivel del mar, significa que ese número es positivo, y el nivel del mar representa el 0". En cuanto a las *linking metáforas* podemos visualizar o haber escuchado frases como "si sabes lógica entonces se te hará fácil aprender teoría de conjuntos" pues hay elementos similares como "$A \cup A = A$" y "$p \vee p = p$", por mencionar algunos.

Por experiencia, el quehacer matemático en aula a veces se vuelve complicado en cuanto no se tienen las herramientas necesarias para enseñar alguna unidad temática, en este sentido existen diversos instrumentos con los cuales un profesor de matemática puede contar, para hacer las clases de mejor manera y lograr que el alumno se interese por su aprendizaje, en este camino el docente tiene que considerar las diferentes maneras en que un alumno puede aprender. El psicólogo Howard Gardner en su *teoría de inteligencias múltiples*, explica que las personas tienen al menos 8 tipos de inteligencias: inteligencia lógico-matemática, inteligencia verbal-lingüística, inteligencia visual-espacial, inteligencia musical, inteligencia corporal-kinestésica, inteligencia intrapersonal, inteligencia interpersonal, inteligencia naturalista. Así la inteligencia no es algo unitario, si no como un conjunto de inteligencias múltiples e independientes (Reyes, 2006), pero que se interrelacionan para comprender un fenómeno, idea, concepto u objeto. Por otra parte, también se debe tener en cuenta los estilos de aprendizaje de los alumnos y en lo posible no privilegiar uno específico, si no, tener en cuenta la variedad. Obviamente proponer una herramienta de instrucción para cada estilo de aprendizaje o tipo de inteligencia es utópico y poco viable.

En este sentido se definirá una de las tantas herramientas de aprendizaje que existen: **el juego**, y la relevancia que tiene para la enseñanza de las matemáticas.

Juego es un "ejercicio recreativo sometido a reglas y en el cual se gana o se pierde"[4].Esta definición está en su más pequeña esencia, pero se pueden encontrar variaciones según culturas, países o autores, entre otros; por ejemplo *"el juego es una actividad propia del ser humano y se presenta en todos los niños y niñas aunque su contenido varíe…El juego no es solamente algo que acontece en la infancia, si no que va mucho más allá, y sucede durante toda la vida."* (Benítez Murillo, 2009). Martin Gadner citado por José Gairín (1990) dice que "los juegos matemáticos o las matemáticas recreativas, son matemáticas cargadas de una fuerte componente lúdica". Bright, Harvey y Wheeler (1985) también citados por Gairín (1990), estudian la definición de Inbar y Stoll (1970) y complementaron su definición quedando las principales características del juego de esta manera:

a) *A un juego se dedica libremente.*
b) *Un juego es un desafío contra una tarea u oponente.*
c) *Un juego se controla por un conjunto definido de reglas. Estas reglas abarcan todas las maneras de jugar al juego.*

[4]Definición de juego según la Real Academia de la Lengua Española.

d) *Un juego representa una situación arbitraria claramente delimitada en el tiempo y en el espacio desde la actividad de la vida real.*
e) *Socialmente las situaciones de los juegos son consideradas como de mínima importancia.*
f) *El juego tiene una clara delimitación en el espacio y el tiempo. El estado exacto alcanzado durante el juego no es conocido a priori al comienzo del juego.*
g) *Un juego termina después de un número finito de movimientos en el espacio-tiempo.*

(Gairín Sallán, 1990)

José María Gairín en su trabajo "Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas" distingue dos tipos de juegos. El primero denominado "juegos de conocimiento" donde el jugador agota su turno al realizar algoritmos matemáticos, como resolver una ecuación y sumar elementos, entre otros. Aquí se diferencian 3 niveles de aplicación del juego:

a) *PRE-INSTRUCCIONAL:* este tipo de juegos permite al alumno llegar a descubrir un concepto o construir su propia explicación de un algoritmo, así el juego se vuelve es el vehículo esencial del aprendizaje.
b) *CO-INSTRUCCIONAL:* aquí el juego se convierte en una de las muchas formas en que el profesor puede utilizarlo para la enseñanza del bloque temático que pretende presentar a sus alumnos.
c) *POST-INSTRUCCIONAL:* una vez que los alumnos ya han recibido enseñanza acerca de un bloque específico, el juego en este momento sirve como reforzador de su propio aprendizaje, por lo que el juego consolida lo aprendido.

El segundo tipo de juego que diferencia Gairín son los llamados "juegos de estrategia" cuya característica principal radica en que el jugador pone en evidencia sus habilidades, razonamientos o destrezas directamente relacionadas con el modo en que operan las Matemáticas.

Acerca de la búsqueda de soluciones para los juegos, existe una parte de la matemática que se denomina “Teoría de juegos”, parte muy extensa por lo demás, y en la cual no ahondaremos en este trabajo. Ahora desde el punto de vista de la educación matemática la búsqueda de soluciones se considera relevante para uno o más de los siguientes objetivos distinguidos por Gairín:

a) *Utilizar diferentes técnicas heurísticas, que ayudarán a la resolución de problemas.*
b) *Potenciar actitudes como la autoconfianza, autodisciplina o perseverancia en la búsqueda de soluciones.*
c) *Desarrollar habilidades como las de observación y comunicación.*
d) *Apreciar la potencia y belleza de la argumentación matemática.*

(Gairín Sallán, 1990)

Por otra parte Winter y Ziegler (1983) citados por Gairín (1990) han establecido un paralelo acerca de los juegos de reglas y el pensamiento matemático.

Reglas de juego	→	Reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones, operaciones.
Jugadas	→	Construcciones, deducciones.
Figuras de juego	→	Medios, expresiones, términos.
Estrategias de juego	→	Utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos a fórmulas.
Situaciones resultantes	→	Nuevas técnicas, nuevos conocimientos.

Figura 2: Comparación de juegos de reglas y pensamiento matemático (Extraído de Gairín, 1990)

Ahora, referente a la relación del juego y la educación matemática como tal, hay diferentes observaciones, pero centradas en elementos comunes. El jugador aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales experimentando jugadas sencillas, observa las demás jugadas, trata de asimilar procedimientos más elaborados y finalmente trata de participar de mejor manera con la visión de ganar el juego.

El juego como tal, tiene el carácter fundamental de ser un pasatiempo y diversión, de hecho *“se está jugando cuando produce placer al sujeto que realiza* *la actividad y le interesa más la acción que el resultado. Cuando la meta de la acción es el juego mismo y no el aprendizaje."* (Benítez Murillo, 2009)

El objetivo del profesor en la enseñanza media, además de darles una educación formal, es ayudarlo a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, físicas y afectivas, tratando que sea de un modo armonioso, por esta razón se debe estimularlos a su propia acción.

Puede ser que al comienzo de una clase si se muestra un juego la reacción de los estudiantes sea de *"expectación (por lo novedoso) y de satisfacción posterior (por su aspecto recreativo)"* (Gairín Sallán, 1990). Martin Gadner (1975) citado por Gairín señala que *"en niveles superiores, especialmente cuando se aplican a problemas prácticos, las matemáticas pueden y deben ser mortalmente serias. Pero en niveles inferiores no es posible motivar a ningún alumno a aprender la teoría superior de grupos, por ejemplo, diciéndole que la encontrará hermosa, estimulante o incluso útil si algún día llega a ser un físico especializado en partículas".* Esta cita hace evidente que la motivación dentro del aula no puede ser por la mera idea de aprender matemática, si no, de darle sentido o cauce a la misma, aplicándola por ejemplo a juegos u otros aspectos de su vida en que pueda verla claramente.

Gairín (1990) analiza el trabajo de varios autores de lo que resume lo siguiente acerca de la efectividad del juego en la enseñanza de la matemática:

a) Generalmente los estudiantes adquieren por lo menos iguales conocimientos y destrezas que la obtendrían en otras situaciones de aprendizaje.
b) La información es aprendida más deprisa que en otras metodologías, aunque la cantidad aprendida no es significativamente mayor que con otros métodos.

c) *La resolución del problema conlleva el uso de enseñanza de alto nivel taxonómico. La utilización de juegos, junto a otros recursos, proporcionaría de forma satisfactoria una preparación para la resolución de problemas, aunque falta determinar si este alto nivel es recordado con el paso del tiempo.*
d) *Los estudiantes estarán motivados para participar en la actividad, pero su interés por la materia puede que no mejore.*
e) *Los juegos y simulaciones producen en los estudiantes una tendencia creciente a asistir regularmente a la escuela.*
f) *Los juegos fomentan los procesos de socialización.*
g) *Los juegos han de utilizarse relativamente cercanos al momento del aprendizaje, sobre todo si el juego corresponde a un nivel taxonómico alto.*
h) *Los juegos mantienen las habilidades matemáticas durante largo tiempo.*
i) *La utilización de la fantasía, el estímulo o la curiosidad puede incrementar la efectividad de los juegos.*
j) *Algunos resultados al utilizar juegos educativos con alumnos de bajo rendimiento escolar:*
    a. *El uso de juegos matemáticos es una estrategia exitosa para la enseñanza.*
    b. *Los juegos de estrategia producen una sustancial mejora en actitud. Y esto se debe más al tipo de actividad que a las características de los juegos particularmente usados.*
    c. *Los alumnos de pequeña capacidad académica mejoran con frecuencia el rendimiento a causa de un mayor interés.*
    d. *Los estudiantes aprenden habilidades y conceptos tan bien o mejor que alumnos que siguieron las actividades convencionales de lápiz y papel.*
    e. *Los juegos que requieren de varios jugadores, parecen ser más efectivos que aquellos que permiten algunos estudiantes como simples observadores.*

f. *Una combinación de actividades, implicando juegos tanto como trabajos en papel y lápiz, debería ser el más beneficioso.*

k) *Hay que investigar otros campos en los que los juegos educativos pueden ser utilizados con efectividad.*

Por todo lo anteriormente dicho queda claro que el juego es un buen vehículo para propiciar el aprendizaje en los niños, niñas y adolescentes de nuestras escuelas, colegios y liceos, pero por supuesto que no debe ser el único, además potenciado con una buena clase de lápiz y papel, o tal vez con más y mejores aplicaciones, se puede sacar provecho del juego en sí mismo como motivador de su propia acción. Se debe tener en cuenta que el juego, al ser de material tangible y manipulable, potencia la actividad motora, lo que podría fortalecer las asociaciones que se puedan hacer o el modo de aprendizaje del joven en cuestión.

Finalmente, a través del juego, es donde se pone en evidencia la metáfora matemática, creando los puentes entre los dominios de partida y de llegada, con lo que se pretende el alumno pueda entender los elementos básicos mostrados en el juego que se muestra en el desarrollo de este trabajo.

3. MARCO MATEMÁTICO

Definición 1:

Definimos la función logaritmo log: $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$\log x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt$$

Nota: Se debe distinguir que este logaritmo está en base e = 2.718282… que definiremos después.

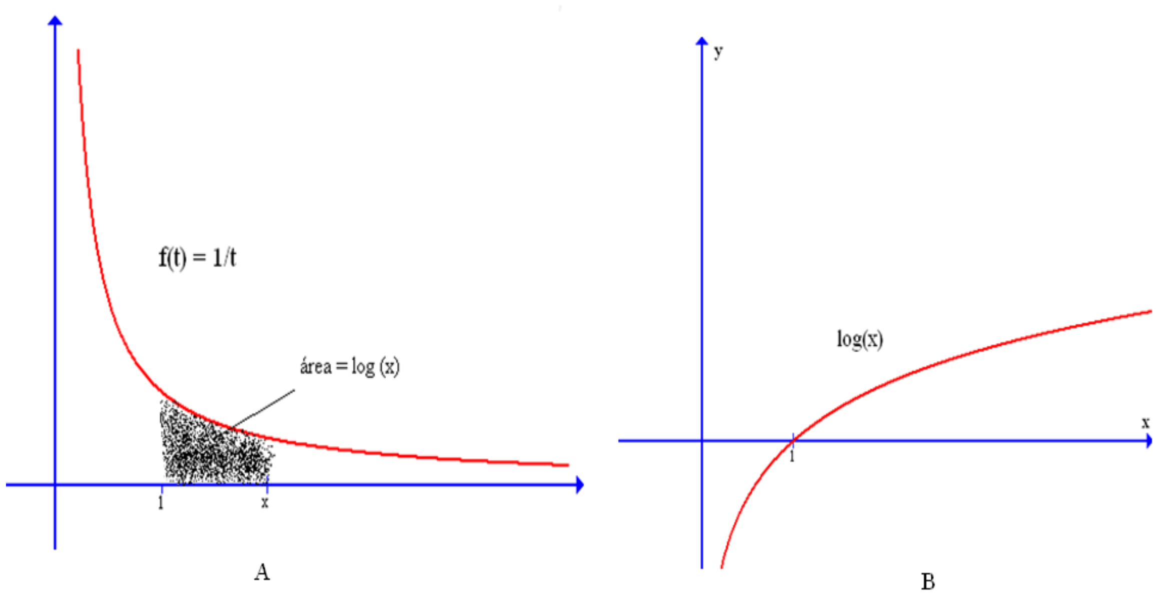


Figura 3: Gráfica de función logaritmo

La definición 1 simplemente nos dice que la función logaritmo asigna a cada x, el área bajo la curva (1/t) entre los puntos 1 y x. Esto se puede ver en la Figura 3 (A). De esta observación es claro ver que Si $x > 1$, entonces $\log x > 0$, y si $0 > x > 1$, entonces $\log x < 0$, pues según convenios dentro de la matemática se tiene que:

Para $x \leq 0$, no puede definirse esta definición de $\log(x)$ no sirve, pues $f(t) = \frac{1}{t}$ no está acotada en $(x, 1)$.

Recordemos que si

i) $f'(x) > 0$, Para todo número x de un intervalo, entonces la función es estrictamente creciente en dicho intervalo.

ii) $f'(x) < 0$, Para todo número x de un intervalo, entonces la función es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

Es bien sabido que $\log'(x) = \frac{1}{x}$, y notemos que 1/x es estrictamente creciente en el intervalo $(0, \infty)$, pues $\frac{1}{x} > 0 \forall x \in (0, \infty)$. La derivada se hace cada vez más pequeña cuando "x" crece mucho, por lo que "log" crece cada vez más despacio. Además, se sabe que si la derivada de una función es continua en un intervalo, entonces la función sin derivar también es continua en el mismo intervalo. Debido a que la función log es continua, y estrictamente creciente la función log es inyectiva. Por otro lado, para todo número real y_0, existe un único número real x_0 tal que $Log_a x_0 = y_0$. Esta propiedad indica que la función logarítmica es sobreyectiva. Luego, la función log es biyectiva y por tanto existe su inversa.

Definición 2:

Definimos la "función exponencial", exp: $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, como la función inversa de la función logaritmo. Es decir, aquella función que cumple:

Para todo x en $(0, \infty)$, para todo y en $\mathbb{R}$: "log(x) = y $\Leftrightarrow$ exp (y) =x".

Teorema 2:

$$\forall x, y \text{ se tiene}$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Demostración

Sea $x' = \exp(x) \Longrightarrow \log(x') = x$

$$y' = \exp(y) \Longrightarrow \log(y') = y$$

$$x + y = \log(x') + \log(y')$$

$$x + y = \log(x' \cdot y')$$

$$\exp(x+y) = \exp(\log(x' \cdot y'))$$

$$\exp(x+y) = x' \cdot y'$$

$$\exp(x+y) = \exp(x) * \exp(y)$$

Definición 3:

$$\boldsymbol{e = exp(1)}$$

La definición equivale a:

$$1 = \log(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt$$

Además utilizando el teorema 2, y si x es un número natural, tenemos que:

$$\Longrightarrow \exp\ x\ = exp(1+1+1+1+1+1+1\ldots+1) = (\exp(1))^x$$

$$\exp\ x\ = e^x\ Para\ todo\ número\ x \text{ natural}$$

Como $\exp(x)$ está definida para todo “x” en los reales y $\exp\ x\ = e^x$ para los naturales resulta coherente con el uso anterior de la notación exponencial definir e^xcomo exp(x) para todo x real. En la siguiente discusión se especificará la base de “log” que se mencionó al inicio.

Definición 4:

Para todo número “x”

$$\boldsymbol{e^x = exp(x)}$$

Note que se logró definir e^x para todo número real “x”. La próxima discusión analiza lo que sucede con $a^x,$cuando $a \neq e$.

Si “x” es natural, entonces se tiene:

$$a^x = a * a * \ldots * a = exp\ \log(a)\ * \ldots * \exp\ \log\ a\ = (e^{\log(a)})^x = e^{xlog(a)}$$

Pero la expresión $e^{xlog(a)}$ está definida para todo “x” perteneciente a $\mathbb{R}$ y para todo a >0. Utilizaremos este hecho para definir a^x:

$\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que a>0, escribiremos $a^x en\ lugar\ de e^{xlog(a)}$.

Por lo tanto, para $a > 0$ se tiene que:

$$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \ 0, \infty$$

$$x \longmapsto a^x$$

Algunas propiedades:

i) Si $a > 1 \Rightarrow \log\ a\ > 0$ y es fácil ver que la función es creciente:

$si\ x < y$ entonces:

$$x log\ a\ < y log\ a$$

$$e^{xlog(a)} < e^{ylog(a)}$$

$$(e^{\log\ a}\ )^x < (e^{\log(a)})^y$$

$$a^x < a^y$$

ii) Si $0 < a < 1 \Rightarrow \log\ a\ < 0$, la función a^x es decreciente:

$si\ \ x < y$ entonces

$$x log\ a\ > y log\ a$$

$$e^{xlog(a)} > e^{ylog(a)}$$

$$(e^{\log\ a}\ )^x > (e^{\log(a)})^y$$

$$a^x > a^y$$

iii) Veremos que: $\frac{\log(x)}{\log(a)} = \log_a x$

Si $y = \log_a x$

Por definición tenemos que $x = a^y = e^{ylog(a)}$

$$\Rightarrow x = e^{ylog(a)}$$

$$\Rightarrow \log\ x\ = \log(e^{ylog(a)})$$

$$\log\ x\ = \text{ylog}(a)$$

$$\frac{\log\ x}{\log\ a} = y$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x)}{\log(a)} = \log_a x$$

Ahora como ya se definieron los parámetros donde realmente funciona el logaritmo y la exponencial se formaliza lo siguiente:

3.1 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, se llama *función exponencial de base "a"* y se denota Exp_a a la función definida por:

$$Exp_a: \ \mathbb{R} \longrightarrow \ 0, \infty$$

$$x \longrightarrow a^x$$

3.1.1 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si $f(x) = a^x$; $a > 1$	**Si $g(x) = a^x$; $0 < a < 1$**
1. $f(x) > 0$, para toda $x \in R$	1. $g(x) > 0$; para toda $x \in R$
2. $f(0) = 1$	2. $g(0) = 1$
3. $f(1) = a$	3. $g(1) = a$
4. f es biyectiva.	4. g es biyectiva.
5. f es creciente en todo su dominio.	5. g es decreciente en todo su dominio.
6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$	6. Si x tiende a $+\infty$ entonces a^x tiende a 0.
7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a 0	7. Si x tiende a $-\infty$ entonces a^x tiende a $+\infty$

3.1.2 EXPONENCIAL DE BASE e=2,718281…

La función está definida por:

$$Exp_e : R \to 0,+\infty$$

$$x \to e^x$$

Se llama función exponencial de base e. Escribimos $f(x) = e^x$ o $f(x) = Exp_e(x)$

Dado que $e > 1$, esta función posee las mismas propiedades de la función exponencial de base $a > 1$.

3.2 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Como la función Exponencial es biyectiva, existe su función inversa. A esta función la llamamos función Logarítmica.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ $y a \neq 1$, sea f la función definida por $f(x) = Exp_a(x)$, la función f^{-1}, inversa de f, se llama función logarítmica de base "a" y se denota como "log_a"

Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, \infty)$, se tiene que:

$$log_a x = y \Leftrightarrow Exp_a(y) = x$$

Luego se tiene que:

Exp_a: $\mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ donde $y = a^x$

$x \longrightarrow$y

Entonces

log_a: $(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde x= $log_a y$

$y \longrightarrow x$

3.2.1 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Si $f(x) = \log_a x$; $a > 1$	**Si $g(x) = \log_a x$; $0 < a < 1$**
1. $\log_a 1 = 0$ = 0, pues a^0 = 1	1. $\log_a 1$ = 0, pues a^0 = 1
2. $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$	2. $\log_a a$ = 1, pues $a^1 = a$
3. f es biyectiva.	3. g es biyectiva.
4. f es creciente en todo su dominio.	4. g es decreciente en todo su dominio.
5. Si x tiende a $+\infty$ entonces $\log_a x$ tiende a $+\infty$	5. Si x tiende a $+\infty$ entonces $\log_a x$ tiende a $-\infty$
6. Si x tiende a 0 tomando valores positivos	6. Si x tiende a 0 tomando valores positivos
entonces $\log_a x$ tiende a $-\infty$	entonces $\log_a x$ tiende a $+\infty$

3.2.2 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE E O LOGARITMO NEPERIANO

La función está definida por:

$$f: \quad]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longrightarrow log_e(x)$$

Se llama función logarítmica de base e y se escribe $\ln(x)$, es decir, $\ln(x) = log_e(x)$

Nota: los logaritmos de base e se les denomina logaritmos neperianos o logaritmos naturales.

Nota: la función logarítmica de base e posee las mismas propiedades de la función logarítmica de base a, $a > 1$.

3.2.3 LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA DE BASE 10

La función está definida por:

$$f: \quad 0,\infty \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad x \longrightarrow log_{10}\,(x)$$

Se llama función logarítmica de base 10 y se escribe log(x), es decir, log(x)=$log_{10}(x)$

Además a los logaritmos de base 10 se les llama logaritmos de base decimal o logaritmos decimales.

Representación gráfica de las funciones exponencial y logarítmica (ambas de base e)

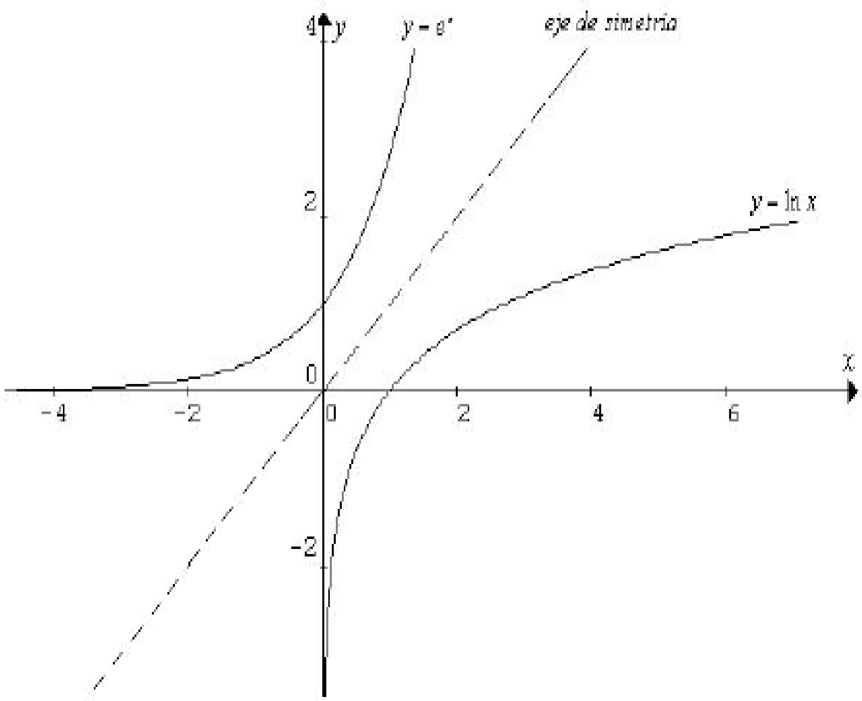


Figura 4: Gráfica de la función log y Exp

Nótese que al ser una la inversa de la otra tienen como eje de simetría la recta determinada por la ecuación y = x.

4.- DESARROLLO DEL INSTRUMENTO

4.1. CREACIÓN DEL JUEGO

Elegir bien un juego favorece a la introducción de un tema, ayuda a comprender o fortalecer mejor algún concepto específico. Según José María Gairín (1990), como herramienta didáctica podría servir para diferentes objetivos:

1.- Desarrollar conceptos o estructuras conceptuales matemáticas.

2.- Proporcionar ejercicios tanto para la practica de algoritmos como para fomentar la experimentación.

3.- Desarrollar habilidades de percepción y razonamiento.

4.- Proporcionar ocasiones de utilizar el pensamiento lógico y de emplear técnicas heurísticas apropiadas para la resolución de problemas.

El presente trabajo plantea un juego de rol y estrategia que se juega con las cartas, y fue adaptado del juego "Magic" relacionado con competencias mortales entre magos. Nuestro se pretende aplicar antes de la clase con papel y lápiz, por lo que está a un nivel co-instruccional. Este juego no debe ser la única herramienta para llegar a consolidar el aprendizaje, debe ser un juego que sirva como motivación para el inicio de una clase. Se resolvió trabajar con naipes ya que el uso de barajas es muy frecuente en el entorno cotidiano. Es común que los estudiantes llevan juegos de naipes a las escuelas para divertirse en sus ratos libres.

4.1.1. JUEGOS DE NAIPES

Un juego de naipes tiene un especial potencial para la enseñanza de la matemática si sobre éstas barajas se hacen algunas variaciones. Los profesores Fernando Corbalán y José Gairín (1965) se destacan por haber diseñado una serie de juegos de naipes y también explican que el juego permite:

a) Utilizar correctamente las operaciones.
b) Agilizar el cálculo mental.
c) Utilizar el principio de valor relativo de las cifras.
d) Potenciar el significado de las operaciones.

Corbalán señala que para lograr los objetivos del juego se debe utilizar con regularidad si se quiere obtener una influencia duradera. Lo principalmente beneficioso en un juego es su proceso posterior, con esto nos referimos al análisis de los procesos de resolución, de discusión de soluciones, y la generalización, si es posible, de los resultados. Lo que se debe destacar no es solo la acción de jugar sino que aprovechar el juego como herramienta didáctica.

El juego de naipes es un juego de estrategias, por lo mismo los estudiantes que ejecuten el juego construido deberán generar estrategias para ganar.

Sería deseable que los juegos tengan un contenido educativo que fomente el desarrollo de hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar., Además que desarrollen el pensamiento, el razonamiento y que estimulen la creatividad. Si los juegos son cooperativos sería deseable que promuevan el intercambio de relaciones personales, que favorezcan la cooperación y la comunicación. En este caso específico este juego va dirigido a alumnos de 17 años aproximadamente. El psicólogo francés Jean Piaget determinó que la adolescencia es el inicio de la etapa del pensamiento de las operaciones formales, que se especifica como el pensamiento que implica una lógica deductiva.

Nuestra propuesta es un juego de naipes cuya historia se trata que la tierra está siendo invadida por diferentes alien inmunes a las armas bélicas y la única forma de acabar con ellos es infectándolos con bacterias de enfermedades que los ataquen (más detalle Anexo 2) y cuyo objetivo es facilitar la comprensión y aplicación de la función exponencial y logarítmica, y que está basado en metáforas. La dinámica del juego está diseñada para introducir y enseñar las funciones $a^x = b$ y $\log_a b$ = x Mediante varios elementos. Existen cartas "enfermedades", las que tienen una casilla donde se encuentra escrita una "habilidad" de la carta. Existen además cartas "experimento" cuyo objetivo es disminuir el poder de ataque de los científicos contrincantes. Existen cartas "bonos" que benefician de distintas formas al jugador que utilice la carta y finalmente cartas "energía" que se utilizan para activar todas las cartas anteriormente mencionadas. Durante el juego, cada participante sostiene una planilla que viene con gráficos de las funciones, que tienen las bases de las enfermedades de base 2, 3 y 5, con el objetivo que el jugador los utilice como ayuda en las primeras jugadas y así logre ver el crecimiento de la función exponencial, de manera que pueda realizar las primeras evaluaciones numéricas. . Nuestra intención es que cada carta enfermedad represente una evaluación de la función exponencial cuyos parámetros estarán dados por una base "b" asociada a cada carta y la cantidad de energía acumulada que elige el jugador representa la variable independiente x. De esta manera en cada "ataque" del juego con carta "b" y energía "x" se efectúa una evaluación en x de la función exponencial de base b. Las cartas de tipo "experimento" tienen por objetivo disminuir la cantidad de bacterias atacantes del resto de los competidores, utilizando de forma directa la propiedad de la exponencial de resta de exponentes, y existen otro tipo experimentos que se relacionan con la función logaritmo cuando se calculan las energías que se necesitan para llevarse al alien, es decir, se calcula el exponente "x" que se definió como variable. Desde 1948, un grupo de educadores asumió la tarea de clasificar los objetivos educativos, éste trabajo cognitivo se finalizó en 1956 y se conoce como Taxonomías de Bloom. Ésta se organiza en niveles con una estructura jerárquica que va del más simple al más complejo.

En este contexto, nuestro juego de naipes afianza y desarrolla los siguientes objetivos cognitivos de la Taxonomía de Bloom:

1.- Conocimiento:

Se considera el supuesto de que el alumno o alumna no conoce la función exponencial ni logarítmica, pero posee conocimientos previos acerca de la función potencia, lo que podría ayudarles y eventualmente conseguiría darles pistas acerca del comportamiento de la función exponencial. En este sentido nuestra intención en el juego es que el estudiante observe las cartas y sus mensajes particulares. Al hacerlo se daría cuenta de ciertos elementos explícitos, por ejemplo:

a) En el extremo inferior derecho de las cartas "enfermedad" existe un número asociado a la letra b. Matemáticamente sería la base fijada para atacar al alien. Por ejemplo si un alumno está conociendo el mazo y le corresponde una enfermedad donde "b" sea igual a 5, quiere decir que sus bacterias madre son 5.

b) El jugador observa mensajes entre comillas en las habilidades de las cartas "enfermedad" y en escritos de las cartas "experimento". las que familiariza al alumno con el lenguaje matemático propio del estudio de esta familia de funciones, como por ejemplo: "b elevado a la quinta potencia".
c) Acerca de los gráficos que incluye el mazo de cartas, el jugador-alumno solo los observa y creemos que eventualmente podrá identificar los puntos sobre la curva dibujada.

d) Una vez leído las instrucciones del juego Esperamos que el alumno comenzará a familiarizarse con los elementos correspondientes al juego, como las cartas enfermedad, las cartas experimento y las energías (entre otros). Si esto sucede, el estudiante estará conociendo el lenguaje matemático incorporado en el juego, lo que implica que se cumple la primera de las taxonomías.

2.- Comprensión:

Una vez que el estudiante haya leído las instrucciones y ha sido preparado por el profesor para jugar, y ha hecho jugadas sencillas, creemos que será capaz de hacer (muchas veces de manera inconsciente) otras cosas o de conocer elementos de manera más profunda.

a) El alumno es capaz de asociar las imágenes de las enfermedades con el número en la parte inferior derecha. La imagen concuerda con el número de bacterias madres, pues el mazo está construido con el cuidado de que la imagen de las cartas “enfermedad” también tenga relación con el juego, pues creemos que una vez que el alumno tenga interiorizada esta acción logrará ahorrar tiempo y su atención estará fijada en hechos importantes, como el cálculo rápido o la generación de estrategias para ganar.

b) El alumno es capaz de distinguir entre los elementos que componen una carta (el tipo de carta, la base, el costo de la carta, las habilidades de las enfermedades y el mensaje de los experimentos y bonos) que se pretenden mostrar, por ejemplo creemos que será capaz de diferenciar entre las bacterias madres, que es el número base de la exponencial, y las energías que permiten potenciar la base para atacar con más fuerza

c) El alumno-jugador puede diferenciar entre las bacterias madre, y puede comprender que para una cantidad de energía fija, entre más grande es el número de bacterias mayor será su ataque, es decir, si solo posee 3 energías y tiene una carta “enfermedad” con bases 2 y 5, el alumno será capaz de discernir que su ataque será más potente si elige la enfermedad de base 5.

3.- Aplicación:

El alumno-jugador es capaz de utilizar sus habilidades e información presentada en las cartas para crear jugadas que le beneficien.

a) Claramente, si el alumno aprende a jugar, puede y es capaz de realizar las operaciones matemáticas pertinentes para realizar un ataque directo, es decir, tomar una enfermedad y potenciarla para atacar al alien de forma directa, sin usar las habilidades. En este sentido el alumno es capaz de usar y aplicar operaciones básicas de exponenciación.

b) El alumno es capaz de examinar las jugadas de los oponentes y poder decidir qué tipo de experimento puede usar para disminuir el ataque de sus contrincantes para que no se logren llevar al alien.

c) El alumno es capaz de darse cuenta que hay 3 cartas que son de beneficio inmediato (muerte ineludible, inexorable e ineludible), y él puede examinar, discernir y finalmente usar las energías necesarias para poder utilizar de la mejor manera esas cartas. En estas cartas se trabaja con la función logaritmo, sin que el alumno sepa de una manera formal.

4.- Análisis:

Una vez que el nivel de juego del alumno va mejorando, se puede dar cuenta de otros elementos implícitos.

a) Al realizar jugadas más elaboradas el alumno podría darse cuenta que existen habilidades, las que permiten evidenciar la propiedad de la evaluación de una función exponencial en una suma es igual a la multiplicación de las evaluaciones de cada sumando. Lo mismo sucede con los experimentos pues existen algunos que permiten evidenciar propiedad análoga de la función logaritmo.

b) Si por ejemplo en la mesa eventualmente ocurre un debate acerca de la validez de la jugada, el alumno es motivado a explicar sus procedimientos y su estrategia de juego, es decir, la manera en que dispuso las cartas de su jugada.

5.- Síntesis:

El alumno es capaz de diseñar estrategias de juego nuevas a partir de las anteriores utilizadas o también observando las de los oponentes, de esta manera logra reordenar las cartas a su beneficio, realizando una predicción a su jugada.

a) El alumno es capaz de predecir el posible resultado de su jugada disponiendo sus cartas de la manera que él estime conveniente.

b) El alumno está preparado para crear estrategias de juego a partir de las antiguas realizadas o de la posible observación de las jugadas hechas por sus oponentes o de las enseñadas por el profesor.

c) El jugador podría reordenar sus cartas y combinarlas a su conveniencia, para hacer jugadas más poderosas, de esta manera podría integrar los conocimientos aprendidos a los ya sabidos.

d) El alumno o alumna prepara, compone o diseña estrategias de juego ya sea para atacar al alien, o bien para aminorar el ataque de sus oponentes.

6.- Evaluación:

En este último nivel de la taxonomía de Bloom, el alumno-jugador decide sin problemas las cartas que utilizará para cada jugada. Si pierde en tal jugada, es capaz de comparar la jugada que él hizo y la ganadora, en este sentido es capaz de explicar y justificar la estrategia vencedora. De esta manera el jugador o jugadora puede argumentar matemáticamente lo que se hizo y así valorar la opinión de los demás y la propia.

4.1.2 OBJETIVOS PEDAGÓGICOS-MATEMÁTICOS DEL JUEGO.

En esta parte del trabajo nosotros consideraremos la función logaritmo como $\log_a x$log_a(x) y la función exponencial a^x.

Con este juego se pretende que el alumno logre:

1.- Identificar el parámetro “a” en la función exponencial y logarítmica. Se trabajó con diferentes bases (bacterias madres), las que son 2, 3 y 5.

2.- Identificar el exponente. En el juego, el exponente está asociado al concepto de energía de cada alien. El concepto de base (de la función exponencial), está asociado al tamaño inicial de la población de bacterias (bacterias madres) que causa una enfermedad alienígena.

3.- Comprender que la función exponencial es una función creciente cuando el parámetro "a" es mayor a uno.

4.- Reconocer a través de la gráfica y la evaluación numérica, que entre más grande es el parámetro "a", el crecimiento de la función exponencial es más rápida.

5.- Reconocer de forma inicial que la función logarítmica es la inversa de la función exponencial, a través de la gráfica y del cálculo parcial[5] de exponentes.

6.- Reconocer, evidenciar y trabajar de forma implícita con ciertas propiedades de la función exponencial y la función logaritmo:

a) $\mathbf{exp}\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\ = \mathbf{exp}\ \boldsymbol{x}\ * \mathbf{exp}(\boldsymbol{y})$

b) $\mathbf{exp}\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\ = \mathbf{exp}\ \boldsymbol{x}\ /\mathbf{exp}(\boldsymbol{y})$

c) $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{b}$

7.- Evaluar la función de forma numérica, o bien, ver el gráfico de la base con que decide atacar y las energías que dispone, y ve el punto dentro de la gráfica, explicitando que la coordenada del Y es la cantidad de bacterias resultantes.

4.1.3. ANÁLISIS DE LAS CARTAS.

Haremos un análisis carta a carta, para justificar la introducción de los conceptos matemáticos arriba descritos. Éste análisis lo haremos para un grupo de cartas que cumplen los mismos objetivos.

---

[5] Tanto la función logaritmo como la función exponencial son continuas, por lo que "cálculo parcial" se refiere al cálculo de un exponente en específico

1.- Acerca del grupo de las cartas enfermedad:

Todas las cartas enfermedad tienen escrito b=x en la parte inferior derecha, base del ataque a las que se llamó “bacterias madre”, estas bacterias al fijar la base del ataque al alien, tienen la característica de atacar de dos formas, el ataque directo y el uso de habilidades apoyando a la enfermedad principal.

a) El ataque directo, es el ataque básico donde el jugador decide realizar la jugada con una sola carta enfermedad y algunas cartas energía (eventualmente podrían ser todas). Por ejemplo, si el jugador tiene una carta enfermedad de base 3 y además tiene 6 energías, entonces su ataque será de 729 bacterias, entonces podría atacar a un alien que tenga una resistencia igual o inferior a 729 bacterias.

Figura 5: Ataque directo

En este tipo de ataques el alumno puede decidir con cual carta enfermedad atacar, es decir, la base de ataque podría ser 2,3, ó 5, que son las diferentes bacterias madres que presentan las cartas “enfermedad”. Además debe decidir cuantas cartas energía usar en el ataque. Claramente el alumno comenzaría a notar diferencias sustantivas con respecto de cómo se utilizan estos dos elementos, es decir, diferenciar la base del exponente.

De esta manera esperamos introducir un concepto con el cual se pueda asociar la función exponencial b^x.

b) Las habilidades de las enfermedades se utilizan de manera diferente, veamos:

- Las enfermedades “Ataque inerte”, “Dolor infernal” y “Fiebre Alien” poseen la habilidad de transformar una bacteria en “*b al cubo, b a la quinta y b a la cuarta*” respectivamente, evidentemente lo que hacen en común estas enfermedades, es multiplicar las bacterias que tienen por las cantidades mencionadas anteriormente, hay que distinguir que el *b* mencionado en las habilidades de las cartas, se refiere al *b* descrito específicamente en la enfermedad atacante. Aquí lo importante es que el joven comienza a ver y familiarizarse con la siguiente propiedad de la exponencial :

$$\mathbf{exp}\ \boldsymbol{x}\ * \mathbf{exp}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{exp}\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

Veamos un ejemplo de esto: imaginemos que tengo en mesa dos enfermedades y 8 energías, las enfermedades son “Dolor Infernal” y “Fiebre Alien”, esta vez no nos fijaremos si es mejor utilizar una u otra en términos de estrategia, solo se evidenciará la propiedad, atacaremos con “Dolor Infernal” y usaremos la habilidad de “Fiebre Alien”. Como hay 8 energías, se utilizarán 3 para activar la habilidad y las 5 restantes para la enfermedad principal:

Figura 6: Ataque utilizando las habilidades de las cartas “enfermedad”

Habilidades

Nótese que la enfermedad atacante fijó la base en 5, con 5 energías, eso sería un total de 3125 bacterias, ahora la habilidad le permite aumentar a un total de 1953125 bacterias, pues la habilidad da el mensaje de multiplicar por “*b a la cuarta*”, se debe notar además, que si no se hubiese utilizado la habilidad de la carta el total de bacterias seria de 390325, pues ese sería el ataque directo.

- La enfermedad “Ímpetu” hace lo mismo pero con una diferencia, duplica las energías que se usen en esta habilidad, veamos un ejemplo: tengo en mi mesa las enfermedades “Ataque Inerte” e “Ímpetu” y tengo 8 energías igualmente, tampoco tomaremos en cuenta el uso de estrategia, sólo veremos la activación de esta habilidad:

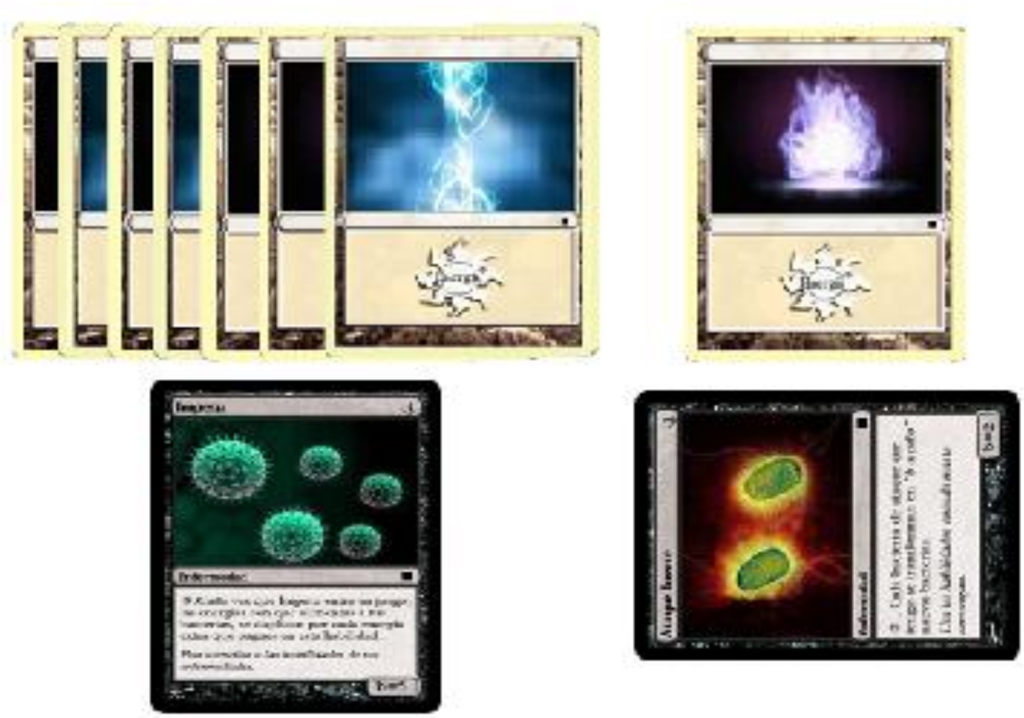


Figura 7: Activación de la habilidad de la enfermedad “Ímpetu”

Se debe observar que se dispusieron casi todas las energías en la carta cuya habilidad se quiere activar, primero se fijó la base de ataque en 2, luego se pagan 3 energías para recién activar la habilidad, y las 4 restantes para potenciar dicha habilidad pues dice *“...se duplica por cada energía extra que pagues”*, luego estas 4 energías se convierten en 8, por lo que el ataque final queda en $2^{y} * 2^{2x} = 2^{1} * 2^{8} = 2^{9} = 512$ bacterias.

Acerca del grupo de los experimentos:

Los experimentos tienen la función de tratar de impedir que los oponentes se lleven al alien que se está atacando:

a) Los experimentos "Quebrando Creciente", "Llanto Mortífero", "Sabotaje" y "Detrimento Ineludible" cumplen la misma función: disminuir en una cierta cantidad los exponentes de los ataques para, de esta manera, aminorar el embate de sus oponentes e impedir que se lleven al alien. Veamos un ejemplo: supongamos que se realizó un ataque de 4096 bacterias con una enfermedad de base 2, por un oponente a un alien de resistencia 2000, obviamente a simple vista se debiera llevar al alien pues sobrepasó la barrera de su resistencia, pero yo, como jugador, decido oponerme a esa apuesta y pongo en juego el experimento "Quebranto Creciente" el que me pide 3 energías para su activación y las energías que yo quiera o las que esté dispuesto a pagar para lograr disminuir el ataque, además supongamos que tengo en mesa 5 energías y decido usarlas todas.

Figura 8: Activación del experimento “Quebranto creciente”

La imagen anterior muestra que logré pagar las 3 energías que me pide el experimento para poder activarlo y además puse 2 energías extras, lo que quiere decir que cada 4 bacterias las fui convirtiendo en 1, por lo que su ataque quedó en 1024 bacterias, número insuficiente para logrear su objetivo en esta pasada.

La propiedad que se evidencia es

$$\mathbf{exp}\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{exp}\ (\boldsymbol{x})\ /\mathbf{exp}(\boldsymbol{y})$$

a) El grupo de los experimentos “Muerte Infalible”, “Muerte Inexorable” y “Muerte Ineludible”, son cartas con característica de premio pues se llevan al alien directamente una vez pagado su coste.

Veamos un ejemplo: supongamos que tengo 10 energías y quiero utilizar una de estas cartas, supongamos que quiero llevarme a un alien de resistencia 2000, eventualmente podría ser cualquiera, lo primero que tengo que hacer es ver si con 10 energías puedo pagar la cantidad que me piden para activar la carta y las restantes para ver si cumplo con lo pedido, bueno, como su resistencia es 2000 tengo que ver en los gráficos de base 2, 3 y 5 como sigue:

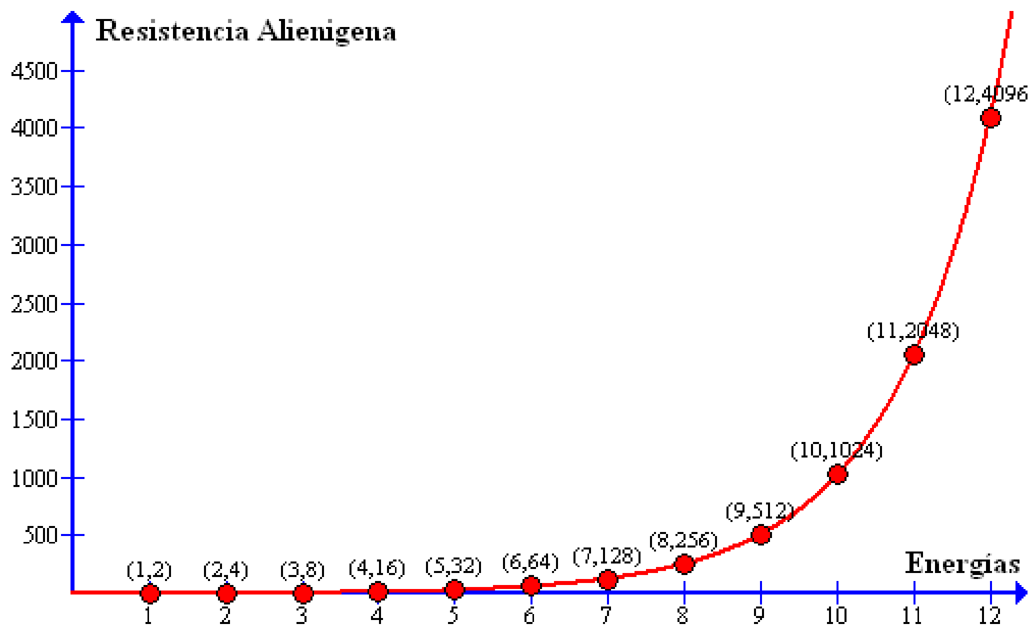


Figura 9: Gráfica relación energía – resistencia 2

El gráfico de base 2 me da la siguiente información: los 2000 de resistencia que tiene el alien lo busco en la barra vertical y luego veo en el gráfico bajo qué punto marcado me encuentro, en este gráfico en particular el punto sobre la resistencia del alien es el punto (11,2048), lo que me indica que para sobrepasar los 2000 de resistencia debería tener al menos 11 energías dispuestas para pagar, pero como no las tengo no puedo utilizar la carta en base 2 (Muerte Inexorable)

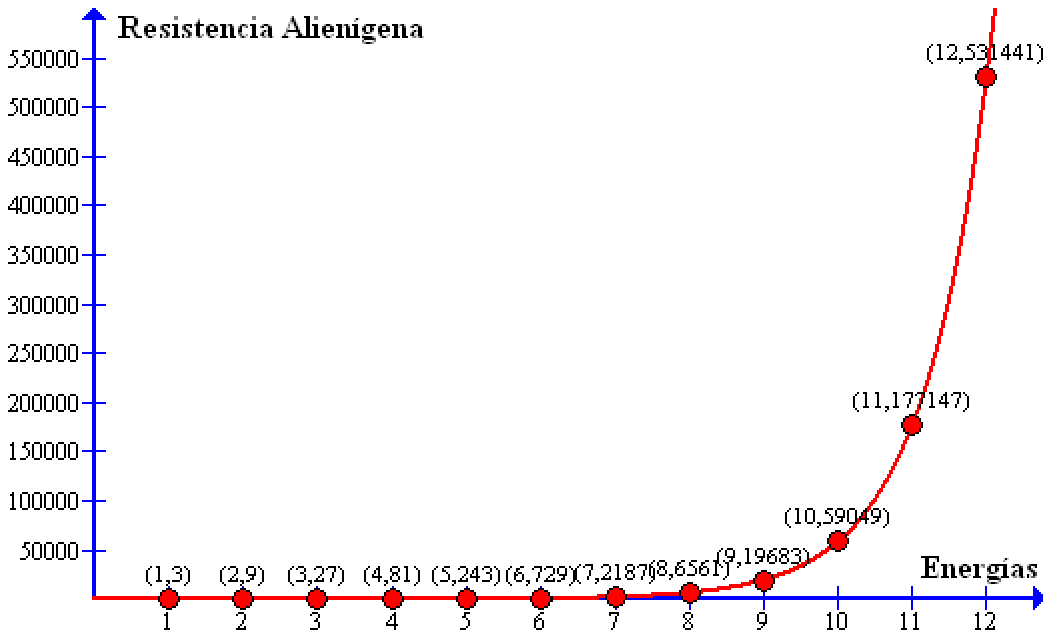


Figura 10: Gráfica relación energía – resistencia 3

Hago exactamente lo mismo con el gráfico de base 3, la información recopilada desde acá me dice que para llevarme al alien tendría que tener al menos 7 energías libres para poder pagarlas y llevármelo, las cuales no tengo, por lo que no puedo utilizar la carta “Muerte Infalible”

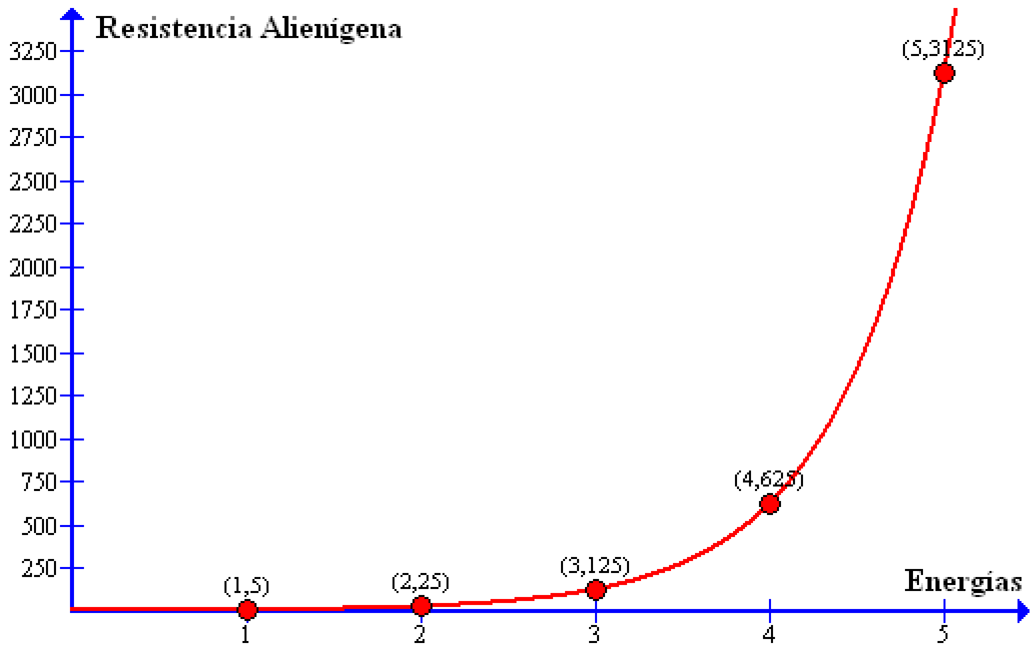


Figura 11: Gráfica relación energía – resistencia 5

Al ver este gráfico hago el mismo procedimiento, y me doy cuenta que necesito al menos 5 energías para poder llevarme al alien, las que si tengo, por lo tanto utilizo las energías y uso la carta "Muerte Ineludible" para lograr mi objetivo.

Lo que hacen estas cartas es pedir que calculen cuántas energías son utilizadas en cierta base (2,3 ó 5) y luego pagar esta cantidad de energías para poder llevárselo. Matemáticamente es pedirles a los jugadores-alumnos que viendo cierta imagen, realicen la correspondencia con las energías usadas o ver entre qué número de energías está; implícitamente se le está pidiendo que calcule el o entre qué logaritmos (pre imagen) está la resistencia del alien (imagen). En otras palabras se solicita al alumno que haga un ejercicio de logaritmación sencillo. Y a su vez se le muestra también implícitamente que a través de la gráfica de la exponencial se puede calcular algún logaritmo solicitado con el proceso invertido, es decir, que es su función inversa.

b) La función de esta última carta “Resistencia Alienígena” es elevar la resistencia de un alien al que han decidió atacar para que por este turno no se lo puedan llevar, esto refuerza la idea de multiplicar una constante por una función exponencial.

4.1.4. CONSIDERACIONES DE LOS GRÁFICOS

Los siguientes gráficos representan las funciones exponenciales con que se trabaja en el juego, estas bases son enteras, pues pretende ser solo una herramienta basal para que el alumno pueda aprender algunas características de esta función. Además se toma y modifica el principio de la división bacterial (división binaria) en cuyo caso se trata sólo de la base 2, pero como se pretende que alumno tenga, al menos, una visión parcial de que la función exponencial y logarítmica puede trabajar con distintas bases, se decidió trabajar con 3 elementos diferentes.(bases 2,3 y 5)

Por otra parte como los gráficos físicamente son material manipulable dentro del juego, su visión y lectura tienen que ser de la mejor calidad posible, en este sentido se decidió hacer e incorporar un zoom del gráfico completo, donde muestre como se comporta la función al comienzo, pues la Exponencial es de un crecimiento rápido y se pierde la visual de inicio, es decir, no hay diferencias visuales entre los puntos del inicio, por ejemplo entre los puntos (1,2); (2,4);(3,8) y (4,16), entre otros.

Para que los gráficos estén en igual de condiciones, el zoom mencionado antes se hizo hasta el punto 5 en el eje de las “X”, lo que dificultaría la visual para algunos otros puntos que aún no se notan, pero tienen la ventaja que éstos están marcados de manera que también sea de ayuda para ver sus coordenadas.

Además, como se expresó anteriormente, la función Exponencial es de un crecimiento acelerado, por lo que se pierde la mirada cuando x crece mucho, lo que determinó introducir sólo una fracción de la tabla de valores de la gráfica, de manera que si sólo llegase a necesitarla, la use, de otra manera se induce a que utilice la herramienta del gráfico en cuestión.

4. RESULTADOS

5.1 APLICACIÓN DEL JUEGO

Población: Colegio Apumanque de La Calera.

Muestra: 51 alumnos (correspondientes a 2 cuartos medios)

4to medio A: 24 alumnos, 15 hombres, 9 mujeres.

4to medio B: 27 alumnos, 14 hombres y 13 mujeres.

Se aplicó una prueba a ambos cursos con contenidos correspondientes a funciones logarítmica y exponencial. El resultado a la evaluación inicial, tuvo una connotación negativa, ya que los alumnos desconocían el contenido evaluado.

Luego de la primera fase de evaluación, se aplicó el juego de naipes al 4º medio A, tomando 3 sesiones sólo de juego, y luego 2 sesiones de formalizar el contenido. En estas últimas dos sesiones los alumnos también jugaron, pero para finalizar la clase se mostraron videos que explicaban diversas jugadas y su equivalencia con la función exponencial y logarítmica. 4º medio B recibió los contenidos de esta unidad a través de clases tradicionales en 5 sesiones de 90 minutos cada una, al igual que el 4° medio A, ambos cursos tuvieron el mismo tiempo de exposición al contenido. Según al Marco de la Buena Enseñanza (2008), una buena clase se conforma por tres tiempos, llamados inicio, desarrollo y cierre, este juego se aplicó en el tiempo de desarrollo.

1era sesión:

La clase comenzó con la historia del juego que se encuentra en el anexo 2 (10 min). El juego se aplicó en el desarrollo de la clase correspondiente a 70 minutos, donde se indicaron las reglas básicas para comenzar a jugar. El juego se realizó en grupos de 4 alumnos, los que fueron interactuando para entender el juego a medida que pasaban los minutos. Apoyados por el folleto de instrucciones que trae cada mazo, mostraron ir adquiriendo nuevas habilidades al realizar nuevas jugadas.

Se observó curiosidad en los alumnos por entender el juego, una vez entendido lo básico, mostraron interés en adquirir habilidades de rapidez para lograr el objetivo del juego que es matará los alien ubicados en la mesa. Para el cierre de la clase se recordaron procesos importantes para llevar a cabo el juego, como por ejemplo la función de cada carta, la ubicación y posición en la mesa de cada una de las cartas, cómo activar las cartas, cómo utilizar las habilidades de cada “enfermedad”, recordar que cada “enfermedad” al ser activada tiene un periodo de incubación y recordar que el juego también posee un cementerio (10 min)

2da sesión:

La clase comenzó recordando episodios de jugadas realizadas en clase anterior (10 min), luego en el desarrollo de la clase se comienza a jugar nuevamente en grupos de 4 alumnos. Se observó que luego de un tiempo de analizar las cartas y sus habilidades (cartas), iban realizando jugadas más elaboradas. La frustración mostrada en algunos momentos por perder, los motivó a analizar las jugadas de sus compañeros para lograr también ganar.

En esta sesión se orienta a algunos alumnos en el desarrollo del juego.

3era sesión:

Comenzó con 10 min de motivación (relacionado con el juego), En el desarrollo de la clase se comienza a jugar en grupos de 4 alumnos, en esta sesión los alumnos desarrollan el juego en forma fluida, realizan jugadas donde mezclan las cartas “enfermedad” y las habilidades para atacar, lo que implica que los alumnos empiezan a buscar diversas estrategias para ganar.

En la 4ta y 5ta sesión se formalizan los contenidos, mostrando a los alumnos los contenidos matemáticos que lograron en cada jugada, a través de un video que muestra diversas jugadas y sus explicaciones matemáticas. Los contenidos son, cálculo de logaritmo, reconocimiento de crecimiento de las curvas de cada función, aplicar propiedades de la función exponencial.

5.2 RESULTADO DE LA EVALUACIÓN

En la tabla 1 y figura 18 se puede observar los resultados generales obtenidos en las evaluaciones en comparación del curso con y sin la aplicación del juego. El detalle de las respuestas se encuentra en el Anexo8.

Tabla 1: Resultados generales de la evaluación mostrados como porcentajes de aciertos

Total curso	Total	10 Mejores	10 Peores
Utilizando aplicación de juego	62	76	47
Sin aplicación de juego	76	86	66

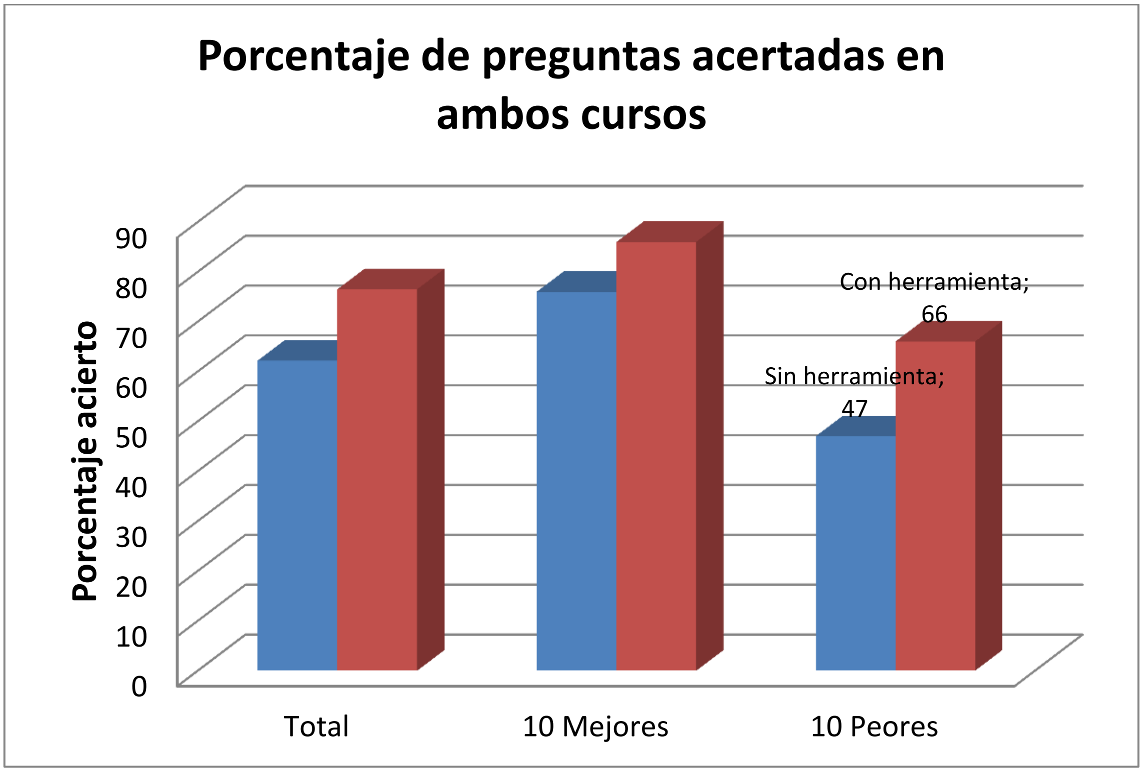


Figura 12: Resultados generales de la evaluación mostrados como porcentajes de aciertos.

Como se puede observar la aplicación del juego produjo una mejora en el 14% de acierto en las preguntas. Además, se comparan los grupos de los 10 alumnos con mayor rendimiento y los 10 alumnos con menor rendimiento de cada curso. Se observa que en el primer grupo la mejora es del 10%, mientras que en el grupo es decir los alumnos de menor rendimiento la mejora es del 19%.

En la Figura 19 se observa la comparación de porcentaje de alumnos que acertaron a cada pregunta en cada curso, mientras que en las Figuras 20 y 21 se muestra la comparación del porcentaje de aciertos por preguntas en cada curso en relación a los 10 alumnos de mayor y menor rendimiento, respectivamente. El detalle se muestra en la tabla 2.

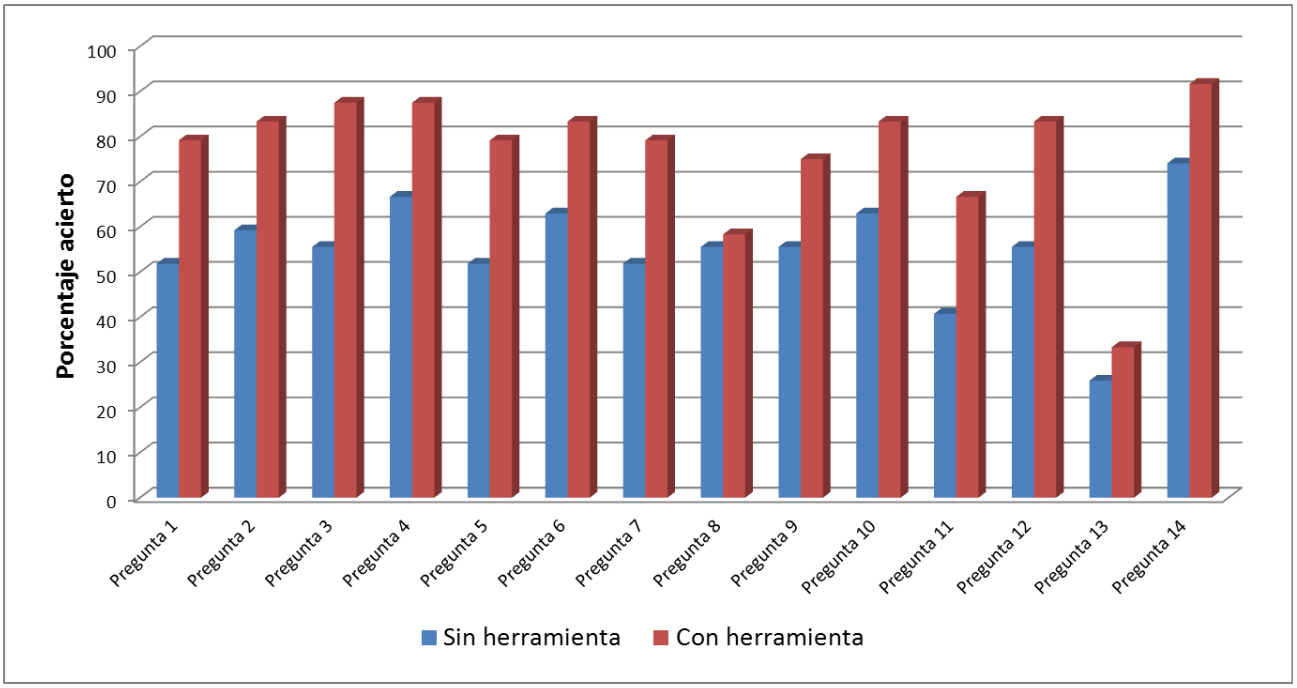


Figura 13: Comparación del porcentaje de aciertos por preguntas en cada curso

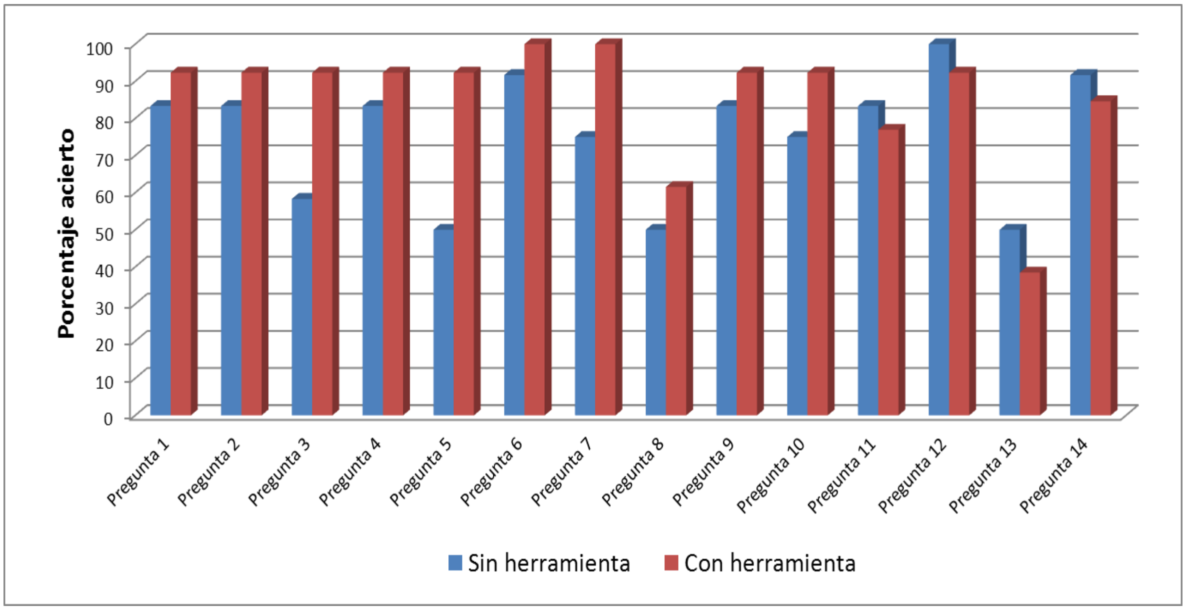


Figura 14: Comparación del porcentaje de aciertos por preguntas en cada curso en relación a los 10 alumnos de mejor rendimiento

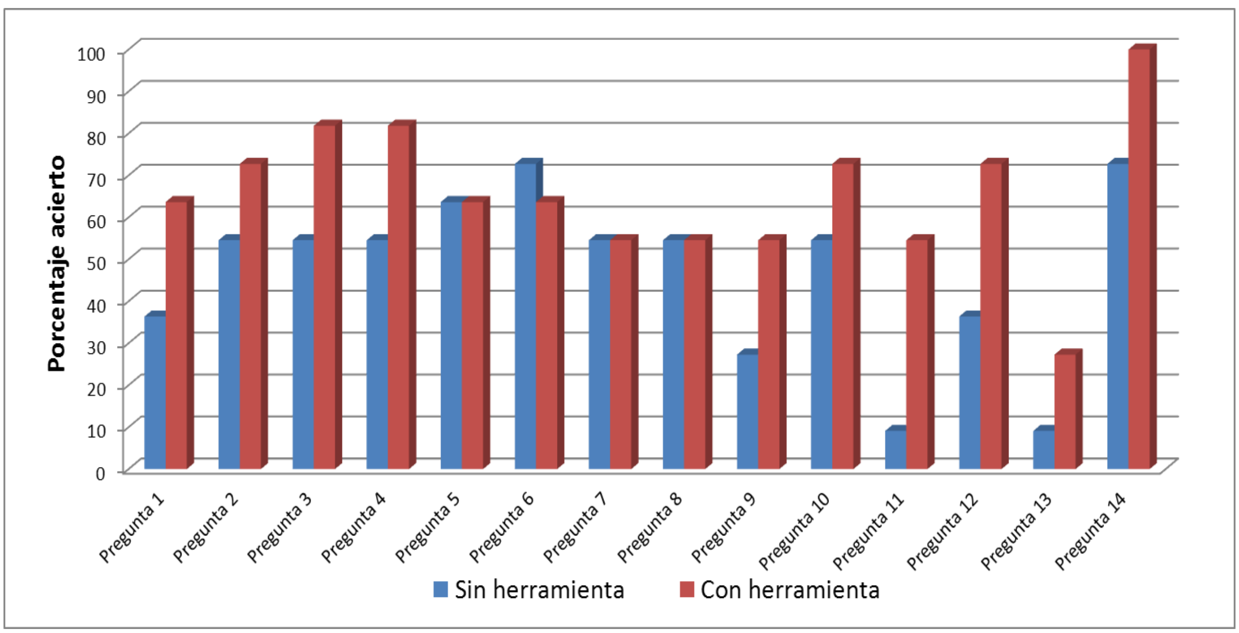


Figura 15: Comparación del porcentaje de aciertos por preguntas en cada curso en relación a los 10 alumnos de menor rendimiento.

Tabla 2. Porcentaje de aciertos por pregunta para cada grupo de estudio

	Total		10 Mejores		10 Peores	
	Sin herramienta	Con herramienta	Sin herramienta	Con herramienta	Sin herramienta	Con herramienta
Pregunta 1	52	79	83	92	36	64
Pregunta 2	59	83	83	92	55	73
Pregunta 3	56	88	58	92	55	82
Pregunta 4	67	88	83	92	55	82
Pregunta 5	52	79	50	92	64	64
Pregunta 6	63	83	92	100	73	64
Pregunta 7	52	79	75	100	55	55
Pregunta 8	56	58	50	62	55	55
Pregunta 9	56	75	83	92	27	55
Pregunta 10	63	83	75	92	55	73
Pregunta 11	41	67	83	77	9	55
Pregunta 12	56	83	100	92	36	73
Pregunta 13	26	33	50	38	9	27
Pregunta 14	74	92	92	85	73	100

` Se observa que la aplicación de la herramienta tiene un mayor impacto en los alumnos de rendimiento más bajo, Nosotros suponemos que esto se atribuye al no hábito de estudio que generalmente presentan estos alumnos y a la rutina que ellos mismos han generado dentro de la sala de clase, por lo que la aplicación de esta nueva metodología los saca de esa rutina y les produce curiosidad. Por otra parte, se observó que los alumnos de menor rendimiento focalizaron su atención en el juego, permitiendo que la clase se realizara en forma continua. En el grupo de mejor rendimiento en las preguntas 11 y 13 se obtiene mejor resultado en el curso que no utilizó el juego. Esto se puede atribuir a que ambas preguntas son de aplicación de propiedades y el juego no apunta a una lógica de tipo algebraica (que está implícita en las propiedades de los logaritmos), sino a la abstracción de la función. En el caso de los alumnos de peor rendimiento, sólo se obtuvo un resultado mejor para el curso sin el juego en el ejercicio 6 donde se solicita resolver un logaritmo de un número de mayor magnitud, lo que atribuimos a que los alumnos de este grupo no tienen hábito ni interés en trabajar con grandes números.

Con respecto al curso en que se aplicó una clase tradicional, se observó poco interés en el tema especialmente en el grupo de peor rendimiento. Lo anterior explica los resultados obtenidos en comparación con el grupo que utilizó la herramienta didáctica.

5.CONCLUSIONES

En los resultados de esta propuesta, se observa una mejora en el rendimiento de la enseñanza de la función logaritmo y exponencial de un 19% en el grupo de los alumnos con bajo rendimiento y de un 10% en los alumnos más destacados. Como se indica, el nivel de logro tiene mayor significancia para los alumnos de peor rendimiento. La aplicación de ciencias cognitivas del aprendizaje e investigación en el campo de los juegos, aplicados a la educación permite mejorar el nivel de abstracción y permite al alumno dar un sentido más tangible a los conceptos y teoremas facilitando su aplicación a su entorno.

En relación a las diferencias obtenidas en los resultados de los alumnos de menor y mayor rendimiento, se observó que durante la aplicación del juego los alumnos de menor rendimiento mostraron mayor interés en éste, además de una mayor rapidez en su aprendizaje. Esto se podría asociar al conocimiento previo que pudiesen tener de juegos similares existentes en el mercado. Esto podría indicar que la selección del tipo de juego es relevante en el éxito de la aplicación de esta metodología.

Finalmente, es posible establecer que esta propuesta didáctica puede ser ampliada y extendida a otras unidades y cursos de matemáticas lo que mejoraría el interés y el alto nivel de desmotivación que existe en el estudiante medio chileno por la asignatura.

5. BIBLIOGRAFÍA

Diccionario Enciclopédico Ilustrado de la Lengua Española. (Vol. II). (1959). Barcelona: Editorial Ramón Sopena S.A.

Acevedo, J. I., & Vicenç, F. (2004). Análisis de las metáforas utilizadas en un proceso de instrucción sobre representación de gráficas funcionales. *Actas del VIII Simposio de la SEIEM.* Barcelona.

Araya, R. (2000). *Inteligencia Matemática.* Santiago: Editorial Universitaria.

Araya, R. (2005). ¿Qué significa comprender una idea matemática? *Revista de la Educación de la Organización de los Estados Americanos (OEA)*.

Benítez Murillo, M. I. (2009). El juego como herramienta de aprendizaje.

Boix-Mansilla, V., & Gardner, H. (1994). *Enseñar para la comprensión en las disciplinas-y más allá de ellas.* (C. G. Lion, Trad.)

Bojorquez Tenorio, M. d. (s.f.). El juego y la Matemática. 171-177.

Cruz, H. R. (2007). *www.scielo.unal.edu.co.* Recuperado el 11 de enero de 2011, de http://www.scielo.unal.edu.co/scielo.php?pid=S0120-338X2007000100007&script=sci_arttext

Gairín Sallán, J. M. (1990). Efectos de la ultilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. 105-112.

Guzmán, M. d. (1984). Juegos Matemáticos en la Enseñanza. *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las amtemáticas*, (pág. 38). Santa Cruz de Tenerife.

Lackoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Come From: Why Cognitve Science Matters to Mathematics.* Basic Book.

Lackoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Come From; Embodied Arithmetic: The Grounding Metaphors.* Basic Book.

Reyes, A. L. (2006). *Inteligencias Multiples: cómo descubrirlas y desarrollarlas.* Lima: Mirbet.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal* (Segunda ed.). Barcelona, España: Editorial Reverté S.A.

www.rae.es. (s.f.). Recuperado el 13 de enero de 2011

ANEXOS

ANEXO 1: GRÁFICOS

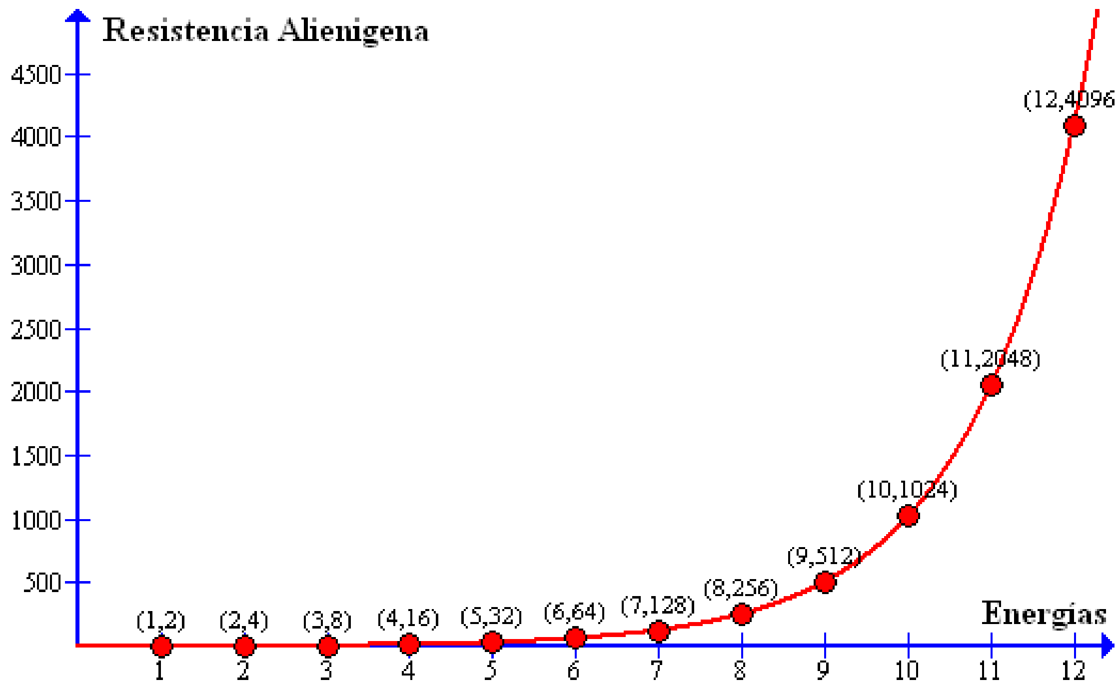
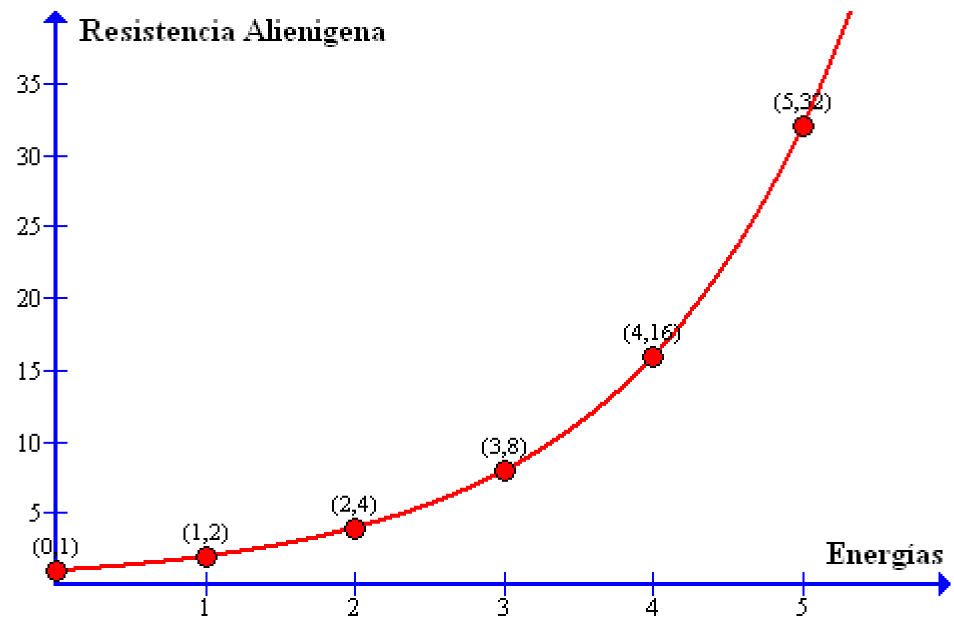


Figura 16: Gráfico base 2, incluido en el mazo de cartas.

Zoom grafico base 2



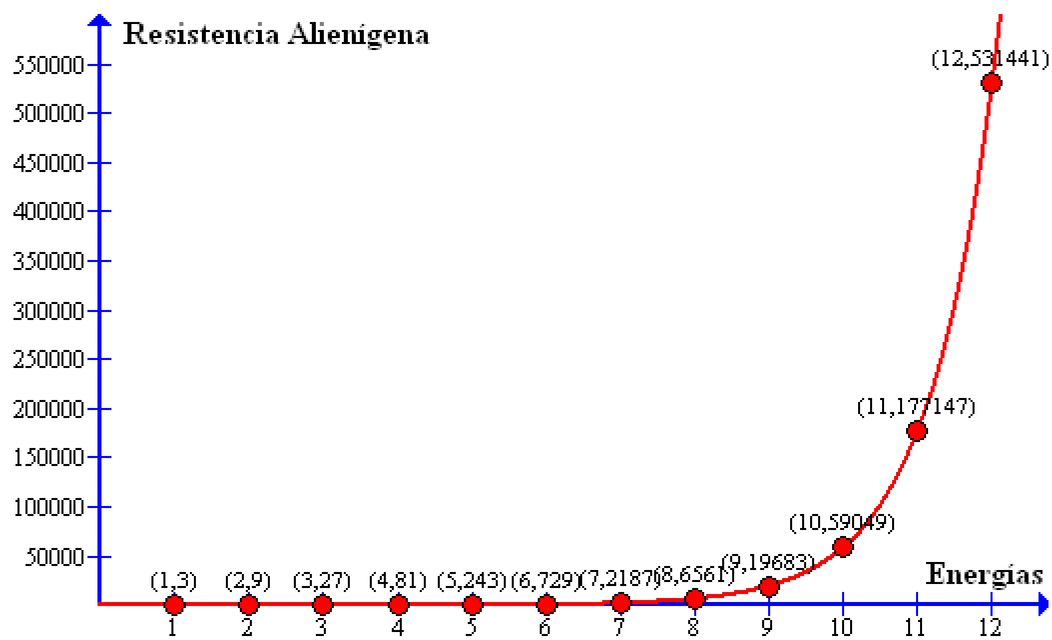
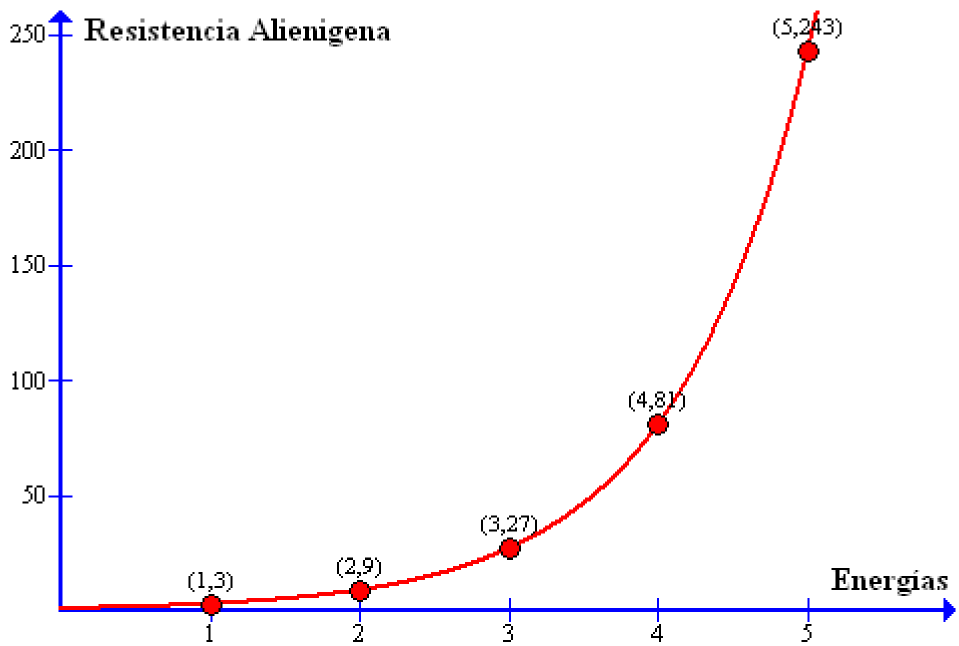


Figura 17: Gráfico base 3, incluido en el mazo de cartas.

Zoom gráfico base 3.



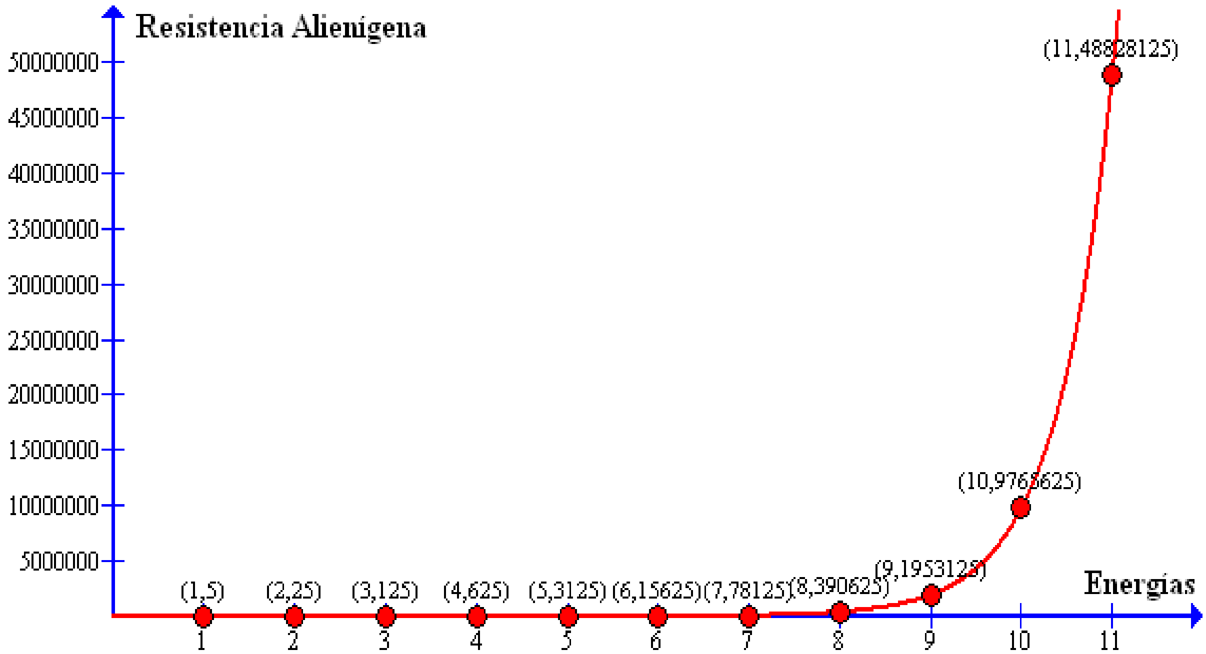
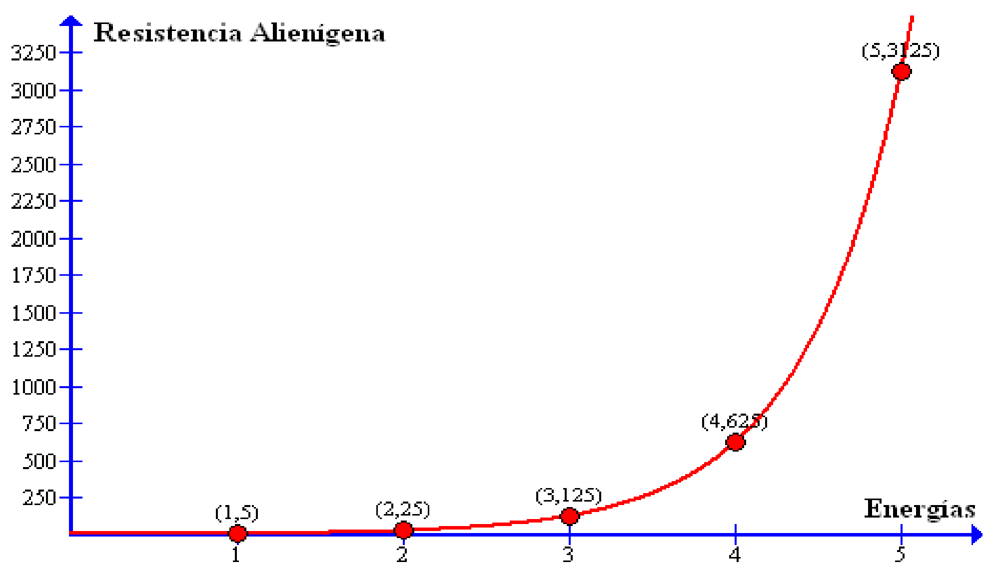


Figura 18: Gráfico base 5, incluido en el mazo de cartas.

Zoom gráfico base 5



Tablas:

Base 2

12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144

Tabla 3: Valores para construcción de gráfico de base 2

Base 3

12	531441
13	1594323
14	4782969
15	14348907
16	43046721
17	129140163
18	387420489

Tabla 4: Valores para construcción de gráfico de base 3

Base 5

12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625

Tabla 5: Valores para construcción de gráfico de base 5

ANEXO 2: HISTORIA

La tierra esta siendo invadida silenciosamente por alienígenas, pero hay ciertas organizaciones secretas en el mundo que se formaron para acabar con esta amenaza fantasma, estas organizaciones se dieron cuenta que nuestros armamentos contemporáneos no les hacen daño alguno, pues sus avanzadas civilizaciones nos superan en inteligencia bélica, pero sus investigadores descubrieron que solo hay algo que los debilita y los hace vulnerables, nuestras enfermedades, pues alteran su A.D.N. y no tienen la posibilidad de sanarse fuera de su planeta, es un punto muerto que no pueden combatir.

Tú eres un biólogo que pertenece a una de estas organizaciones secretas y estas a cargo de un laboratorio donde manipulas enfermedades para acabar con estos alienígenas. Estos entes están localizados, tu trabajo es atacarlos y prevenir su expansión en nuestro territorio, pero ten cuidado, existen mas biólogos que quieren lo mismo y están dispuestos a que tu no logres tu objetivo y sabotean tu trabajo con experimentos terribles que afectan a tus enfermedades, mantente alerta y usa con inteligencia las cartas que tienes en tu poder.

La competencia por una carrera bióloga-bélica entra en juego.

ANEXO 3: CARTAS

Figura 19: Enfermedad "Ataque Inerte"

Figura 20: Enfermedad "Fiebre Alien"

Figura 21: Enfermedad "Ímpetu"

Figura 22: Enfermedad "Dolor Infernal"

Figura 23: Experimento 1

Figura 24: Experimento 2

Figura 25: Experimento 3

Figura 26: Experimento 4

Figura 27: Experimento 5

Figura 28: Experimento 6

Figura 29: Experimento 7

Figura 30: Experimento 8

Figura 31: Bono 1 “Frustración”

Figura 32: Bono 2 “Resurrección”

ANEXO 4: INSTRUCCIONES DEL JUEGO

Objetivo del juego

Llévate la mayor cantidad de alien, utilizando como arma la producción de bacterias. Eliminas un alien solo si tu cantidad de bacterias atacantes es mayor que la cantidad de bacterias atacantes de tus oponentes, en caso de producirse un empate, el alien es eliminado por el competidor que presente el número mayor de "energías" atacantes.

Tipos de cartas

Energías

Las Energías son las cartas que sirven para que tus bacterias puedan reproducirse y además tienen la característica de activar tus bonos y experimentos. Utilizando las energías, activas las enfermedades que destruyen a cada alien. Puedes bajar una energía de tu mano en cada uno de tus turnos. Al girarlas indicarás el coste que estás pagando para activar las enfermedades, habilidades, lanzar experimentos o bonos.

Experimentos

Los experimentos son poderosos tratamientos realizados para disminuir la cantidad de bacterias atacantes del resto de los competidores, una vez utilizado un experimento, la carta sale inmediatamente del juego. Vale decir que esta carta se juega directamente desde la mano del jugador y no se gira como las enfermedades. Para utilizarla se debe pagar el coste que indica la carta en su esquina superior derecha.

Bonos

Son cartas que funcionan como premio dentro del mazo, no tienen que ver con ataque al alien ni para disminuir el ataque de tus oponentes. Para poder utilizarlos solo debes pagar el coste que te indica la carta en su esquina superior derecha, y una vez utilizado, esta carta se va directo a tu cementerio.

Enfermedades

Estas cartas son cruciales, pues son las que permiten el ataque directo al alien, las enfermedades trabajan con diferentes cantidades de bacterias madres con las que se atacará al alien en ese turno. Estas cartas poseen un elemento especial, que son las *habilidades* que se caracterizan por potenciar el ataque de otra enfermedad aumentando la población de bacterias, si se saben utilizar bien. Para poder utilizar estas cartas debes activarlas, pero debes tener cuidado: se activa la carta y además la habilidad con un coste distinto

Activando enfermedades

Las enfermedades tienen un principio: que son las bacterias madres, éstas fijan la base del ataque que realizarás para tratar de llevarte al alien, éstas bacterias madres están indicadas al costado inferior derecho de la carta, cada enfermedad tiene un coste de energía indicada al extremo superior de la carta, que deberás pagar para bajar la carta de tu mano, una vez bajada y pasado el tiempo de incubación, puedes atacar de forma directa (sin utilizar habilidades). Luego de realizar un ataque, la enfermedad ya fue ocupada, lo que implica que la carta debe ser eliminada del juego (logres o no destruir al alien)

Se debe aclarar que al atacar se puede utilizar solo una enfermedad principal, que representa las bacterias madres de tu ataque.

Habilidades

Cada enfermedad contiene habilidades que se activan pagando su coste de energía a parte del coste que se paga para bajar la carta (de la mano del jugador) que contiene la habilidad. Puedes ocupar las habilidades de todas las enfermedades que tengas en juego menos la habilidad de las enfermedades que usarás para atacar al Alien en cuestión (ataque directo).

Si utilizas la habilidad de una carta, la enfermedad no muere, pero recuerda que si usas la enfermedad para atacar, la carta debe ser sacada de la mesa.

Consideraciones importantes

Hay que diferenciar entre bajar una carta, poner en juego una carta y atacar con una carta.

- Bajar una carta quiere decir que la pones en el espacio que dispones enfrente para que puedas visualizar cómo puedes atacar al alien. Las cartas que se bajan son las energías y las enfermedades.
- Poner en juego significa que no giras la carta para atacar, esta característica la tienen las habilidades de las enfermedades, y se hace para diferenciar el apoyo a un ataque y el ataque directo, donde si se gira la carta.
- Atacar significa girar la carta y poner cuantas energías quieras, de la cantidad que dispones, para tratar de llevarte al alien.

En caso de empate, el científico que se lleva al alien es quien actuó con mayor poder de ataque (ataque sin habilidades), de tener el mismo poder de ataque, el alien y las enfermedades mueren, pero nadie se lo lleva.

Para comenzar el juego, cada científico debe sacar una carta de su mazo, y compararla con el resto de los jugadores, el que posea la enfermedad con mayor cantidad de bacterias madres, es el que comienza el juego, en caso de empate se hace de nuevo, y si la persona no sacó enfermedad solo pierde. Por ejemplo si alguien saca una enfermedad y otro saca un experimento, energía o bono parte el que sacó la enfermedad.

Tu primer Juego

Preparación

1.- Cada científico (jugador) comienza con cero bacterias de ataque. (pues no se tienen cartas en juego)

2.- Cada uno de los científicos, debe poseer un mazo de cartas y barajar su propio mazo.

3.- Decidan quién comenzará. El jugador que tome el primer turno no robará una carta para iniciar el juego.

4.- Tú y el resto de los científicos roban cada uno una mano de siete cartas.

5.- El científico que tenga las cartas de energía suficientes para atacar (en mesa), debe elegir al Alien que él considere poder llevarse, y ahí es donde comienza la lucha con el resto de los jugadores para llevarse al alien elegido.

Tu primer turno

Cada turno puedes bajar una carta de energía de tu mano a la mesa. Las energías pueden ser giradas para obtener la energía pedida por la carta que quieras activar. Si tienes un experimento que cueste una energía, puedes lanzarlo ahora.

Primer turno de los oponente

El oponente a continuación, juega una energía, roba una carta, y luego lanza experimentos si tiene suficientes energías. Si en su primera mano no posee cartas de energía, el jugador tiene la posibilidad de devolver la mano al mazo y barajar nuevamente sacando la misma cantidad de cartas (7 cartas)

Tu segundo turno

En tu turno, endereza tus energías giradas (si las tienes giradas) y roba una carta de tu mazo. Puedes jugar otra carta de energía de tu mano. Si tienes suficientes energías en la mesa puedes lanzar experimentos o activar enfermedades y sus habilidades.

Continúa así y pronto podrán activar enfermedades. Entonces ese jugador en su próximo turno podrá comenzar a atacar **escogiendo al Alien que quiere eliminar.** Sigan tomando turnos hasta que alguien logre llevarse al Alien.

Ataque

Pasos de ataque

1.- Gira la enfermedad con la que quieres atacar al Alien, con el número de cartas de energía que estimes para tu ataque. No tienes porque atacar si no quieres.

2.- En el mismo momento que utilizas tus enfermedades para atacar, puedes activar las habilidades de las otras enfermedades que tienes en la mesa, para hacer más fuerte tú ataque.

3.- Si lanzas un experimento para disminuir las bacterias de los otros científicos, ésta carta debe ponerse vuelta hacia abajo en la mesa para conservar la incógnita hasta el término de la ronda del ataque de los otros jugadores.

4.- la cantidad de daño que provoca la enfermedad es la potencia formada por la bacteria madre (representa la base) y la energía utilizada como exponente de la potencia atacante.

Orden del turno

1.- Enderezar

2.- Robar una carta

3.- Fase principal

- Juega una carta de energía (si tienes una)
- Lanza uno o más experimentos (en tu mismo turno) si puedes pagarlos

4.- Ataque

5.- Fase principal (nuevamente)

- Juega una carta de energía si todavía no lo hiciste
- Lanza uno o más experimentos si puedes pagarlos.

Anexo 5: Evaluación

I.- Calcula el valor de x en las siguientes expresiones:

1) $\log_2 x = 3$

2) $\log_6 x = 3$

3) $\log_x 27 = 3$

4) $\log_x 16 = 4$

5) $\log_3 81 = x$

6) $\log_2 256 = x$

En este ítem se busca que el alumno haga una logaritmación correcta poniendo énfasis en reconocer los diferentes elementos dentro del logaritmo, (parámetros a, b y c), realizando la siguiente correspondencia:

$$\boldsymbol{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$$

II- Calcula el valor de x en las siguientes expresiones:

7) $2^x = 32$

8) $5^x = 625$

9) $x^3 = 125$

10) $x^4 = 64$

III.- Marca la alternativa correcta

11.- El valor de $a^n \cdot a^n$ es:

a) a^{n^2}

b) a^{2n}

c) $(a^2)^{2n}$

d) a^n

Esta pregunta evidencia de forma tácita la siguiente propiedad de la exponencial:

$$\boldsymbol{exp_a\ x\ * exp_a\ y\ =\ exp_a(x+y)}$$

12.- Expresa en producto la siguiente expresión: b^{n+3}

a) $b^n \cdot 3$

b) $(b^3)^n$

c) $b^3 \cdot b^n$

d) $(b^n)^3$

Esta pregunta evidencia de forma tácita la siguiente propiedad de la exponencial:

$$\boldsymbol{exp_a(x+y) = exp_a\ x\ * exp_a\ y}$$

13.- ¿Cuál de las siguientes expresiones equivale a $\frac{n^3}{n^2}$?

a) $n^{3\ 2}$

b) n

c) n^5

d) $n^{2\ 3}$

Esta pregunta evidencia de forma tácita la siguiente propiedad de la exponencial:

$$\frac{exp_a(x)}{exp_a(y)} = exp_a(x-y)$$

14.- ¿Que sucede con la gráfica de la exponencial (curva dibujada) a medida que "x" aumenta?

a) Crece de forma lenta

b) Crece de forma rápida

c) Se mantiene

d) Decrece de forma rápida

Se pretende diferenciar el crecimiento o la caracterización del crecimiento exponencial y logarítmico, evidenciando que ambos crecen pero que uno posee un crecimiento exageradamente rápido y el otro un crecimiento notablemente más lento.

Anexo 6: Resultado evaluaciones

4º Medio A (Con herramienta)

Sexo	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	Nº de preguntas acertadas	%
M	B	B	B	B	M	B	M	M	B	B	B	B	M	B	10	71
M	M	B	B	M	B	B	B	B	M	B	M	B	M	B	9	64
M	M	M	M	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	10	71
M	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	13	93
F	B	B	B	M	B	B	M	M	B	B	B	M	M	B	9	64
M	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	13	93
M	M	B	B	B	B	B	B	B	M	M	M	B	B	B	10	71
F	B	B	M	B	M	B	B	B	B	B	B	B	M	B	11	79
F	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	12	86
M	B	M	B	B	B	B	M	B	B	B	M	M	M	B	9	64
F	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	13	93

F	B	B	B	B	B	B	B	M	M	B	B	B	B	M	11	79
F	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B	M	B	11	79
F	B	B	B	B	M	M	B	M	M	B	B	B	B	B	10	71
M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	14	100
F	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	B	12	86
M	B	M	M	B	M	M	M	M	B	B	B	B	M	B	7	50
M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	11	79
M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	12	86
M	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	M	B	M	B	10	71
M	B	B	B	B	M	M	M	M	B	B	M	B	M	B	8	57
F	M	B	B	B	B	M	B	B	B	M	B	M	M	B	9	64
M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B	12	86
M	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	M	B	M	B	11	79

Medio B (Sin herramienta)

Sexo	P1	P2	P 3	P4	P5	P 6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	Nº de preguntas acertadas	%
F	B	B	M	M	M	B	B	M	M	M	M	M	M	B	5	36
M	B	M	B	B	M	B	B	M	M	B	B	B	M	B	9	64
F	B	B	B	B	M	B	B	M	B	B	B	B	B	B	12	86
M	M	M	B	B	M	M	M	B	M	M	M	M	M	B	4	29
M	M	M	B	B	B	B	B	B	M	B	M	M	M	B	8	57
M	B	B	B	B	M	M	M	B	B	B	M	M	B	B	9	64
F	M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	10	71
F	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	B	B	M	B	11	79
F	B	B	B	M	B	B	B	B	B	B	B	B	M	M	11	79
M	M	M	M	B	B	M	M	B	B	B	B	B	M	b	8	57
F	M	B	M	M	M	B	B	B	B	B	M	B	M	B	8	57
M	M	M	B	B	B	M	M	B	M	B	M	M	M	M	5	36

F	B	B	M	M	B	B	B	M	B	M	M	B	M	B	8	57
F	B	B	B	B	B	M	M	B	B	B	M	M	M	B	9	64
M	B	B	M	B	M	M	M	B	B	B	B	B	B	B	10	71
M	B	B	B	M	M	B	M	B	M	B	B	B	B	B	10	71
M	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	M	M	M	M	9	64
M	M	M	B	B	B	B	M	M	M	M	M	M	M	B	5	36
F	M	B	M	M	M	B	M	M	M	B	M	B	B	B	6	43
M	B	B	B	B	M	B	B	M	B	B	M	B	M	B	10	71
M	B	B	M	B	M	B	B	M	B	M	B	B	B	B	10	71
F	B	B	B	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	B	13	93
F	M	M	B	B	B	B	B	M	B	B	B	B	M	B	10	71
M	M	M	B	B	B	M	B	B	B	B	B	M	M	B	9	64
F	B	B	M	B	B	B	M	M	B	B	B	B	M	B	10	71
M	B	B	B	M	B	B	B	M	M	M	M	M	M	M	6	43
F	B	B	M	B	M	B	B	B	B	M	M	B	B	B	10	71