UNIVERSIDAD DE VALPARAISO CHILE

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

CADENAS DE MARKOV

Profesor: Raúl Fierro.
Alumno: Abraham Bobadilla Osses

Valparaíso, 2010.

Agradecimientos

Después de vivir tantas cosas, luego de salir del colegio, uno entra a un mundo completamente distinto donde se encuentra en una etapa en la cual decide por si mismo y tiene en sus manos la oportunidad de una carrera, de un futuro, son éstos los momentos que pasan por mi mente al ver ya realizado un trabajo, el cual no habría sido posible sin las personas e instituciones que están detrás de uno. Con satisfacción, alegría y orgullo puedo nombrar y agradecer a todas estas personas que han estado conmigo desde el inicio hasta el fin de tan arduo proceso.

Por lo cual es justo presentarlas en este trabajo. Comenzando con mi padre Reynaldo del T Bobadilla Vásquez, quien fue un amigo, la persona que estuvo ahí pendiente de mi esfuerzo y un apoyo incondicional, siempre con la esperanza de ver a su hijo ganar esta ardua batalla, en algún momento lo habré visto luchando de tal manera que cualquier persona habría caído derrotada, pero él no, supo llevar las cosas y mantener la frente en alto, por lo cual no puedo dejar de saludarlo.

Mi madre, Marisol Elena Osses Zúñiga, que más grande y hermoso que el cariño de una madre, mujer de mil batallas que me acompañó en cada uno de los pasos que he realizado para llegar a estas instancias, al igual que mi padre, es un orgullo para mi tenerla y mencionarla en este trabajo ya que sin su apoyo habría sido imposible todo esto.

A mis hermanos, Marisol Karina Bobadilla Osses, Patricia Jazmín Bobadilla Osses, Raquel María Marlene Bobadilla Osses y por último pero no menos importante Reynaldo Antonio Bobadilla Osses, tenerlos como hermanos fue lo mejor que Dios me ha dado, personas que llegarán a ser grandes, tienen un gran camino que recorrer pero tengo la fe de que saldrán victoriosos, todos y cada uno de ellos.

A mi abuelo Reynaldo del T Bobadilla Bustos que aún que no esté en este mundo siempre he sentido su apoyo de igual manera que el de mi padre,

satisfecho de haber vivido más cercano a él sus último momentos, gracias por los valores y enseñanzas que me ha brindado.

Un saludo muy especial a mi segunda familia Luís Edgardo Zúñiga Torres, Nolfa del Carmen Álvarez Jara, padres, Yasna Isabel Zúñiga Álvarez, José Antonio Zúñiga Álvarez, hermanos, que me acogieron los primeros años de mi vida universitaria, durante ese periodo fueron un gran apoyo para mi y me dieron la calidez de un hogar. En general a la gran familia que está detrás de mi, gracias por todo.

A la persona que me ayudó en cada paso de este trabajo, agradecerle por estar ahí es lo mínimo que puedo hacer, Profesor Raúl Alejandro Fierro Pradenas, gracias por la confianza que ha depositado en mi para la realización de este documento, la paciencia que tuvo conmigo, el apoyo que me brindó en cada momento y por la oportunidad de trabajar con usted, su ayuda hizo posible estar aquí y más aún avanzar para el futuro que me depara.

Finalmente a mis amigos y personas que han estado conmigo, el apoyo incondicional de todos y cada uno de ellos fue fundamental para llegar hasta acá.

A todas estas personas y a Dios, gracias, por lo que son y fueron en su momento conmigo.

Introducción

Andrei Andreevitch Markov (1856-1922), matemático ruso, fue conocido por sus trabajos en teoría de números y teoría de probabilidades y aunque Markov influyó sobre diversos campos de las matemáticas, como son sus trabajos sobre fracciones continuas, la historia le recordará principalmente por sus resultados relacionados con la teoría de la probabilidad. En 1887 completó la prueba que permitía generalizar el teorema central del límite que ya había avanzado Chebyshev, de quien fue discípulo en la universidad, aunque su aporte más conocido fue su trabajo teórico en el campo de los procesos en los que están involucrados componentes aleatorios (procesos estocásticos) los que darán fruto a un instrumento matemático, que actualmente se conoce como Cadenas de Markov, las cuales son una serie de eventos, en los que la probabilidad de que ocurra un evento en el futuro depende sólo de lo que ocurre en el presente y no del pasado. En efecto, las cadenas de este tipo no tienen memoria. "El mañana depende de hoy pero no del ayer". Esta dependencia del evento presente distingue las cadenas de Markov de otras series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado. Son estos procesos, las cadenas de Markov, en los que estamos interesados y trataremos en esta tesis y para ello estaremos enfocados en el libro [1] de la bibliografía. Las cadenas de Markov se aplican en muchas áreas. Por ejemplo, en modelos de epidemias, de competencia de especies y también en Informática. Como veremos, estaremos interesado específicamente en el caso de procesos estocásticos de tiempo discreto y estados discretos. Otros procesos estocásticos, también llamados Cadenas de Markov, son de tiempo continuo y estados discretos, sin embargo, en este trabajo estos procesos no serán considerados. Por último tenemos los procesos estocásticos de tiempo continuo y estados continuos. En este caso, y asumiendo que un evento futuro depende sólo del presente y no del pasado, estos procesos se conocen como markovianos, o procesos de Markov.

Los procesos de Markov para el caso de tiempo continuo y espacio de estados continuo, guardan una estrecha relación con la Teoría de Semigrupos de Operadores y Generadores Infinitesimales. Esta teoría es una rama importante del Análisis Funcional, pero por su extensión y complejidad, no será tratada en esta tesis.

En el primer capítulo presentan sin demostración algunos elementos previos para una mayor comprensión de lo que trataremos más adelante. Éstos pueden encontrarse en un primer curso de Probabilidades y Teoría de la Medida y, en libros básicos como lo es [2].

En el segundo capítulo veremos la forma matemática de la definición de una cadena de Markov, observando que se emplea con bastante frecuencia el concepto de probabilidad condicional, el cual aparece definido en el capítulo de preliminares. Además de mostrar de manera sencilla las probabilidades condicionales, por medio de la función de transición y la representación matricial, veremos algunos ejemplos interesantes, además de los teoremas básicos, una clasificación de los estados de la cadena.

El capítulo tres presenta toda la teoría de cadenas de Markov, incluyendo el concepto de distribución estacionaria y la clasificación de estados con sus respectivas propiedades.

Por último, en el capítulo cuatro se muestra una aplicación de la teoría de cadenas de Markov, la cual constituye el aporte principal de esta tesis. Se determina en esta aplicación los tipos de estados, distribuciones estacionarias y dominio de atracción de cada una de ellas. El contenido de este capítulo, aunque es un aporte modesto, ilustra la utilidad de la teoría presentada en esta tesis, siendo una aplicación a un modelo simple de epidemias.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacio de Probabilidad

Definición 1.1. *Un par $(E, \mathcal{A})$, donde E es un conjunto y su σ-álgebra, de subconjuntos $\mathcal{A}$, se denomina espacio medible. Cualquier conjunto $A \in \mathcal{A}$ se denomina conjunto medible.*

Proposición 1.1. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra (si esto sirve para un álgebra entonces en particular para una σ-álgebra), $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida sobre el álgebra $\mathcal{A}$ y $(A_n; n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $\mathcal{A}$. Entonces son validas las dos proposiciones siguientes:*

(a) Si $(A_n; n \in \mathbb{N})$ es creciente por inclusión y $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$.

(b) Si $(A_n; n \in \mathbb{N})$ es decreciente por inclusión y $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ y para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, $\mu(A_{n_0}) < \infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n)$.

Notación 1.1. *Sean E un conjunto no vacío y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Anotaremos mediante f^+ y f^- las funciones de E en $\overline{\mathbb{R}}$ definidas por $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$.*

Observación 1.1. *Sean $(E, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces,*

(a) $f^+ \geqslant 0$ y $f^- \geqslant 0$.

(b) $f = f^+ - f^-$.

(c) $|f| = f^+ + f^-$.

(d) f *es medible, si y sólo si,* f^+ *y* f^- *lo son.*

Definición 1.2. *Sean* $(E, \mathcal{A})$ *un espacio medible y* $\varphi : E \to \mathbb{R}$. *Se dice que* φ *es una función simple, si y sólo si,* φ *es medible y su recorrido* $Rec(\varphi)$ *es finito.*

Definición 1.3. *Sea* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *una función simple. La integral de* φ *respecto de* μ *se define como*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{\alpha \in Rec(\varphi)} \alpha \mu(\varphi = \alpha).$$

Notación 1.2. *Si* $f : E \to [0, \infty]$ *es una función medible, anotaremos por* $\mathcal{M}(f)$ *el conjunto de todas las funciones simples no negativas y menores que* f*; es decir,*

$$\mathcal{M}(f) = \{\varphi : \varphi \text{ es simple y } 0 \leqslant \varphi \leqslant f\}.$$

Podemos definir la integral de una función no negativa de la manera que lo haremos a continuación.

Definición 1.4. *Sea* $f : E \to [0, \infty]$ *una función medible. La integral de* f *respecto de* μ *se define como*

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi \in \mathcal{M}(f)} \int \varphi d\mu.$$

Notación 1.3. *Denotaremos por* $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *o simplemente por* $L^1(\mu)$, *el conjunto de todas las funciones medibles* $f : E \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Teorema 1.1. *(De convergencia dominada.) Sea* $(f_n; n \in \mathbb{N})$ *una sucesión de funciones complejas sobre* $(E, \mathcal{A})$ *tal que,*

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in E$.

(b) *Existe* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} |fn| \leqslant g$.

Entonces $f \in L^1(\mu)$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$ *y*

(d) $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Definición 1.5. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espacio medible y* $P : \Omega \longrightarrow [0,1]$ *una función tal que*

- $P(\Omega) = 1$
- *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión de conjuntos disjuntos en* $\mathcal{F}$ *, es decir,*

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$

  entonces P *es una función de probabilidad o simplemente probabilidad.*

- *Sea* $A \in \mathcal{F}$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Observación 1.2. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *se denomina espacio de probabilidad*

Observación 1.3. Ω *se denomina espacio muestral.*

Observación 1.4. *Los elementos de* $\mathcal{F}$ *se denominan eventos o sucesos.*

1.2. Condicionamiento e Independencia

Definición 1.6. *Sea* $A \in \mathcal{F}$ *tal que* $P(A) > 0$. *La probabilidad condicional dado* A *es la función* $P(\cdot|A) : \mathcal{F} \to [0,1]$ *definida por*

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A). \tag{1}$$

Observación 1.5. *La probabilidad condicional es una medida de probabilidad sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Teorema 1.2. *(De las Probabilidades Totales.) Sean $\mathcal{I}$ un conjunto contable y $\{A_i; i \in \mathcal{I}\}$ una partición de Ω tal que para todo $i \in \mathcal{I}$, $P(A_i) > 0$. Entonces, para todo $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(A) = \sum_{i \in \mathcal{I}} P(A|A_i)P(A_i). \tag{2}$$

Ejemplo 1.1. *(Teorema de Bayes.) Sean $\mathcal{I}$ un conjunto contable, $\{A_i; i \in \mathcal{I}\}$ una partición de Ω tal que para todo $i \in \mathcal{I}$, $P(A_i) > 0$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que $P(A) > 0$. Entonces, para todo $i \in \mathcal{I}$,*

$$P(A_i|A) = \frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}} P(A|A_i)P(A_i)}. \tag{3}$$

Demostración. Basta notar que $P(A_i) = P(A|A_i)P(A_i)/P(A)$ y luego aplicar el Teorema de las Probabilidades Totales.

Definición 1.7. *Sean $A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Se dice que $A_1 \ldots, A_n$ son $P-$independientes (o simplemente, independientes), si y sólo si, para todos $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene*

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_r}). \tag{4}$$

Observación 1.6. *Sean $A, B \in \mathcal{F}$ sucesos independientes tales que $P(B) > 0$. Entonces, $P(A|B) = P(A)$.*

Definición 1.8. *Sea T una variable aleatoria con valores en $\mathbb{N}$. La función generatriz de momentos de T se define como*

$$G_T(t) = E(t^T).$$

Nótese que

$$G_T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n P(T = n).$$

El conocimiento de $G_T(t)$ para todo t en una vecindad de cero, permite conocer $P(T = n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, desarrollando en serie de

Maclaurin se tiene

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Por consiguiente, para todo $n \geqslant 1$, $P(T = n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$ *y* $P(T = 0) = 1 - G(1)$.

1.3. Variables Aleatorias

Definición 1.9. *Sean* E *un espacio topológico. Un elemento aleatorio es una función* $X : \Omega \to E$ *medible respecto de las* $\sigma-$*álgebras* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{B}(E)$. *Si* $E = \mathbb{R}$ *el elemento aleatorio* X *se conoce como variable aleatoria, y si* $E = \mathbb{R}^n$, X *se conoce como vector aleatorio.*

Definición 1.10. *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $f(x) \geqslant 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$

se le llama función de densidad

1.3.1. Tipos de Variables aleatorias

Definición 1.11. *Una variable aleatoria* X *es discreta si* $Rec(X)$ *es contable. Donde* $Rec(X)$ *es el recorrido de* X.

Observación 1.7. *Un conjunto es contable si es finito o numerable*

Definición 1.12. *Una variable aleatoria* X *es continua si su recorrido no es un conjunto contable. Pero tiene como posible valor todo un intervalo real.*

Definición 1.13. *Sea* $X : \Omega \to E$ *una variable aleatorio. La ley o distribución de* X *es la medida sobre* $(E, \mathcal{B}(E))$ *definida por*

$$P_X(x) = P(X \leqslant x), \tag{5}$$

que satisface las propiedades siguientes:

- $\lim_{x \to -\infty} P_X(x) = 0$ *y* $\lim_{x \to +\infty} P_X(x) = 1$

- *Es continua por la derecha*
- *Es monótona no decreciente*

Definición 1.14. *Dada una variable aleatoria X, la esperanza de X se define como*

$$E(X) = \int X(\omega)P(d\omega)$$

Para una variable aleatoria continua la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Para una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2 \ldots x_n$ y sus probabilidades representadas por la función de probabilidad P la esperanza se calcula como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Definición 1.15. *Para X, Y variables aleatorias, la covarianza entre X e Y se define como*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \tag{6}$$

y para X variable aleatoria, la varianza de X está definida mediante

$$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Cov}(X, X). \tag{7}$$

Observación 1.8. *Sean X, Y variables aleatorias. Luego, se verifica las dos condiciones siguientes:*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{8}$$

$$\operatorname{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2. \tag{9}$$

Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarsz se tiene

$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}. \tag{10}$$

1.4. Distribuciones Notables

Comenzaremos definiendo la distribución de Bernoulli que sirve para la binomial

Definición 1.16. *La distribución de Bernoulli es una distribución de probabilidad discreta, que toma valor 1 para la probabilidad de éxito p y valor 0 para la probabilidad de fracaso $q = 1 - p$.*

Si X es una variable aleatoria que mide "número de éxitos", y se realiza un único experimento con dos posibles resultados (éxito o fracaso), se dice que la variable aleatoria X se distribuye como una Bernoulli de parámetro p.

La fórmula será:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ con } x = \{0, 1\}$$

Su función de probabilidad viene definida por:

$$f(x;p) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ q & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Ahora comenzamos con las mas fuertes

Definición 1.17. *(Distribución Binomial.) Supongamos que $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ son sucesos $P-$independientes y tales que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $P(A_i) = p$, donde $0 < p < 1$.*

Definimos $X = \mathrm{I}_{A_1} + \cdots + \mathrm{I}_{A_n}$. Luego, la variable aleatoria X es suma de n variables aleatorias con distribución Bernoulli de parámetro p.

Nótese que $\mathrm{Rec}(X) = \{0, \ldots, n\}$. Sea $k \in \mathrm{Rec}(X)$. Luego, si denotamos por $\mathcal{I}_k$ la familia de subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$ con k elementos, entonces

$$P(X = k) = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} P(\bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{j \in J^c} A_j^c) = \sum_{J \in \mathcal{I}_k} p^k(1-p)^{n-k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k(1-p)^{n-k}.$$

Se dice que una variable aleatoria tiene distribución Binomial con parámetros n y p, si su función de cuantía está dada por

$$p_X(k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k(1-p)^{n-k} \mathrm{I}_{\{0,1,\ldots,n\}}(k).$$

Anotaremos en este caso $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Proposición 1.2. *Sea X una variable aleatoria con distribución Binomial de paráme-tros n y p. Entonces, $E(X) = np$ y $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.*

Definición 1.18. *(Distribución de Poisson.) Esta distribución corresponde a la de una variable aleatoria X cuya distribución P es absolutamente continua respecto de la medida de conteo μ sobre $\mathbb{N}$ y además,*

$$\frac{dP}{d\mu}(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

En efecto ésta es una función de cuantía que satisface $E(X) = \lambda$ y $\mathrm{Var} = \lambda$.

Capítulo 2

Cadenas de Markov

Considere un sistema que puede estar en cualquiera de un número finito o un número contable de estados. Denotemos por $\mathcal{P}$ este conjunto de estados. Podemos asumir que $\mathcal{P}$ es un subconjunto de los enteros. El conjunto $\mathcal{P}$ es llamado el espacio de estados del sistema. Sea el sistema observado en los momentos discretos de tiempo $n = 0, 1, 2, \ldots$ y X_n denota el estado del sistema en el instante n. Ya que estamos interesados en un sistema no-determinado, pensamos en X_n, con $n \geqslant 0$, como una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad común. Poco puede decirse acerca de tal variable a menos que se imponga alguna estructura adicional sobre ésta. La estructura más simple posible es la de variable aleatoria independiente. Muchos sistemas tienen la propiedad que dado el estado presente, los estados pasado no tiene influencia sobre los futuro. Esta propiedad es llamada la propiedad de Markov y los sistemas que tienen esta propiedad se llaman cadenas de Markov. La propiedad de Markov será definida precisamente por el requerimiento que

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \quad (1)$$

para cada elección del entero no negativo n y los números $x_0, \ldots, x_n$, cada uno en $\mathcal{P}$. Las probabilidades condicionales $P(X_{n+1} = y | X_n = x)$ son llamadas las probabilidades de transición de la cadena. En este libro estudiaremos cadenas de Markov que tienen probabilidades de transición estacionarias, es decir, $P(X_{n+1} = y | X_n = x)$ es independiente de n. En adelante cuando hablemos de X_n, $n \geqslant 0$, forma una cadena de Markov, queremos decir que esta variable aleatoria satisface esta propiedad de Markov y tiene probabilidades de transición estacionaria.

2.1. Cadenas de Markov con dos estados

Para un ejemplo de una cadena de Markov que tiene dos estados, considerar una máquina que al comienzo de cualquier día en particular está rota, o en condiciones de operar. Se asume que si la maquina está rota al comienzo del día n, la probabilidad de que ésta sea reparada con éxito es p y esté en condiciones de operar al día $n+1$. Se asume también que si la máquina está en condiciones de operar al comienzo del día n, la probabilidad de que ésta tenga una falla que cause su rompimiento al comienzo del día $n+1$ es q. Finalmente, sea $\pi_0(0)$ que denotará la probabilidad de que la máquina esté rota inicialmente, es decir, al comienzo del día 0.

Sea 0 el estado que corresponderá a la máquina estando rota y sea el estado 1 que corresponderá a la máquina que está en condiciones de operar. Sea X_n la variable aleatoria que denota el estado de la máquina al instante n. Según la descripción anterior

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = p$$

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = q$$

y

$$P(X_0 = 0) = \pi_0(0).$$

Ya que existen sólo dos estados, 0 y 1, sigue inmediatamente que

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = 1 - p$$

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1 - q$$

y $\pi_0(1)$ que denota la probabilidad que la máquina esté inicialmente en el estado 1 está dada por

$$\pi_0(1) = P(X_0 = 1) = 1 - \pi_0(0)$$

Con esta información, podemos fácilmente calcular $P(X_n = 0)$ y $P(X_n = 1)$. Observamos que:

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 0) &= P(X_n = 0 \text{ y } X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1 \text{ y } X_{n+1} = 0) \\
&= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) \\
&= (1-p)P(X_n = 0) + q(1 - P(X_n = 0)) \\
&= q + (1-p-q)P(X_n = 0)
\end{aligned}$$

Ahora $P(X_0 = 0) = \pi_0(0)$, así

$$P(X_1 = 0) = (1-p-q)\pi_0(0) + q$$

y

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= (1-p-q)P(X_1 = 0) + q \\
&= (1-p-q)^2\pi_0(0) + (1-p-q)q + q \\
&= (1-p-q)^2\pi_0(0) - q(1 + (1-p-q))
\end{aligned}$$

Se ve fácilmente repitiendo este procedimiento n veces que:

$$P(X_n = 0) = (1-p-q)^n\pi_0(0) + q\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j \tag{2}$$

En el caso trivial $p = q = 0$, es claro que para todo n

$$P(X_n = 0) = \pi_0(0) \text{ y } P(X_n = 1) = \pi_0(1)$$

Supongamos ahora que $p + q > 0$. Entonces la formula para la suma de una progresión geométrica:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(1-p-q)^j = \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

De la ecuación (2) concluimos que,

$$P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n(\pi_0(0) - \frac{q}{p+q}) \tag{3}$$

y en consecuencia que

$$P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n(\pi_0(1) - \frac{p}{p+q}) \tag{4}$$

Supongamos que p y q no son iguales a cero ni iguales a uno. Entonces $0 < p+q < 2$, lo cual implica que $|1-p-q| < 1$. En este caso podemos hacer tender $n \longrightarrow \infty$ en (3) y (4) y concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} \tag{5}$$

Podemos también obtener las probabilidades $\frac{q}{p+q}$ y $\frac{p}{p+q}$ por una aproximación distinta. Suponga que queremos escoger $\pi_0(0)$ y $\pi_0(1)$ de modo que $P(X_n = 0)$ y $P(X_n = 1)$ son independientes de n. Es claro de (3) y (4) que para hacer esto debemos escoger

$$\pi_0(0) = \frac{q}{p+q} \ \text{ y } \ \pi_0(1) = \frac{p}{p+q}$$

Así vemos que si X_n, $n \geqslant 0$, comienza con distribución inicial

$$P(X_0 = 0) = \frac{q}{p+q} \ \text{ y } \ P(X_0 = 1) = \frac{p}{p+q}$$

entonces para todo n

$$P(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} \ \text{ y } \ P(X_n = 1) = \frac{p}{p+q}$$

La descripción de la máquina es vaga porque realmente no dice si puede asumirse que X_n, $n \geqslant 0$, satisface la propiedad de Markov. Supongamos, sin embargo, que la propiedad de Markov se sostiene. Podemos usar esta información adicional para calcular la distribución conjunta de $X_0, X_1, \ldots, X_n$.
Por ejemplo, sea $n = 2$ y sea x_0, x_1 y x_2 cada uno igual a 0 o 1. Entonces
$P(X_0 = x_0,\ X_1 = x_1 \text{ y } X_2 = x_2)$

$$\begin{aligned}
&= P(X_0 = x_0 \text{ y } X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_0 = x_0 \text{ y } X_1 = x_1) \\
&= P(X_0 = 0)P(X_1 = x_1|X_0 = x_0)P(X_2 = x_2|X_0 = x_0 \text{ y } X_1 = x_1)
\end{aligned}$$

Ahora $P(X_0 = x_0)$ y $P(X_1 = x_1|X_0 = x_0)$ son determinados por p, q y $\pi_0(0)$ pero sin la propiedad de Markov, no podemos evaluar $P(X_2 = x_2|X_0 = x_0 \text{ y } X_1 = x_1)$ en términos de p, q y $\pi_0(0)$. Si la propiedad de Markov se sostiene, sin embargo, entonces

$$P(X_2 = x_2|X_0 = x_0 \text{ y } X_1 = x_1) = P(X_2 = x_2|X_1 = x_1),$$

lo cual está determinado por p y q. En este caso
$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1 \text{ y } X_2 = x_2)$

$$= P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1|X_0 = x_0)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1)$$

Y se tiene por ejemplo
$P(X_0 = 0, X_1 = 1 \text{ y } X_2 = 0)$

$$\begin{aligned} &= P(X_0 = 0)P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_2 = 0|X_1 = 1) \\ &= \pi_0(0)pq \end{aligned}$$

2.2. Función de transición y distribución inicial

Sea X_n, $n \geqslant 0$ una cadena de Markov teniendo espacio de estados $\mathcal{P}$. (La restricción de dos estados ahora no corre) La función $P(x, y)$, $x, y \in \mathcal{P}$ definida por

$$P(x, y) = P(X_1 = y|X_0 = x) \quad x, y \in \mathcal{P} \tag{6}$$

es llamada función de transición de la cadena. Es tal que

$$P(x, y) \geqslant 0, \quad x, y \in \mathcal{P} \tag{7}$$

$$\sum_y P(x, y) = 1 \quad x \in \mathcal{P} \tag{8}$$

Ya que las cadenas de markov tienen probabilidades estacionarias, vemos que

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x) = P(x, y) \quad n \geqslant 1. \tag{9}$$

Ahora sigue de la propiedad de Markov que

$$P(X_{n+1} = y|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = x) = P(x, y). \tag{10}$$

Observación 2.1. *Si la cadena de Markov está en el estado x en el momento n, entonces sin importar como se obtiene x, este tiene probabilidad $P(x, y)$ de estar en el estado y en el siguiente paso. Por esta razón los números $P(x, y)$ son llamados el paso-uno de las probabilidades de transición de la cadena de Markov.*

La función $\pi_0(x)$, $x \in \mathcal{P}$ esta definida por

$$\pi_0(x) = P(X_0 = x),\ x \in \mathcal{P}, \tag{11}$$

es llamada la distribución inicial de la cadena. Es tal que

$$\pi_0(x) \geqslant 0, \ x \in \mathcal{P}, \tag{12}$$

y

$$\sum_x \pi_0(x) = 1. \tag{13}$$

La distribución conjunta de $X_0, \ldots, X_n$ puede fácilmente ser expresada en términos de la función de transición y la distribución inicial. Por ejemplo,

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1) = P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1|X_0 = x_0) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)$$

También

$$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &\quad = P(X_0 = x_0, X_1 = x_1)P(X_2 = x_2|X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\ &\quad = P(X_0 = x_0)P(X_1 = x_1|X_0 = x_0)P(X_2 = x_2)|X_1 = x_1) \cdots (*) \end{aligned}$$

$(*)$ esto es por propiedad de Markov
por lo cual tenemos

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = 2) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)$$

Finalmente se tiene por inducción que:

$$P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = n) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n) \tag{14}$$

Esto usualmente es mas conveniente, sin embargo, para invertir el orden de nuestras definiciones. Diremos que $P(x, y)$, $x, y \in \mathcal{P}$, es una función de transición si ésta satisface (7) y (8), y diremos que $\pi_0(x)$, $x \in \mathcal{P}$, es una distribución inicial si ésta satisface (12) y (13). Puede mostrarse que dado cualquier función de transición P y cualquier distribución inicial π_0, existe un espacio de probabilidad y variables aleatorias X_n, $n \geqslant 0$, definido sobre ese espacio que satisfacen (14). Esto se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Sea P una matriz de transición definida sobre un espacio de estados (contable) $\mathcal{P}$ y π_0 una probabilidad sobre $(\mathcal{P}, 2^{\mathcal{P}})$. Entonces, existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una cadena de Markov X_n, $n \geq 0$ definida sobre este espacio tal que, para todo $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{P}$,*

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \pi_0(x_0)P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n).$$

La demostración de este resultado requiere de propiedades de espacio producto que no veremos en este apunte además del uso del Teorema de extensión de Kolmogorov que puede encontrarse en libros de teoría de la medida como lo es el libro [5], señalado en la bibliografía de este apunte.

Agregamos a la convención usual que por "una cadena de Markov teniendo función de transición P", realmente queremos decir la familia de todas las cadenas de Markov teniendo esta función de transición.

2.3. Ejemplos

En esta sección describiremos brevemente varios interesantes ejemplos de cadenas de Markov. Estos ejemplos se desarrollarán más allá en la continuación.

Ejemplo 1. *Caminata aleatoria (Random walk). Sea $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con valores enteros teniendo densidad común f. Sea X_0 una variable aleatoria con valores enteros, ésta es independiente de los $\epsilon_i{}'s$ y $X_n = X_0 + \epsilon_1 + ... + \epsilon_n$. La sucesión X_n, $n \geqslant 0$, es llamado una caminata aleatoria. Esto es una cadena de Markov de la cual el espacio de estados es el conjunto de los enteros y donde la función de transición está dada por*

$$P(x, y) = f(y - x).$$

Para verificar esto, denotemos por π_0 la distribución de X_0. Notemos que

$$\{X_0 = x_0\} \cap \{a \in \mathcal{P} | X_1(a) = x_1\} = \{X_0 = x_0\} \cap \{a \in \mathcal{P} | (X_0 + \epsilon_1)(a) = x_1\}$$

$$= \{X_0 = x_0\} \cap \{a \in \mathcal{P} | x_0 + \epsilon_1(a) = x_1\} = \{X_0 = x_0\} \cap \{\epsilon_1 = x_1 - x_0\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) &= P(X_0 = x_0, \epsilon_1 = x_1 - x_0, \ldots, \epsilon_n = x_n - x_{n-1}) \\
&= P(X_0 = x_0)P(\epsilon_1 = x_1 - x_0) \cdots P(\epsilon_n = x_n - x_{n-1}) \\
&= \pi_0(x_0) f(x_1 - x_0) \cdots f(x_n - x_{n-1}) \\
&= \pi_0(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

y así (14) se cumple.

Suponga una "partícula" moviéndose a lo largo del conjunto de los enteros según esta cadena de Markov. Siempre que la partícula esté en x, sin tener en cuenta como llego allí, ésta salta al estado y con una probabilidad de $f(x-y)$.

Como un caso especial, considerar una caminata aleatoria simple en la cual $f(1)=p$, $f(-1)=q$, y $f(0)=r$, donde p, q y r son no negativos y suman uno. La función de transición está dada por

$$P(x,y)=\begin{cases} p, & y=x+1, \\ q, & y=x-1, \\ r, & y=x, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Tomemos una partícula como ejemplo realizando esta caminata. Si la partícula está en el estado x a una observación dada, entonces para la siguiente observación ésta ha saltado al estado $x+1$ con probabilidad p y al estado $x-1$ con probabilidad q; con probabilidad r se mantendrá en el estado x.

Ejemplo 2. *Cadena de Ehrenfest. El siguiente. es un simple modelo del intercambio de calor o de moléculas de gas entre dos cuerpos aislados. Supongamos que tenemos dos cajas, designadas por 1 y 2, y d bolitas etiquetadas* $1,2,\ldots,d$. *Inicialmente algunas de estas bolitas están en la caja 1 y el resto están en la caja 2. Un entero es seleccionado al azar de* $1,2,\ldots,d$ *y la bolita etiquetada con este entero es extraída de su caja y es puesta en la otra caja. Este procedimiento es repetido de manera indefinida donde la selección es independiente en cada ensayo.* X_n *denota el número de bolitas en la caja 1 después de n ensayos. Entonces* X_n, $n \geqslant 0$, *es una cadena de Markov sobre* $\mathcal{P}=\{0,1,2,\ldots,d\}$.

La función de transición de esta cadena es fácil de calcular. Suponer que existen x bolitas en la caja 1 en el instante n. Entonces con probabilidad x/d de sacar la bolita en el ensayo $n+1$ donde estará en la caja 1 y será transferida a la caja 2. En este caso habrá $x-1$ bolitas en la caja 1 en el instante $n+1$. De manera similar, con probabilidad $(d-x)/d$ de sacar la bolita en el ensayo $n+1$ donde estará en la caja 2 y sera transferida a la caja 1, resultando $x+1$ en la caja 1 en el instante $n+1$. Así la función de transición de esta cadena de Markov está dada por

$$P(x,y)=\begin{cases} \frac{x}{d}, & y=x-1, \\ 1-\frac{x}{d} & y=x+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notar que la cadena de Ehrenfest en sólo una transición va del estado x a $x-1$ o $x+1$ con probabilidad positiva.

Un estado a de una cadena de Markov es llamado un estado absorbente si $P(a,a) = 1$ o, de manera equivalente, si $P(a,y) = 0$ para $y \neq a$. El siguiente ejemplo usa esta definición.

Ejemplo 3. *Cadena de la ruina de un jugador. Suponga un jugador comienza con un cierto capital inicial en dólares y hace una serie de apuestas de un dólar contra la casa. Se asume que el tiene probabilidades respectivas p y $q = 1 - p$ de ganar y perder en cada apuesta, y que si su capital alguna vez llega a cero, el queda en la ruina y su capital permanece en cero después de esto. Sea X_n, $n \geqslant 0$, denota el capital del jugador en el instante n. Esta es una cadena de Markov en la cual* 0 *es un estado absorbente, y para $x \geqslant 1$*

$$P(x,y) = \begin{cases} q, & y = x - 1, \\ p, & y = x + 1, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{15}$$

Tal cadena es llamada una "cadena de la ruina de un jugador" sobre $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Podemos modificar este modelo suponiendo que si el capital de un jugador llega a d dólares el deja de jugar. En este caso 0 y d son los estados absorbentes y (15) se cumple para $x = 1, \ldots, d-1$.

Para una interpretación alternativa de la última cadena, podemos asumir que dos jugadores están haciendo una serie de apuestas de un dólar contra nosotros y que entre ellos tienen un capital total de d dólares. Suponga que el primer jugador tiene una probabilidad p de ganar cualquier apuesta dada, y el segundo jugador se va quebrado. Sea X_n denotando el capital del primer jugador al instante n. Entonces X_n, $n \geqslant 0$, es una cadena de la ruina del jugador sobre $\{0, 1, \ldots, d\}$

Ejemplo 4. *Cadena de ramificación. Considerar unas partículas como por ejemplo neutrones o bacterias que pueden generar nuevas partículas del mismo tipo. El conjunto inicial de objetos se conoce como perteneciente a la generación 0. Las partículas generadas por la n-ésima generación se dice que pertenecen a la generación $n+1$. Sea X_n, $n \geqslant 0$, denota el número de partículas en la n-ésima generación.*

Nada en la presente descripción requiere que las diversas partículas en una generación dieran a lugar a nuevas partículas simultáneamente. De hecho, en un instante dado, las partículas de varias generaciones pueden coexistir.

Una situación típica es ilustrada en la Figura 1: una partícula inicial da a lugar a dos partículas. Así $X_0 = 1$ y $X_1 = 2$. Una de las partículas de la primera generación da a lugar a tres partículas y la otra da a lugar una partícula, así que $X_2 = 4$. Vemos de la Figura 1 que $X_3 = 2$. Ya que ninguna de las partículas en la tercera generación da a lugar a nuevas partículas, concluimos que $X_4 = 0$ y *consecuentemente que* $X_n = 0$ *para todo* $n \geqslant 4$. *En otras palabras, la progenie de la partícula inicial en la generación 0 se extingue después de tres generaciones.*

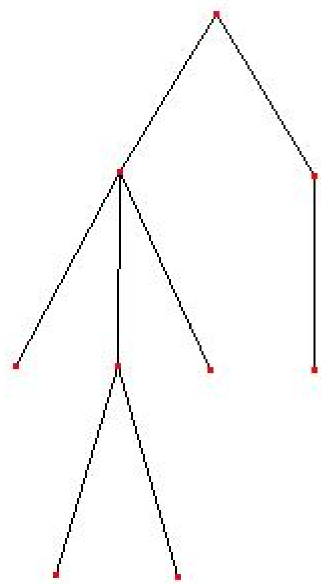


Figura 1

Con el fin de modelar este sistema como una cadena de Markov, supongamos que cada partícula da a lugar a ϵ *partículas en la siguiente generación, donde* ϵ *es una variable aleatoria con valores enteros no negativos teniendo densidad* f. *Suponemos que el número de descendientes de las diversas partículas en las distintas generaciones son escogidas independientemente de acuerdo a la densidad* f.

Bajo estas suposiciones X_n, $n \geqslant 0$, *forma una cadena de Markov cuyo espacio de estados son los enteros no negativos. El estado 0 es un estado absorbente. Si no hay partículas en una generación dada, no habrán partículas para las siguiente generaciones. Para* $x \geqslant 1$

$$P(x,y) = P(\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_x = y),$$

donde $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_x$ *variables aleatorias independientes teniendo densidad común* f. *En particular,* $P(1,y) = f(y)$, $y \geqslant 0$.

Si una partícula da a lugar a $\epsilon = 0$ partículas, la interpretación es que las partículas mueren o desaparecen. Suponer que una partícula da a lugar a ϵ partículas, que a su vez da a lugar a otras partículas; pero después de algún número de generaciones, todas las descendientes de la partícula inicial han muerto o desaparecido (ver Figura 1). Describimos tal evento diciendo que los descendientes de la partícula original, eventualmente se extinguieron. Un problema interesante que envuelve cadenas de ramificación es para calcular la probabilidad ρ de la eventual extinción para una cadena de ramificación que comienza con una sola partícula o, de manera equivalente, la probabilidad que una cadena de ramificación que comienza en el estado 1 será absorbida por el estado 0. Una vez determinado ρ, podemos fácilmente encontrar la probabilidad que en una cadena de ramificación que comienza con x partículas los descendientes de cada una de las partículas originales eventualmente se extinguirán. De hecho, ya que se asume que las partículas actúan de manera independiente donde dan a lugar nuevas partículas, la tan deseada probabilidad es con exactitud ρ^x.

Ejemplo 5. *Cadena de colas (o de filas). Considere un centro de servicios, tal como una caja en un supermercado. Las personas llegan al centro en diversos momentos y finalmente son atendidos. Los clientes que han llegado al centro pero aún no han sido atendidos forman una linea de espera o cola. Hay una variedad de modelos para describir tales sistemas. Vamos a considerar aquí sólo un modelo muy simple y un tanto artificial.*

El tiempo lo mediremos en periodos algo mas convenientes, digamos en minutos. Suponga que si hay algunos clientes esperando para ser atendidos al comienzo de algún periodo dado, con exactitud un cliente será atendido durante este periodo, y que si no hay clientes que esperen ser atendidos al comienzo de un periodo, ninguno será atendido durante ese periodo. Sea ϵ_n *denota el número de nuevos clientes que llegan durante el periodo* n. *Asumimos que* $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ *son variables aleatorias independientes con valores enteros teniendo densidad común* f.

Si X_0 *denota el número de clientes presentes inicialmente, y para* $n \geqslant 1$, X_n *denota el número de clientes presentes al final del* n*-ésimo periodo. Si* $X_n = 0$, *entonces* $X_{n+1} = \epsilon_{n+1}$; *y si* $X_n \geqslant 1$, *entonces* $X_{n+1} = X_n + \epsilon_{n+1} - 1$. *De esto sigue sin dificultad de lo asumido sobre* ϵ_n, $n \geqslant 1$, *que* X_n, $n \geqslant 0$, *es una cadena de Markov cuyo espacio de estados es los enteros no negativos y cuya función de transición* P *está dada por*

$$P(0, y) = f(y)$$

y

$$P(x, y) = f(y - x + 1), \qquad x \geqslant 1.$$

Ejemplo 6. *Considere un gen compuesto de d subunidades, donde d es algún entero positivo y cada subunidad está o, en forma normal o mutante. Considere una célula compuesta con m subunidades mutantes y $d-m$ subunidades normales. Antes de la división celular en dos células hijas, el gen se duplica. El gen correspondiente a una de las células hijas está compuesto de d unidades elegidas al azar de las $2m$ subunidades mutantes y las $2(d-m)$ subunidades normales. Suponer que seguimos una linea fija de descendientes de un gen dado. Sea X_0 el número de subunidades mutantes presentes inicialmente, y sea X_n, $n \geqslant 1$, el número presente en el n-ésimo descendiente gen. Entonces X_n, $n \geqslant 0$, es una cadena de Markov sobre $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, \ldots, d\}$ y*

$$P(x, y) = \frac{\binom{2x}{y}\binom{2d-2x}{d-y}}{\binom{2d}{d}}.$$

Los estados 0 y d son estados absorbentes para esta cadena.

2.4. Cálculos con funciones de transición

Sea X_n, $n \geqslant 0$, una cadena de Markov sobre $\mathcal{P}$ teniendo función de transición P.

Comenzaremos con la formula

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) =$$
$$= P(x_n, x_{n+1}) \ldots P(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \tag{16}$$

Para probar (16) escribimos el lado izquierdo de esta ecuación como

$$\frac{P(X_0 = x_0, \ldots, X_{n+m} = x_{n+m})}{P(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)}$$

Por (14) esta proporción iguala

$$\frac{\pi_0(x_0)P(x_0,x_1)\dots P(x_{n+m-1},x_{n+m})}{\pi_0(x_0)P(x_0,x_1)\dots P(x_{n-1},x_n)}$$

lo cual se reduce al lado derecho de (16).

Es conveniente escribir (16) como

$$P(X_{n+1}=y_1,\dots,X_{n+m}=y_m|X_0=x_0,\dots,X_n=x)=$$
$$=P(x,y_1)P(y_1,y_2)\cdots P(y_{m-1},y_m) \tag{17}$$

Sea $A_0,\dots,A_{n-1}$ subconjuntos de $\mathcal{P}$. Sigue de (17) y Ejercicio 5,1(a) (Capitulo 5) que

$$P(X_{n+1}=y_1,\dots,X_{n+m}=y_m|X_0\in A_0,\dots,X_{n-1}\in A_{n-1},X_n=x)=$$
$$=P(x,y_1)P(y_1,y_2)\cdots P(y_{m-1},y_m) \tag{18}$$

Sea $B_1,\dots,B_m$ subconjuntos de P. Sigue de (18) y Ejercicio 5,1(b) que

$$P(X_{n+1}\in B_1,\dots,X_{n+m}\in B_m|X_0\in A_0,\dots,X_{n-1}\in A_{n-1},X_n=x)=$$
$$=\sum_{y_1}\cdots\sum_{y_m}P(x,y_1)P(y_1,y_2)\cdots P(y_{m-1},y_m) \tag{19}$$

La función de transición de m-pasos $P^m(x,y)$, la cual da la probabilidad de ir de x a y en m pasos, está definida por

$$P^m(x,y)=\sum_{y_1}\cdots\sum_{y_{m-1}}P(x,y_1)P(y_1,y_2)\cdots P(y_{m-1},y) \tag{20}$$

para $m\geqslant 2$, para $P^1(x,y)=P(x,y)$ y por

$$P^0(x,y)=\begin{cases} 1, & x=y,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Vemos poniendo $B_1=\ldots=B_{m-1}=P$ y $B_n=y$ en (19) que

$$P(X_{n+m}=y|X_0\in A_0,\dots,X_{n-1}\in A_{n-1},X_n=x)=P^m(x,y) \tag{21}$$

En particular, poniendo $A_0=\ldots=A_{n-1}=P$, vemos que

$$P(X_{n+m}=y|X_n=x)=P^m(x,y) \tag{22}$$

También sigue de (21) que

$$P(X_{n+m} = y|X_0 = x, X_n = z) = P^m(z, y) \tag{23}$$

Ya que (ver Ejercicio 5,1(c))

$$\begin{aligned} P^{n+m}(x,y) &= P(X_{n+m} = y|X_0 = x) \\ &= \sum_z P(X_n = z|X_0 = x)P(X_{n+m} = y|X_0 = x, X_n = z) \\ &= \sum_z P^n(x,z)P(X_{n+m} = y|X_0 = x, X_n = z), \end{aligned}$$

concluimos de (23) que

$$P^{n+m}(x,y) = \sum_z P^n(x,z)P^m(z,y) \tag{24}$$

Para cadenas de Markov teniendo un número finito de estados, (24) nos hace pensar en P^n como la n-esima potencia de la matriz P, seguiremos una idea de esto en la sección 2.4.2.

Sea π_0 una distribución inicial para la cadena de Markov. Ya que

$$\begin{aligned} P(X_n = y) &= \sum_x P(X_0 = x, X_n = y) \\ &= \sum_x P(X_0 = x)P(X_n = y|X_0 = x), \end{aligned}$$

vemos que

$$P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)P^n(x,y). \tag{25}$$

Esta fórmula nos permite calcular la distribución en términos de la distribución inicial y la función de transición de n-pasos.

Para un método alternativo para calcular la distribución de X_n observe que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y) &= \sum_x P(X_n = x, X_{n+1} = y) \\ &= \sum_x P(X_n = x)P(X_{n+1} = y|X_n = x), \end{aligned}$$

así que

$$P(X_{n+1} = y) = \sum_x P(X_n = x)P(x, y). \tag{26}$$

Si sabemos la distribución de X_0, podemos usar (26) para encontrar la distribución de X_1. Entonces, sabiendo la distribución de X_1, podemos usar (26) para encontrar la distribución de X_2. De manera similar, podemos encontrar la distribución de X_n aplicando (26) n veces.

Usaremos la notación $P_x()$ para denotar probabilidades de varios eventos definidos en términos de una cadena de Markov comenzando en x. Así

$$P(X_1 \neq a, X_2 \neq a, X_3 = a | X_0 = x) = P_x(X_1 \neq a, X_2 \neq a, X_3 = a)$$

denota la probabilidad que una cadena de Markov que comienza en x está en un estado a en el instante 3 pero no en el momento 1 o 2. En términos de esta notación, (19) puede ser escrito como

$$P(X_{n+1} \in B_1 \ldots, X_{n+m} \in B_m | X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x)$$
$$= P_x(X_1 \in B_1, \ldots, X_m \in B_m) \tag{27}$$

2.4.1. Tiempos de llegada

Sea A un subconjunto $\mathcal{P}$. El tiempo llegada T_A de A esta definida como

$$T_A = \text{mín}\,(n > 0 : X_n \in A)$$

si $X_n \in A$ para algún $n > 0$, y por $T_A = \infty$ si $X_n \notin A$ para todo $n > 0$. En otras palabras, T_A es el primer instante positivo en que la cadena de Markov esta en (o llega a) A.

Denotaremos el tiempo de llegada de un punto $a \in \mathcal{P}$ por T_a=$T_{\{a\}}$.

Una ecuación importante que involucra tiempos de llegada está dada por

$$P^n(x, y) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m)P^{n-m}(y, y), \qquad n > 0 \tag{28}$$

En orden para verificar (28) notemos que los eventos $\{T_y = m, X_n = y\}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, son disjuntos y que

$$\{X_n = y\} = \bigcup_{m=1}^{n} \{T_y = m, X_n = y\}.$$

Tenemos en efecto descompuesto el evento $\{X_n = y\}$ de acuerdo con el tiempo de llegada de y. Vemos de esta descomposición que

$$\begin{aligned} P^n(x,y) &= P_x(X_n = y) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m, X_n = y) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m) P(X_n = y | X_0 = x, T_y = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m) P(X_n = y | X_0 = x, X_1 \neq y, \ldots, \\ &\qquad\qquad X_{m-1} \neq y, X_m = y) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_y = m) P^{n-m}(y,y), \end{aligned}$$

y por lo tanto (28) se cumple.

Ejemplo 7. *Muestre que si a es un estado absorbente, entonces $P^n(x,a) = P_x(T_a \leqslant n), n \geqslant 1$*

Si a es un estado absorbente, entonces $P^n(a,a) = 1$ para $1 \leqslant m \leqslant n$, y por lo tanto (28) implica esto

$$\begin{aligned} P^n(x,a) &= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m) P^{n-m}(a,a) \\ &= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m) = P_x(T_a \leqslant n). \end{aligned}$$

Observe que

$$P_x(T_y = 1) = P_x(X_1 = y) = P(x,y)$$

y que

$$P_x(T_y = 2) = \sum_{z \neq y} P_x(X_1 = z, X_2 = y) = \sum_{z \neq y} P(x,z) P(z,y)$$

Para valores mas grandes de n las probabilidades $P_x(T_y = n)$ podemos encontrarlas usando la formula

$$P_x(T_y = n+1) = \sum_{z \neq y} P(x,z) P_z(T_y = n), \qquad n \geqslant 1. \tag{29}$$

Esta fórmula es una consecuencia de (27).

2.4.2. Matriz de transición

Suponga ahora que el espacio de estados $\mathcal{P}$ es finito, diremos $\mathcal{P} = \{0, 1 \ldots, d\}$. En este caso podemos pensar en P como la "matriz de transición" teniendo $d+1$ filas y columnas por

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ \vdots \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} P(0,0) & \cdots & P(0,d) \\ \vdots & & \vdots \\ P(d,0) & \cdots & P(d,d) \end{pmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo, la matriz de transición de la cadena de la ruina de un jugador sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ es

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

De manera similar, podemos considerar P^n como una "matriz de transición de n-pasos". Formula (24) con $m = n = 1$ tenemos

$$P^2(x,y) = \sum_z P(x,z) P(z,y)$$

Haciendo énfasis en la definición normal de multiplicación de matrices, observamos que la matriz de transición de 2-pasos P^2 es el producto de la matriz P consigo misma. De manera más general, poniendo $m = 1$ en (24) vemos que

$$P^{n+1}(x,y) = \sum_z P^n(x,z) P(z,y) \tag{30}$$

Sigue de (30) por inducción que la matriz de transición de n-pasos P^n es la n-ésima potencia de P.

Una distribución inicial π_0 puede pensarse como un vector fila de dimensión $d+1$

$$\pi_0 = (\pi_0(0), \ldots, \pi_0(d)).$$

Si denotamos por π_n el vector fila de dimensión $d+1$

$$\pi_n = (P(X_n = 0), \ldots, P(X_n = d)),$$

entonces (25) y (26) pueden escribirse respectivamente como

$$\pi_n = \pi_0 P^n$$

y

$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

La cadena de Markov de 2 estados vista en la Sección 2.1 es uno de los pocos ejemplos donde P^n puede ser encontrado fácilmente.

Ejemplo 8. *Considere la cadena de Markov de dos estados teniendo matriz de transición de 1-paso*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix},$$

donde $p+q>0$. Hallar P^n.

Para encontrar $P^n(0,0) = P_0(X_n = 0)$, ponemos $\pi_0(0) = 1$ en (3) y se obtiene

$$P^n(0,0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}.$$

Para encontrar $P^n(0,1) = P_0(X_n = 1)$, ponemos $\pi_0(1) = 0$ en (4) y se obtiene

$$P^n(0,1) = \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

De manera similar concluimos que

$$P^n(1,0) = \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

y

$$P^n(1,1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}.$$

De esto tenemos

$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}$$

2.5. Estados transientes y recurrentes

Sea X_n, $n \geqslant 0$, una cadena de Markov teniendo espacio de estados $\mathcal{P}$ y función de transición P. Se define

$$\rho_{xy} = P_x(T_y < \infty)$$

Entonces ρ_{xy} denota la probabilidad que una cadena de Markov que comienza en x estará en el estado y en algún instante positivo. En particular, ρ_{yy} denota la probabilidad que una cadena de Markov que comienza en y alguna vez vuelva a y. Un estado y es llamado recurrente si $\rho_{yy} = 1$ y transiente si $\rho_{yy} < 1$. Si y es un estado recurrente, una cadena de Markov que comienza en y vuelve a y con probabilidad 1. Si y es un estado transiente, una cadena de Markov que comienza en y tiene probabilidad positiva $1 - \rho_{yy}$ de no regresar a y. Si y es un estado absorbente, entonces $P_y(T_y = 1) = P(y,y) = 1$ y de $\rho_{yy} = 1$; así un estado absorbente es necesariamente recurrente.

Si $1_y(z)$, $z \in \mathcal{P}$, denota la función indicatriz del conjunto $\{y\}$ que se define como

$$1_y(z) = \begin{cases} 1, & z = y \\ 0, & z \neq y \end{cases}$$

Si $N(y)$, denotara el número de veces $n \geqslant 1$ que la cadena está en el estado y. Ya que $1_y(X_n) = 1$ si la cadena está en el estado y en el instante n y $1_y(X_n) = 0$ en otro caso, vemos que

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_y(X_n). \tag{31}$$

El evento $\{N(y) \geqslant 1\}$ es igual que el evento $\{T_y < \infty\}$. Así

$$P_x(N(y) \geqslant 1) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{xy}$$

Sea m y n enteros positivos. De (27), la probabilidad que una cadena de Markov que comienza en x primero visita y en el instante m y luego visita y n unidades de tiempo después es $P_x(T_y = m)P_y(T_y = n)$. Así

$$\begin{aligned}
P_x(N(y) \geqslant 2) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = m)P_y(T_y = n) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y = m)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y = n)\right) \\
&= \rho_{xy}\rho_{yy}.
\end{aligned}$$

De manera similar concluimos que

$$P_x(N(y) \geqslant m) = \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1}, \qquad m \geqslant 1. \tag{32}$$

Ya que

$$P_x(N(y) = m) = P_x(N(y) \geqslant m) - P_x(N(y) \geqslant m+1),$$

sigue de (32) que

$$P_x(N(y) = m) = \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1}(1 - \rho_{yy}), \qquad m \geqslant 1. \tag{33}$$

También

$$P_x(N(y) = 0) = 1 - P_x(N(y) \geqslant 1),$$

así que

$$P_x(N(y) = 0) = 1 - \rho_{xy}. \tag{34}$$

Usaremos la notación $E_x()$ para denotar la esperanza de las variables aleatorias definidas en términos de una cadena de Markov que comienza en x. Por ejemplo

$$E_x(1_y(X_n)) = P_x(X_n = y) = P^n(x, y). \tag{35}$$

Sigue de (31) y (35) que

$$\begin{aligned}
E_x(N(y)) &= E_x\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_y(X_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E_x(1_y(X_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y).
\end{aligned}$$

Poner

$$G(x,y) = E_x(N(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y).$$

Entonces $G(x,y)$ denota el número esperado de visitas a y para una cadena de Markov que comienza en x.

Teorema 2.1. *(i) Sea y un estado transiente. Entonces*

$$P_x(N(y) < \infty) = 1$$

y

$$G(x,y) = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}, \qquad x \in \mathcal{P}, \tag{36}$$

lo cual es finito para todo $x \in \mathcal{P}$.

(ii) Sea y un estado recurrente. Entonces $P_y(N(y) = \infty) = 1$ y $G(y,y) = \infty$. También

$$P_x(N(y) = \infty) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{xy}, \qquad x \in \mathcal{P}. \tag{37}$$

Si $\rho_{xy} = 0$, entonces $G(x,y) = 0$, mientras si $\rho_{xy} > 0$, entonces $G(x,y) = \infty$.

Demostración. Sea y un estado transiente. ya que $0 \leqslant \rho_{yy} < 1$, sigue de (32) que

$$P_x(N(y) = \infty) = \lim_{m\to\infty} P_x(N(y) \geqslant m) = \lim_{m\to\infty} \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1} = 0$$

Por (33)

$$\begin{aligned} G(x,y) &= E_x(N(y)) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m P_x(N(y) = m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m \rho_{xy}\rho_{yy}^{m-1}(1-\rho_{yy}). \end{aligned}$$

Substituyendo $t = \rho_{yy}$ en la serie de potencias

$$\sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

concluimos que

$$G(x,y) = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} < \infty$$

Esto completa la demostración de (i).

Ahora sea y recurrente. Entonces $\rho_{yy} = 1$ y sigue de (32) que

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = \infty) &= \lim_{n\to\infty} P_x(N(y) \geqslant m) \\ &= \lim_{n\to\infty} \rho_{xy} = \rho_{xy} \end{aligned}$$

En particular, $P_y(N(y) = \infty) = 1$. Si una variable aleatoria no negativa tiene probabilidad positiva de ser infinito, su esperanza es infinita. Así

$$G(y,y) = E_y(N(y)) = \infty.$$

Si $\rho_{xy} = 0$ entonces $P_x(T_y = m) = 0$ para todo entero positivo m, luego (28) implica que $P^n(x,y) = 0$, $n \geqslant 1$; así $G(x,y) = 0$ en este caso. Si $\rho_{xy} > 0$, entonces $P_x(N(y) = \infty) = \rho_{xy} > 0$ y por lo tanto

$$G(x,y) = E_x(N(y)) = \infty.$$

Esto completa la demostración del Teorema 2.1.

Nota. Este teorema describe la diferencia fundamental entre un estado transiente y un estado recurrente.

Sea y un estado transiente. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y) = G(x,y) < \infty, \qquad x \in \mathcal{P},$$

vemos que

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0 \qquad x \in \mathcal{P}, \tag{38}$$

Definición 2.1. *Una cadena de Markov es llamada una cadena transiente si todos sus estados son transientes y una cadena recurrente si todos sus estados son recurrentes.*

Es fácil ver que una cadena de Markov teniendo un espacio de estados finito debe tener al menos un estado recurrente y por lo tanto no hay posibilidad de que la cadena sea transiente. Para esto si $\mathcal{P}$ es finito y todos los estados son transientes, entonces por (38)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{y\in\mathcal{P}}(\lim_{n\to\infty} P^n(x,y)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{y\in\mathcal{P}} P^n(x,y) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_x(X_n\in\mathcal{P}) \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

2.6. Descomposición del espacio de estados

Sea x e y dos estados no necesariamente distintos. Diremos que x se comunica con y si $\rho_{xy}>0$. En el Ejercicio 5.4 se muestra que x se comunica con y si y sólo si $P^n(x,y)>0$ para algún entero positivo n y en el Ejercicio 5.5 se muestra que si x se comunica con y e y se comunica con z, entonces x se comunica con z.

Teorema 2.2. *Sea x un estado recurrente y supongamos que x se comunica con y. Entonces y es recurrente y $\rho_{xy}=\rho_{yx}=1$.*

Demostración Asumimos que $y\neq x$, porque para lo demás no hay nada que probar.

Por lo tanto

$$P_x(T_y<\infty)=\rho_{xy}>0,$$

vemos que $P_x(T_y=n)>0$ para algún entero positivo n. Sea n_0 el menor de tales enteros positivos, es decir, sea

$$n_0=\min(n\geqslant 1 : P_x(T_y=n)>0). \tag{39}$$

Sigue fácilmente de (39) y (28) que $P^{n_0}(x,y) > 0$ y

$$P^m(x,y) = 0, \qquad 1 \leqslant m < n_0. \tag{40}$$

Ya que $P^{n_0}(x,y) > 0$, pueden encontrarse los pasos $y_1, \ldots, y_{n_0-1}$ tal que

$$P_x(X_1 = y_1, \ldots, X_{n_0-1} = y_{n_0-1}, X_{n_0} = y) = P(x,y_1)\cdots P(y_{n_0-1},y) > 0.$$

Ninguno de los estados $y_1, \ldots, y_{n_0-1}$ es igual a x o y; si uno de ellos es igual a x o a y, sería posible ir de x a y con probabilidad positiva en menos de n_0 pasos, lo que contradice (40).

Ahora mostremos que $\rho_{yx} = 1$. Suponga lo contrario que $\rho_{yx} < 1$. Entonces una cadena de Markov comenzando en y tiene probabilidad positiva $1 - \rho_{yx}$ de nunca llegar a x. Más aún, una cadena de Markov comenzando en x tiene la probabilidad positiva

$$P(x,y_1)\cdots P(y_{n_0-1},y)(1-\rho_{yx})$$

de visitar los estados $y_1, \ldots, y_{n_0-1}, y$ consecutivamente en las primeras n_0 veces y nunca regresa a x después del instante n_0. Pero si esto pasa, la cadena de Markov nunca regresa a x en cualquier instante $n \geqslant 1$, así tenemos una contradicción en el hecho de suponer que x es un estado recurrente.

Ya que $\rho_{yx} = 1$, existe un entero positivo n_1 tal que $P^{n_1}(y,x) > 0$.

Ahora

$$\begin{aligned} P^{n_1+n+n_0}(y,y) &= P_y(X_{n_1+n+n_0} = y) \\ &\geqslant P_y(X_{n_1} = x, X_{n_1+n} = x, X_{n_1+n+n_0} = y) \\ &= P^{n_1}(y,x)P^n(x,x)P^{n_0}(x,y) \end{aligned}$$

Vemos que

$$\begin{aligned}
G(x,y) &\geqslant \sum_{n=n_1+1+n_0}^{\infty} P^n(y,y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P^{n_1+n+n_0}(y,y) \\
&\geqslant P^{n_1}(y,x)P^{n_0}(x,y)\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,x) \\
&= P^{n_1}(y,x)P^{n_0}(x,y)G(x,x) = +\infty,
\end{aligned}$$

de lo cual sigue que y es también un estado recurrente.

Ya que y es recurrente e y se comunica con x, vemos de la parte del teorema que ya ha sido verificada que $\rho_{xy} = 1$. Esto completa la demostración.

Definición 2.2. *Un conjunto no vacío C de estados se dice cerrado si ningún estado dentro de C se comunica con cualquier otro estado fuera de C, es decir, si*

$$\rho_{xy} = 0, \qquad x \in C \text{ e } y \notin C. \tag{41}$$

Equivalentemente (ver Ejercicio 5,4), C es cerrado si y sólo si

$$P^n(x,y) = 0, \qquad x \in C, y \notin C \text{ y } n \geqslant 1. \tag{42}$$

En realidad, incluso se tiene de la condición mas débil

$$P(x,y) = 0, \qquad x \in C \text{ e } y \notin C. \tag{43}$$

podemos probar que C es cerrado. Porque si (43) se cumple, entonces para $x \in C$ e $y \notin C$

$$\begin{aligned}
P^2(x,y) &= \sum_{z\in P} P(x,z)P(z,y) \\
&= \sum_{z\in C} P(x,z)P(z,y) = 0,
\end{aligned}$$

luego, por inducción, (42) se cumple. Si C es cerrado, entonces una cadena de Markov comenzando en C, con probabilidad uno, permanece en C en todo momento de tiempo. Si a es un estado absorbente, entonces $\{a\}$ es cerrado.

Definición 2.3. *Un conjunto cerrado C es llamado irreducible si x se comunica con y para todo elección de x e y en C.*

Sigue del Teorema 2.2 si C es un conjunto cerrado irreducible, entonces cada estado en C es recurrente o todo estado en C es transiente. El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.1 y 2.2.

Corolario 2.1. *Sea C un conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes. Entonces $\rho_{xy} = 1$, $P_x(N(y) = \infty) = 1$, y $G(x, y) = \infty$ para toda elección de x e y en C.*

Definición 2.4. *Una cadena de Markov irreducible es una cadena en la cual el espacio de estados es irreducible, es decir, una cadena en la cual todo estado se comunica consigo mismo y también con otro estado.*

Una cadena de Markov irreducible es necesariamente una cadena transiente o una cadena recurrente. Corolario 2.1 implica, en particular, que una cadena de Markov irreducible y recurrente visita todos los estados infinitamente, a menudo, con probabilidad uno.

Vimos en la Sección 2.5 que si $\mathcal{P}$ es finito, este contiene al menos un estado recurrente. Ahora sea C un conjunto finito cerrado irreducible. Hemos visto que todo estado en C es transiente o todo estado en C es recurrente, y que C tiene por lo menos un estado recurrente. Sigue que todo estado en C es recurrente. Resumimos este resultado:

Teorema 2.3. *Sea C un conjunto cerrado irreducible y finito de estados. Entonces todos los estado de C son recurrentes*

Considere una cadena de Markov teniendo un número finito de estados. Teorema 2.3 implica que si la cadena es irreducible, entonces, debe ser recurrente. Si la cadena no es irreducible, podemos usar Teoremas 2.2 y 2.3 para determinar cuales de los estados son recurrentes y cuales transigentes.

Ejemplo 9. *Considere una cadena de Markov teniendo matriz de transición*

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Determine cuales de los estados son recurrentes y cuales son transientes.

Como un primer paso estudiando esta cadena de Markov, determinemos, inspeccionando, cuales de los estados resultan en otros. Esto puede indicarse en forma de matriz, como

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \\ 0 & 0 & 0 & + & + & + \end{pmatrix} \end{array}$$

Los elementos x, y de esta matriz son $+$ o 0 conforme a que si ρ_{xy} es positivo o cero, es decir, conforme a que x se comunica o no con y. Por supuesto, si $P(x,y) > 0$, entonces $\rho_{xy} > 0$. A la inversa ciertamente no es verdadero en general. Por ejemplo $P(2,0) = 0$; pero

$$P^2(2,0) = P(2,1)P(1,0) = \frac{1}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{20} > 0,$$

así que $\rho_{20} > 0$.

El estado 0 es un estado absorbente, y así también un estado recurrente. Vemos claramente de la matriz que tiene +'s y 0's que $\{3,4,5\}$ es un conjunto cerrado e irreducible. Teorema 2.3 implica ahora que 3, 4 y 5 son estados recurrentes. Los estados 1 y 2 ambos resultan en 0. Vemos de Teorema 2.2 que 1 y 2 deben ser ambos estados transientes. En resumen, los estados 1 y 2 son transientes, los estados 0, 3, 4 y 5 son recurrentes.

Sea $\mathcal{P}_T$, denota la colección de estados transientes en $\mathcal{P}$, y $\mathcal{P}_R$ denota la colección de estados recurrentes en $\mathcal{P}$. En el ejemplo anterior, $\mathcal{P}_T = \{1,2\}$ y $\mathcal{P}_R = \{0,3,4,5\}$. El conjunto $\mathcal{P}_R$ puede descomponerse en conjuntos cerrados irreducibles y disjuntos $C_1 = \{0\}$ y $C_2\{3,4,5\}$. El siguiente Teorema muestra que tal descomposición es siempre posible siempre que $\mathcal{P}_R$ sea distinto de vacío.

Teorema 2.4. *Suponga que el conjunto $\mathcal{P}_R$ de estados recurrentes es distinto de vacío. Entonces $\mathcal{P}_R$ es la unión finita o contable de conjuntos cerrados irreducibles disjuntos $C_1, C_2, \ldots$.*

Demostración Se escoge $x \in \mathcal{P}_R$ y sea C el conjunto de todos los estados y en $\mathcal{P}_R$ tal que x se comunica con y. Ya que x es recurrente, $\rho_{xx} = 1$ y por lo tanto

$x \in C$. Ahora verifiquemos que C es un conjunto cerrado irreducible. Supongamos que y está en C e y se comunica con z. Ya que y es recurrente, sigue del Teorema 2.2 que z es recurrente. Ya que x se comunica con y e y se comunica con z, concluimos que x se comunica con z. Por lo tanto, z está en C. Esto muestra que C es cerrado. Suponer que y y z están ambos en C. Por lo tanto x es recurrente y x se comunica con y, sigue del Teorema 2.2 que y se comunica con x. Por lo tanto y se comunica con x y x se comunica con z; concluimos que y se comunica con z. Esto muestra que C es irreducible.

Para completar la demostración del teorema, necesitamos sólo mostrar que si C y D son dos subconjuntos cerrados e irreducibles de $\mathcal{P}_R$, son disjuntos o idénticos. Supongamos que no son disjuntos y sea x un elementos que está tanto en C como en D. Se escoge $y \in C$. Ahora x se comunica con y, ya que x está en C y C es irreducible. Ya que D es cerrado, x esta en D, y x se comunica con y, concluimos que y está en D. Así todo estado en C está también en D. De manera similar todo estad en D esta también en C, así que C y D son idénticos.

Podemos usar nuestra descomposición del espacio de estados de una cadena de Markov para entender el comportamiento de tal sistema. Si la cadena de Markov comienza en uno de los conjuntos cerrados irreducible C_i de estados recurrentes, ésta se queda en C_i para siempre y, con probabilidad uno, de visitar todos los estados en C_i, de manera infinita.

2.6.1. Probabilidades de Absorción

Sea C uno de los conjuntos cerrados e irreducibles de estados recurrentes, y sea $\rho_C(x) = P_x(T_C < \infty)$ la probabilidad que una cadena de Markov que comienza en x visite eventualmente C. Ya que la cadena se queda en C permanentemente una vez que visita este conjunto, llamaremos $\rho_C(x)$ a la probabilidad que una cadena que comienza en x es absorbida por el conjunto C. Claramente $\rho_C(x) = 1$, $x \in C$ y $\rho_C(x) = 0$ si x es un estado recurrente que no está en C. No está claro como calcular $\rho_C(x)$ para $x \in \mathcal{P}_T$, el conjunto de los estados transientes.

Si hay sólo un número finito de estados transientes, y en particular si $\mathcal{P}$ es, por si mismo, finito, siempre es posible calcular $\rho_C(x)$, $x \in \mathcal{P}_T$, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales en la cual existen tantas ecuaciones como incógnitas, es decir, miembros de $\mathcal{P}_T$. Para comprender por qué éste es el caso, observe que si $x \in \mathcal{P}_T$, una cadena que comienza en x puede entrar en C sólo entrando en éste en el instante 1 o estando en $\mathcal{P}_T$ en el instante 1 y entrando en C en algún instante futuro. El evento anterior tiene probabilidad $\sum_{y \in C} P(x, y)$ y el último evento tiene probabilidad $\sum_{y \in \mathcal{P}_T} P(x, y)\rho_C(y)$. Por lo cual

$$\rho_C(x) = \sum_{y\in C} P(x,y) + \sum_{y\in\mathcal{P}_T} P(x,y)\rho_C(y), \qquad x\in\mathcal{P}_T. \tag{44}$$

La ecuación (44) se sostiene si $\mathcal{P}_T$ es finito o infinito, pero no está nada claro como resolver (44) para el desconocido $\rho_C(x)$, $x\in\mathcal{P}_T$, cuando $\mathcal{P}_T$ es infinito. Una dificultad adicional es dejar $\mathcal{P}_T$ infinito, por lo cual (44) no necesariamente tiene una única solución. Afortunadamente esta dificultad no se hace presente cuando $\mathcal{P}_T$ es finito.

Teorema 2.5. *Supongamos que el conjunto $\mathcal{P}_T$ es finito y sea C un conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes. Entonces el sistema de ecuaciones*

$$f(x) = \sum_{y\in C} P(x,y) + \sum_{y\in\mathcal{P}_T} P(x,y)f(y), \qquad x\in\mathcal{P}_T \tag{45}$$

tiene la única solución

$$f(x) = \rho_C(x), \qquad x\in\mathcal{P}_T. \tag{46}$$

Demostración. Si (45) se sostiene, entonces

$$f(y) = \sum_{z\in C} P(y,z) + \sum_{z\in\mathcal{P}_T} P(y,z)f(z), \qquad y\in\mathcal{P}_T.$$

Substituyendo esto en (45) encontramos que

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{y\in C} P(x,y) &+ \sum_{y\in\mathcal{P}_T}\sum_{z\in C} P(x,y)P(y,z) + \\ &+ \sum_{y\in\mathcal{P}_T}\sum_{z\in\mathcal{P}_T} P(x,y)P(y,z)f(z). \end{aligned}$$

La suma de los primeros dos términos es exactamente $P_x(T_C\leqslant 2)$, y el tercer término se reduce a $\sum_{z\in\mathcal{P}_T} P^2(x,z)f(z)$, lo cual es lo mismo que $\sum_{y\in\mathcal{P}_T} P^2(x,y)f(y)$. Por lo cual

$$f(x) = P_x(T_C\leqslant 2) + \sum_{y\in\mathcal{P}_T} P^2(x,y)f(y)$$

Al repetir el argumento de manera idéntica o simplemente por inducción, concluimos que para todo entero positivo n

$$f(x) = P_x(T_C\leqslant n) + \sum_{y\in\mathcal{P}_T} P^n(x,y)f(y), \qquad x\in\mathcal{P}_T. \tag{47}$$

Ya que cada $y \in \mathcal{P}_T$ es transiente, sigue de (38) que

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0, \qquad x \in \mathcal{P} \text{ e } y \in \mathcal{P}_T \tag{48}$$

De acuerdo a la suposición del teorema, $\mathcal{P}_T$ es conjunto finito. Por lo tanto sigue de (48) que la suma en (47) se aproxima a cero cuando $n \to \infty$ por consiguiente para $x \in \mathcal{P}_T$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_x(T_C \leqslant 2) = P_x(T_C < \infty) = \rho_C(x),$$

como se deseaba.

Ejemplo 10. *Considere la cadena de Markov vista en el Ejemplo 6. Se encuentra*

$$\rho_{1\,0} = \rho_{\{0\}}(1) \text{ y } \rho_{2\,0} = \rho_{\{0\}}(2).$$

De (44) y la matriz de transición del Ejemplo 6, vemos que $\rho_{1\,0}$ y $\rho_{2\,0}$ son determinados por las ecuaciones

$$\rho_{1\,0} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\rho_{1\,0} + \frac{1}{4}\rho_{2\,0}$$

y

$$\rho_{2\,0} = \frac{1}{5}\rho_{1\,0} + \frac{2}{5}\rho_{2\,0}$$

Resolviendo estas ecuaciones encontramos que $\rho_{1\,0} = \frac{3}{5}$ y $\rho_{2\,0} = \frac{1}{5}$.

De una forma similar concluimos que $\rho_{\{3,4,5\}}(1) = \frac{2}{5}$ y $\rho_{\{3,4,5\}}(2) = \frac{4}{5}$.

Por otro lado, podemos obtener estas probabilidades al sustraer $\rho_{\{0\}}(1)$ y $\rho_{\{0\}}(2)$ de 1, ya que si hay sólo un número finito de estados transientes,

$$\sum_i \rho_{C_i}(x) = 1, \qquad x \in \mathcal{P}_T. \tag{49}$$

Para verificar (49) notemos que para $x \in \mathcal{P}_T$

$$\sum_i \rho_{C_i}(x) = \sum_i P_x(T_{C_i} < \infty) = P_x(T_{\mathcal{P}_R} < \infty).$$

Ya que hay sólo un número finito de estados transientes y cada estado transiente es visitado sólo de manera finita muchas veces, la probabilidad $P_x(T_{\mathcal{P}_R} < \infty)$ que un estado sea eventualmente visitado es 1, así (49) se cumple.

Una vez que una cadena de Markov a comenzado en un estado transiente x entra en un conjunto cerrado irreducible C de estados transientes, ésta visita cada estado en C. Entonces

$$\rho_{xy} = \rho_C(x), \qquad x \in \mathcal{P}_T \ \text{e} \ y \in C \tag{50}$$

Sigue de (50) que en nuestro ejemplo anterior

$$\rho_{1\,3} = \rho_{1\,4} = \rho_{1\,5} = \rho_{\{3,4,5\}}(1) = \frac{2}{5}$$

y

$$\rho_{2\,3} = \rho_{2\,4} = \rho_{2\,5} = \rho_{\{3,4,5\}}(2) = \frac{4}{5}.$$

2.6.2. Martingalas

Considere una cadena de Markov teniendo espacio de estados $\{0, \ldots, d\}$ y función de transición P tal que

$$\sum_{y=0}^{d} yP(x,y) = x, \qquad x = 0, \ldots, d. \tag{51}$$

Ahora

$$\begin{aligned} & E[X_{n+1}|X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] \\ &\quad = \sum_{y=0}^{d} yP[X_{n+1} = y|X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x] \\ &\quad = \sum_{y=0}^{d} yP(x,y) \end{aligned}$$

de la propiedad de Markov. Concluimos de (51) que

$$E[X_{n+1}|X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n] = x, \tag{52}$$

es decir, que el valor de la esperanza de X_{n+1} dado que los valores presentes y pasados de $X_0, \ldots, X_n$ es igual al valor presente de X_n. Una secuencia de variables aleatorias teniendo esta propiedad es llamada martingala. Las martingalas, las cuales no necesariamente son una cadena de Markov, juega un rol muy importante en la teoría de probabilidades moderna. Aparecieron junto a los juegos de azar. Si X_n denota el capital de un jugador después del instante n y si todas las apuestas son "justas"(o "parejas"), es decir, ellas poseen ganancia esperada igual a cero para el jugador, entonces, X_n, $n \geqslant 0$ es una martingala.

Sigue de (51) que

$$\sum_{y=0}^{d} yP(0,y) = 0,$$

y por lo tanto $P(0,1) =, \ldots, = P(0,d) = 0$. Así 0 es necesariamente un estado absorbente. Sigue de manera similar que d es un estado absorbente. Considerar ahora una cadena de Markov satisfaciendo (51) y no tiene otro estado absorbente mas que 0 y d. Si la cadena de Markov comienza en x, ésta, eventualmente, entrará en uno de los dos estados absorbentes 0 y d y se quedara ahí permanentemente.

Sigue del Ejemplo 4 que

$$\begin{aligned}
E_x(X_n) &= \sum_{y=0}^{d} yP_x(X_n = y) \\
&= \sum_{y=0}^{d} yP^n(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{d-1} yP^n(x,y) + dP^n(x,y) \\
&= \sum_{y=1}^{d-1} yP^n(x,y) + dP_x(T_d \leqslant n).
\end{aligned}$$

Ya que los estados $1, 2, \ldots, d-1$ son transientes, vemos que $P^n(x,y) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para $y = 1, 2, \ldots, d-1$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} E_x(X_n) = dP_x(T_d < \infty) = d\rho_{xd}.$$

En otras palabras, sigue de (51) (ver Ejercicio 5.3(a)) que $EX_n = EX_{n-1} = \ldots = EX_0$ y, por lo tanto, $E_x(X_n) = x$. Así

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = x.$$

De comparar los dos valores de este límite, concluimos que

$$\rho_{xd} = \frac{x}{d}, \qquad x = 0, \ldots, d. \tag{53}$$

Ya que $\rho_{x0} + \rho_{xd} = 1$, sigue de (53) que

$$\rho_{x0} = 1 - \frac{x}{d}, \qquad x = 0, \ldots, d.$$

Por supuesto, cuando (53) es conjeturado, es fácil probar directamente del Teorema 2.5. Necesitamos sólo verificar que para $x = 1, \ldots, d-1$.

$$\frac{x}{d} = P(x,d) + \sum_{y=1}^{d-1} \frac{y}{d} P(x,y). \tag{54}$$

Claramente (54) sigue de (51).

La cadena genética introducida en el Ejemplo 6 satisface (51) como lo hace la cadena de la ruina de un jugador sobre $\{0, \ldots, d\}$ teniendo matriz de transición de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Suponga que dos jugadores hacen una serie de apuestas de un dólar hasta que uno de ellos quiebra, y supongamos que cada jugador tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar cualquier apuesta. Si el primer jugador tiene un capital inicial x dólares y el segundo un capital de $d-x$ dólares, entonces el segundo jugador tiene probabilidad $\rho_{xd} = x/d$ de quedar en la ruina (o quebrar) y el primer jugador tiene probabilidad $1 - x/d$ de quedar en la ruina.

2.7. Cadenas de nacimiento y muerte

Para una cadena de Markov irreducible o, cada estado es recurrente o cada estado es transiente, así que una cadena de Markov es o, una cadena recurrente o una cadena transiente. Una cadena de Markov irreducible que tiene sólo un número finito de estados es necesariamente recurrente.

Definición 2.5. *Considere una cadena de Markov sobre los enteros no negativos o sobre el conjunto finito $\{0, \ldots, d\}$. En el caso que nos demos $d = \infty$, la función de transición es de la forma*

$$P(x,y) = \begin{cases} q_x, & y = x-1, \\ r_x, & y = x, \\ p_x, & y = x+1, \end{cases}$$

donde $p_x + q_x + r_x = 1$ *para* $x \in \mathcal{P}$, $q_0 = 0$, *y* $p_d = 0$ *si* $d < \infty$. *Asumimos de manera adicional que* p_x *y* q_x *son positivos para* $0 < x < d$.

Bajo estas condiciones llamaremos a esta cadena, cadena de nacimiento y muerte.

Para a y b en $\mathcal{P}$ tal que $a < b$, fijar

$$u(x) = P_x(T_a < T_b), \qquad a < x < b,$$

y $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$. Si la cadena de nacimiento y muerte comienza en y, entonces en un paso ésta va a $y-1$, y o $y+1$ con probabilidades respectivas q_y, r_y, o p_y. Sigue que

$$u(y) = q_y u(y-1) + r_y u(y) + p_y u(y+1), \qquad a < y < b. \tag{55}$$

Ya que $r_y = 1 - p_y - q_y$, podemos reescribir (55) como

$$u(y+1) - u(y) = \frac{q_y}{p_y}(u(y) - u(y-1)), \qquad a < y < b. \tag{56}$$

Sea $\gamma_0 = 1$ y

$$\gamma_y = \frac{q_1 \cdots q_y}{p_1 \cdots p_y} \qquad 0 < y < d. \tag{57}$$

De (56) vemos que

$$u(y+1) - u(y) = \frac{\gamma_y}{\gamma_{y-1}}(u(y) - u(y-1)), \qquad a < y < b,$$

del cual sigue que

$$\begin{aligned} u(y+1) - u(y) &= \frac{\gamma_{a+1}}{\gamma_a} \cdots \frac{\gamma_y}{\gamma_{y-1}}(u(a+1) - u(a)) \\ &= \frac{\gamma_y}{\gamma_a}(u(a+1) - u(a)). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$u(y) - u(y+1) = \frac{\gamma_y}{\gamma_a}(u(a) - u(a+1)), \qquad a \leqslant y < b. \tag{58}$$

Sumando (58) sobre $y = a, \ldots, b-1$ y recordando que $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$, concluimos que

$$\frac{u(a) - u(a+1)}{\gamma_a} = \frac{1}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}.$$

Así (58) queda

$$u(y) - u(y+1) = \frac{\gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y,} \qquad a \leqslant y < b.$$

Sumando esta ecuación en $y = x, \ldots, b-1$ y de nuevo usando la formula $u(b) = 0$, obtenemos

$$u(x) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y}, \qquad a < x < b.$$

Ahora sigue de la definición de $u(x)$ que

$$P_x(T_a < T_b) = \frac{\sum_{y=x}^{b-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y} \qquad a < x < b. \tag{59}$$

Restando ambos lados de (59) a 1, vemos que

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{\sum_{y=a}^{x-1} \gamma_y}{\sum_{y=a}^{b-1} \gamma_y} \qquad a < x < b. \tag{60}$$

Ejemplo 11. *Un jugador jugando ruleta hace una serie de apuestas de un dólar. Él tiene probabilidades respectivas* $9/19$ *y* $10/19$ *de ganar y perder cada apuesta. El jugador decide dejar de jugar en cuanto su ganancia en precio neto es de 25 dólares o su perdida neta llega a 10 dólares.*

(a) Encontrar la probabilidad que cuando él deja de jugar él habrá ganado 25 dólares.

(b) Encontrar su expectativa de perdida.

El problema se ajusta a nuestro sistema si dejamos que X_n denote el capital de el jugador en el momento n con $X_0 = 10$. Entonces X_n, $n \leqslant 0$, forma una cadena de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1, \ldots, 35\}$ con taza de nacimiento y muerte

$$p_x = 9/19, \qquad 0 < x < 35,$$

y

$$q_x = 10/19, \qquad 0 < x < 35.$$

Los estados 0 y 35 son estados absorbentes. La fórmula (60) es aplicable con $a = 0$, $x = 10$, y $b = 35$. Concluimos que

$$\gamma_y = (10/9)^y, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 34,$$

y, por lo tanto que

$$P_{10}(T_{35} < T_0) = \frac{\sum_{y=0}^{9} (10/9)^y}{\sum_{y=0}^{34}} = \frac{(10/9)^{10} - 1}{(10/9)^{35} - 1} = 0,047.$$

Así el jugador tiene probabilidad 0,047 de ganar 25 dólares. Su perdida esperada en dólares es 10-35(0,047), lo que equivale a \$8,36.

En el resto de esta sección consideramos una cadena de nacimiento y muerte sobre los enteros no negativos que son irreducibles, es decir, tal que $p_x > 0$ para $x \geqslant 0$ y $q_x > 0$ para $x \geqslant 1$. Determinaremos cuando tal cadena es recurrente y cuando transiente.

Como un caso especial de (59),

$$P_1(T_0 < T_n) = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{n-1} \gamma_y}, \qquad n > 1. \tag{61}$$

Considere ahora una cadena de nacimiento y muerte comenzando en el estado 1. Ya que la cadena de nacimiento y muerte puede moverse en a lo mas un paso a la derecha en un instante (considerando la transición de estado a estado como movimiento a lo largo de la recta numérica real),

$$1 \leqslant T_2 < T_3 < \cdots . \tag{62}$$

Sigue de (62) que $\{T_0 < T_n\}$, $n > 1$, forma una secuencia de eventos no decreciente. Concluimos de la Proposición 1.1 del Capitulo 1 que

$$\lim_{n\to\infty} P_1(T_0 < T_n) = P_1(T_0 < T_n \text{ para algún } n > 1). \tag{63}$$

La ecuación (62) implica que $T_n \geqslant n$ y así $T_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$; por lo cual, el evento $\{T_0 < T_n$ para algún $n > 1\}$ ocurre si y sólo si el evento $\{T_n < \infty\}$ ocurre. Podemos por lo tanto reescribir (63) como

$$\lim_{n\to\infty} P_1(T_0 < T_n) = P_1(T_0 < \infty). \tag{64}$$

Sigue de (61) y (64) que

$$P_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{1}{\sum_{y=0}^{\infty} \gamma_y}. \tag{65}$$

Estamos ahora en posición de mostrar que la cadena de nacimiento y muerte es recurrente si sólo si

$$\sum_{y=0}^{\infty} \gamma_y = \infty. \tag{66}$$

Si la cadena de nacimiento y muerte es recurrente, entonces $P_1(T_0 < \infty) = 1$ y (66) sigue de (65). Para obtener lo opuesto, observamos que $P(0, y) = 0$ para $y \geqslant 2$ y por tanto

$$P_0(T_0 < \infty) = P(0,0) + P(0,1)P_1(T_0 < \infty). \tag{67}$$

Suponer que (66) se cumple. Entonces por (65)

$$P_1(T_0 < \infty) = 1.$$

De esto y (67) concluimos que

$$P_0(T_0 < \infty) = P(0,0) + P(0,1) = 1.$$

Así 0 es un estado recurrente, y como la cadena se asumió irreducible, debe ser una cadena recurrente.

En resumen, hemos demostrado que una cadena de nacimiento y muerte irreducible sobre $\{0, 1, 2 \ldots\}$ es recurrente si y sólo si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} = \infty. \tag{68}$$

Ejemplo 12. *Considere la cadena de nacimiento y muerte sobre* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *definida por*

$$p_x = \frac{x+2}{2(x+1)} \quad y \quad q_x = \frac{x}{2(x+1)}, \qquad x \geqslant 0.$$

Determine si esta cadena es recurrente o transiente.

Ya que

$$\frac{q_x}{p_x} = \frac{x}{x+2},$$

sigue que

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} = \frac{1 \cdot 2 \cdots x}{3 \cdot 4 \cdots (x+2)} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x+2)} = 2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} \gamma_x &= 2\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) \\ &= 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cdots) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Concluimos que la cadena es transiente.

2.8. Cadenas de ramificación y cola

En esta sección describiremos que cadenas de ramificación son, con certeza, recurrentes o transientes. Es interesante notar que las demostraciones de los resultados para la cadena de ramificación y la cadena de cola son muy similares; mientras que los resultados, en si mismos, son muy diferentes.

2.8.1. Cadenas de ramificación

Considere la cadena de ramificación introducida en el Ejemplo 4. La probabilidad de extinción ρ de la cadena es la probabilidad que los descendientes de una partícula dada finalmente se extinguieron. Claramente

$$\rho = \rho_{1\,0} = P_1(T_0 < \infty).$$

Suponer que existen x partículas presentes inicialmente. Ya que el número de descendientes de estas partículas en las diversas generaciones se escogen de manera independiente una con otra, la probabilidad ρ_{x0} que los descendientes de cada una de las x partículas eventualmente se extingan es exactamente la potencia x de la probabilidad que los descendientes de una partícula cualquiera eventualmente se extingan. En otras palabras,

$$\rho_{x0} = \rho^x, \qquad x = 1, 2, \ldots \tag{69}$$

Volvemos a la notación del Ejemplo 4 donde una partícula da a lugar a ϵ partículas en la siguiente generación, donde ϵ es una variable aleatoria teniendo densidad f. Si $f(1) = 1$, la cadena de ramificación es degenerada en donde cada estado es un estado absorbente. Así suponemos que $f(1) < 1$. Entonces el estado 0 es un estado absorbente. Queda como ejercicio mostrar que cada estado distinto del 0 es transiente. De esto sigue que, con probabilidad uno, la cadena de ramificación es o absorbida por 0 o se acerca a $+\infty$. Concluimos de (69) que

$$P_x(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) = 1 - \rho^x, \qquad x = 1, 2, \ldots$$

Claramente vale la pena determinar ρ o cuando $\rho = 1$ y cuando $\rho < 1$. Esto puede hacerse usando argumentos basados sobre la fórmula

$$\Phi(\rho) = \rho \tag{70}$$

donde Φ es la función generatriz de probabilidad de f, definida por

$$\Phi(t) = f(0) + \sum_{y=1}^{\infty} f(y) t^y, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Para verificar (70) observamos que (ver Ejercicio 5.2(b))

$$\begin{aligned}
\rho = \rho_{1\,0} &= P(1,0) + \sum_{y=1}^{\infty} P(1,y)\rho_{y0} \\
&= P(1,0) + \sum_{y=1}^{\infty} P(1,y)\rho^{y} \\
&= f(0) + \sum_{y=1}^{\infty} f(y)\rho^{y} \\
&= \Phi(\rho)
\end{aligned}$$

Sea μ el número esperado de descendientes de una partícula dada. Supongamos que $\mu \leqslant 1$. Entonces la ecuación $\Phi(t) = t$ no tiene raíces en $[0,1)$ (bajo la suposición que $f(1) < 1$), y por lo cual $\rho = 1$. Así pues, en ultima instancia la extinción es segura si $\mu \leqslant 1$ y $f(1) < 1$.

Suponga que en lugar de esto $\mu > 1$. Entonces la ecuación $\Phi(t) = t$ tiene una única raíz ρ_0 en $[0,1)$, y por tanto ρ es igual o, a ρ_0 o a 1. En realidad ρ es siempre igual a ρ_0. Por consiguiente, si $\mu > 1$ en última instancia la probabilidad de extinción es menor que uno.

Ejemplo 13. *Suponga que cada hombre en cierto lugar tiene exactamente tres hijos, lo cual de manera independiente tiene probabilidad uno y medio de ser niño y uno y medio de ser niña. Suponer también que el numero de niños en la n-ésima generación forma una cadena de ramificación. Encontrar la probabilidad que una linea masculina de un hombre dado eventualmente se extinga.*

La densidad f de los números de niños hombres de un hombre dado es la densidad binomial con parámetros $n = 3$ y $p = \frac{1}{2}$. Así $f(0) = \frac{1}{8}$, $f(1) = \frac{3}{8}$, $f(2) = \frac{3}{8}$, $f(3) = \frac{1}{8}$, y $f(x) = 0$ para $x \geqslant 0$. La media de hijos hombres es $\mu = \frac{3}{2}$. Ya que $\mu > 1$, la probabilidad de extinción ρ es la raíz de la ecuación

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8}t + \frac{3}{8}t^2 + \frac{1}{8}t^3 = t$$

situada en $[0,1)$. Podemos reescribir la ecuación como

$$t^3 + 3t^2 - 5t + 1 = 0$$

o de manera equivalente como

$$(t-1)(t^2 + 4t - 1) = 0$$

Esta ecuación tiene tres raíces, la cuales son, 1, $-\sqrt{5}-2$, y $\sqrt{5}-2$. En consecuencia, $\rho = \sqrt{5}-2$.

2.8.2. Cadenas de colas (o de filas)

Considere la cadena de colas introducida en el Ejemplo 5. Sea $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ y μ como en este ejemplo.

Como en la subsección anterior, μ denota el número esperado de clientes que lleguen por unidad de tiempo. Suponer primero que $\mu > 1$. Ya que a lo más una persona es atendida en un instante y en promedio más de un nuevo cliente entra en la cola en también un instante, parece que conforme pasa el tiempo cada vez más personas estarán en espera de atención y que la longitud de la cola se aproximará a infinito. Este es en efecto el caso, de modo que si $\mu > 1$ la cadena de colas es transiente.

Para discutir el caso $\mu \leqslant 1$, asumimos que la cadena es irreducible (ver Ejercicio 5.6 y 5.7 para las condiciones necesarias y suficientes de irreducibilidad y para los resultados cuando la cadena de colas no es irreducible). Suponer primero que $\mu < 1$. Entonces en promedio menos de un nuevo cliente entran en la fila por unidad de tiempo. Ya que un cliente es atendido siempre que la fila no esté vacía, esperamos que, independientemente de la longitud inicial de la fila, esta se vaciará en algún instante futuro. Este es, en efecto, el caso, y, en particular, 0 es un estado recurrente. $\mu = 1$ es el caso límite, pero de nuevo resulta que 0 es un estado recurrente. Así si $\mu \leqslant 1$ y la cadena de colas es irreducible, ésta es recurrente.

Capítulo 3

Distribuciones Estacionarias

Sea X_n, $n \geqslant 0$, una cadena de Markov que tiene espacio de estados $\mathcal{P}$ y función de transición P. Si $\pi(x)$, $x \in \mathcal{P}$, son números no negativos que suman uno, y si

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \pi(y), \qquad y \in \mathcal{P} \tag{1}$$

Entonces π se llama distribución estacionaria. Suponer que una distribución estacionaria π existe y que

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y), \qquad y \in \mathcal{P} \tag{2}$$

Entonces, como vamos a ver pronto, independientemente de la distribución inicial de la cadena, la distribución de X_n tiende a π cuando $n \to \infty$.

3.1. Propiedades elementales de las distribuciones estacionarias

Sea π una distribución estacionaria. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_x \pi(x)P^2(x,y) &= \sum_x \pi(x)\sum_z P(x,z)P(z,y) \\
&= \sum_z \left(\sum_x \pi(x)P(x,z)P(z,y)\right) \\
&= \sum_z \pi(z)P(z,y) = \pi(y),
\end{aligned}$$

De manera similar por inducción basada en la formula

$$P^{n+1}(x,y) = \sum_z P^n(x,z)P(z,y),$$

concluimos que para todo n

$$\sum_x \pi(x)P^n(x,y) = \pi(y), \qquad y \in \mathcal{P} \tag{3}$$

Si X_0 tiene la distribución estacionaria π para su distribución inicial, entonces (3) implica que para todo n

$$P(X_n = y) = \pi(y), \qquad y \in \mathcal{P}, \tag{4}$$

y por tanto que la distribución de X_n es independiente de n. Suponer a la inversa que X_n es independiente de n. Entonces la distribución inicial π_0 es tal que

$$\pi_0(y) = P(X_0 = y) = P(X_1 = y) = \sum_x \pi_0(x)P(x,y).$$

En consecuencia π_0 es una distribución estacionaria. En resumen, la distribución de X_n es independiente de n si y sólo si la distribución inicial es una distribución estacionaria.

Suponer ahora que π es una distribución estacionaria y que (2) se sostiene. Sea π_0 la distribución inicial. Entonces

$$P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)P^n(x,y), \qquad y \in \mathcal{P} \tag{5}$$

Mediante el uso de (2) y el teorema de convergencia limitada señalado en la Sección 3.5, podemos dejar $n \to \infty$ en (5), obteniendo

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)\pi(y).$$

Ya que $\sum_x \pi_0(x) = 1$, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = y) = \pi(y), \qquad y \in \mathcal{P}. \tag{6}$$

La formula (6) establece que, independientemente de la distribución inicial, para valores grandes de n la distribución de X_n es aproximadamente igual a la distribución estacionaria π. Esto implica que π es la única distribución estacionaria.

Por si hubiera otra distribución estacionaria debemos usar esto para la distribución inicial π_0. De (4) y (6) debemos concluir que $\pi_0(y) = \pi(y)$, $y \in \mathcal{P}$.

Considere un sistema descrito por una cadena de Markov teniendo función de transición P y distribución estacionaria única π. Suponer que comenzamos observando el sistema después de que ha estado sucediendo desde hace algún tiempo, digamos n_0 unidades de tiempo para algún entero positivo grande n_0. En efecto, observamos Y_n, $n \geqslant 0$, donde

$$Y_n = X_{n+n_0}, \qquad n \geqslant 0$$

La variable aleatoria Y_n, $n \geqslant 0$, también forma una cadena de Markov con función de transición P. A fin de determinar las probabilidades únicas para eventos definidos en términos de la cadena Y_n, necesitamos saber su distribución inicial lo cual es difícil determinar esta distribución con exactitud. Es posible que no tengan elección pero asumir que Y_n, $n \geqslant 0$, tiene la distribución estacionaria π para su distribución inicial. Esta es una hipótesis razonable si (2) se sostiene y n_0 es grande.

3.2. Ejemplos

En la Sección 2.1 discutimos la cadena de Markov de dos estados en $\mathcal{P} = \{0, 1\}$ teniendo matriz de transición

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vimos que si $p + q > 0$ la cadena tiene una única distribución estacionaria π, determinada por

$$\pi(0) = \frac{q}{p+q} \text{ y } \pi(1) = \frac{p}{p+q}.$$

Vimos también que si $0 < p + q < 2$, entonces (2) se satisface.

Para las cadenas de Markov que tienen un número finito de estados, las distribuciones estacionarias pueden ser encontradas al resolver un sistema finito de ecuaciones lineales.

3.2.1. Cadenas de nacimiento y muerte

Considere una cadena de nacimiento y muerte sobre $\{0, 1 \ldots, d\}$ o sobre los enteros no negativos. En este último caso establecemos $d = \infty$. Asumiremos sin mas menciones que la cadena es irreducible, es decir, que

$$p_x > 0 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < d$$

y

$$q_x > 0 \quad \text{para} \quad 0 < x \leqslant d$$

si d es finito, y que

$$p_x > 0 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant x < \infty$$

y

$$q_x > 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < \infty$$

si d es infinito.

Suponer que d es infinito. El sistema de ecuaciones

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \pi(y), \quad y \in \mathcal{P},$$

se convierte en

$$\begin{aligned} \pi(0)r_0 + \pi(1)q_1 &= \pi(0), \\ \pi(y-1)p_{y-1} + \pi(y)r_y + \pi(y+1)q_{y+1} &= \pi(y), \quad y \geqslant 1. \end{aligned}$$

Ya que

$$p_y + q_y + r_y = 1,$$

estas ecuaciones se reducen a

$$\begin{gathered} q_1\pi(1) - p_0\pi(0) = 0, \\ q_{y+1}\pi(y+1) - p_y\pi(y) = q_y\pi(y) - p_{y-1}\pi(y-1), \quad y \geqslant 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Sigue fácilmente de (7) e inducción que

$$q_{y+1}\pi(y+1) - p_y\pi(y) = 0, \quad y \geqslant 0,$$

y por tanto, que

$$\pi(y+1) = \frac{p_y}{q_{y+1}}\pi(y), \quad y \geqslant 0.$$

En consecuencia,

$$\pi(x) = \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x}\pi(0), \quad x \geqslant 1. \tag{8}$$

Sea

$$\pi_x = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x}, & x \geqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Entonces, (8) puede reescribirse como

$$\pi(x) = \pi_x\pi(0), \quad x \geqslant 0. \tag{10}$$

A la inversa (1) sigue de (10).

Suponer ahora que $\sum_x \pi_x < \infty$ o, de manera equivalente, que

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty. \tag{11}$$

Concluimos de (10) que la cadena de nacimiento y muerte tiene una única distribución estacionaria, dada por

$$\pi(x) = \frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^{\infty}\pi_y}, \quad x \geqslant 0. \tag{12}$$

Suponer, al reves, que (11) no se satisface, es decir, que

$$\sum_{x=0}^{\infty} \pi_x = \infty. \tag{13}$$

Concluimos de (10) y (13) que cada solución de (1) es o idénticamente cero o tiene suma infinita, y por tanto que no existe distribución estacionaria.

En resumen, vemos que la cadena tiene una distribución estacionaria si sólo si (11) se satisface, y que la distribución estacionaria, cuando esta existe, está dada por (9) y (12).

Suponer ahora que $d < \infty$. Esencialmente por los mismos argumentos usados para obtener (12), concluimos que la única distribución estacionaria está dada por

$$\pi(x)\frac{\pi_x}{\sum_{y=0}^{d}\pi_y}, \quad 0 \leqslant x \leqslant d, \tag{14}$$

donde π_x, $0 \leqslant x \leqslant d$, está dado por (9).

Ejemplo 14. *Considere la cadena de Ehrenfest introducida en la Sección 2.3 y suponer que $d = 3$. Encontrar la distribución estacionaria.*

La matriz de transición de la cadena es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta es una cadena de nacimiento y muerte irreducible en la cual $\pi_0 = 1$,

$$\pi_1 = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3, \quad \pi_2 = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3,$$

y

$$\pi_3 = \frac{1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1} = 1.$$

Así pues la única distribución estacionaria está dada por

$$\pi(0) = \frac{1}{8}, \quad \pi(1) = \frac{3}{8}, \quad \pi(2) = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad \pi(3) = \frac{1}{8}$$

Fórmula (2) no se sostiene para la cadena en el Ejemplo 14 ya que $P^n(x, x) = 0$ para valores impares de n. Podemos modificar un poco la cadena de Ehrenfest y evitar este comportamiento " periódico".

Ejemplo 15. Cadena de Ehrenfest modificada. *Suponer que tenemos dos cajas designadas por 1 y 2 y, d bolitas etiquetadas $1, 2, \ldots, d$. Inicialmente algunas de las bolitas están en la caja 1 y el resto en la caja 2. Un entero es seleccionado al azar de $1, 2, \ldots, d$ y la bolita etiquetada con este entero es removida de su caja. Ahora seleccionamos al azar una de las dos cajas y ponerla, las selecciones se realizarán de manera independiente. X_n denota el número de bolitas en la caja 1 después del n-écimo ensayo. Entonces X_n, $n \geqslant 0$, es una cadena de Markov sobre $\mathcal{P} = \{0, 1, \ldots, d\}$. Encontrar la distribución estacionaria de la cadena para $d = 3$.*

La matriz de transición de esta cadena, para $d = 3$, es

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Para ver por qué P está dado como se indicó, calcularemos $P(1, y)$, $0 \leqslant y \leqslant 3$. Comenzamos con una bolita en la caja 1 y dos en la caja 2. Así pues $P(1, 0)$ es la probabilidad que la bolita seleccionada está en la caja 1 y la caja seleccionada es la caja 2. Así pues

$$P(1, 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

En segundo lugar, $P(1, 2)$ es la probabilidad que la bolita seleccionada está en la caja 2 y la caja seleccionada es la caja 1. Así pues

$$P(1, 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Claramente $P(1, 3) = 0$, ya que a lo mas una bolita es transferida en un instante de tiempo. Finalmente, $P(1, 1)$ puede ser obtenido restando $P(1, 0) + P(1, 2) + P(1, 3)$ a 1. De manera alternativa, $P(1, 1)$ es la probabilidad que o, la bolita seleccionada este en la caja 1 y la caja seleccionada es la caja 1 o la bolita seleccionada está en la caja 2 y la caja seleccionada es la caja 2. Así pues

$$P(1, 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Las otras probabilidades son calculadas de manera similar. Esta cadena de Markov es una cadena de nacimiento y muerte irreducible. Es fácil ver que π_x, $0 \leqslant x \leqslant 3$, es la misma que en el ejemplo anterior y por tanto que la distribución estacionaria está dada otra vez por

$$\pi(0) = \frac{1}{8}, \quad \pi(1) = \frac{3}{8}, \quad \pi(2) = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad \pi(3) = \frac{1}{8}$$

3.2.2. Partículas en una caja

Una cadena de Markov que se aplicó en varios contextos puede ser descrita como sigue. Suponer que ϵ_n partículas son agregadas a una caja en el instante $n = 1, 2, \ldots$, donde ϵ_n, $n \geqslant 1$, son independientes y tienen distribución de Poisson con parámetro común λ. Suponer que en la caja y de manera independiente de cuantas partículas son agregadas a la caja, tiene probabilidad $p < 1$ de permanecer en la caja en el instante $n+1$ y probabilidad $q = 1-p$ de ser removida de su caja en el instante $n+1$. X_n denota el número de partículas en la caja en el instante n. Entonces X_n, $n \geqslant 0$, es una cadena de Markov.

La misma cadena de Markov puede ser usada para describir una central telefónica, donde ϵ_n es el número de nuevas llamadas a partir del instante n, q es la probabilidad que una llamada en progreso en el instante n termine en el instante $n+1$, y X_n es el número de llamadas en progreso en el instante n.

Ahora analizaremos esta cadena de Markov. $R(X_n)$ denota el numero de partículas presentes en el instante n que permanecen en la caja en el instante $n+1$. Entonces

$$X_{n+1} = \epsilon_{n+1} + R(X_n).$$

Claramente

$$P(R(X_n) = z | X_n = x) = \binom{x}{z} p^z (1-p)^{x-z}, \quad 0 \leqslant z \leqslant x,$$

y

$$P(\epsilon_n = z) = \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!}, \quad z \geqslant 0.$$

Ya que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y | X_n = x) &= \sum_{z=0}^{\text{mín}(x,y)} P(R(X_n) = z, \epsilon_{n+1} = y - z | X_n = x) \\ &= \sum_{z=0}^{\text{mín}(x,y)} P(\epsilon_{n+1} = y - z) P(R(X_n) = z | X_n = x), \end{aligned}$$

concluimos que

$$P(x,y) = \sum_{z=0}^{\text{mín}(x,y)} \frac{\lambda^{y-z} e^{-\lambda}}{(y-z)!} \binom{x}{z} p^z (1-p)^{x-z}. \tag{15}$$

Sigue de (15) o de la descripción original del proceso que $P(x,y) > 0$ para todo $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, y por tanto que la cadena es irreducible.

Suponer que X_n tiene una distribución de Poisson con parámetro t. Entonces $R(X_n)$ tiene una distribución de Poisson con parámetro pt, ya que p es la probabilidad que las partículas permanezcan en la caja. Para

$$\begin{aligned}
P(R(X_n) = y) &= \sum_{x=y}^{\infty} P(X_n = x, R(X_n) = y) \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} P(X_n = x) P(R(X_n) = y | X_n = x) \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{t^x e^{-t}}{x!} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{t^x e^{-t}}{y!(x-y)!} p^y (1-p)^{x-y} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-t}}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(t(1-p))^{x-y}}{(x-y)!} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-t}}{y!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(t(1-p))^{z}}{z!} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-t}}{y!} e^{t(1-p)} \\
&= \frac{(pt)^y e^{-pt}}{y!},
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $R(X_n)$ tiene la distribución de Poisson indicada.

Ahora mostraremos que la distribución estacionaria es Poisson con parámetro t, para un t conveniente. Dejar que X_0 tenga una tal distribución. Entonces $X_1 = \epsilon_1 + R(X_0)$ es la suma de las variables aleatorias independientes teniendo distribuciones de Poisson con parámetros λ y pt respectivamente. Así pues X_1 tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda + pt$. La distribución de X_1 coincidirá con la de X_0 si $t = \lambda + pt$, es decir, si

$$t = \frac{\lambda}{1-p} = \frac{\lambda}{q}.$$

Concluimos que la cadena de Markov tiene una distribución estacionaria π la cual es una distribución de Poisson con parámetro λ/q, es decir, tal que

$$\pi(x) = \frac{(\lambda/q)^x e^{-\lambda/q}}{x!}, \quad x \geqslant 0. \tag{16}$$

Finalmente obtendremos una formula para $P^n(x, y)$. Suponer que X_0 tiene una distribución de Poisson con parámetro t. Entonces X_n tiene una distribución de

Poisson con parámetro

$$tp^n + \frac{\lambda}{q}(1-p^n).$$

Así pues

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-t}t^x}{x!} P^n(x,y) &= P(X_n = y) \\ &= \exp\left[-\left(tp^n + \frac{\lambda}{q}(1-p^n)\right)\right] \frac{\left[tp^n + \frac{\lambda}{q}(1-p^n)\right]^y}{y!},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^x \frac{P^n(x,y)}{x!} = e^{-\lambda(1-p^n)/q} e^{t(1-p^n)} \frac{\left[tp^n + \frac{\lambda}{q}(1-p^n)\right]^y}{y!}. \tag{17}$$

Ahora si

$$\sum_{x=0}^{\infty} c_x t^x = \left(\sum_{x=0}^{\infty} b_x t^x\right)\left(\sum_{x=0}^{\infty} a_x t^x\right),$$

donde cada serie de potencias tiene un radio de convergencia positivo, entonces

$$c_x = \sum_{z=0}^{x} a_z b_{x-z}.$$

Si $a_z = 0$ para $z > y$, entonces

$$c_x = \sum_{z=0}^{\operatorname{mín}(x,y)} a_z b_{x-z}.$$

Usando esto con (17) y la expansión binomial, concluimos que

$$P^n(x,y) = \frac{x! e^{-\lambda(1-p^n)/q}}{y!} \sum_{z=0}^{\operatorname{mín}(x,y)} \binom{y}{z} p^{nz} \left[\frac{\lambda}{q}(1-p^n)\right]^{y-z} \frac{(1-p^n)^{x-z}}{(x-z)!},$$

lo cual se simplifica ligeramente hasta

$$P^n(x,y) = e^{-\lambda(1-p^n)/q} \sum_{z=0}^{\text{mín}(x,y)} \left(\begin{array}{c} x \\ z \end{array} \right) p^{nz}(1-p^n)^{x-z} \frac{\left[\frac{\lambda}{q}(1-p^n)\right]^{y-z}}{(y-z)!}. \tag{18}$$

Ya que $0 \leqslant p < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} p^n = 0.$$

Así pues cuando $n \to \infty$, los términos en la suma (18) todos se aproximan a cero excepto para el termino correspondiente a $z = 0$. Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \frac{e^{-\lambda/q}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^y}{y!} = \pi(y), \quad x, y \geqslant 0. \tag{19}$$

Así pues (2) se satisface para esta cadena, y en consecuencia la distribución π dada por (16) es la única distribución de la cadena.

3.3. Visitas a un estado recurrente

Considere una cadena de nacimiento y muerte irreducible con distribución estacionaria π. Suponer que $P(x,x) = r_x = 0$, $x \in \mathcal{P}$, como en la cadena de Ehrenfest y la cadena de la ruina de un jugador. Entonces en cada transición la cadena de nacimiento y muerte se mueve o bien un paso a la derecha o un paso a la izquierda. Así la cadena puede volver a su punto de inicio cada vez solo después de un número de transiciones. En otras palabras, $P^n(x,x) = 0$ para valores impares de n. Para una tal cadena la formula

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y), \qquad y \in \mathcal{P},$$

no se satisface.

Tales situaciones están lejos de manejarse. Sea a_n, $n \geqslant 0$, una sucesión de números. Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \tag{20}$$

para algún número finito L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = L. \tag{21}$$

Formula (21) puede satisfacerse, de todos modos, incluso si (20) no se cumple. Por ejemplo, si $a_n = 0$ para n impar y $a_n = 1$ para n par, entonces a_n no tiene límite cuando $n \to \infty$, pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} a_m = \frac{1}{2}.$$

En esta sección demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^m(x,y)$$

existe para cada par x, y de estados para una cadena de Markov arbitraria.

Recordando que

$$1_y(z) = \begin{cases} 1, & z = y, \\ 0, & z \neq y, \end{cases}$$

y que

$$E(1_y(X_n)) = P_x(X_n = y) = P^n(x,y). \tag{22}$$

Establecer que

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^{n} 1_y(X_m)$$

y

$$G_n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P^m(x,y).$$

Entonces $N_n(y)$ denota el número de visitas de la cadena de Markov a y durante los instantes $m = 1, 2, \ldots, n$. El número esperado de tales visitas para una cadena que comienza en x está dado de acuerdo a (22) por

$$E_x(N_n(y)) = G_n(x,y). \tag{23}$$

Sea y un estado transiente. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} N_n(y) = N(y) < \infty \quad \text{con probabilidad uno,}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x,y) = G(x,y) < \infty, \qquad x \in \mathcal{P}.$$

(correspondientes a los resultados y definiciones de la Sección 2.5).

De esto sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = 0 \quad \text{con probabilidad uno,} \tag{24}$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = 0, \quad x \in \mathcal{P}. \tag{25}$$

Observar que $N_n(y)/n$ es la proporción de las primeras n unidades de tiempo que la cadena está en el estado y y que $G_n(x,y)/n$ es el valor esperado de esta proporción para una cadena que comienza en x.

Suponer ahora que y es un estado recurrente. Sea $m_y = E_y(T_y)$ que denota el *promedio de tiempo de retorno* a y para una cadena que comienza en y si este tiempo de retorno tiene expectativa finita y se establece de otro modo que $m_y = \infty$. Sea $1_{\{T_y<\infty\}}$ que denota la variable aleatoria que es 1 si $T_y < \infty$ y 0 si $T_y = \infty$.

Usaremos la ley fuerte de los grandes números para probar el resultado principal de esta sección, es decir, el Teorema 3.1 de más adelante.

La ley fuerte de los grandes números *Sea $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ variables aleatorias idénticamente distribuidas. Si estas variables aleatorias tienen promedio finito μ, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n}{n} = \mu \quad \textit{con probabilidad uno.}$$

Si estas variables aleatorias son no negativas y deja de tener expectativa finita, entonces este límite se satisface, siempre que fijemos $\mu = +\infty$.

Teorema 3.1. *Sea y un estado recurrente. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1_{\{T_y<\infty\}}}{m_y} \quad \textit{tiene probabilidad 1,} \tag{26}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = \frac{\rho_{xy}}{m_y}, \quad x \in \mathcal{P}. \tag{27}$$

Del Corolario 2.1 del Capítulo 2 y el Teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1. *Sea C un conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes.*

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = \frac{1}{m_y}, \quad x, y \in C, \tag{28}$$

y si $P(X_0 \in C) = 1$, entonces con probabilidad uno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(y)}{n} = \frac{1}{m_y}, \quad y \in C. \tag{29}$$

Si $m_y = \infty$ los lados derecho de (26)-(29) es igual a cero, y por tanto, (24) y (25) se sostienen.

Demostración. En orden para verificar el Teorema 3.1, necesitamos introducir algunas variables aleatorias adicionales. Considere una cadena de Markov que comienza en un estado recurrente y. Con probabilidad uno ésta vuelve a y infinitamente muchas veces. Para $r \geqslant 1$ sea T_y^r que denota el instante de la r-ésima visita a y, de modo que

$$T_y^r = \min(n \geqslant 1 : N_n(y) = r).$$

Sea $W_y^1 = T_y^1 = T_y$, y para $r \geqslant 2$ sea $W_y^r = T_y^r - T_y^{r-1}$ denota el tiempo de espera entre la $(r-1)$-ésima visita a y y la r-ésima visita a y.

Claramente

$$T_y^r = W_y^1 + \cdots + W_y^r.$$

Las variables aleatorias $W_y^1, W_y^2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas y por tanto, significa que tienen en común $E_y(W_y^1) = E_y(T_y) = m_y$. Este resultado debe ser intuitivamente obvio, ya que en todo instante la cadena regresa a y a partir de entonces se comportaría como una cadena que comienza inicialmente en y. Uno puede dar una rigurosa demostración de este resultado mediante el uso de (27) del Capítulo 2, mostrar que para $r \geqslant 1$

$$P(W_y^{r+1} = m_{r+1} | W_y^1 = m_1, \ldots, W_y^r = m_r) = P_y(W_y^1 = m_{r+1});$$

y entonces demostrando por inducción que

$$P_y(W_y^1 = m_1, \ldots, W_y^r = m_r) = P_y(W_y^1 = m_1) \cdots P_y(W_y^r = m_r).$$

La fuerte ley de los números grandes implica que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W_y^1 + \cdots + W_y^k}{k} = m_y \quad \text{con probabilidad uno,}$$

es decir, que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{T_y^k}{k} = m_y \quad \text{con probabilidad uno.} \tag{30}$$

Establecer $r = N_n(y)$. Para el instante n la cadena ha hecho exactamente r visitas a y. Así la r-ésima visita a y ocurre antes o en el mismo instante n, y la $(r+1)$-ésima visita a y ocurre después del instante n; esto es,

$$T_y^{N_n(y)} \leqslant n < T_y^{N_n(y)+1},$$

y, por tanto

$$\frac{T_y^{N_n(y)}}{N_n(y)} \leqslant \frac{n}{N_n(y)} < \frac{T_y^{N_n(y)+1}}{N_n(y)},$$

o por lo menos este resultado se sostiene para n suficientemente grande de modo que $N_n(y) \geqslant 1$. Ya que $N_n(y) \to \infty$ con probabilidad uno cuando $n \to \infty$, estas desigualdades y (30) juntos implican que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{N_n(y)} = m_y \quad \text{con probabilidad uno,}$$

o, equivalentemente, que (29) se satisface.

Sea y un estado recurrente como antes, pero X_0 tiene una distribución arbitraria. Entonces la cadena nunca podrá llegar a y. Si lo hace llegar a y, sin embargo, este argumento no es valido; y por tanto, con probabilidad uno, $N_n(y)/n \to 1_{\{T_y<\infty\}}/m_y$ cuando $n \to \infty$. Así pues (26) es valido.

Por definición $0 \leqslant N_n(y) \leqslant n$, y por tanto

$$0 \leqslant \frac{N_n(y)}{n} \leqslant 1. \tag{31}$$

El teorema de convergencia dominada, Teorema 1.1, nos permite concluir a partir de (26) y (31) que

$$\lim_{n\to\infty} E_x\left(\frac{N_n(y)}{n}\right) = E_x\left(\frac{1_{\{T_y<\infty\}}}{m_y}\right) = \frac{P_x(T_y<\infty)}{m_y} = \frac{\rho_{xy}}{m_y}$$

y, por tanto, de (23) que (27) se satisface. Así completa la demostración del Teorema 3.1.

3.4. Estados recurrentes nulos y positivos

Un estado recurrente y es llamado *recurrente nulo* si $m_y = \infty$. Del Teorema 3.1 vemos que si y es recurrente nulo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} P^m(x,y)}{n} = 0, \quad x \in \mathcal{P} \tag{32}$$

(Se puede demostrar que si y es recurrente nulo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0, \quad x \in \mathcal{P}, \tag{33}$$

lo cual es un resultado mas fuerte que (32).

Un estado recurrente es llamado *recurrente positivo* si $m_y < \infty$. Sigue del Teorema 3.1 que si y es recurrente positivo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(y,y)}{n} = \frac{1}{m_y} > 0.$$

Así pues (32) y (33) no se satisfacen para estados recurrentes positivos.

Considere una cadena de Markov que comienza en un estado recurrente y. Sigue del Teorema 3.1 que si y es recurrente nulo, entonces, con probabilidad uno, la proporción de tiempo que la cadena está en el estado y durante las primeras n unidades de tiempo se aproxima a cero a medida que $n \to \infty$. Por otro lado, si y es un estado recurrente positivo, entonces, con probabilidad uno, la proporción de tiempo que la cadena está en el estado y durante las primeras n unidades de tiempo se aproxima al límite positivo $1/m_y$ cuando $n \to \infty$.

El siguiente resultado está estrechamente relacionado con el Teorema 2.2 (Capítulo 2).

Teorema 3.2. *Sea x un estado recurrente positivo y suponer que x se comunica con y. Entonces y es recurrente positivo.*

Demostración. Sigue del Teorema 2.2 que y se comunica con x. Por lo tanto existen enteros positivos n_1 y n_2 tal que

$$P^{n_1}(y,x) > 0 \quad \text{y} \quad P^{n_2}(x,y) > 0$$

Ahora

$$P^{n_1+m+n_2}(y,y) \geqslant P^{n_1}(y,x)P^m(x,x)P^{n_2}(x,y),$$

y sumando en $m = 1, 2, \ldots, n$ y dividiendo por n concluimos por las definiciones vistas en la Sección 3.3 que

$$\frac{G_{n_1+n+n_2}(y,y)}{n} - \frac{G_{n_1+n_2}(y,y)}{n} \geqslant P^{n_1}(y,x)P^{n_2}(x,y)\frac{G_n(x,x)}{n}.$$

Cuando $n \to \infty$, el lado izquierdo de esta ecuación converge a $1/m_y$ y el lado derecho converge a

$$\frac{P^{n_1}(y,x)P^{n_2}(x,y)}{m_x}.$$

Por tanto

$$\frac{1}{m_y} \geqslant \frac{P^{n_1}(y,x)P^{n_2}(x,y)}{m_x} \geqslant 0,$$

y en consecuencia $m_y < \infty$. Esto demuestra que y es recurrente positivo. □

De este Teorema y del Teorema 2.2 vemos que si C es un conjunto cerrado irreducible, entonces todo estado en C es transiente, todo estado en C es recurrente nulo, o todo estado en C es recurrente positivo. Una cadena de Markov es llamada una *cadena recurrente nula* si todos sus estados son recurrentes nulos y una *cadena recurrente positiva* si todos sus estados son recurrentes positivos. vemos, por lo tanto, que una cadena de Markov irreducible es una cadena transiente, una cadena recurrente nula o una cadena recurrente positiva.

Si C es un conjunto cerrado finito de estados, entonces C tiene por lo menos un estado recurrente positivo. Para

$$\sum_{y\in C} P^m(x,y) = 1, \quad x \in C,$$

y sumando en $m = 1, \ldots, n$ y dividiendo por n encontramos que

$$\sum_{y\in C} \frac{G_n(x,y)}{n} = 1, \quad x \in C.$$

Si C es finito y cada estado en C es transiente o recurrente nulo, entonces (25) se satisface y por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in C} \frac{G_n(x,y)}{n} \\ &= \sum_{y\in C} \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x,y)}{n} = 0 \end{aligned}$$

contradicción.

Ahora somos capaces de afinar el Teorema 2.3 (Capítulo 2).

Teorema 3.3. *Sea C un conjunto cerrado finito e irreducible de estados. Entonces todo estado en C es recurrente positivo.*

Demostración. Ahora la demostración de este teorema es casi inmediata. Ya que C es un conjunto cerrado finito, existe al menos un estado recurrente positivo en C. Ya que C es irreducible, todo estado en C es recurrente positivo por Teorema 3.2. □

Corolario 3.2. *Una cadena de Markov irreducible teniendo un número finito de estados es recurrente positiva.*

Corolario 3.3. *Una cadena de Markov que tiene un número finito de estados no tiene estados recurrentes nulos.*

Demostración Corolario 3.2 sigue inmediatamente del Teorema 3.3. Para verificar Corolario 3.3, observe que si y es un estado recurrente, entonces, por el Teorema 2.4, y está contenido en un conjunto cerrado irreducible C de estados recurrentes. Ya que C es necesariamente finito, sigue del Teorema 3.3 que todo estado en C, incluyendo el mismo y, son recurrentes positivos. Así pues todo estado recurrente es recurrente positivo, y por lo tanto no hay estados recurrentes nulos. □

Ejemplo 16. *Considere la cadena de Markov descrita en el Ejemplo 8 del Capítulo 1. Hemos visto que 1 y 2 son estados transientes y que 0, 3, 4 y 5 son estados recurrentes. Ahora vemos que estos estados recurrentes son necesariamente recurrentes positivos.*

3.5. Existencia y Unicidad

En esta sección determinaremos que cadenas tienen distribuciones estacionarias y, si existe, cuando esta distribución es única. En nuestra discusión necesitaremos intercambiar sumas y límites en varias ocasiones. Esto es justificado por el siguiente resultado estándar y elemental en análisis.

Teorema de Convergencia Dominada Sea $a(x)$, $x \in \mathcal{P}$ números no negativos que tienen suma finita, y sea $b_n(x)$, $x \in \mathcal{P}$ y $n \geqslant 1$, tal que $|b_n(x)| \leqslant 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = b(x), \qquad x \in \mathcal{P}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sum_x a(x)b_n(x) = \sum_x a(x)b(x).$$

Sea π una distribución estacionaria y sea m un entero positivo. Entonces por (3)

$$\sum_z \pi(z)P^m(z,x) = \pi(x).$$

Sumando esta ecuación en $m = 1, \ldots, n$ y dividiendo por n, concluimos que

$$\sum_z \pi(z)\frac{G_n(z,x)}{n} = \pi(x), \quad x \in \mathcal{P}. \tag{34}$$

Teorema 3.4. *Sea π una distribución estacionaria. Si x es un estado transiente o un estado recurrente nulo, entonces $\pi(x) = 0$.*

Demostración Si x es un estado transiente o un estado recurrente nulo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(z,x)}{n} = 0, \quad z \in \mathcal{P}, \tag{35}$$

como se demostró en la Sección 3.3 y 3.4. Sigue de (34), (35) y del teorema de convergencia limitada que

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_z \pi(z)\frac{G_n(z,x)}{n} = 0,$$

como lo deseábamos. □

Sigue de este teorema que una cadena de Markov sin estados recurrentes positivos no tiene una distribución estacionaria.

Teorema 3.5. *Una cadena de Markov irreducible recurrente positiva tiene una única distribución estacionaria π, dada por*

$$\pi(x) = \frac{1}{m_x}, \quad x \in \mathcal{P}. \tag{36}$$

Demostración Sigue del Teorema 3.1 y las hipótesis de este teorema que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n(z,x)}{n} = \frac{1}{m_x}, \quad x, z \in \mathcal{P}. \tag{37}$$

Suponer que π es una distribución estacionaria. Vemos de (34), (37), y el teorema de convergencia limitada que

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_z \pi(z) \frac{G_n(z,x)}{n} \\ &= \frac{1}{m_x} \sum_z \pi(z) = \frac{1}{m_x}. \end{aligned}$$

Así pues si hay una distribución estacionaria, ésta debe estar dada por (36).

Para completar la demostración del teorema necesitamos demostrar que la función $\pi(x)$, $x \in \mathcal{P}$, definida en (36) es necesariamente una distribución estacionaria. Claramente ésta es no negativa, por lo que sólo necesitamos mostrar que

$$\sum_x \frac{1}{m_x} = 1 \tag{38}$$

y

$$\sum_x \frac{1}{m_x} P(x,y) = \frac{1}{m_y} \quad y \in \mathcal{P}. \tag{39}$$

Hacia este fin observamos primero que

$$\sum_z P^m(z,x) = 1.$$

Sumando en $m = 1, \ldots, n$ y dividiendo por n, concluimos que

$$\sum_x \frac{G_n(z,x)}{n} = 1, \quad z \in \mathcal{P}. \tag{40}$$

Después observamos que por (24) del Capítulo 2

$$\sum_x P^m(z,x) P(x,y) = P^{m+1}(z,y).$$

De nuevo sumando en $m = 1, \ldots, n$ y dividiendo por n, concluimos que

$$\sum_x \frac{G_n(z,x)}{n} P(x,y) = \frac{G_{n+1}(z,y)}{n} - \frac{P(z,y)}{n}. \tag{41}$$

Si $\mathcal{P}$ es finito, concluimos de (37) y (40) que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_x \frac{G_n(z,x)}{n} = \sum_x \frac{1}{m_x},$$

es decir que (38) se satisface. De manera similar, concluimos que (39) se sostiene dejando $n \to \infty$ en (41). Esto demuestra la demostración del teorema si $\mathcal{P}$ es finito.

El argumento para completar la demostración para $\mathcal{P}$ infinito es mas complicado, ya que no podemos directamente intercambiar los limites y sumas como lo hicimos para $\mathcal{P}$ finito (el teorema de convergencia limitada no es aplicable). Sea $\mathcal{P}_1$ un subconjunto finito de $\mathcal{P}$. Vemos de (40) que

$$\sum_{x\in\mathcal{P}_1} \frac{G_n(z,x)}{n} \leqslant 1, \qquad z \in \mathcal{P}.$$

Ya que $\mathcal{P}_1$ es finito, podemos dejar $n \to \infty$ en esta desigualdad y concluimos de (37) que

$$\sum_{x\in\mathcal{P}_1} \frac{1}{m_x} \leqslant 1.$$

La última desigualdad se satisface para cada subconjunto finito $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$, y por tanto

$$\sum_x \frac{1}{m_x} \leqslant 1. \tag{42}$$

De si la suma de $1/m_x$ sobre $x \in \mathcal{P}$ excede 1, la suma sobre algún subconjunto finito de $\mathcal{P}$ debe también exceder 1.

De manera similar, concluimos de (41) que si $\mathcal{P}_1$ es un subconjunto finito de $\mathcal{P}$, entonces

$$\sum_{x\in\mathcal{P}_1} \frac{G_n(z,x)}{n} P(x,y) \leqslant \frac{G_{n+1}(z,y)}{n} - \frac{P(z,y)}{n}.$$

Dejando $n \to \infty$ en esta desigualdad y usando (37), obtenemos

$$\sum_{x\in\mathcal{P}_1} \frac{1}{m_x} P(x,y) \leqslant \frac{1}{m_y}.$$

Concluimos, como en la demostración de (42), que

$$\sum_x \frac{1}{m_x} P(x,y) \leq \frac{1}{m_y}, \quad y \in \mathcal{P} \tag{43}$$

Siguiente, demostraremos que la igualdad se satisface en (43). Sigue de (42) que la suma sobre y del lado derecho de (43) es finita. Si la desigualdad estricta se sostuviera para algún y, debe seguir que al sumar (43)

$$\begin{aligned}
\sum_y \frac{1}{m_y} &> \sum_y \left(\sum_x \frac{1}{m_x} P(x,y) \right) \\
&= \sum_x \frac{1}{m_x} \left(\sum_y P(x,y) \right) \\
&= \sum_x \frac{1}{m_x},
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Esto prueba que la igualdad se satisface en (43), es decir, que (39) se satisface.

Sea

$$c = \frac{1}{\sum_x \frac{1}{m_x}}.$$

Entonces por (39)

$$\pi(x) = \frac{c}{m_x}, \quad x \in \mathcal{P},$$

define una distribución estacionaria. Así pues de la primera parte de la demostración de este teorema

$$\frac{c}{m_x} = \frac{1}{m_x},$$

y por tanto $c = 1$. Esto prueba que (38) se satisface y completa la demostración del teorema. $\square$

De los Teoremas 3.4 y 3.5 obtenemos inmediatamente

Corolario 3.4. *Una cadena de Markov irreducible es recurrente positiva si y sólo si ésta tiene una distribución estacionaria.*

Ejemplo 17. *Considere una cadena de nacimiento y muerte sobre los enteros no negativos. Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la cadena sea*

(a) recurrente positiva,

(b) recurrente nula,

(c) transiente.

De la Sección 3.2.1 vimos que la cadena tiene distribución estacionaria si y sólo si

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty. \tag{44}$$

Así pues (44) es necesaria y suficiente para que la cadena sea recurrente positiva. Vimos en la Sección 2.7 que

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} < \infty \tag{45}$$

es una condición necesaria y suficiente para que la cadena sea transiente. Para que la cadena sea recurrente nula, es necesario y suficiente que (44) y (45) ambas no se satisfagan. Así pues

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{q_1 \cdots q_x}{p_1 \cdots p_x} = \infty \quad \text{y} \quad \sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} = \infty \tag{46}$$

son condiciones necesarias y suficientes para que la cadena sea recurrente nula.

Como una consecuencia inmediata de Corolario 3.2 y Teorema 3.5 obtenemos

Corolario 3.5. *Si una cadena de Markov con un número finito de estados es irreducible, ésta tiene una única distribución estacionaria.*

Recordar que $N_n(x)$ número de visitas durante los periodos $m = 1, \ldots, n$ Mediante la combinación de Corolario 3.1 y Teorema 3.5 obtenemos

Corolario 3.6. *Sea X_n, $n \geqslant 0$, una cadena de Markov irreducible recurrente positiva que tiene distribución estacionaria π. Entonces con probabilidad uno*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(x)}{n} = \pi(x) \quad x \in \mathcal{P}. \tag{47}$$

3.5.1. Cadenas reducibles

Sea π una distribución sobre $\mathcal{P}$, es decir, sea $\pi(x)$, $x \in \mathcal{P}$ enteros no negativos que suman uno y sea C un subconjunto de $\mathcal{P}$. Diremos que π está concentrado en C si

$$\pi(x) = 0, \quad x \notin C.$$

Esencialmente por el mismo argumento usado para probar el Teorema 3.5 podemos obtener un resultado algo más general.

Teorema 3.6. *Sea C un conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes positivos. Entonces la cadena de Markov tiene una única distribución estacionaria π concentrada en C. Ésta está dada por*

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{m_x}, & x \in C \\ 0, & \textit{en otros casos} \end{cases} \tag{48}$$

Suponer que C_0 y C_1 son dos conjuntos distintos cerrados e irreducibles de estados recurrentes positivos de una cadena de Markov. Sigue del Teorema 3.6 que la cadena de Markov tiene una distribución estacionaria π_0 concentrada en C_0 y una distribución estacionaria diferente π_1 concentrada en C_1. Por otra parte, la distribución π_α definida, para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, por

$$\pi_\alpha(x) = (1-\alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x), \quad x \in \mathcal{P},$$

son distribuciones estacionarias distintas (ver Ejercicio 5.8). Mediante la combinación de los Teoremas 3.4-3.6 y sus consecuencias, obtenemos

Corolario 3.7. *$\mathcal{P}_P$ denota los estados recurrentes positivos de una cadena de Markov.*

(i) Si $\mathcal{P}_P$ es vacío, la cadena no tiene distribuciones estacionarias.

(ii) Si $\mathcal{P}_P$ es un conjunto no vacío irreducible, la cadena tiene una única distribución estacionaria.

(iii) Si $\mathcal{P}_P$ es no vacío pero no irreducible, la cadena tiene un número infinito de distribuciones estacionarias distintas.

Considere ahora una cadena de Markov teniendo un número finito de estados. Entonces cada estado recurrente es recurrente positivo y existe al menos uno de tales estados. Existen dos posibilidades: o el conjunto $\mathcal{P}_R$ de estados recurrentes es irreducible y existe una única distribución estacionaria, o $\mathcal{P}_R$ puede descomponerse en dos o más conjuntos cerrados irreducibles y existen un número infinito de distribuciones estacionarias distintas. La última posibilidad se satisface para una cadena de Markov sobre $\mathcal{P} = \{0, 1, \ldots, d\}$ en la cual $d > 0$ y 0 y d ambos son estados absorbentes. La cadena de la ruina de un jugador sobre $\{0, 1, \ldots, d\}$ y el modelo genético en el Ejemplo 6 del Capítulo 2 son de este tipo. Para una de tales cadenas cada distribución π_α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, de la forma

$$\pi_\alpha(x) = \begin{cases} 1-\alpha, & x = 0, \\ \alpha, & x = d, \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

es una distribución estacionaria.

Ejemplo 18. *Considere la cadena de Markov introducida en el Ejemplo 9 del Capítulo 1. Encontrar la distribución estacionaria concentrada en cada uno de los conjuntos cerrados irreducibles.*

Vimos en la Sección 2.6 que el conjunto de estados recurrentes para esta cadena esta descompuesto en el estado absorbente 0 y el conjunto cerrado irreducible $\{3, 4, 5\}$. Claramente la única distribución estacionaria concentrada en $\{0\}$ está dada por $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$. Para encontrar la única distribución estacionaria concentrada en $\{3, 4, 5\}$, tenemos que encontrar números no negativos $\pi(3)$, $\pi(4)$, y $\pi(5)$ que suman uno y satisfacen las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\pi(3)}{6} + \frac{\pi(4)}{2} + \frac{\pi(5)}{4} &= \pi(3) \\ \frac{\pi(3)}{3} &= \pi(4) \\ \frac{\pi(3)}{2} + \frac{\pi(4)}{2} + 3\frac{\pi(5)}{4} &= \pi(5) \end{aligned}$$

De las primeras dos de estas ecuaciones encontramos que $\pi(4) = \pi(3)/3$ y $\pi(5) = 8\pi(3)/3$. Así pues

$$\pi(3)(1 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3}) = 1.$$

de los cuales podemos concluir

$$\pi(3) = \frac{1}{4}, \quad \pi(4) = \frac{1}{12}, \quad \text{y} \quad \pi(5) = \frac{2}{3}.$$

En consecuencia

$$\pi_1 = (0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3})$$

es la distribución estacionaria concentrada en $\{3, 4, 5\}$.

3.6. Cadena de colas

Considere la cadena de colas introducida en el Ejemplo 5 del Capítulo 2. Recordar que el número de clientes que llegan en unidad de tiempo tiene densidad f y la media μ. Suponer que la cadena es irreducible, lo que significa que $f(0) > 0$ y $f(0) + f(1) < 1$ (ver Ejercicio 5.7). En el Capítulo 2 vimos que la cadena es recurrente si $\mu \leqslant 1$ y transiente si $\mu > 1$. En la Sección 3.6.1 demostraremos que en el caso recurrente

$$m_0 = \frac{1}{1-\mu}. \tag{49}$$

Sigue de (49) que si $\mu < 1$, entonces $m_0 < \infty$ y por tanto 0 es un estado recurrente positivo. Así pues por irreducibilidad la cadena es recurrente positiva. En otras palabras, si $\mu = 1$, entonces $m_0 = \infty$ y por tanto 0 es un estado recurrente nulo. Concluimos que la cadena de cola es recurrente nula en este caso. Por lo tanto, la cadena de cola irreducible es recurrente positiva si $\mu < 1$ y recurrente nula si $\mu = 1$, y transiente si $\mu > 1$.

Demostración Ahora verificamos (49). Supongamos a lo largo de la demostración de este resultado que $f(0) > 0$, $f(0) + f(1) < 1$ y $\mu \leqslant 1$, así que la cadena es irreducible y recurrente. Considere una tal cadena comenzando en el entero positivo x. Entonces T_{x-1} denota el tiempo para ir del estado x al estado $x-1$, y $T_{y-1} - T_y$, $1 \leqslant y \leqslant x-1$, denota el tiempo para ir del estado y al estado $y-1$. Ya que la cadena de colas va un paso más a la izquierda en un instante, la propiedad de Markov asegura que las variables aleatorias

$$T_{x-1}, T_{x-2} - T_{x-1}, \ldots, T_0 - T_1$$

son independientes. Estas variables aleatorias están idénticamente distribuidas; para cada una de ellas está distribuida como

$$\min(n > 0 : \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n = n - 1),$$

es decir, como el entero positivo mas pequeño n tal que el número de clientes atendidos en el instante n es uno más que el número de clientes que llegan en el instante n.

Sea $G(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, denota la función generatriz de probabilidad de ir del estado 1 al estado 0. Entonces

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_1(T_0 = n). \tag{50}$$

La función generatriz de probabilidad de la suma de variables aleatorias independientes con valores enteros no negativos es el producto de sus respectivas funciones generatrices de probabilidad. Esto es

$$G_{S+T}(t) = E(t^{S+T}) = E(t^S t^T) = E(t^S)E(t^T) = G_S(t)G_T(t).$$

donde viene dándose en (50) que $G(t) = E_1(t^{T_0})$, vale decir, la función generatriz de probabilidad de T_0 dado $X_0 = 1$, lo que significa que la función generatriz se ha calculado con la probabilidad $P(\cdot|X_0 = 1)$.

Si la cadena comienza en x. Entonces

$$T_0 = T_{x-1} + (T_{x-2} - T_{x-1}) + \cdots + (T_0 - T_1)$$

es la suma de x variables aleatorias independientes cada una teniendo función generatriz de probabilidad $G(t)$. Así pues la función generatriz de probabilidad de T_0 es $(G(t))^x$; esto es

$$(G(t))^x = \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_x(T_0 = n). \tag{51}$$

Ahora mostremos que

$$G(t) = t\Phi(G(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{52}$$

donde Φ denota la función generatriz de probabilidad de f. Para verificar (52) reescribiremos (50) como

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} P_1(T_0 = n+1) = tP(1,0) + t\sum_{n=1}^{\infty} t^n P_1(T_0 = n+1).$$

Usando de forma sucesiva (29) del Capítulo 2, (51) de este capítulo, y la fórmula $P(1,y) = f(y)$, $y \geqslant 0$, encontramos que

$$\begin{aligned}
G(t) &= tP(1,0) + t\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{t\neq 0} P(1,y)P_y(T_0 = n) \\
&= tP(1,0) + t\sum_{y\neq 0} P(1,y) \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_y(T_0 = n) \\
&= t\left[f(0) + \sum_{y\neq 0} f(y)(G(t))^y\right] \\
&= t\Phi(G(t)).
\end{aligned}$$

Para $0 \leqslant t < 1$ podemos derivar ambos lados de (52) y obtener

$$G'(t) = \Phi(G(t)) + tG'(t)\Phi'(G(t)).$$

Resolviendo para $G'(t)$ encontramos que

$$G'(t) = \frac{\Phi(G(t))}{1 - t\Phi'(G(t))}, \quad 0 \leqslant t < 1. \tag{53}$$

Ahora $G(t) \to 1$ y $\Phi(t) \to 1$ cuando $t \to 1$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \Phi'(t) &= \lim_{t\to 1} \sum_{x=1}^{\infty} xf(x)t^{x-1} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} xf(x) = \mu
\end{aligned}$$

Haciendo que $t \to 1$ en (53) vemos que

$$\lim_{t\to 1} G'(t) = \frac{1}{1-\mu} \tag{54}$$

Por definición

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_1(T_0 = n)t^n.$$

Pero ya que $P(1, x) = P(0, x)$, $x \geqslant 0$, sigue de (29) del Capítulo 2 que la distribución de T_0 para una cadena de colas que comienza en el estado 1 es la misma que para una cadena que comienza en 0. En consecuencia,

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_0(T_0 = n)t^n,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} G'(t) &= \lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} nP_0(T_0 = n)t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_0(T_0 = n) \\ &= E_0(T_0) = m_0. \end{aligned}$$

Ahora sigue de (54) que (49) se satisface.

3.7. Distribución Estacionaria Límite

Hemos visto al principio de este capítulo que si X_n, $n \geqslant 0$, es una cadena de Markov irreducible recurrente positiva teniendo π como su distribución estacionaria, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^m(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{G_n(x, y)}{n} = \pi(y), \quad x, y \in \mathcal{P}.$$

En esta sección veremos cuando el resultado más fuerte

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = \pi(y), \quad x, y \in \mathcal{P}$$

se satisface y que pasa cuando no.

Sea x un estado de una cadena de Markov tal que $P^n(x, x) > 0$ para algún $n \geqslant 1$, es decir, tal que $\rho_{xx} = P_x(T_x < \infty) > 0$. Definimos su periodo d_x por

$$d_x = m.c.d\{n \geqslant 1 : P^n(x, x) > 0\},$$

donde $m.c.d.\, I$ es el máximo común divisor del conjunto no vacío I.

Entonces

$$1 \leqslant d_x \leqslant \text{mín}(n \geqslant 1 : P^n(x,x) > 0).$$

Si $P(x,x) > 0$, entonces $d_x = 1$.

Si x e y son dos estados, cada uno de los cuales se comunica uno con el otro, entonces $d_x = d_y$. Para lo cual sean n_1 y n_2 enteros positivos tal que

$$P^{n_1}(x,y) > 0 \quad \text{y} \quad P^{n_2}(y,x) > 0.$$

Entonces

$$P^{n_1+n_2}(x,x) \geqslant P^{n_1}(x,y)P^{n_2}(y,x) > 0,$$

y por tanto d_x es un divisor de $n_1 + n_2$. Si $P^n(y,y) > 0$, entonces

$$P^{n_1+n+n_2}(x,x) \geqslant P^{n_1}(x,y)P^n(y,y)P^{n_2}(y,x) > 0,$$

de modo que d_x es un divisor de $n_1 + n + n_2$. Ya que d_x es un divisor de $n_1 + n_2$ éste debe ser divisor de n. Así pues d_x es un divisor de todos los números en el conjunto $\{n \geqslant 1 : P^n(y,y) > 0\}$. Ya que d_y es el más grande de tales divisores, concluimos que $d_x \leqslant d_y$. De manera similar $d_y \leqslant d_x$, y por tanto $d_x = d_y$.

Hemos mostrado, en otras palabras, que los estados en una cadena de Markov irreducible tienen periodo en común d. Decimos que la cadena es periódica de periodo d si $d > 1$ y aperiódica si $d = 1$. Una simple condición suficiente para una cadena de Markov irreducible para ser aperiódica es que $P(x,x) > 0$ para algún $x \in \mathcal{P}$. Ya que $P(0,0) = f(0) > 0$ para una cadena de colas irreducible, una tal cadena es necesariamente aperiódica.

Ejemplo 19. *Determine el periodo de una cadena de nacimiento y muerte irreducible.*

Si algún $r_x > 0$, entonces $P(x,x) = r_x > 0$, y la cadena de nacimiento y muerte es aperiódica. En particular, la cadena de Ehrenfest modificada en el Ejemplo 15 es aperiódica.

Suponer que $r_x = 0$ para todo x. Entonces en una transición el estado de la cadena cambia o de un estado impar a un estado par o de un estado par a un estado impar. En particular, una cadena puede volver a su estado inicial sólo después de un número par de transiciones. Así pues el periodo de la cadena es 2 o un múltiplo de 2. Por tanto

$$P^2(0,0) = p_0 q_1 > 0,$$

concluimos que la cadena es periódica con periodo 2. En particular, la cadena de Ehrenfest introducida en el Ejemplo 2 del Capítulo 2 es periódica con periodo 2.

Teorema 3.7. *Sea X_n, $n \geqslant 0$, una cadena de Markov irreducible recurrente positiva que tiene distribución estacionaria π. Si la cadena es aperiódica,*

$$\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi(y), \quad x,y \in \mathcal{P}. \tag{55}$$

Si la cadena es periódica con periodo d, entonces para cada par x, y de estados en $\mathcal{P}$ existe un entero r, $0 \leqslant r < d$, tal que $P^n(x,y) = 0$ a menos que $n = md + r$ para algún entero no negativo m, y

$$\lim_{m\to\infty} P^{md+r}(x,y) = d\pi(y). \tag{56}$$

Para una ilustración de la segunda mitad de este teorema, considere una cadena de nacimiento y muerte irreducible recurrente positiva la cual es periódica con periodo 2. Si $y - x$ es par, entonces $P^{2m+1}(x,y) = 0$ para todo $m \geqslant 0$ y

$$\lim_{m\to\infty} P^{2m}(x,y) = 2\pi(y).$$

Si $y - x$ es impar, entonces $P^{2m}(x,y) = 0$ para todo $m \geqslant 1$ y

$$\lim_{m\to\infty} P^{2m+1}(x,y) = 2\pi(y).$$

Ejemplo 20. *Determine el comportamiento asintótico de la matriz P^n para la matriz de transición P*

(a) del Ejemplo 15,

(b) del Ejemplo 14.

(a) La matriz de transición P del Ejemplo 15 corresponde a una cadena de Markov irreducible aperiódica sobre $\{0,1,2,3\}$ teniendo la distribución estacionaria dada por

$$\pi(0) = \frac{1}{8}, \quad \pi(1) = \frac{3}{8}, \quad \pi(2) = \frac{3}{8}, \quad \text{y} \quad \pi(3) = \frac{1}{8}.$$

Sigue del Teorema 3.7, que pasa n grande

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(b) La matriz de transición P del Ejemplo 14 corresponde a una cadena de Markov irreducible periódica sobre $\{0, 1, 2, 3\}$ teniendo periodo 2 y la misma distribución estacionaria como la de la cadena del Ejemplo 15. De la discusión que siguió a la declaración del Teorema 3.7, concluimos que para n grande y par

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

mientras que para n grande e impar

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Modelo de Reed-Frost

El modelo de Reed-Frost, que debe su nombre a sus fundadores Lowell J. Reed y Wade Frost (1928), es un modelo simple de epidemia que explica claramente la aplicación de las cadenas de Markov en la salud, además es denominado también cadena binomial. Éste es un modelo de epidemia de SIR, llamado así porque cada individuo puede ser Susceptible, Infeccioso o Removido. Un individuo susceptible puede contraer la enfermedad pasando luego al estado de infeccioso y éste a su vez, en el instante siguiente, pasa a ser removido, lo que significa que deja de ser infeccioso no pudiendo contagiar a los demás individuos en los instantes siguientes y tampoco vuelve a ser susceptible. Es decir, si al principio de un periodo dado una persona esta infectada, quedará en la categoría de infecciosa y en el instante siguiente pasará a estar en la categoría de persona removida y permanecerá en ese estado.

Para su mejor uso este modelo se presenta en tiempo discreto: días, semanas, meses, años, etc... En el escenario de tiempo discreto es natural pensar que el período de contagio es breve, precedido por un largo período de latencia, de lo cual se deduce que las nuevas infecciones se producen en las generaciones presentes y éstas están separadas por los periodos de latencia como unidad de tiempo discreto.

Entonces, las probabilidades de los eventos de la próxima generación sólo dependen de la generación presente razón por la cual es un modelo de Markov y están completamente determinados por sus respectivas probabilidades binomiales. Notemos como X_j e Y_j al número de personas susceptibles e infecciosas respectivamente que se encuentran en el instante (o generación) j, la cadena binomial del modelo de Reed-Frost presenta probabilidades condicionales

$$P(Y_{j+1} = y_{j+1} | X_0 = x_0, Y_0 = y_0, \ldots, X_j = x_j, Y_j = y_j)$$

$$\begin{aligned} &= P(Y_{j+1} = y_{j+1}|X_j = x_j, Y_j = y_j) \\ &= \binom{x_j}{y_{j+1}} (1 - q^{y_j})^{y_{j+1}} (q^{y_j})^{x_j - y_{j+1}} \end{aligned}$$

donde $X_{j+1} = X_j - Y_{j+1}$. Esto explica que una persona susceptible de la generación j se escapa de la enfermedad o de todos los infecciosos de esta generación y sigue siendo susceptible para la siguiente; estos eventos son independientes, es decir la persona puede infectarse con la misma probabilidad q de un infeccioso cualquiera. Además, distintos individuos susceptibles de una generación pueden infectarse de manera independiente de los individuos infecciosos, y estos últimos para la siguiente generación pasan a ser removidos.

Comenzaremos con un número determinado de individuos dados, $X_0 = n$ e $Y_0 = m$, n susceptibles y m infecciosos para la primera generación, ahora bien dados los infecciosos de cada generación $y_0 = m, y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} = 0$, la probabilidad para la cadena completa es obtenida mediante el condicionamiento de forma secuencial y el uso de la propiedad de Markov de la cadena. Si denotamos por $x_{j+1} = x_j - y_{j+1}$ tenemos

$$P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_k = y_k, Y_{k+1} = 0|X_0 = n, Y_0 = m)$$

$$\begin{aligned} &= P(Y_1 = y_1|X_0 = n, Y_0 = m) \times \cdots \times P(Y_{k+1} = 0|X_k = x_k, Y_k = y_k) \\ &= \binom{n}{y_1} (1 - q^m)^{y_1} (q^m)^{n - y_1} \times \cdots \times \binom{x_k}{0} (1 - q^{y_k})^0 (q^{y_k})^{x_k} \end{aligned}$$

4.1. Clasificación de Estados

Ya que tenemos definida en principio la epidemia comenzaremos a ver que tal se comportan los estados dado un numero N de personas. Estos estados los veremos como un par (x_j, y_j) para la cadena $X_j \times Y_j$, tomando los valores iniciales anteriores $X_0 = n$ e $Y_0 = m$ lo cual da un total de población inicial $N = n + m$ y llamaremos $\mathcal{P}_1 = \{0, \ldots, n\}$ y $\mathcal{P}_2 = \{0, \ldots, m\}$ para el conjunto de los susceptibles e infecciosos respectivamente.

Como esta definido con anterioridad la primera componente corresponde a los individuos susceptibles de la generación dada y la segunda a los infecciosos, por lo cual tomando un elemento (o estado) (x, y) tenemos

si $y = 0$

entonces se da el caso del par $(x, 0)$ lo que significa que ya no hay personas infecciosas y las susceptibles restantes se mantienen susceptibles al no tener de donde contagiarse. Con esto tenemos que para todo x en $\mathcal{P}_1$ de la cantidad de susceptibles, el par $(x, 0)$ es un estado absorbente.

si $y \neq 0$ **y** $x = 0$
caemos en el caso de los elementos de la forma $(0, y)$, ya que de principio se dijo que las personas en el estado infeccioso pasan a ser removidos en la siguiente generación, entonces tenemos que para el siguiente instante caeremos en el estado $(0, 0)$ que es un caso particular del anterior, de esta forma los elementos de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$ en $\mathcal{P}_2$ son estados transientes ya que al llegar a un estado absorbente con absoluta certeza no volverán a $(0, y)$ en ningún otro instante futuro.

si $x \neq 0$ **e** $y \neq 0$
entonces tenemos un elemento de la forma (x, y) si en la siguiente generación se infectan algunos individuos la componente x va disminuyendo y la y va tomando el lugar de los nuevos infectados, si se da el caso que siempre se infectan personas y al ser finito el número de susceptibles entonces para algún instante finito la componente x llegara a ser 0 por lo cual llegaríamos al caso anterior, y si en algún momento no se infecta alguno de los susceptibles llegamos al primer caso, por lo cual de cualquier manera llegaríamos a un estado absorbente de la forma $(x, 0)$. Esto nos dice que los estados (x, y) con x e y distintos de 0 son transientes.

Con esto ya podemos clasificar el espacio de estados $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ en:

1.- $\mathcal{P}_T = \{(x, y) \in \mathcal{P} : y \neq 0\}$

2.- $\mathcal{P}_R = \{(x, 0) : x \in \mathcal{P}_1\}$

Notemos que los estados absorbentes no se comunican el uno con el otro, por lo cual cada estado tomado como un singleton forma un conjunto cerrado e irreducible de estados recurrentes. También que cada conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes es finito, al tener sólo un elemento, por el Teorema 3.3 tenemos que estos estados son recurrente positivos.

Ya que tenemos bien definidos los conjuntos $\mathcal{P}_T$ y $\mathcal{P}_R$ podemos entrar en algo más en particular.

4.2. Casos Particulares

En esta sección presentaremos un ejemplo con poblaciones de dos o tres personas, ya sea una pareja o una familia de tres personas. Por lo cual tomaremos $n + m = N = 2$ o 3.

4.2.1. Caso N=2

Se tomará el caso de una pareja en particular. En un principio tenemos tres posibles estados, ya sean los dos susceptibles, uno susceptible y el otro infeccioso o los dos infecciosos.

Diagrama 1

$$
\begin{tikzcd}
\text{primera generación} & \overset{1}{(2,0)} \arrow[d] & \overset{5}{(1,1)} \arrow[d] \arrow[dr] & \overset{6}{(0,2)} \arrow[dr] & \\
\text{segunda generación} & (2,0) \arrow[d] & \overset{2}{(1,0)} \arrow[d] & \overset{4}{(0,1)} \arrow[d] & \overset{3}{(0,0)} \arrow[dl] \\
\text{tercera generación} & (2,0) & (1,0) & (0,0) &
\end{tikzcd}
$$

de esto se tiene que para el caso $N = 2$ se tienen 6 estados distintos, de esto calcularemos las respectivas probabilidades condicionales

$$
\begin{aligned}
P((1,1),(1,0)) &= P(Y_1 = 0|X_0 = 1, Y_0 = 1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1-q^1)^0(q^1)^1 \\
&= \frac{1!}{(1-0)!0!} q \\
&= q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P((1,1),(0,1)) &= P(Y_1|X_0 = 1, Y_0 = 1) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1-q^1)^1(q^1)^{1-1} \\
&= 1-q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P((0,2),(0,0)) &= P(Y_1 = 0|X_0 = 0, Y_0 = 2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1-q^2)^0(q^2)^{0-0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
P((0,1),(0,0)) &= P(Y_1 = 0 | X_0 = 0, Y_0 = 1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1-q^1)^0 (q^1)^{0-0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

estas probabilidades son relativamente obvias, ya que la primera es la probabilidad que un susceptible escape de un infeccioso para la siguiente generación, la segunda es el complemento y las dos últimas para la siguiente generación son absorbidas por el estado $(0,0)$ con probabilidad 1 ya que no hay susceptibles que puedan ser infectados y los infecciosos pasan a ser removidos en el instante siguiente.

Las demás probabilidades o son cero o en otros caso son uno (esta última es para los estados absorbentes). Por ejemplo el estado $(1,1)$ no se comunica con el estado $(0,2)$ ya que las hipótesis nos dicen que los infecciosos pasan a ser removidos sólo en un instante de tiempo así que si se infecta una persona el infectado anterior queda removido por lo cual para la nueva generación sólo aparecerá un infectado y no dos, y eso nos da el estado $(0,1)$, para el caso que no se infecte el único susceptible el infeccioso pasa a estar removido y llegamos al estado absorbente $(1,0)$, de esto se tiene que

$$P((1,1),(0,2)) = 0.$$

A partir de todo esto podemos finalmente dar una representación matricial a la cadena, que es la matriz de transición siguiente

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \quad 4 \quad & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ahora trataremos de calcular P^n. Nos damos cuenta primero que la matriz podemos verla de la siguiente manera

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right]$$

$$P^2 = \left[\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline B + CB & C^2 \end{array} \right]$$

$$P^3 = \left[\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline B + CB + C^2B & C^3 \end{array}\right]$$

$$P^n = \left[\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline (\sum_{k=0}^{n-1} C^k)B & C^n \end{array}\right]$$

de P^2 vemos que la submatriz C se anula, por lo cual $C^n = 0$ para $n \geqslant 2$, y por lo cual la sumatoria solo tendrá dos términos los cuales son

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 1-q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^n = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

De esta manera podemos tener una idea de lo que ocurre y con que probabilidades pueden caer en los estados absorbentes en un instante futuro.

Probabilidades de absorción para la enfermedad (N=2)

Ahora veremos la probabilidad de que los estados transientes sean absorbidos eventualmente por un conjunto de recurrentes, que en este caso son de sólo un elemento.

Como vimos en la Sección 2.6.1, en un conjunto finito la probabilidad de que un transiente sea absorbido por un C es de la forma

$$\rho_C(x) = P_x(T_C < \infty)$$

donde su única solución está dada por

$$\rho_C(x) = f_z(x), \quad f_z(x) = \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in \mathcal{P}_T} P(x,y) f_z(y), \qquad x \in \mathcal{P}_T$$

donde $C = \{z\}$ el cerrado irreducible que absorberá a x.

Para este caso queda de la forma

$$f_z(x) = P(x,z) + P(x,4)f_z(4) + P(x,5)f_z(5) + P(x,6)f_z(6)$$

el z del primer sumando corresponde al estado absorbente donde llegaremos.

Ahora descartaremos muchos de estos que son cero.

1. Ningún estado se comunica con 1 y al ser absorbente este no se comunica con otro, por tanto
$$P(x,1) = 0 \qquad , x \neq 1$$
2. El estado 6 va al estado 3 con probabilidad uno, al no haber otro estado transiente que llegue al 6, entonces se tiene que
$$P(x,6) = 0$$
lo mismo para 5 que es transiente y va o a 4 o a 6, entonces,
$$P(x,5) = 0$$

De todo esto queda que

$$f_z(x) = P(x,z) + P(x,4)f_z(4)$$

con $z = 2$ o a 3.

Tomando el estado 4 y sabiendo que va a 3 con probabilidad uno nos queda

$$\begin{aligned} f_3(4) &= P(4,3) + P(4,4)f_3(4) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Tomando $x = 5$, y tomando ir en primera instancia a $z = 2$

$$f_2(5) = P(5,2) + P(5,4)f_2(4)$$

$$\begin{aligned} &= q + (1-q)0 \\ &= q \end{aligned}$$

De manera lógica $f_2(4) = 0$ ya que vemos de la matriz P^n que 4 nunca llega a 2. Ahora $x = 5$ y $z = 3$

$$\begin{aligned} f_3(5) &= P(5,3) + P(5,4)f_3(4) \\ &= 0 + (1-q)1 \\ &= 1 - q \end{aligned}$$

Esto era lógico ya que (49) de la misma sección 2.6.1 nos dice

$$\sum_{z \in \mathcal{P}_R} f_z(x) = 1.$$

En este caso es así ya que todos los C_i son unipuntuales.
Finalmente $x = 6$ y $z = 3$

$$\begin{aligned} f_3(6) &= P(6,3) + P(6,4)f_3(4) \\ &= 1 + 0 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

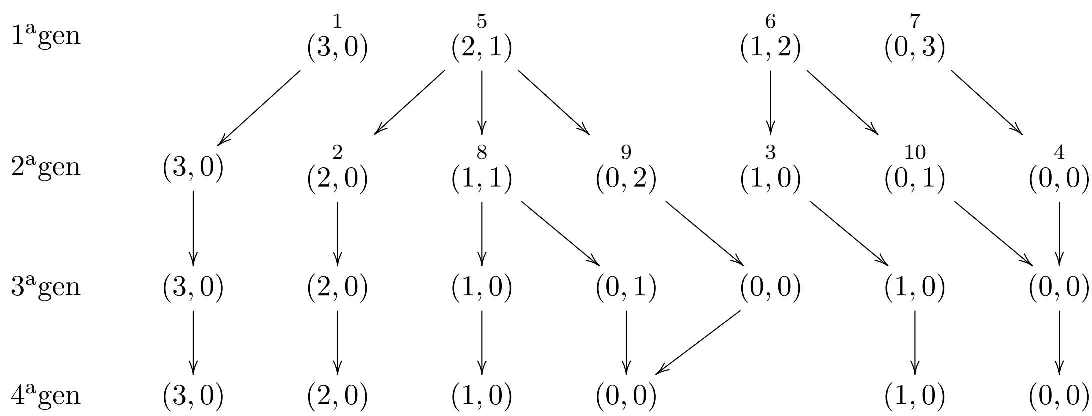
De esta manera tenemos las probabilidades de que si la cadena comienza en algún estado transiente ésta sea absorbida eventualmente por algún conjunto cerrado irreducible de estados recurrentes, que para el caso son de sólo un elemento y por lo cual son absorbentes.

4.2.2. Caso N=3

En este caso será simplemente, como por ejemplo, tomar una pareja con su hijo y ver los posibles estados para esta población.

Primero veremos los distintos estados a través de un diagrama al igual que el caso N=2

Diagrama 2



Ahora que tenemos los 10 estados distintos calculamos las condicionales distintas de cero.

$$\begin{aligned} P(5,2) &= \frac{2!}{(2-0)!0!}(1-q^1)^0(q^1)^2 \\ &= q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(5,8) &= \frac{2!}{(2-1)!1!}(1-q^1)^1(q^1)^1 \\ &= 2q(1-q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(5,9) &= \frac{2!}{(2-2)!2!}(1-q^1)^2(q^1)^{2-2} \\ &= (1-q)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(8,3) &= \frac{1!}{(1-0)!0!}(1-q^1)^0(q^1)^{1-0} \\ &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(8,10) &= \frac{1!}{(1-1)!1!}(1-q^1)^1(q^1)^{1-1} \\ &= 1-q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(9,4) &= \frac{0!}{(0-0)!0!}(1-q^2)^0(q^2)0-0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

de manera análoga

$$P(10,4) = 1$$

$$\begin{aligned} P(6,3) &= \frac{1!}{(1-0)!0!}(1-q^2)^0(q^2)^{1-0} \\ &= q^2 \end{aligned}$$

$$P(6,10) = 1 - q^2$$

como en el caso $P(9,4)$

$$P(7,4) = 1$$

Sigue de la misma manera que en $N = 2$ una representación matricial de todas estas

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2q(1-q) & (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Para una notación mas cómoda cambiaremos el lugar del estado 5 por el del 7

$$P = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\7\\6\\5\\8\\9\\10 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q^2 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2q(1-q) & (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ahora tenemos una matriz muy parecida a la anterior ($N = 2$) donde en este caso no tenemos la identidad en la submatriz superior izquierda, esto no será impedimento para verla de manera general. En efecto tenemos que la matriz P es de la forma

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right)$$

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 0 \\ \hline BA + CB & C^2 \end{array}\right)$$

pero al multiplicar la submatriz A consigo misma nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo cual queda

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline BA + CB & C^2 \end{array}\right)$$

y así mismo

$$P^2 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline BA + CB & C^2 \end{array}\right)$$

$$P^3 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline BA^2 + CBA + C^2BA + C^3B & C^3 \end{array}\right)$$

nuevamente veamos como se comporta la matriz C a lo largo del tiempo

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q^2 \\ 0 & 0 & 2q(1-q) & (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2q(1-q)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esto implica que

$$C^3 = 0$$

por lo cual finalmente

$$P^3 = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ BA + CBA + C^2BA & 0 \end{array}\right).$$

Ya que por lo anterior tenemos $A^2 = A$ de esto sabemos en general que $A^n = A$ para todo n entonces se tiene

$$P^n = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ BA + CBA + C^2BA & 0 \end{array}\right).$$

Observemos que la matriz A tiene una submatriz identidad para las primeras tres columnas y además las dos últimas columnas son idénticas a la matriz B por lo cual actúa como neutro, entonces

$$BA = B.$$

Ahora calculemos lo que necesitamos

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q^2 \\ 0 & 0 & 2q(1-q) & (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2q^2(1-q) & (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2BA \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2q(1-q)^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2q(1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con esto tenemos el resultado que queremos

$$BA + CBA + C^2BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^2 & 1-q^2 & 0 \\ 0 & q^2 & 2q^2(1-q) & 2q(1-q)^2 + (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^n = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 1-q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 2q^2(1-q) & (2q+1)(1-q)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

de esta manera tenemos las tendencias de los estados transientes a los recurrentes (o absorbentes para este caso), donde a su vez como estos son un singleton son también cerrados irreducibles, para los instantes futuros.

Probabilidades de absorción para la enfermedad (N=3)

Ahora calculamos la probabilidad de que cada transiente sea absorbido por un cerrado irreducible

$$f_z(x) = P(x,z) + \sum_{y \in \mathcal{P}_T} f_z(y)$$

por la matriz de transición tenemos que

$$P(x,5) = 0$$

$$P(x,6) = 0$$

$$P(x,7) = 0$$

por lo cual la ecuación se reduce a

$$f_z(x,z) = P(x,z) + P(x,8)f_z(8) + P(x,9)f_z(9) + P(x,10)f_z(10)$$

empecemos con $z = 4$

$$\begin{aligned} f_4(7) &= P(7,4) + P(7,8)f_4(8) + P(7,9)f_4(9) + P(7,10)f_4(10) \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

por lo mismo ocurre que

$$f_4(9) = 1$$

$$f_4(10) = 1$$

ahora seguimos con los demás

$$\begin{aligned} f_4(6) &= P(6,4) + P(6,8)f_4(8) + P(6,9)f_4(9) + P(6,10)f_4(10) \\ &= 0 + 0 + 0 + (1 - q^2) \cdot 1 \\ &= 1 - q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(8) &= P(8,4) + P(8,8)f_4(8) + P(8,9)f_4(9) + P(8,10)f_4(10) \\ &= 0 + 0 + 0 + 1 - q \cdot 1 \\ &= 1 - q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4(5) &= P(5,4) + P(5,8)f_4(8) + P(5,9)f_4(9) + P(5,10)f_4(10) \\ &= 0 + 2q(1-q)f_4(8) + (1-q)^2 + 0 \\ &= 2q(1-q)^2 + (1-q)^2 \end{aligned}$$

$z = 3$

Los únicos estados que llegan a 3 son 6 y 8, si los estados no pasan por alguno de éstos la probabilidad de llegar a 3 es cero, por tanto

$$f_3(7) = 0$$

$$f_3(9) = 0$$

$$f_3(10) = 0$$

$$\begin{aligned}
f_3(5) &= P(5,3)+P(5,8)f_3(8)+P(5,9)f_3(9)+P(5,10)f_3(10)\\
&= 0+2q(1-q)f_3(8)+(1-q)^2\cdot 0+0\\
&= 2q(1-q)f_3(8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(6) &= P(6,3)+P(6,8)f_3(8)+P(6,9)f_3(9)+P(6,10)f_3(10)\\
&= q^2+0+0+(1-q^2)\cdot 0\\
&= q^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(8) &= P(8,3)+P(8,8)f_3(8)+P(8,9)f_3(9)+P(8,10)f_3(10)\\
&= q+0+0+(1-q)\cdot 0\\
&= q
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f_3(5)=2q^2(1-q)$$

$z=2$
el único estado que va a 2 es 5 y ningún estado va a 5 por lo cual

$$f_2(x)=0,\ \text{para } x\neq 5$$
$$\text{y } f_2(5)=q^2.$$

Con esto tenemos las probabilidades de que si, la cadena comienza en algún estado transiente eventualmente llegue a un absorbente en algún instante futuro $n\geqslant 2$

Hagamos notar, finalmente, sólo una cosa, antes de entrar en la próxima sección, mirando el diagrama 2 para el caso $N=3$ vemos que de la segunda generación en adelante tenemos sólo estados del caso $N=2$ del diagrama 1. Por lo cual haremos notar que cuando se pasa a tener una persona más, para una cantidad N de personas, en el análisis de estos casos se van agregando en la primera generación elementos nuevos de la forma (x,y) donde $x+y=N$ y las próximas generaciones sólo tienen estados del caso anterior $N-1$, esto puede verse mejor en el caso $N=3$ ya que los estados de la primera generación son (3,0), (2,1), (1,2) y (0,3), para lo cual se han agregado 1 estado recurrente (para este caso, absorbente) y 3 transientes. Para N tendremos los estados $(N,0),(N-1,1),(N-2,2),\ldots,(1,N-1),(0,N)$, lo cual observamos que son 1 recurrente y N transientes, concluimos finalmente que para el caso N tendremos $N+1$ recurrentes y $N(N+1)/2$ transientes. Esto es algo muy interesante ya que nos va a facilitar y dar la posibilidad de ver las cosas de manera más general para la próxima sección.

4.3. Dominios de Atracción

Como se presentó en el capítulo 3 podemos ver la existencia de una distribución estacionaria para esta cadena, primero señalemos que esta cadena no es irreducible, pero, si tiene conjuntos cerrados e irreducibles los cuales para el caso son conjuntos con sólo un elemento los cuales son absorbentes, por lo cual tenemos una distribución por cada conjunto y en consecuencia la cadena tiene infinitas distribuciones las cuales son las combinaciones lineales convexas de cada distribución de cada conjunto cerrado irreducible, es decir si tenemos distribuciones π_0 y π_1 distintas para un par de conjuntos C_0 y C_1 respectivamente, entonces la cadena tiene infinitas distribuciones de la forma

$$\pi_\alpha = (1-\alpha)\pi_0 + \alpha\pi_1, \qquad \alpha \in [0,1].$$

Veamos como son las distribuciones para el caso $N = 2$.

Tomando la definición de distribución estacionaria dada al principio del capítulo 3 y la matriz P de esta cadena calculemos estas distribuciones. Definamos

$$\pi = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

como una distribución cualquiera de la cadena, la cual debe cumplir con

$$\pi P = \pi$$

desarrollando esto

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

de lo cual nos queda

$$(a_1, a_2 + qa_5, a_3 + a_4 + a_6, (1-q)a_5, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

de todo esto tenemos que $a_5 = a_6 = 0$, además $a_4 = 0$ y por tanto nos queda

$$\pi = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0) = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3$$

con

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$$

y así tenemos una distribución por cada combinación lineal convexa de los $delta_i$ que son infinitas.

Para el caso $N = 3$ es aún mas fácil, tomando la matriz P

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q^2 \\ 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2q(1-q) & (1-q)^2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

la cual vamos a acomodar de tal forma que tengamos los estados del caso $N = 2$

en las primeras columnas, así nos queda

$$
\begin{array}{c}
\\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
2 & 3 & 4 & 10 & 8 & 9 & 1 & 6 & 7 & 5
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & q^2 & 0 & 1-q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
q^2 & 0 & 0 & 0 & 2q(1-q) & (1-q)^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

los estados 2, 3, 4, 10, 8 y 9 corresponden de manera respectiva a los estados en orden del caso $N = 2$ y si hacemos la multiplicación $\pi P = \pi$ nos damos cuenta que los nuevos estados no tienen influencia alguna en los anteriores ya que las últimas tres columnas de P son nulas lo que implica de inmediato que $a_6 = a_7 = a_5 = 0$ y la fila 1 no influye más que cuando se multiplica consigo misma, por lo cual las distribuciones estacionarias quedan de igual manera en el principio y los demás queda cero salvo en el estado 1 que se incorpora a la suma. En conclusión tenemos que nuestras distribuciones estacionarias son de la forma

$$\pi = (a_2, a_3, a_4, 0, 0, 0, a_1, 0, 0, 0) = a_2\delta_1 + a_3\delta_2 + a_4\delta_3 + a_1\delta_7$$

De esto podemos decir que en adelante los estados que vamos agregando no influyen en la distribución anterior ya que las columnas que se agregan al final siempre son ceros, salvo el nuevo recurrente que se suma para los a_i que suman uno. Esto es claro, ya que por las hipótesis al definir la cadena sabemos que no se comunican los estados anteriores (x, y), donde $x + y \leqslant N - 1$, con los nuevos que suman N y entre ellos tampoco se comunican porque mínimo se restan los infecciosos en la siguiente generación, y al ser transientes, estos si se comunican con los del caso $N - 1$, por lo cual se concluye que las ultimas columnas siempre serán nulas.

Por lo que señalamos al final de la sección anterior podemos dar un caso general para las distribuciones estacionarias con N personas, ya que primero, si analizamos las anteriores que son de la forma para $N = 2$

$$\pi = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$$

y para $N = 3$ (pondremos los a_i en orden para seguir la idea)

$$\pi = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0, a_4, 0, 0, 0)$$

donde se agregaron un recurrente y tres transientes, en general. Concluimos que las distribuciones estacionarias para N serán de la forma

$$\pi = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0, a_4, 0, 0, 0, a_5, 0, 0, 0, 0, \ldots, a_{N+1}, 0. \ldots, 0)$$

donde en la última parte se agregan N ceros.

Teniendo las distribuciones estacionarias para la cadena podemos dar paso a calcular el dominio de atracción de cada distribución, esto es, sea π una distribución estacionaria, el dominio de atracción de π que lo definimos por $D(\pi)$ son todos los $\eta = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $b_i \geqslant 0$ con $i = 1, \ldots k$, tal que

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \eta P^n = \pi$$

ya que calculamos anteriormente P^n y es una matriz fija, para estos casos, entonces, tenemos que sólo ver esta multiplicación

$$\lim_{n\to\infty} \eta P^n = \eta Q$$

donde la matriz Q representará a la matriz P^n que es constante para todo n.

Veamos primero para $N = 2$, para lo que queda

$$\eta Q = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6) \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\eta Q = (b_1, b_2 + qb_5, b_3 + b_4 + (1-q)b_5 + b_6, 0, 0, 0)$$

y ahora esto lo igualamos a cada distribución estacionaria, pero tomaremos cada distribución de cada cerrado irreducible, las cuales son las medidas de Dirac δ_1, δ_2 y δ_3

$$(b_1, b_2 + qb_5, b_3 + b_4 + (1-q)b_5 + b_6, 0, 0, 0) = \delta_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

para este caso tenemos que $b_1 = 1$ esto nos indica que $b_i = 0$ para $i \neq 1$ por las propiedades $\sum_i b_i = 1$ y $b_i \geqslant 0$, por tanto nuestro η_1 es

$$\eta_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(b_1, b_2 + qb_5, b_3 + b_4 + (1-q)b_5 + b_6, 0, 0, 0) = \delta_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

ahora vemos que $b_1 = 0$, $b_2 + qb_5 = 1$, además $b_3 + b_4 + (1-q)b_5 + b_6 = 0$ lo que nos indica que $b_i = 0$ para $i = 3, 4, 5, 6$, lo que implica que $b_2 = 1$ y nos da el segundo

$$\eta_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(b_1, b_2 + qb_5, b_3 + b_4 + (1-q)b_5 + b_6, 0, 0, 0) = \delta_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

por último $b_1 = 0$, $b_2 + qb_5 = 0$ y $b_3 + b_4 + (1-q)b_5 + b_6 = 1$ $b_2 = b_5 = 0$ lo que queda finalmente que $b_3 + b_4 + b_6 = 1$ y nuestro último η_3 es

$$\eta_3 = (0, 0, b_3, b_4, 0, b_6) = b_3\delta_3 + b_4\delta_4 + b_6\delta_6.$$

Finalmente teniendo una función η_i que va a cada $\pi_i = \delta_i$ podemos ver una que en general vaya a un $\pi = a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3$ las cuales son

$$\eta = b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + b_4\delta_4 + b_6\delta_6$$

Ahora veamos que ocurre para $N = 3$. Tomando η con las propiedades ya mencionadas y P^n

$$P^n = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\7\\6\\5\\8\\9\\10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 1-q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 2q^2(1-q) & (2q+1)(1-q)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

que para este caso lo reordenamos igual como lo hicimos para sacar la distribución estacionaria

$$Q = \begin{array}{c} \\ 2\\3\\4\\10\\8\\9\\1\\6\\5\\7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 2 & 3 & 4 & 10 & 8 & 9 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 1-q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^2 & 2q^2(1-q) & (2q+1)(1-q)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

como en lo anterior tomamos primero $\eta_1 = (b_1, \dots, b_{10})$ y que vaya a $\pi_1 = \delta_1$

$$\eta_1 Q = \delta_1$$

$$\eta_1 Q = (b_1 + b_9 q^2, b_2 + b_5 q + b_8 q^2 + b_9 2q^2(1-q), b_3 + b_4 + b_5(1-q) + b_6 +$$
$$+ b_8(1-q^2) + b_9(2q+1)(1-q)^2 + b_{10}, 0, 0, 0, b_7, 0, 0, 0)$$

de esto se tiene que

$$b_1 + b_9 q^2 = 1$$

$$b_2 + b_5 q + b_8 q^2 + b_9 2q^2(1-q) = 0$$
$$\Rightarrow b_2 = b_5 = b_8 = b_9 = 0$$

$$b_3 + b_4 + b_5(1-q) + b_6 + b_8(1-q^2) + b_9(2q+1)(1-q)^2 + b_{10} = 0$$
$$\Rightarrow b_3 = b_4 = b_6 = b_1 0 = 0$$

y $b_7 = 0$.

$$\Rightarrow b_1 = 1$$

Por tanto $\eta_1 = \delta_1$.

$$b_1 + b_9 q^2 = 0$$
$$b_1 = b_9 = 0$$

$$b_2 + b_5 q + b_8 q^2 + b_9 2q^2(1-q) = 1$$
$$b_3 + b_4 + b_5(1-q) + b_6 + b_8(1-q^2) + b_9(2q+1)(1-q)^2 + b_{10} = 0$$
$$\Rightarrow b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_8 = b_{10} = 0$$

y $b_7 = 0$.

$$\Rightarrow b_2 = 1$$

Por tanto $\eta_2 = \delta_2$.

$$b_1 + b_9 q^2 = 0$$
$$b_1 = b_9 = 0$$

$$b_2 + b_5 q + b_8 q^2 + b_9 2q^2(1-q) = 0$$
$$b_2 = b_5 = b_8 = 0$$

$$b_3 + b_4 + b_5(1-q) + b_6 + b_8(1-q^2) + b_9(2q+1)(1-q)^2 + b_{10} = 1$$
$$\Rightarrow b_3 + b_4 + b_6 + b_{10} = 1$$

$$b_7 = 0$$

Por tanto $\eta_3 = b_3\delta_3 + b_4\eta_4 + b_6\eta_6 + b_{10}\eta_{10}$.

Y por último $\eta_4 = b_7\delta_7$ ya que las demás sumas son todas iguales a cero.
En general las combinaciones lineales convexas de estos resultados están en el dominio de atracción de un cierto π, así queda que (pondremos los b_i en orden tal que $\sum_i b_i = 1$)

$$\eta = b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + b_4\delta_4 + b_6\delta_6 + +b_7\delta_7 + b_{10}\delta_{10}.$$

De esto podemos analizar los casos 2 y 3, por lo cual nos damos cuenta que son cero los estado que tienen mas de un elemento distinto de cero en cada fila. Esto es que cuando tenemos una suma que nos da un δ_i si en esa suma aparece un b_j que podemos encontrar en una suma que da cero entonces este es cero, en cambio donde solo hay un 1 en la fila ese b_j se mantiene definiendo la función perteneciente al dominio de atracción.

Por ejemplo, para la primera parte, en la suma $b_1 + b_9 q^2 = 1$ el b_9 aparece de igual manera en la suma siguiente cuyo resultado es cero, por ser suma de términos mayores o iguales que cero estos b_j son todos cero, en particular b_9. Por tanto podemos ver un comportamiento para N.

Caso $N = 2$, $\eta = (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, b_6)$.

Caso $N = 3$, $\eta = (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, b_6, b_7, 0, 0, b_{10})$.

Entonces nos damos cuenta que para la tercera columna en cada caso (en el caso $N = 3$ la columna está enumerada con el 4) aparece un nuevo sumando que si nos fijamos bien se trata de el último de los estados agregados. Por ejemplo la diferencia que hay entre 2 y 3 es que el último elemento que se agrega (x, y) cuya suma $x + y = 3$ es el estado $(0, 3)$, que es absorbido por el estado $(0, 0)$ con probabilidad 1, y que para la función η del caso $N = 3$ viene a ser $b_{10}\delta_{10}$ y, se agrega por si solo $b_7\delta_7$ que para el caso es el estado absorbente $(3, 0)$.

Si seguimos el mismo patrón veremos que para N siempre se irán agregando sólo dos sumandos que corresponde al estado $(N, 0)$ que es absorbente, y el estado $(0, N)$ que va a $(0, 0)$ con probabilidad 1, vale decir que nuestro nuevo η es

$$\eta = (b_1, b_2, b_3, b_4, 0, b_6, b_7, 0, 0, b_{10}, \ldots, b_{S-N}, 0, \ldots, 0, b_S).$$

Donde $S = N(N + 1)/2$ y en la última parte hay $N - 1$ ceros, ya que siempre se agregan $N + 1$ estados.

Capítulo 5

Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1. *Considere un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *y asumir que los conjuntos que se harán en mención están todos en* $\mathcal{A}$.

(a) *Muestre que si los* D_i *son disjuntos y* $P(C|D_i) = p$ *independiente de* i, *entonces* $P(C|\bigcup_i D_i) = p$

(b) *Muestre que si los* C_i *son disjuntos, entonces* $P(\bigcup_i C_i|D) = \sum_i P(C_i|D)$.

(c) *Muestre que si los* E_i *son disjuntos y* $\bigcup_i E_i = \Omega$, *entonces*

$$P(C|D) = \sum_i P(E_i|D)P(C|E_i \cap D).$$

(d) *Muestre que si los* C_i *son disjuntos y* $P(A|C_i) = P(B|C_i)$ *para todo* i, *entonces* $P(A|\bigcup_i C_i) = P(B|\bigcup_i C_i)$.

Respuesta.

(a) *notar primero que*

$$P(C \cap D_i) = P(C|D_i)P(D_i)$$

$$
\begin{aligned}
P(C|\bigcup_i D_i) &= \frac{P(C \cap (\bigcup_i D_i))}{P(\bigcup_i D_i)} \\
&= \frac{\sum_i P(C \cap D_i)}{\sum_i P(D_i)} \\
&= \frac{\sum_i P(C|D_i)P(D_i)}{\sum_i P(D_i)} \\
&= \frac{p \sum_i P(D_i)}{\sum_i P(D_i)} = p
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_i C_i|D) &= \frac{P(\bigcup_i (C_i \cap D))}{P(D)} \\
&= \frac{1}{P(D)} \sum_i P(C_i \cap D) \\
&= \sum_i \frac{P(C_i \cap D)}{P(D)} \\
&= \sum_i P(C_i|D)
\end{aligned}
$$

(c) por (b) desarrollamos

$$
\begin{aligned}
P(C|D) &= P(\bigcup_i (E_i \cap C)|D) \\
&= \sum_i P(E_i \cap C|D) \\
&= \sum_i \frac{P(C \cap E_i \cap D)}{P(D)} \\
&= \sum_i \frac{P(E_i \cap D)}{P(D)} \frac{P(C \cap E_i \cap D)}{P(E_i \cap D)} \\
&= \sum_i P(E_i|D)P(C|E_i \cap D)
\end{aligned}
$$

(d) por (a) sale fácilmente

$$
P(A|\bigcup_i C_i) = P(A|C_i) = P(B|C_i) = P(B|\bigcup_i C_i)
$$

Ejercicio 5.2. *Usar (29) para verificar las siguientes igualdades:*

(a) $P_x(T_y \leqslant n+1) = P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y \leqslant n), \quad n \geqslant 0;$

(b) $\rho_{xy} = P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)\rho_{zy}.$

Respuesta.

(a) *para n=0,* $P_x(T_y \leqslant 1) = P_x(T_y = 1) = P(x,y)$

n=1

$$\begin{aligned} P_x(T_y \leqslant 2) &= P_x(T_y = 1) + P_x(T_y = 2) \\ &= P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y = 1) \\ &= P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y \leqslant 1) \end{aligned}$$

n=2

$$\begin{aligned} P_x(T_y \leqslant 3) &= P_x(T_y \leqslant 2) + P_x(T_y = 3) \\ &= P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y \leqslant 1) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y = 2) \\ &= P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y \leqslant 2) \end{aligned}$$

el segundo paso para el segundo miembro de la derecha de cada caso es por (29). Finalmente supongamos para n y verifiquemos para n+1

$$\begin{aligned} P_x(T_y \leqslant n+1) &= P_x(T_y \leqslant n) + P_x(T_y = n+1) \\ &= P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y \leqslant n-1) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y = n) \\ &= P(x,y) + \sum_{z\neq y} P(x,z)P_z(T_y \leqslant n) \end{aligned}$$

(b) *para verificar comencemos con unas identidades*

$$\rho_{x,y} = P_x(T_y < \infty)$$

por (a) y (29) tenemos

$$\begin{aligned} P_x(T_y < n) &= P_x(T_y \leqslant n) - P_x(T_y = n) \\ &= P(x,y) + \sum_{z \neq y} P(x,z) P_z(T_y \leqslant n-1) - \sum_{z \neq y} P(x,z) P_z(T_y = n-1) \\ &= P(x,y) + \sum_{z \neq y} P(x,z) \left[P_z(T_y \leqslant n-1) - P_z(T_y = n-1) \right] \\ &= P(x,y) + \sum_{z \neq y} P(x,z) P_z(T_y < n-1) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} P_x(T_y < n) = \lim_{n \to \infty} \left[P(x,y) + \sum_{z \neq y} P(x,z) P_z(T_y < n-1) \right]$$

$$\rho_{xy} = P(x,y) + \sum_{z \neq y} P(x,z) \rho_{zy}$$

Ejercicio 5.3. *Sea X_n, $n \geqslant 0$, una cadena de Markov con espacio de estados $\mathcal{P}$ subconjunto de $\{0, 1, 2, \ldots\}$ y cuya función de transición es tal que*

$$\sum_y y P(x,y) = Ax + B, \qquad x \in \mathcal{P},$$

para algunas constantes A y B

(a) *Muestre que $EX_{n+1} = AEX_n + B$*

(b) *Muestre que si $A \neq 1$, entonces*

$$EX_n = \frac{B}{1-A} + A^n \left(EX_0 - \frac{B}{1-A} \right).$$

Respuesta.

(a) *Primero veremos los casos para $n = 1, 2$ y 3*

$$\begin{aligned} E_x(X_1) &= \sum_y y P(x,y) \\ &= Ax + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x(X_2) &= \sum_y y \sum_z P(x,z)P(z,y) \\
&= \sum_z P(x,z) \sum_y yP(z,y) \\
&= \sum_z P(x,z)(Az+B) \\
&= A\sum_z zP(x,z) + B\sum_z P(x,z) \\
&= AE_x(X_1)+B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x(X_3) &= \sum_y y \sum_z \sum_w P(x,z)P(z,w)P(w,y) \\
&= \sum_z P(x,z) \sum_y y \sum_w P(z,w)P(w,y) \\
&= \sum_z P(x,z)(AE_z(X_1)+B) \\
&= A\sum_z P(x,z)E_z(X_1)+B \\
&= A\sum_z P(x,z)\sum_y yP(z,y)+B \\
&= A\sum_y y\sum_z P(x,z)P(z,y)+B \\
&= AE_x(X_2)+B.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos para n y $n-1$ y demostrar para $n+1$

$$\begin{aligned}
E_x(X_n) &= \sum_y y \sum_{z_1} \cdots \sum_{z_{n-1}} P(x,z_1)\cdots P(z_{n-1},y) \\
&= AE_x(X_{n-1})+B
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_x(X_{n+1}) &= \sum_y y \sum_{z_1} \cdots \sum_{z_n} P(x,z_1)\cdots P(z_n,y) \\
&= \sum_{z_1} P(x,z_1) \sum_y y \sum_{z_2} \cdots \sum_{z_n} P(z_1,z_2)\cdots P(z_n,y) \\
&= \sum_{z_1} P(x,z_1)(AE_{z_1}(X_{n-1})+B) \\
&= A\sum_{z_1} P(x,z_1)E_{z_1}(X_{n-1})+B \\
&= A\sum_{z_1} P(x,z_1) \sum_y y \sum_{z_2} \cdots \sum_{z_{n-1}} P(z_1,z_2)\cdots P(z_{n-1},y)+B \\
&= A\sum_y y \sum_{z_1} \sum_{z_2} \cdots \sum_{z_{n-1}} P(x,z_1)P(z_1,z_2)\cdots P(z_{n-1},y)+B \\
&= AE_x(X_n)+B
\end{aligned}
$$

(b) *Para esto tomaremos EX_n y lo reduciremos hasta EX_0 y la siguiente identidad*

$$\sum_{k=0}^{n-1} A^k = \frac{1-A^n}{1-A} = \frac{1}{1-A} - \frac{A^n}{1-A}$$

$$
\begin{aligned}
E_x(X_n) &= AE_x(X_{n-1})+B \\
&= A(AE_x(X_{n-2})+B)+B \\
&= A^2E_x(X_{n-2})+AB+B \\
&= A^2(AE_x(X_{n-3})+B)+AB+B \\
&= A^3E_x(X_{n-3})+A^2B+AB+B \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
&= A^nE_x(X_0)+B\sum_{k=0}^{n-1}A^k \\
&= A^nE_x(X_0)+B\left(\frac{1}{1-A}-\frac{A^n}{1-A}\right) \\
&= \frac{B}{1-A}+A^n\left(E_x(X_0)-\frac{B}{1-A}\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5.4. *Muestre que* $\rho_{xy} > 0$ *si y sólo si* $P^n(x,y) > 0$ *para algún entero positivo* n

Respuesta $\Rightarrow$

$$\{T_y < \infty\} \subseteq \bigcup_n \{X_n = y\}$$

$$0 < \rho_{xy} = P(T_y < \infty) \leqslant \sum_n P_x(X_n = y) = \sum_n P^n(x,y)$$

esto implica que uno de los $P^n(x,y)$ *de la suma debe ser mayor que cero para algún* n *por tanto se cumple la primera parte.*

$\Leftarrow$

$$\{X_n = y\} \subseteq \{T_y \leqslant n\} \subseteq \{T_y < \infty\}$$

$$0 < P^n(x,y) = P_x(X_n = y) \leqslant P_x(T_y < \infty) = \rho_{xy}$$

Ejercicio 5.5. *Muestre que si* x *se comunica con* y *e* y *se comunica con* z*, entonces* x *se comunica con* z*.*

Respuesta.

Las hipótesis equivalen a decir

$$\rho_{xy} > 0 \Leftrightarrow P^n(x,y) > 0 \quad \text{para algún } n$$

$$\rho_{yz} > 0 \Leftrightarrow P^m(y,z) > 0 \quad \text{para algún } m$$

por (24) se tiene que

$$P^{n+m}(x,z) = \sum_w P^n(x,w)P^m(w,z)$$

sabemos con certeza por hipótesis que para el termino $w = y$

$$P^n(x,y)P^m(y,z) > 0$$

por lo tanto se tiene que

$$P^{n+m}(x,z) > 0$$

y por el ejercicio anterior x *se comunica con* z

Ejercicio 5.6. *Considere la cadena de colas*

(a) *Muestre que si, o $f(0) = 0$ o $f(0) + f(1) = 1$, la cadena no es irreducible.*

(b) *Muestre que si $f(0) > 0$ y $f(0) + f(1) < 1$, la cadena es irreducible.*

Respuesta.

(a) $f(x) = P(\epsilon_k = x)$, $f(0) = P(\epsilon_k = 0) = 0$ *esto quiere decir que en cada instante la taza de personas que llegan a la fila es mayor que cero*

N_n *nos indica el número de clientes que se encuentra en la fila en el instante n comenzando con x clientes en la fila*
$N_1 = x - 1 + \epsilon_1$
$N_2 = x - 2 + \epsilon_1 + \epsilon_2$
.
.
.
$N_n = x - n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k$

suponer que $y < x$

$$\begin{aligned} P(N_n = y) &= P(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = n + y - x) \\ &\leqslant P(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k < n) = 0 \end{aligned}$$

$\epsilon_k \geqslant 1$ *P-c.s. lo que implica que* $\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \geqslant 1$ *P-c.s. pues* $P(\epsilon_k = 0) = 0$

Esto nos indica que x no se comunica con ningún estado menor que él, entonces se concluye que la cadena no es irreducible.

Ahora por el hecho de que $f(0) + f(1) = 1$ y además
$N_1 = x - 1 + \epsilon_1$
$N_2 = x - 2 + \epsilon_1 + \epsilon_2$
.
.
.
$N_n = x - n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k$

se tiene que $\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \leqslant n$ *ya que a lo sumo 1 persona entra a la cola, entonces sigue que*

$$-n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \leqslant 0$$

$$x - n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \leqslant x$$

lo que nos indica que x solo se comunica con un estado menor o igual que él para un instante positivo n, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} P(N_n = x+1) &= P(\phi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto se tiene que x no se comunica con $x+1$ y así la cadena no es irreducible.

(b) Por lo visto anteriormente tenemos que para el instante n

$$N_n = x - n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k$$

Además de que x se comunica con $x-1$ ya que $f(0) > 0$ y con esto x se comunica con los estados mas pequeños que él.

Falta mostrar que x se comunica con $x+1$ para $x \geqslant 1$ y así por transitividad se comunica con cualquiera mayor que él.

$$N_n = x - n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = x + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = n + 1$$

tomar n tal que $n+1$ sea divisible por x_0 por lo cual $n + 1/x_0$ es un entero positivo, ahora separamos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{x_0}} \epsilon_k + \sum_{k=\frac{n+1}{x_0}+1}^{n} \epsilon_k,$$

por hipótesis
$P(\epsilon_k = x_0) > 0$ en particular para $1 \leqslant k \leqslant \frac{n+1}{x_0}$
y $P(\epsilon_k = 0) > 0$ en particular para $\frac{n+1}{x_0} + 1 \leqslant k \leqslant n$,

además $\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{x_0}} \epsilon_k = x_0 \frac{(n+1)}{x_0} = n+1$

$$0 < P(\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{x_0}} \epsilon_k = n+1, \sum_{k=\frac{n+1}{x_0}+1}^{n} \epsilon_k = 0) \leqslant P(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = n+1)$$

lo cual muestra que x *se comunica con* $x+1$

Ejercicio 5.7. *Determine cuales de los estados de una cadena de colas son absorbentes, cuales son recurrentes, y cuales transientes, cuando la cadena no es irreducible. Considere los siguientes cuatro casos por separado (ver ejercicio anterior):*

(a) $f(1) = 1$;

(b) $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ *y* $f(0) + f(1) = 1$;

(c) $f(0) = 1$;

(d) $f(0) = 0$ *y* $f(1) < 1$.

Respuesta.

(a) Ya que $f(1) = 1$ *esto indica que sólo una persona llega a la fila en cada instante, pero también sale una persona de la fila en el mismo instante por lo cual siempre se mantendrá en el mismo estado. Esto implica que todos los estados son absorbentes.*

(b) Para $x \geqslant 1$

$$\begin{aligned} P(N_n < x) &= P(x - n + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k < x) \\ &= P(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k < n) > 0 \end{aligned}$$

esto último es por el Ejercicio anterior parte (a), lo que implica que todo estado distinto de cero es transiente y cero es absorbente, ya que a lo más una persona llega a la fila y en el mismo instante una persona es removida (si hay una o mas personas en la fila).

(c) *Este no está lejos del anterior ya que si $f(0) = 1$ esto nos indica que nadie llega a la fila, por tanto ocurre que*

$$N_1 = x - 1 + \epsilon_1 = x - 1$$
$$N_2 = x - 2 + \epsilon_1 + \epsilon_2 = x - 2$$

y así sucesivamente hasta que todos los estados son absorbidos por el cero, así todo estado es transiente excepto el cero que es absorbente.

(d) *Si $f(0) = 0$ y $f(1) < 1$, esto implica que $\sum_{k=1}^{n} \geqslant n$ por lo cual al tomar un estado x, éste no se comunica con otro menor ya que se irán sumando clientes*

$$N_n = x - n\sum_{k=1}^{n} \geqslant x$$

y por lo cual todo estado es transiente y la cadena no es irreducible.

Ejercicio 5.8. *Sea π_0 y π_1 distribuciones estacionarias distintas para una cadena de Markov.*

(a) *Muestre que para $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, la función π_α definida por*

$$\pi_\alpha(x) = (1-\alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x) \quad x \in \mathcal{P}$$

es una distribución estacionaria.

(b) *Muestre que valores distintos de α determinan distintas distribuciones estacionarias π_α.*

Respuesta.

(a)

$$\pi_\alpha(x) = (1-\alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x), \quad x \in \mathcal{P}$$

$$\begin{aligned}
\sum_x \pi_\alpha(x) &= \sum_x ((1-\alpha)\pi_0(x) + \alpha\pi_1(x)) \\
&= (1-\alpha)\sum_x \pi_0(x) + \alpha\sum_x \pi_1(x) \\
&= 1 - \alpha + \alpha = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_x \pi_\alpha(x)P(x,y) &= \sum_x((1-\alpha)\pi_0(x)+\alpha\pi_1(x))P(x,y)\\
&= (1-\alpha)\sum_x \pi_0(x)P(x,y)+\alpha\sum_x \pi_1(x)P(x,y)\\
&= (1-\alpha)\pi_0(y)+\alpha\pi_1(y)\\
&= \pi_\alpha(y)
\end{aligned}$$

(b) Tomemos α y β distintos y x_0 tal que $\pi_0(x_0) \neq \pi_1(x_0)$

$$\pi_\alpha(x_0) = \pi_\beta(x_0)$$

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\pi_0(x_0)+\alpha\pi_1(x_0) &= (1-\beta)\pi_0(x_0)+beta\pi_1(x_0)\\
(1-\alpha-1+\beta)\pi_0(x_0) &= (\beta-\alpha)\pi_1(x_0)\\
(\beta-\alpha)\pi_0(x_0) &= (\beta-\alpha)\pi_1(x_0)\\
\pi_0(x_0) &= \pi_1(x_0)
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción, por tanto α debe ser igual a β para se cumpla la igualdad de las distribuciones.

Ejercicio 5.9. *Sea π una distribución estacionaria de una cadena de Markov. Muestre que si $\pi(x) > 0$ y x se comunica con y, entonces $\pi(y) > 0$*

Respuesta.
$\rho_{xy} > 0 \Rightarrow P^{n_0}(x,y) > 0$ *para algún n_0, por (3) se tiene que para todo n*

$$\sum_{x_0} \pi(x_0)P^n(x_0,y) = \pi(y)$$

por hipótesis y tomando $n = n_0$ el termino

$$\begin{aligned}
\pi(x)P^{n_0}(x,y) > 0\\
\Rightarrow \sum_{x_0} \pi(x_0)P^{n_0}(x_0,y) > 0
\end{aligned}$$

por tanto $\pi(y) > 0$

Ejercicio 5.10. *Sea π una distribución estacionaria de una cadena de Markov. Suponer que y y z son dos estados tales que para alguna constante c*

$$P(x,y) = cP(x,z), \quad x \in \mathcal{P}.$$

Muestre que $\pi(y) = c\pi(z)$.

Respuesta.
Por propiedad de las distribuciones estacionarias se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(y) &= \sum_x \pi(x)P(x,y) \\ &= \sum_x \pi(x)cP(x,z) \quad \text{por hipótesis} \\ &= c\sum_x \pi(x)P(x,z) = c\pi(z) \end{aligned}$$

Ejercicio 5.11. *Considere una cadena de Markov sobre los enteros no negativos teniendo función de transición dada por $P(x,x+1) = p$ y $P(x,0) = 1-p$, donde $0 < p < 1$. Muestre que esta cadena tiene una única distribución estacionaria π y encontrar π.*

Respuesta.
Primero probemos que la cadena es irreducible, veamos que x se comunica con $x-1$ para $x > 0$.

$$P^x(x,x-1) = \sum_{y_0} \cdots \sum_{y_{x-2}} P(x,y_0)P(y_0.y_1)\cdots P(y_{x-2},x-1)$$

el termino $P(x,0)P(0{,}1)\cdots P(x-2,x-1) > 0$ por lo cual $P^n(x,x-1) > 0$, y así x se comunica con cualquier estado menor que él.

Ya que $P(x,x+1) > 0$ implica que x se comunica con cualquier estado mayor que él.

Por tanto la cadena es irreducible.

Sea $T_0 = \text{mín}\{m > 0 : X_m = 0\}$. Notamos que

$$P_0(T_0 = 0) = 1-p, \quad P_0(T_0 = 1) = p(1-p), \quad P_0(T_0 = 2) = p^2(1-p), \ldots$$

y por consiguiente, T_0 *tiene distribución geométrica (partiendo de* 0*), vale decir, para todo* $n \in \mathbb{N}$, $P_0(T_0 = n) = (1-p)p^n$.

Por lo tanto, $m_0 = E_0(T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)p^n = (1-p)\frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p} < \infty$, *y por consiguiente,* 0 *es un estado recurrente positivo. Como la cadena es irreducible, entonces todos los estados se comunican y luego todos son recurrentes positivos.*

Por Teorema 3.5 existe una única distribución estacionaria.

Conclusión

Hemos visto que este tipo de proceso, introducido por Markov en el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados (1906-1907), presenta una forma de dependencia simple, pero muy útil en muchos modelos, entre las variables aleatorias que forman un proceso estocástico. Además del ejemplo ya mencionado, también vale decir que se emplean, en diversas áreas tales como:

Educación: En la cual se han hecho estudios sobre el comportamiento de un individuo en un tiempo dado, para tener los datos necesarios y saber con que probabilidad ocurrirán las cosas en el futuro y así dar orientación, diagnóstico psicológico e intervención terapéutica.

Mercadotecnia: En la administración de mercadotecnia se puede obtener una gran ventaja al contar con información que nos pueda arrojar el desarrollo de técnicas como las cadenas de Markov, ya que éstas ayudan a la promoción de algunos productos que los necesiten para tener una mejor aceptación entre los consumidores.

Servicios de salud: Nos permite ver el comportamiento de una enfermedad a través del tiempo. La cadena nos dará información de lo que le depara en un futuro a cierta enfermedad, entregando probabilidades ciertas y así tener los resultados más aproximados de lo que ocurrirá en un instante determinado.

Finanzas: Puede usarse para proyectar, como un ejemplo, de forma alterna, indicadores de calidad hacia el futuro.

Contabilidad: Sirven para tener una apreciación de las cuentas que poseen posibilidad de ser cobradas y cuales pasan a incobrabilidad.

Pero al final, todas tienen en común el hecho de que, las cadenas de Markov, pueden analizar lo que ocurrirá a lo largo del tiempo o con qué probabilidad se darán las cosas en el futuro, ya sea para estar preparado o para tomar la decisión que más nos convenga dentro de cualquier situación y área de interés. Podemos ver varios ejemplos que son estudiados en libros tales como [6]. Por último, vale decir que el ejemplo, al cual nos hemos enfocado en el capitulo 4, ha sido algo inexacto, por el hecho de que no tiene muchas propiedades que lo condicionen. Más adelante se pueden ir incluyendo más cosas que vayan condicionando, y de esta manera hacer que las cadenas se acerquen cada vez más a la realidad de estas situaciones, como lo es el hecho de ver la enfermedad con detalles tan sutiles como que los niños tienen más probabilidades que un anciano de contagiar a una persona susceptible, por el hecho de que los ancianos evitan estar con otras personas para evitar la propagación de su enfermedad y las personas están siempre pendientes de los niños, ya sea para cuidarlos, abrazarlos y satisfacer sus necesidades.

Éste es un ejemplo de los muchos detalles que podemos agregar para hacer que las cadenas se acerquen cada vez más a una situación real.

Bibliografía

[1] P.G. Hoel, Port, S.C. & Stone, Ch. J. Introduction to stochastic processes. Houghton Mifflin, 1972.

[2] T.T. Soong, Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. John Wiley & Sons, Ltd. State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York, USA.

[3] Bailey, N.T.J.“The Matematical Theory of Infectious Diseases and its Applications”. Charles Griffin and Company Ltd., London, 1975.

[4] Andersson, H. & Britton, T. “Stochastic Epidemic Models and their Statistical Analysis”. Lecture Notes in Statistics 151. Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] Neveu, J.,1979. ”Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités”. Masson, Paris.

[6] Wai-Ki Ching & Michael K. Ng Markov Chains: Models, Algorithms and Applications. The University of Hong Kong & Hong Kong Baptist University. Hong Kong, P.R. China.