



Facultad de Ciencias  
Instituto de Estadística  
Ingeniería en Estadística

# **Extensión del modelo semiparamétrico Birnbbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando**

Marcela Zenteno Zenteno  
Enero 2026

## **Profesor Guía**

Germán Ibacache-Pulgar, Ph.D.  
Instituto de Estadística, Universidad de Valparaíso

## **Profesora Co-Guía**

Carolina Marchant Fuentes, Ph.D.  
Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule

**Proyecto de titulación para optar al:**  
grado académico de: *Magíster en Estadística*

# Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo de muchas personas que me acompañaron a lo largo de este proceso.

En primer lugar, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia por su apoyo incondicional. De manera especial, a la memoria de mi madre, cuyo amor, fortaleza y ejemplo han sido una permanente fuente de inspiración. Su presencia continúa acompañándome en cada uno de mis logros.

Agradezco profundamente a mi profesor guía, el Dr. Germán Ibacache-Pulgar y a mi profesora co-guía la Dra. Carolina Marchant, por su guía, dedicación y valioso aporte académico, así como por su disposición y acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo.

Asimismo, agradezco a los profesores del Magíster en Estadística, quienes contribuyeron de manera significativa a mi formación.

Finalmente, agradezco a mis amigos y compañeros por su apoyo, comprensión y ánimo a lo largo de este camino.

# Resumen

Los modelos semiparamétricos se caracterizan por su mayor flexibilidad frente a modelos paramétricos, al incorporar componentes tanto paramétricas como no paramétricas en su estructura de regresión. En este trabajo se estudia e implementa una extensión del modelo semiparamétrico Birnbaum–Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando, el cual permite modelar simultáneamente la media y la precisión de la variable de respuesta. Para la estimación de los parámetros se emplea el algoritmo de Backfitting junto con la maximización de la log-verosimilitud penalizada, utilizando funciones suaves tipo splines cúbicos.

Además, se realiza un análisis de residuos y se desarrollan técnicas de influencia local bajo distintos esquemas de perturbación, con el fin de detectar observaciones potencialmente influyentes y evaluar la robustez del modelo propuesto. Finalmente, el modelo es aplicado a un conjunto de datos reales sobre contaminación atmosférica en la comuna de Pudahuel, Región Metropolitana, Chile, a través del software R, permitiendo validar su utilidad en contextos reales de análisis ambiental.

La metodología desarrollada representa un aporte relevante en el estudio estadístico de datos ambientales, y puede ser utilizada por investigadores y profesionales interesados en modelar fenómenos donde tanto la tendencia como la variabilidad presentan comportamientos complejos y no lineales.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Datos de contaminación atmosférica . . . . .	9
1.2. Hipótesis . . . . .	11
1.3. Objetivos . . . . .	11
<b>2. Modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando</b>	<b>12</b>
2.1. Introducción . . . . .	12
2.2. Distribución Birnbaum-Saunders . . . . .	13
2.3. Distribución Birnbaum-Saunders reparametrizada . . . . .	14
2.4. Modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando . . . . .	14
2.5. Estimación de Parámetros . . . . .	16
2.5.1. Funciones score penalizadas . . . . .	17
2.5.2. Matriz hessiana penalizada . . . . .	18
2.5.3. Matriz de información de Fisher penalizada . . . . .	20
2.5.4. Proceso iterativo para $s = l = 1$ . . . . .	21
2.6. Aspectos Inferenciales . . . . .	23
2.6.1. Errores estándar aproximados para $s = l = 1$ . . . . .	24
2.6.2. Grados de Libertad para $s = l = 1$ . . . . .	24
2.6.3. Sobre los parámetros de suavizamiento . . . . .	25
<b>3. Análisis de diagnóstico</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Análisis residual . . . . .	28
3.2.1. Residuos estandarizados . . . . .	28
3.2.2. Residuos de Jørgensen . . . . .	28
3.3. Método de Influencia Local . . . . .	29
3.4. Esquemas de perturbación . . . . .	30
3.4.1. Perturbación de ponderación de casos . . . . .	30
3.4.2. Perturbación de la variable de respuesta . . . . .	30
<b>4. Aplicación a datos de contaminación atmosférica</b>	<b>32</b>

4.1. Introducción . . . . .	32
4.2. Análisis exploratorio de los datos . . . . .	33
4.2.1. Variable de respuesta MP2.5 . . . . .	35
4.3. Estimación y verificación de supuestos . . . . .	37
4.4. Análisis de Influencia Local . . . . .	41
4.4.1. Análisis confirmatorio . . . . .	43
<b>7. Conclusión y trabajos futuros</b>	<b>45</b>
<b>8. Referencias bibliográficas</b>	<b>65</b>

# Índice de figuras

4.1. Scatter plots de MP2.5 vs MP10 (a), MP2.5 vs velocidad del viento (b), MP2.5 vs Temperatura (c) y MP2.5 vs Humedad (d). . . . .	34
4.2. Boxplots ajustados para MP2.5 (izq) y MP10 (der) por meses del periodo GEC registrado por la estación de monitoreo Pudahuel, Chile 2024. . . . .	35
4.3. Histograma y boxplot de la variable de respuesta MP2.5, durante el periodo GEC del año 2024 en la comuna de Pudahuel. . . . .	36
4.4. Funciones suaves estimadas para velocidad del viento y temperatura. . . . .	38
4.5. Gráficos residuos del modelo. . . . .	39
4.6. Histograma y QQplot de los residuos estandarizados. . . . .	40
4.7. Gráficos de índice $C_i$ para $\beta$ , $\alpha$ , $f$ y $f^*$ bajo el esquema de perturbación de ponderación de casos. . . . .	41
4.8. Gráficos de índice $C_i$ para $\beta$ , $\alpha$ , $f$ y $f^*$ bajo el esquema de perturbación de la variable de respuesta. . . . .	42

# Índice de cuadros

4.1. Tabla de estadísticas descriptivas para concentraciones de MP2.5 registrado por la estación de monitoreo de Pudahuel, Chile 2024. . . . .	35
4.2. Estimaciones de los parámetros, errores estándar y $p$ -valores. . . . .	37
4.3. Estimaciones de máxima verosimilitud, los correspondientes errores estándar estimados para los casos eliminados indicados, y los respectivos $p$ -valor. . . . .	44

# Capítulo 1

## Introducción

La creciente necesidad de analizar conjuntos de datos provenientes del ámbito ambiental ha impulsado el desarrollo de herramientas estadísticas más flexibles. En particular, los modelos semiparamétricos han recibido una atención especial en los últimos años, debido a la flexibilidad de su estructura de regresión frente a los modelos paramétricos clásicos. Por otro lado, la distribución Birnbaum-Saunders ha generado un creciente interés en el modelamiento de datos ambientales, gracias a sus fundamentos teóricos, sus propiedades estadísticas y su vínculo con la distribución normal. Esta distribución incorpora un parámetro de precisión, cuya relación inversamente proporcional con el parámetro de dispersión permite cuantificar la variabilidad de las observaciones.

En la literatura existen trabajos relacionados a esta clase de modelos. Por ejemplo, Cook (1986) estudió la normalidad asintótica del estimador del coeficiente de regresión para el caso balanceado. Grenn (1987) evaluó el compartamiento asintótico del estimador de máxima verosimilitud penalizada y propuso algunas definiciones para los grados de libertad y los residuos. Speckman (1988) utilizó dos métodos para estimar el coeficiente de regresión y la función no paramétrica basados en suavizamiento spline parcial y análisis residual parcial. Gannaz (2007) desarrolló un método de estimación basado en una expansión wavelet de la componente no paramétrica del modelo semiparamétrico.

En el contexto de análisis de diagnóstico, Eubank (1984) derivó algunas medidas de diagnóstico basadas en los leverage y los residuos. Silverman (1985) definió dos tipos de residuos en analogía con regresión paramétrica. Zhu *et al.* (2003) desarrolló la técnica de influencia local para diferentes esquemas de perturbaciones bajo el modelo semiparamétrico normal, mientras que Ibacache-Pulgar y Paula (2011) extendieron tales resultados para el modelo semiparamétrico t-Student. Mayores detalles acerca de los métodos de estimación y extensiones de los modelos de regresión semiparamétricos pueden ser encontrados en Hastie y Tibshirani (1990) y Green y Silverman (1994).

En este contexto, Cárcamo *et al.* (2021) desarrolló un modelo semiparamétrico basado en una reparametrización de la distribución Birnbaum-Saunders, aplicado al análisis de datos de contaminación atmosférica. Este modelo, al incluir funciones suaves para capturar efectos no lineales, resulta flexible en su componente sistemático, sin embargo, asume una precisión constante en todas las observaciones, lo que no siempre se cumple en la práctica.

En el ámbito del diagnóstico y robustez de los modelos semiparamétricos, Ibacache-Pulgar *et al.* (2024) estudiaron la influencia local en modelos lineales generalizados de coeficientes parcialmente variables, desarrollando herramientas estadísticas que permiten detectar observaciones influyentes y evaluar el impacto de posibles perturbaciones en los datos. Este tipo de aportes resulta fundamental para garantizar la validez de

los modelos en aplicaciones prácticas, especialmente cuando se trabaja con datos ambientales caracterizados por su heterogeneidad y presencia de valores atípicos.

En el campo de los modelos semiparamétricos multidimensionales, Pacheco *et al.* (2024) estudiaron el problema de la influencia local en modelos lineales generalizados con splines de placa delgada (TPS-GLMs), los cuales permiten capturar efectos no lineales en dos o más dimensiones. El trabajo propone medidas de diagnóstico basadas en la función de verosimilitud penalizada y algoritmos iterativos, ofreciendo un marco metodológico robusto para identificar observaciones influyentes. La utilidad de este enfoque quedó demostrada en aplicaciones reales de agronomía y medio ambiente, lo que refuerza su pertinencia en el análisis de datos ambientales.

Recientemente, Caamaño-Carrillo *et al.* (2025) propusieron un modelo de coeficientes parcialmente variables con errores aleatorios Skew-t, estimado mediante un algoritmo EM y complementado con técnicas de diagnóstico basadas en influencia local. Este aporte metodológico resulta particularmente relevante para el análisis de datos ambientales, ya que permite capturar tanto la heterogeneidad como la asimetría presentes en las distribuciones de contaminantes atmosféricos

A pesar de su potencial, la literatura sobre modelos semiparamétricos basados en la distribución Birnbaum-Saunders reparametrizada con un parámetro de precisión variable, es decir, heterocedásticos, sigue siendo limitada. En consecuencia, el desarrollo y estudio de este tipo de modelos puede contribuir significativamente al análisis de datos en diversas áreas, en particular en la investigación ambiental.

## 1.1. Datos de contaminación atmosférica

La contaminación del aire se refiere a la presencia de agentes químicos, físicos o biológicos en la atmósfera que alteran sus propiedades naturales, afectando negativamente al medio ambiente y la salud de seres vivos. Entre las fuentes más comunes de contaminación se encuentran los aparatos de combustión doméstica, los vehículos motorizados, las actividades industriales y los incendios forestales.

Los principales contaminantes con efectos nocivos sobre la salud pública son el material particulado (MP), el monóxido de carbono (CO), el ozono troposférico (O<sub>3</sub>), el dióxido de nitrógeno (NO<sub>2</sub>) y el dióxido de azufre (SO<sub>2</sub>). La exposición a estos contaminantes, tanto en espacios interiores como exteriores, se asocia con diversas enfermedades respiratorias, cardiovasculares y otras afecciones crónicas, constituyendo una de las principales causas de morbimortalidad a nivel mundial.

De acuerdo con datos recientes de la Organización Mundial de la Salud (OMS), el 99 % de la población mundial respira aire que excede los límites recomendados de calidad, situación que se agrava en países de ingresos medios y bajos. La OMS también ha estimado que aproximadamente siete millones de personas mueren cada año como consecuencia directa o indirecta de la contaminación atmosférica. En este contexto, la contaminación por material particulado representa uno de los problemas ambientales más relevantes en zonas urbanas. El MP es una mezcla compleja de partículas sólidas y líquidas en suspensión, de distintos tamaños, formas, orígenes y composiciones químicas, que afectan no solo a la salud humana, sino también a los ecosistemas, la infraestructura y la visibilidad ambiental (Grantz *et al.* (2003)).

La clasificación del MP se realiza en función de su diámetro aerodinámico, ya que este determina el lugar de deposición en el sistema respiratorio. Las partículas mayores a 10 micrómetros ( $\mu\text{m}$ ) suelen quedar retenidas en el tracto respiratorio superior, mientras que aquellas menores a 2.5  $\mu\text{m}$  (MP2.5), pueden penetrar profundamente en los alvéolos pulmonares y vías respiratorias inferiores. La exposición frecuente a altas

concentraciones de MP, particularmente MP2.5, se ha asociado con un aumento del riesgo de enfermedades cardiovasculares y respiratorias, incluso tras exposiciones de corta duración.

En el caso de Chile, el último inventario nacional de emisiones atribuye a la quema de leña la principal fuente de contaminación por MP2.5, especialmente en zonas del centro y sur del país, donde su uso es común para calefacción residencial. Esta situación genera altos niveles de polución, contribuyendo a más de 4.000 muertes prematuras al año, afectando principalmente a grupos vulnerables como niños, adultos mayores y personas con enfermedades preexistentes (Sinca, 2024). Además, la mala calidad del aire puede agravar la propagación de enfermedades respiratorias virales, generando una sobrecarga en el sistema de salud chileno. Diversas ciudades del país presentan condiciones críticas de contaminación atmosférica, particularmente durante el periodo de Gestión de Episodios Críticos (GEC), que se extiende entre el 1 de abril y el 31 de agosto de cada año. Ciudades como Coyhaique, Linares, Osorno, Padre Las Casas, Puerto Montt, Santiago, Rancagua, Temuco y Valdivia figuran entre las más contaminadas de Sudamérica, según mediciones basadas en las concentraciones de MP2.5. (Oyarzún *et al.*, 2021). En dichas localidades, los niveles de contaminación pueden alcanzar valores considerados insalubres durante varios meses del año.

Las concentraciones de MP tienden a presentar una alta variabilidad asociada a factores geográficos, meteorológicos y antropogénicos. Estas fluctuaciones hacen que dichas concentraciones deban ser tratadas como variables aleatorias no negativas, las cuales comúnmente siguen distribuciones estadísticas asimétricas, con asimetría positiva (Marchant *et al.*, 2016a). Actualmente, en Santiago, la autoridad ambiental emplea un modelo de regresión múltiple para predecir la concentración media de 24 horas de MP10, utilizando como covariables otros contaminantes atmosféricos y variables meteorológicas (Alvarado *et al.*, 2010). Esta metodología permite estimar las concentraciones esperadas entre las 00:00 y las 24:00 horas del día siguiente. A partir del año 2015, mediante el Decreto Supremo N°15/2015 y la Resolución N°9664/2015, se incorporó también el uso de MP2.5 para declarar alertas sanitarias en el país.

En este trabajo, se propone desarrollar un modelo semiparamétrico basado en la distribución Birnbaum–Saunders reparametrizada, con parámetro de precisión que varía entre observaciones. Este enfoque se aplicará al análisis de concentraciones de MP2.5 en la comuna de Pudahuel del año 2024, en la Región Metropolitana de Santiago. La inclusión de funciones suaves no paramétricas permite capturar adecuadamente la no linealidad en los efectos de covariables como la velocidad del viento, la temperatura y la humedad relativa. La literatura reciente ha demostrado que el uso de la distribución Birnbaum–Saunders se sustenta en propiedades teóricas y físicas que la hacen especialmente adecuada para modelar este tipo de fenómenos Ibacache-Pulgar y Paula (2011).

## 1.2. Hipótesis

Considerando lo analizado previamente, se presentan las hipótesis que orientan el desarrollo de la presente investigación

1. Es viable estimar los parámetros y estudiar algunos aspectos de inferencia estadística en la extensión del modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando.
2. Es posible la aplicación de algunas técnicas de diagnóstico para evaluar la influencia de los datos en el ajuste del modelo.

## 1.3. Objetivos

De acuerdo con lo expuesto, los objetivos que fundamentan esta investigación son:

### Objetivo general

Desarrollar un proceso de estimación para los parámetros asociados a la componente sistemática y a la estructura heterocedástica del modelo, y aplicar algunas técnicas de diagnóstico en la extensión del modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando.

### Objetivos específicos

1. Estudiar aspectos teóricos del modelo propuesto.
2. Desarrollar un proceso iterativo para obtener las estimaciones de los parámetros del modelo.
3. Realizar un análisis de diagnóstico del modelo basado en residuos y técnicas de influencia local.
4. Implementar computacionalmente en el software R-project los resultados teóricos y aplicar el modelo a datos de contaminación atmosférica de Santiago de Chile.

## Capítulo 2

# Modelo semiparamétrico Birnbbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando

En este capítulo se presenta el modelo semiparamétrico Birnbbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable, el cual constituye una extensión del modelo semiparamétrico Birnbbaum-Saunders reparametrizado propuesto por Zenteno *et al.*, (2022). Esta extensión incorpora una estructura de regresión semiparamétrica para modelar el parámetro de dispersión de la distribución Birnbbaum-Saunders.

La Sección 2.1 ofrece, a modo de introducción, una revisión bibliográfica de los modelos de regresión basados en la distribución Birnbbaum-Saunders (BS). En la Sección 2.2 se describe formalmente dicha distribución, mientras que la Sección 2.3 introduce su versión Birnbbaum-Saunders reparametrizada (BSR). La Sección 2.4 presenta el modelo semiparamétrico BSR con parámetro de precisión variable, junto con la representación matricial de sus componentes sistemáticos. Finalmente, en la Sección 2.5 se desarrolla la función de verosimilitud penalizada, bajo el supuesto de que la función suave pertenece a un espacio de funciones de Sobolev.

### 2.1. Introducción

La distribución Birnbbaum-Saunders ha recibido una atención considerable en los últimos años, debido a sus fundamentos teóricos vinculados a procesos de daño acumulativo, a sus propiedades estadísticas y a su estrecha relación con la distribución normal. Además, ha demostrado ser especialmente eficaz en la modelación de tiempos de falla de materiales sometidos a fatiga. En particular, se asume que la cantidad de daño acumulado que da origen a la distribución Birnbbaum-Saunders sigue una distribución normal. Este modelo corresponde a una distribución unimodal, con sesgo positivo, de dos parámetros y con soporte positivo.

Desde su formulación en adelante, el modelo Birnbbaum-Saunders ha sido objeto de un amplio estudio desde perspectivas teóricas, metodológicas y aplicadas; véanse, entre otros, Leiva *et al.* (2008), Vilca *et al.* (2010) y Paula *et al.* (2012). Leiva *et al.* (2014) introdujeron un enfoque renovado para los modelos de regresión Birnbbaum-Saunders, el cual permite analizar los datos en su escala original y modelar de manera explícita la presencia de varianzas no constantes.

La modelación de la variabilidad ha sido ampliamente estudiada en la literatura, particularmente en el contexto del problema de la heterocedasticidad. Entre los trabajos pioneros, Cook y Weisberg (1983) analizaron modelos normales heterocedásticos, mientras que Taylor y Verbyla (2004) propusieron una formulación conjunta de los parámetros de localización y dispersión en modelos t-Student. Posteriormente, Lin *et al.* (2009) desarrollaron pruebas de heterocedasticidad en modelos de regresión t-Student. En esta misma línea de investigación, Ferrari *et al.* (2011) extendieron los modelos de regresión beta permitiendo que el parámetro de precisión dependiera de covariables. Simas *et al.* (2010) incorporaron estructuras de regresión no lineales para dicho parámetro en la distribución beta. Rocha y Simas (2011) derivaron el método de influencia local en este contexto. De manera complementaria, Paula (2013) propuso la modelación simultánea de la media y la precisión en la distribución gamma, incorporando además procedimientos de diagnóstico en el marco de modelos lineales generalizados dobles.

En el contexto de la regresión Birnbaum-Saunders bajo su parametrización original, Rieck y Nedelman (1991), así como Galea *et al.* (2004), asumieron homogeneidad en el parámetro de forma, mientras que Xie y Wei (2007) desarrollaron una prueba formal de homogeneidad para dicho parámetro. Más recientemente, Santos-Neto *et al.* (2016) propusieron un modelo de regresión Birnbaum-Saunders reparametrizado con precisión variable, ampliando los aportes de Leiva *et al.* (2014), quienes estimaron los parámetros mediante máxima verosimilitud, introdujeron pruebas de hipótesis para el parámetro de precisión, propusieron residuos específicos para el modelo BSR y evaluaron la sensibilidad de los estimadores a través de análisis de influencia local y simulaciones de Monte Carlo.

Por otra parte, en el ámbito semiparamétrico, Ibacache-Pulgar *et al.* (2012) estudiaron los modelos aditivos bajo distribuciones simétricas y propusieron un algoritmo de backfitting ponderado, cuya solución conduce a splines cúbicos para la estimación de las funciones no paramétricas. Posteriormente, Ibacache-Pulgar *et al.* (2021) extendieron este enfoque a un modelo de regresión beta aditivo semiparamétrico, utilizando máxima verosimilitud penalizada y desarrollando procedimientos iterativos de estimación. Finalmente, Zenteno *et al.* (2022) propuso un modelo semiparamétrico basado en la distribución Birnbaum-Saunders reparametrizada, complementado con un análisis de diagnóstico mediante influencia local y un algoritmo de backfitting para la estimación de los parámetros.

## 2.2. Distribución Birnbaum-Saunders

Birnbaum y Saunders (1969) propusieron un modelo estadístico para la resistencia a la fatiga de estructuras sometidas a esfuerzos cíclicos. Este modelo, que recibe el nombre de distribución Birnbaum-Saunders (BS), es unimodal y sesgada positivamente, posee soporte positivo y dos parámetros, tiene buenas propiedades y una estrecha relación con la distribución normal. Formalmente, si la variable aleatoria  $Y$  sigue una distribución BS con parámetro de forma  $\alpha > 0$  y parámetro de escala  $\varrho > 0$ , denotado por  $Y \sim BS(\alpha, \varrho)$ , su función de densidad de probabilidad toma la forma:

$$f_Y(y; \alpha, \varrho) = \frac{\exp(\alpha^{-2})}{2\alpha\sqrt{2\pi\varrho}} y^{-3/2} [y + \varrho] \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{y}{\varrho} + \frac{\varrho}{y}\right]\right), \quad y > 0.$$

Es importante señalar que el parámetro  $\varrho$  corresponde a la mediana de la distribución de  $Y$ . Además, se puede demostrar que  $1/Y \sim BS(\alpha, 1/\varrho)$  y  $bY \sim BS(\alpha, b\varrho)$  cuando  $b > 0$ . Con respecto a la media y la varianza de la variable aleatoria  $Y$ , se tiene que  $E(Y) = \varrho[1 + \frac{\alpha^2}{2}]$  y  $\text{Var}(Y) = [\alpha\varrho]^2[1 + \frac{5\alpha^2}{4}]$ , respectivamente.

Trabajos recientes han demostrado que el uso de esta distribución no responde únicamente a una extensión matemática, sino a la necesidad de modelar fenómenos aleatorios complejos en distintas áreas de in-

investigación, incluyendo el ámbito ambiental. Por ejemplo, Galea *et al.* (2004) realizaron aportes iniciales relevantes. Posteriormente, Leiva *et al.* (2008) introdujeron el modelo log-lineal t-Birnbaum-Saunders, desarrollaron medidas de diagnóstico y aplicaron sus resultados a un conjunto de datos reales de pacientes con cáncer de pulmón. Más adelante, Vilca *et al.* (2010) y Marchant *et al.* (2016b) llevaron a cabo nuevas aplicaciones y extensiones del modelo.

### 2.3. Distribución Birnbaum-Saunders reparametrizada

Santos–Neto *et al.* (2012) propusieron una nueva parametrización de la distribución Birnbaum-Saunders con el propósito de obtener estimadores insesgados y consistentes, ortogonalidad entre los parámetros, y la posibilidad de describir la media de la distribución a través de una estructura de regresión sin tener que transformar los datos. Específicamente, la variable aleatoria  $Y$  sigue una distribución Birnbaum-Saunders reparametrizada si su función de densidad de probabilidad es dada por:

$$f(y; \mu, \delta) = \frac{\exp(\delta/2)\sqrt{\delta+1}}{4y^{3/2}\sqrt{\pi\mu}} \left[ y + \frac{\delta\mu}{\delta+1} \right] \exp\left( -\frac{\delta}{4} \left[ \frac{y\{\delta+1\}}{\delta\mu} + \frac{\delta\mu}{y\{\delta+1\}} \right] \right), \quad y > 0. \quad (2.1)$$

En este caso, se utiliza la notación  $Y \sim \text{RBS}(\mu, \delta)$ . La media y la varianza de  $Y$  están dadas por  $E[Y] = \mu$  y  $\text{Var}[Y] = \mu^2/\phi$ , respectivamente, donde  $\phi = (\delta+1)^2/(2\delta+5)$ , tal que,  $\delta$  se puede interpretar como un parámetro de precisión, es decir, para valores fijos de  $\mu$ , cuando  $\delta \rightarrow \infty$ , la varianza de  $Y$  tiende a cero. Además, para  $\mu$  fijo, si  $\delta \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\text{Var}[Y] \rightarrow 5\mu^2$ . Se puede observar que  $\text{Var}[Y] = \mu^2/\phi$  es similar a la función de varianza de la distribución gamma, en cuyo caso, la varianza tiene una relación cuadrática con su media. También, es posible demostrar que  $bY \sim \text{RBS}(b\mu, \delta)$ , con  $b > 0$ , y  $1/Y \sim \text{RBS}(\mu^*, \delta)$ , donde  $\mu^* = (\delta+1)/(\delta\mu)$ .

### 2.4. Modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando

Leiva *et al.* (2014) propusieron un nuevo enfoque basado en el modelo de regresión Birnbaum-Saunders en la misma línea de los modelos lineales generalizados. Específicamente, ellos incorporaron una función de enlace que permite relacionar la media de la distribución con un predictor lineal. Además, este nuevo enfoque permite modelar los datos en su escala original y la varianza no-constante. En general, la variabilidad del modelo suele medirse a través del parámetro de dispersión, pero también puede cuantificarse mediante el parámetro de precisión, el cual es inversamente proporcional al parámetro de dispersión. La modelización de la variabilidad ha sido ampliamente discutida en la literatura relacionada con la heteroscedasticidad. Sin embargo, existen pocos trabajos en los cuales se lleve a cabo la modelización de la heteroscedasticidad a través del parámetro de precisión. Santos–Neto *et al.* (2016) proponen una metodología basada en un modelo de regresión Birnbaum-Saunders con precisión variable.

En este trabajo se propone un modelo estadístico basado en la distribución Birnbaum-Saunders reparametrizado, y asumiendo que los parámetros de media y de precisión satisfacen, respectivamente, la siguiente relación:

$$g(\mu_i) = \eta_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + f_1(t_{1i}) + f_2(t_{2i}) + \dots + f_s(t_{si}) \quad (2.2)$$

y,

$$h(\delta_i) = \tau_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\alpha} + f_1^*(t_{1i}^*) + f_2^*(t_{2i}^*) + \dots + f_l^*(t_{li}^*),$$

o, equivalente,

$$g(\mu_i) = \eta_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}_{1i}^T \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{n}_{si}^T \mathbf{f}_s \quad \text{y} \quad h(\delta_i) = \tau_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{n}_{1i}^{*T} \mathbf{f}_1^* + \dots + \mathbf{n}_{li}^{*T} \mathbf{f}_l^* \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

donde  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ , para  $p < n$ , es un vector que contiene los coeficientes de regresión desconocidos a estimar, y  $\mathbf{x}_i^T = (1, x_{i2}, \dots, x_{ip})$  representa los valores de los  $p$  regresores correspondientes a la media. La cantidad  $\mu_i = g^{-1}(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}_{1i}^T \mathbf{f}_1 + \dots + \mathbf{n}_{si}^T \mathbf{f}_s)$  es la media esperada del modelo para la observación  $i$ , con  $g^{-1}$  la función inversa del enlace. La fila  $\mathbf{n}_{ki}^T$  corresponde a la  $i$ -ésima fila de la matriz de incidencia  $\mathbf{N}_k$ , cuyo elemento  $(i, k)$  vale 1 si  $t_i = t_k$  y 0 en caso contrario.

Análogamente, para la precisión, se considera  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)^T$ , con  $q < n$ , y  $\mathbf{z}_i^T = (1, z_{i2}, \dots, z_{iq})$  representando los regresores del componente de precisión. La función  $\delta_i = h^{-1}(\mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{n}_{1i}^{*T} \mathbf{f}_1^* + \dots + \mathbf{n}_{li}^{*T} \mathbf{f}_l^*)$  define el predictor lineal del parámetro de precisión,  $\mathbf{n}_{ri}^{*T}$  es la fila  $i$ -ésima de la matriz de incidencia  $\mathbf{N}_r^*$ .

Las funciones de enlace  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  son estrictamente monótonas, positivas y al menos dos veces diferenciables; por ejemplo,  $g(\mu) = \log(\mu)$  y  $h(\delta) = \log(\delta)$ , entre otras. Nótese que

$$\mu_i = g \left( \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sum_{k=1}^s \mathbf{n}_k^T \mathbf{f}_k \right) \quad (2.3)$$

y,

$$\delta_i = h \left( \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\alpha} + \sum_{r=1}^l \mathbf{n}_r^{*T} \mathbf{f}_r^* \right). \quad (2.4)$$

## Función de log-verosimilitud doblemente penalizada

La función de log-verosimilitud para el vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\beta}^T, \mathbf{f}_1^T, \dots, \mathbf{f}_s^T, \boldsymbol{\alpha}^T, \mathbf{f}_1^{*T}, \dots, \mathbf{f}_l^{*T}]^T$  obtenida de la Ecuación (2.1) relacionada con  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T$  y  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \dots, \delta_n]^T$  para la clase de modelos con funciones de enlace de la Ecuación (2.2), viene dada por:

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\mu_i, \delta_i; y_i), \quad (2.5)$$

donde (ignorando el término constante)

$$\ell_i(\mu_i, \delta_i; y_i) = \frac{\delta_i}{2} - \frac{\log(\delta_i + 1)}{2} - \frac{\log(\mu_i)}{2} - \frac{3 \log(y_i)}{2} + \log(\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i) - \frac{y_i [\delta_i + 1]}{4 \mu_i} - \frac{\delta_i^2 \mu_i}{4 y_i [\delta_i + 1]}. \quad (2.6)$$

Para evitar el problema de ajuste y la no identificación de los parámetros  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\boldsymbol{\alpha}$ , algunos autores sugieren incorporar en la función de log-verosimilitud del modelo, un término de penalización, denotado aquí por

$J(f_k)$  y  $J(f_r^*)$ , sobre las funciones suaves  $f_k$  y  $f_r$  con  $k = 1, \dots, s, r = 1, \dots, l$ , que pertenecen al espacio de funciones de Sobolev,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2^{(2)} &= \{f_s : f_s, f_s^{(1)} \text{ abs cont.}, f_s^{(2)} \in \mathcal{L}^2[a_s, b_s]\} \quad \text{y} \\ \mathcal{W}_2^{*(2)} &= \{f_k : f_k, f_k^{(1)} \text{ abs. cont.}, f_k^{(2)} \in \mathcal{L}^2[a_k, b_k]\}. \end{aligned}$$

En este caso, la función log-verosimilitud doblemente penalizada se expresa como:

$$L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda_1, \dots, \lambda_s; \lambda_1^*, \dots, \lambda_r^*) = L(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{k=1}^s \lambda_k J(f_k) + \sum_{r=1}^l \lambda_r^* J(f_r^*), \quad (2.7)$$

con  $J(f_s)$  y  $J(f_r)$  denotando las funciones de penalización sobre  $f_k$  y  $f_r^*$ , con  $k = 1, \dots, s$  y  $r = 1, \dots, l$ , respectivamente. En este caso,  $\lambda_k = \lambda(\lambda_k)$  y  $\lambda_l^* = \lambda^*(\lambda_l)$  son constantes que depende del parámetro de suavizamiento  $\lambda_k, \lambda_l^* \geq 0$  que controla el equilibrio entre la bondad de ajuste y suavizamiento de la función estimada. En la literatura podemos encontrar diferentes tipos de penalizaciones dependiendo del método propuesto para ajustar las curvas no paramétricas. Se considera la norma al cuadrado como medida de curvatura de las funciones; esto es,

$$\begin{aligned} J(f_k) &= \|f_k\|^2 = \int_{a_k}^{b_k} [f_s^{(2)}(t_k)]^2 dt_k \quad (k = 1, \dots, s) \quad \text{y,} \\ J(f_r^*) &= \|f_r^*\|^2 = \int_{c_r}^{d_r} [f_r^{*(2)}(t_r)]^2 dt_r \quad (r = 1, \dots, l). \end{aligned} \quad (2.8)$$

El primer término del lado derecho de la Ecuación (2.7) mide la bondad de ajuste, mientras que el segundo término expresado por (2.8), penaliza la rugosidad de  $f_k$  y  $f_r^*$  con parámetros fijos  $\lambda_k$  y  $\lambda_r^*$ . En este caso, la estimación de  $f_k$  y  $f_r^*$  conduce a una spline cúbica natural. Según Green & Silverman (1994),  $J(f_k)$  y  $J(f_r^*)$  se pueden escribir como

$$\begin{aligned} J(f_k) &= \int_{a_k}^{b_k} [f_k^{(2)}(t_k)]^2 dt = \mathbf{f}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{f}_k \quad (k = 1, \dots, s), \quad \text{y,} \\ J(f_r^*) &= \int_{c_r}^{d_r} [f_r^{*(2)}(t_r)]^2 dt = \mathbf{f}_r^{*T} \mathbf{K}_r^* \mathbf{f}_r^* \quad (r = 1, \dots, l), \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{K}_k$  y  $\mathbf{K}_r^*$  son matrices cuadradas definidas no-negativas que dependen de los nodos  $t_k^0$  y  $t_r^0$ , respectivamente. Entonces, si se considera  $\lambda_k^* = -\lambda_k/2$  y  $\lambda_r^* = -\lambda_r/2$  la función de log-verosimilitud doblemente penalizada (2.5) se puede expresar como

$$L_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^*) = L(\boldsymbol{\theta}) - \sum_{k=1}^s \frac{\lambda_k}{2} \mathbf{f}_k^T \mathbf{K}_k \mathbf{f}_k - \sum_{r=1}^l \frac{\lambda_r^*}{2} \mathbf{f}_r^{*T} \mathbf{K}_r^* \mathbf{f}_r^*. \quad (2.10)$$

Es importante tener en cuenta que un aspecto esencial del proceso de modelamiento semiparamétrico está relacionado con la estimación o selección del parámetro de suavizamiento. En la literatura existen varios métodos eficientes de selección, entre los que destacan la Validación Cruzada (VC), la Validación Cruzada Generalizada (VCG), el Criterio de Akaike (AIC) y el Error Cuadrático Medio (ECM).

## 2.5. Estimación de Parámetros

El problema de estimación de los parámetros del modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable aún no se ha discutido ampliamente en la literatura. No obstante,

algunos autores han abordado este problema para algunos modelos relacionados. Hastie y Tibshirani (1986) utilizaron el algoritmo de puntuación local para ajustar el componente aditivo de un modelo aditivo generalizado, y aplicaron el método a datos de respuesta binaria y de sobrevivencia; véase también Hastie y Tibshirani (1987). Posteriormente, Hastie y Tibshirani (1993) estudiaron los modelos aditivos generalizados en los que los coeficientes de regresión varían suavemente en función de otras covariables, y demostraron, basándose en el criterio de mínimos cuadrados penalizados, que los estimadores de las funciones no paramétricas corresponden a un spline cúbico natural. Ibacache-Pulgar *et al.* (2012) estudiaron los modelos aditivos semiparamétricos bajo distribuciones simétricas y estimaron el coeficiente de regresión y las funciones suaves a través de un algoritmo de backfitting ponderado, que conduce a un spline cúbico como solución para las funciones no paramétricas. Leiva *et al.* (2014) estimaron los parámetros del modelo a través del método de máxima verosimilitud. Posteriormente, Santos–Neto *et al.* (2016) propusieron una metodología basada en un modelo de regresión Birnbaum-Saunders reparametrizado con precisión variable, que generaliza los trabajos previos existentes en la literatura. Recientemente, Ibacache-Pulgar *et al.* (2021) estudiaron el modelo semiparamétrico de regresión beta aditivo y propusieron el algoritmo backfitting para obtener las estimaciones de máxima verosimilitud penalizada mediante el uso de splines cúbicos naturales de suavizamiento, calcularon su correspondiente función score y desarrollaron un proceso iterativo para estimar sus parámetros. Finalmente, Sánchez *et al.* (2023) propusieron un enfoque de regresión cuantil de coeficientes variables basado en distribuciones log-simétricas, incorporando procedimientos de estimación que permiten modelar adecuadamente la asimetría y la presencia de valores extremos en datos de contaminación atmosférica.

### 2.5.1. Funciones score penalizadas

Suponiendo que la función dada en la Ecuación (2.10) es regular con respecto a  $\beta$ ,  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s, \mathbf{f}_1^*, \dots, \mathbf{f}_l^*$  y  $\alpha$ , se tiene que el vector de funciones score penalizadas de  $\theta$  está dado por

$$\mathbf{U}_p(\theta) = \frac{\partial L_p(\theta, \lambda, \lambda^*)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_p^\beta(\theta) \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_1}(\theta) \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_2}(\theta) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_k}(\theta) \\ \mathbf{U}_p^\alpha(\theta) \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_1^*}(\theta) \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_2^*}(\theta) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_l^*}(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

cuyos elementos se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_p^\beta(\theta) &= \mathbf{X}^T \mathbf{A}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*), \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_k}(\theta) &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{A}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) - \lambda_k \mathbf{K}_k \mathbf{f}_k && (k = 1, \dots, s), \\ \mathbf{U}_p^\alpha(\theta) &= \mathbf{Z}^T \mathbf{B}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) && y, \\ \mathbf{U}_p^{\mathbf{f}_r^*}(\theta) &= \mathbf{N}_r^{*T} \mathbf{B}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) - \lambda_r^* \mathbf{K}_r^* \mathbf{f}_r^* && (r = 1, \dots, l), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{y}^*$ ,  $\boldsymbol{\mu}^*$  y  $\boldsymbol{\delta}^*$  son vectores, tales que

$$\begin{aligned} y_i^* &= \frac{\delta_i}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]} + \frac{y_i [\delta_i + 1]}{4\mu_i^2} - \frac{\delta_i^2}{4y_i [\delta_i + 1]}, & \mu_i^* &= \frac{1}{2\mu_i}, & a_i &= \frac{d\mu_i}{d\eta_i} = \frac{1}{dg(\mu_i)/d\mu_i}, \\ y_i^* &= \frac{[y_i + \mu_i]}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]} - \frac{y_i}{4\mu_i} - \frac{\delta_i [\delta_i + 2] \mu_i}{4[\delta_i + 1]^2 y_i}, & \delta_i^* &= -\frac{\delta_i}{2[\delta_i + 1]}, & b_i &= \frac{d\delta_i}{d\tau_i} = \frac{1}{dh(\delta_i)/d\delta_i}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{A} = [a_i \delta_{ij}^n]$  y  $\mathbf{B} = [b_i \delta_{ij}^n]$  son matrices diagonales ( $n \times n$ ), con  $\delta_{ij}^K$  el delta de Kronecker.

## 2.5.2. Matriz hessiana penalizada

Sea  $\ddot{\mathbf{L}}_p(\boldsymbol{\theta})$  la matriz hessiana ( $p^* \times p^*$ ) con el  $(j^*, \ell^*)$  elemento dado por  $\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^*) / \partial \theta_{j^*} \theta_{\ell^*}$ , para  $j^*, \ell^* = 1, \dots, p^*$  y  $p^* = p + q + s + l$ . Después de algunas manipulaciones algebraicas, se encuentra que la matriz hessiana penalizada esta dada por

$$\ddot{\mathbf{L}}_p(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1 f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1 f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1 f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1 f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \ddot{\mathbf{L}}_p^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\alpha f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\alpha f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\alpha f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{\alpha f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1^*\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1^* f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1^* f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1^*\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1^* f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_1^* f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_l^*\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_l^* f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_l^* f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_l^*\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_l^* f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \ddot{\mathbf{L}}_p^{f_l^* f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

cuyos elementos de la matriz pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X}, \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta f_k}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{N}_k & (k = 1, \dots, s), \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta\delta}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{Z}, \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k f_k}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{C} \mathbf{N}_k - \lambda_k \mathbf{K}_k & (k = 1, \dots, s), \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k \delta}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{M} \mathbf{Z} & (k = 1, \dots, s), \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{\delta\delta}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z}, \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{\beta f_r^*}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{N}_r^* & (r = 1, \dots, l), \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{f_k f_r^*}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{M} \mathbf{N}_r^* & (k = 1, \dots, s; r = 1, \dots, l), \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{\delta f_r^*}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{N}_r^* & (r = 1, \dots, l), \\
\ddot{\mathbf{L}}_p^{f_r^* f_r^*}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{N}_r^{*T} \mathbf{W} \mathbf{N}_r^* - \lambda_r^* \mathbf{K}_r^* & (r = 1, \dots, l),
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{C} = [c_i \delta_{ij}^n]$ ,  $\mathbf{M} = [m_i \delta_{ij}^n]$  y  $\mathbf{W} = [w_i \delta_{ij}^n]$  son matrices diagonales ( $n \times n$ ),  $c_i = d_{\mu^2}^{(i)}(a_i)^2 + d_{\mu}^{(i)} a_i' a_i$ ,  $m_i = d_{\mu\delta}^{(i)} a_i b_i$  y  $w_i = d_{\delta^2}^{(i)}(b_i^2) + d_{\delta}^{(i)} b_i' b_i$ , con

$$\begin{aligned}
d_{\mu}^{(i)} &= \frac{\partial L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)}{\partial \mu_i} = \frac{\delta_i}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]} + \frac{y_i [\delta_i + 1]}{4\mu_i^2} - \frac{\delta_i^2}{4y_i [\delta_i + 1]} - \frac{1}{2\mu_i} = y_i^* - \mu_i^*, \\
d_{\mu^2}^{(i)} &= \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)}{\partial \mu_i^2} = \frac{1}{2\mu_i^2} - \frac{\delta_i^2}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]^2} - \frac{y_i [\delta_i + 1]}{2\mu_i^3}, \quad a_i' = -\frac{d^2 g(\mu_i)/d\mu_i^2}{[dg(\mu_i)/d\mu_i]^2}, \\
d_{\mu\delta}^{(i)} &= \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)}{\partial \mu_i \partial \delta_i} = \frac{y_i}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]^2} + \frac{y_i}{4\mu_i^2} - \frac{\delta_i [\delta_i + 2]}{4[\delta_i + 1]^2 y_i}, \\
d_{\delta_i}^{(i)} &= \frac{L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)}{\partial \delta_i} = \frac{[y_i + \mu_i]}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]} - \frac{y_i}{4\mu_i} - \frac{\delta_i [\delta_i + 2] \mu_i}{4[\delta_i + 1]^2 y_i} + \frac{\delta_i}{2[\delta_i + 1]} = y_i^* - \delta_i^*, \\
d_{\delta^2}^{(i)} &= \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)}{\partial \delta_i^2} = \frac{1}{2[\delta_i + 1]^2} - \frac{[y_i + \mu_i]^2}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]^2} - \frac{\mu_i}{2[\delta_i + 1]^3 y_i}, \quad b_i' = -\frac{d^2 h(\delta_i)/d\delta_i^2}{[dh(\delta_i)/d\delta_i]^2}.
\end{aligned}$$

### 2.5.3. Matriz de información de Fisher penalizada

Por otro lado, al calcular la esperanza de la matriz  $-\ddot{L}_p(\boldsymbol{\theta})$ , se obtiene la matriz de información penalizada dada por

$$\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_p^{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\beta f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{\beta f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\beta\delta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\beta f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{\beta f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_p^{f_1\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_1 f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_1 f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_1\delta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_1 f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_1 f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_p^{f_k\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_k f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_k f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_k\delta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_k f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_k f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_p^{\delta\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\delta f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{\delta f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\delta\delta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\delta f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{\delta f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_p^{f_1^*\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_1^* f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_1^* f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_1^*\delta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_1^* f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_1^* f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_p^{f_l^*\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_l^* f_1}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_l^* f_k}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_l^*\delta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f_l^* f_1^*}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{J}_p^{f_l^* f_l^*}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

donde cada elemento de la matriz se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p^{\beta\beta} &= \mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X}, \\ \mathbf{J}_p^{\beta f_k} &= \mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{N}_k & (k = 1, \dots, s), \\ \mathbf{J}_p^{\beta\delta} &= \mathbf{X}^T \mathbf{S} \mathbf{Z}, \\ \mathbf{J}_p^{\beta f_r^*} &= \mathbf{X}^T \mathbf{S} \mathbf{N}_r^* & (r = 1, \dots, l), \\ \mathbf{J}_p^{f_k f_k} &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{V} \mathbf{N}_k + \lambda_k \mathbf{K} & (k = 1, \dots, s), \\ \mathbf{J}_p^{f_k \delta} &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{S} \mathbf{Z} & (k = 1, \dots, s), \\ \mathbf{J}_p^{f_k f_r^*} &= \mathbf{N}_k^T \mathbf{S} \mathbf{N}_r^* & (k = 1, \dots, s; r = 1, \dots, l), \\ \mathbf{J}_p^{\delta\delta} &= \mathbf{Z}^T \mathbf{U} \mathbf{Z}, \\ \mathbf{J}_p^{\delta f_r^*} &= \mathbf{Z}^T \mathbf{U} \mathbf{N}_r^* & (r = 1, \dots, l), \\ \mathbf{J}_p^{f_r^* f_r^*} &= \mathbf{N}_r^{*T} \mathbf{U} \mathbf{N}_r^* + \lambda_r^* \mathbf{K}_r^* & (r = 1, \dots, l), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{V} = [v_i]$ ,  $\mathbf{U} = [u_i]$  y  $\mathbf{S} = [s_i]$  son matrices diagonales ( $n \times n$ ) con

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{\delta_i a_i^2}{2\mu_i^2} + \frac{\delta_i^2 a_i^2}{[\delta_i + 1]^2} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}), \\ s_i &= \left[ \frac{1}{2\mu_i[\delta_i + 1]} + \frac{\delta_i \mu_i}{[\delta_i + 1]^3} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) \right] a_i b_i \quad \text{y}, \\ u_i &= \left[ \frac{[\delta_i^2 + 3\delta_i + 1]}{2\delta_i^2[\delta_i + 1]^2} + \frac{\mu_i^2}{[\delta_i + 1]^4} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) \right] b_i^2, \end{aligned}$$

en que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) &= \text{E} \left[ \left\{ Y + \frac{\mu \delta_i}{(\delta_i + 1)} \right\}^{-2} \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{\delta_i + 1} \exp(\delta_i/2)}{4\sqrt{\pi\mu}y^{3/2}} \left[ y + \frac{\delta_i \mu}{\delta_i + 1} \right]^{-2} \exp \left( -\frac{\delta_i}{4} \left[ \frac{(\delta_i + 1)y}{\delta_i \mu} + \frac{\delta_i \mu}{(\delta_i + 1)y} \right] \right) dy. \end{aligned}$$

#### 2.5.4. Proceso iterativo para $s = l = 1$

Para estimar los parámetros del modelo por el método de máxima verosimilitud penalizada, se resuelve la ecuación  $\mathbf{U}_p(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ . Sin embargo, no se dispone de expresiones de forma cerrada para los estimadores de máxima verosimilitud penalizada. Luego, se necesita un método iterativo para la optimización no lineal, como los algoritmos de Scoring de Fisher, Newton-Raphson o cuasi-Newton. Considerando que la matriz  $-\ddot{\mathbf{L}}_p(\boldsymbol{\theta})$  puede ser definida no-positiva, se sugiere sustituirla por la matriz inversa de información de Fisher y utilizar el método de Scoring de Fisher. Entonces, el algoritmo para estimar  $\boldsymbol{\theta}$  viene dado por

$$\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(m)} + (\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})^{-1})^{(m)} \mathbf{U}_p(\boldsymbol{\theta})^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.11)$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(m)} = (\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})^{-1})^{(m)} \mathbf{U}_p(\boldsymbol{\theta})^{(m)}.$$

Con el objetivo de este estudio, se considera el caso particular en que el modelo incluye únicamente una función  $f$  y una función  $f^*$ ; es decir, se toma  $k = l = 1$ . Con esta especificación, la ecuación matricial se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X} & \mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{N} & \mathbf{X}^T \mathbf{S} \mathbf{Z} & \mathbf{X}^T \mathbf{S} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{N}^T \mathbf{V} \mathbf{X} & \mathbf{N}^T \mathbf{V} \mathbf{N} + \lambda \mathbf{K} & \mathbf{N}^T \mathbf{S} \mathbf{Z} & \mathbf{N}^T \mathbf{S} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{S} \mathbf{X} & \mathbf{Z}^T \mathbf{S} \mathbf{N} & \mathbf{Z}^T \mathbf{S} \mathbf{Z} & \mathbf{Z}^T \mathbf{S} \mathbf{N}^* \\ \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{X} & \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{N} & \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{Z} & \mathbf{N}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{N}^* + \lambda^* \mathbf{K}^* \end{pmatrix}^{(m)} \begin{pmatrix} \Delta_\beta^{(m+1,m)} \\ \Delta_f^{(m+1,m)} \\ \Delta_\alpha^{(m+1,m)} \\ \Delta_{f^*}^{(m+1,m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^T \mathbf{A}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) \\ \mathbf{N}^T \mathbf{A}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) - \lambda \mathbf{K} \mathbf{f} \\ \mathbf{Z}^T \mathbf{B}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) \\ \mathbf{N}^{*T} \mathbf{B}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) - \lambda^* \mathbf{K}^* \mathbf{f}^* \end{pmatrix}$$

donde  $\Delta_\beta^{(m+1,m)} = \beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}$ ,  $\Delta_f^{(m+1,m)} = \mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{f}^{(m)}$  y  $\Delta_\alpha^{(m+1,m)} = \boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)}$ . Luego de algunas manipulaciones algebraicas, se obtienen las siguientes expresiones para las soluciones iterativas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{X} \Delta_\beta^{(m+1,m)} + \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{N} \Delta_f^{(m+1,m)} + \mathbf{X}^T \mathbf{S} \mathbf{Z} \Delta_\alpha^{(m+1,m)} &= \mathbf{X}^T \mathbf{A}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{X} [\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}] + \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{N} [\mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{f}^{(m)}] + \mathbf{X}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{Z} [\boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(m)}] \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \left[ \mathbf{D}_{v,a}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*)^{(m)} + \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m)} - \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m+1)} \right], \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{D}_{v,a}^{(m)} = (\mathbf{V}^{(m)})^{-1} \mathbf{A}^{(m)}, \quad \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} = (\mathbf{V}^{(m)})^{-1} \mathbf{S}^{(m)}, \quad \boldsymbol{\eta}^{(m)} = \mathbf{X} \beta^{(m)} + \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m)} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}.$$

Luego,  $\beta^{(m+1)}$  esta dado por

$$\beta^{(m+1)} = (\mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} [\mathbf{D}_{v,a}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*)^{(m)} + \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m)} - \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m+1)}].$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \mathbf{X}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{X} \Delta_{\beta}^{(m+1,m)} + (\mathbf{N}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{N} + \lambda \mathbf{K}) \Delta_{\mathbf{f}}^{(m+1,m)} + \mathbf{N}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{Z} \Delta_{\alpha}^{(m+1,m)} = \mathbf{Z}^T \mathbf{B} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) \\ & = \mathbf{N}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{X} [\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}] + (\mathbf{N}^T \mathbf{V}^{(m)} + \lambda \mathbf{K}) [\mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{f}^{(m)}] + \mathbf{N}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{Z} [\alpha^{(m+1)} - \alpha^{(m)}] \\ & = \mathbf{N}^T \mathbf{V}^{(m)} [\mathbf{D}_{v,a}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*)^{(m)} + \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m)} - \mathbf{X} \beta^{(m+1)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m+1)}]. \end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{f}^{(m+1)} = (\mathbf{N}^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{N} + \lambda \mathbf{K})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{V}^{(m)} [\mathbf{D}_{v,a}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*)^{(m)} + \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m)} - \mathbf{X} \beta^{(m+1)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\tau}^{(m+1)}].$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \mathbf{Z}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{X} \Delta_{\beta}^{(m+1,m)} + \mathbf{Z}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{N} \Delta_{\mathbf{f}}^{(m+1,m)} + \mathbf{Z}^T \mathbf{U} \mathbf{Z} \Delta_{\alpha}^{(m+1,m)} = \mathbf{Z}^T \mathbf{B}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) \\ & = \mathbf{Z}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{X} [\beta^{(m+1)} - \beta^{(m)}] + \mathbf{Z}^T \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{N} [\mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{f}^{(m)}] + \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^{(m)} \mathbf{Z} [\alpha^{(m+1)} - \alpha^{(m)}] \\ & = \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^{(m)} [\mathbf{D}_{v,b}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \mathbf{X} \beta^{(m)} + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \mathbf{X} \beta^{(m+1)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m+1)} + \mathbf{Z} \alpha^{(m)}]. \end{aligned}$$

Así,

$$\alpha^{(m+1)} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{U}^{(m)} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{U}^{(m)} [\mathbf{D}_{v,b}^{(m)} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\mu}^*) + \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\eta}^{(m)} - \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} + \boldsymbol{\tau}^{(m)}],$$

donde

$$\mathbf{D}_{v,b}^{(m)} = (\mathbf{U}^{(m)})^{-1} \mathbf{B}^{(m)}, \quad \mathbf{D}_{v,s}^{(m)} = (\mathbf{V}^{(m)})^{-1} \mathbf{S}^{(m)}, \quad \boldsymbol{\eta}^{(m)} = \mathbf{X} \beta^{(m)} + \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m)}, \quad \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} = \mathbf{X} \beta^{(m+1)} + \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{X} \Delta_{\beta}^{(m+1,m)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{N} \Delta_{\mathbf{f}}^{(m+1,m)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{Z} \Delta_{\alpha}^{(m+1,m)} + (\mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{N}^* + \lambda^* \mathbf{K}^*) \Delta_{\mathbf{f}^*}^{(m+1,m)} \\ & = \mathbf{N}^* \mathbf{B} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) - \lambda^* \mathbf{K}^* \mathbf{f}^* \\ & = \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{X} \beta^{(m+1)} - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{X} \beta^{(m)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m+1)} - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{Z} \delta^{(m+1)} - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{Z} \delta^{(m)} \\ & \quad + (\mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{N} + \lambda^* \mathbf{K}^*) \mathbf{f}^{*(m+1,m)} - (\mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{N}^* + \lambda^* \mathbf{K}^*) \mathbf{f}^{*(m)} \\ & = \mathbf{N}^* \mathbf{B} (\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{N}^* \mathbf{f}^{*(m)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{S} \alpha^{(m)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} [\mathbf{X} \beta^{(m)} + \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m)}] - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} [\mathbf{X} \beta^{(m+1)} + \mathbf{N} \mathbf{f}^{(m+1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{N}^* \mathbf{B}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}^{(m)} - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} [\mathbf{N}^* \mathbf{f}^{*(m)} + \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}^{(m)}] - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}^{(m+1)} \\
&= \mathbf{N}^* \mathbf{B}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}^{(m)} - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{S} \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} + \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \boldsymbol{\tau}^{(m)} - \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{f}^{*(m+1)} = (\mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} \mathbf{N}^* + \lambda^* \mathbf{K}^*)^{-1} \mathbf{N}^{*T} \mathbf{U} [\mathbf{D}_{v,b}(\mathbf{y}^* - \boldsymbol{\delta}^*) + \mathbf{D}_{v,s} \boldsymbol{\eta}^{(m)} - \mathbf{D}_{v,s} \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} + \boldsymbol{\tau}^{(m)} - \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}^{(m+1)}]$$

El procedimiento iterativo se repite hasta que se cumple un criterio de convergencia. En este trabajo se considera como criterio que la norma de la diferencia entre iteraciones sucesivas sea suficientemente pequeña, es decir,

$$\|\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(m)}\| < \varepsilon,$$

con  $\varepsilon = 10^{-6}$ . También puede verificarse la estabilidad de la log-verosimilitud penalizada,

$$|L_p(\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}) - L_p(\boldsymbol{\theta}^{(m)})| < \varepsilon,$$

o bien que la norma del vector score penalizado satisfaga la ecuación

$$\|\mathbf{U}_p(\boldsymbol{\theta}^{(m+1)})\| < \varepsilon.$$

## 2.6. Aspectos Inferenciales

Los aspectos inferenciales comprenden un conjunto de métodos y técnicas destinados a realizar inferencias estadísticas a partir de información empírica proveniente de un conjunto de datos. En este contexto, el modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable surge como una extensión flexible del modelo de regresión BSR clásico, al permitir la incorporación de componentes sistemáticos lineales y no lineales mediante funciones suaves. A pesar de su potencial para modelar fenómenos complejos con estructuras heterocedásticas, el desarrollo inferencial de este modelo ha sido escasamente abordado en la literatura. No obstante, existen trabajos relacionados que han explorado aspectos inferenciales en modelos similares. Por ejemplo, Santos–Neto *et al.* (2016) proponen un modelo de regresión BSR con precisión variando, que permite describir la heteroscedasticidad en el cual introdujeron pruebas de hipótesis para el parámetro de precisión y evaluaron su rendimiento. Algo similar a lo que realizó Lombardía y Sperlich (2008) quienes desarrollaron una prueba para la hipótesis de un modelo paramétrico de efectos mixtos versus un modelo semiparamétrico de efectos mixtos.

Segal *et al.* (1994) derivan la varianza del estimador de máxima verosimilitud penalizado utilizando el algoritmo de *Expectation-Maximization (EM)*; véase también Green y Silverman (1990). Fan y Jiang (2005) ampliaron la prueba de la relación de probabilidad generalizada para modelos aditivos con el fin de verificar si admite una forma paramétrica. Lin y Zhang (1999) estudiaron algunos aspectos de la estimación y la inferencia para modelos generalizados aditivos mixtos basados en el criterio de la función de cuasi-verosimilitud penalizada. Se notificaron comparaciones entre inferencia frecuentista y bayesiana. Berhane y Tibshirani (1998) propusieron bandas de error estándar y algunas pruebas aproximadas, como la prueba de cociente de probabilidad y la prueba de score, para modelos aditivos generalizados para datos longitudinales. Importante mencionar además que Santos-Neto *et al.* (2014) proponen la estimación e inferencia de la distribución Birnbaum-Saunders reparametrizada basada en métodos de máxima verosimilitud, de momentos, de momentos modificados y de momentos generalizados. Ibacache-Pulgar y Paula (2011) aproximaron la matriz de varianza-covarianza en el modelo lineal parcial de t-Student a través de la inversa de la matriz de información de Fisher. Ibacache-Pulgar y Reyes (2018) propusieron aproximar la matriz de varianza-covarianza

en un modelo aditivo semiparamétrico bajo distribuciones simétricas utilizando la matriz de información de Fisher obtenida a partir de la función de función de verosimilitud penalizada.

Estos trabajos constituyen una base teórica relevante para la formulación de procedimientos inferenciales en el modelo semiparamétrico BSR con parámetro de precisión variable, motivo por el cual se presentan y discuten en las siguientes secciones de este capítulo.

### 2.6.1. Errores estándar aproximados para $s = l = 1$

En esta sección se aborda el problema de estimar la matriz de varianza-covarianza del estimador de máxima verosimilitud penalizada para  $\boldsymbol{\theta}^T$ . Considerando que dicho estimador se obtuvo mediante un algoritmo iterativo basado en el método de Scoring de Fisher, resulta natural derivar la matriz de varianza-covarianza utilizando la inversa de la matriz de información de Fisher penalizada. Este enfoque ha sido ampliamente utilizado en la literatura; véase, por ejemplo, Segal *et al* (1994), Wahba (1983) e Ibacache-Pulgar *et al.* (2013). Con el propósito de calcular la matriz inversa de  $\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})$  dada en (2.5.3), considere que

$$\mathbf{J}_p^{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_p^{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\beta f}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_p^{\beta f^T}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{ff}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_p^{22} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_p^{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\alpha f^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_p^{\alpha f^{*T}}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f^* f^*}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_p^{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_p^{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{\beta f^*}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{J}_p^{f\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{J}_p^{f f^*}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz  $\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})$  puede escribirse como

$$\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_p^{11} & \mathbf{J}_p^{12} \\ \mathbf{J}_p^{12^T} & \mathbf{J}_p^{22} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Suponiendo que existen todas las inversas necesarias y después de haber aplicado algunas manipulaciones algebraicas sobre la expresión (2.12) se muestra que la matriz inversa de  $\mathbf{J}_p(\boldsymbol{\theta})$  asume la siguiente forma de bloque:

$$\mathbf{J}_p^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_p^{11,1} & -\mathbf{J}_p^{11,1}\mathbf{J}_p^{12}\mathbf{J}_p^{22^{-1}} \\ -\mathbf{J}_p^{22^{-1}}\mathbf{J}_p^{12^T}\mathbf{J}_p^{11,1} & \mathbf{J}_p^{22,1} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

donde  $\mathbf{J}_p^{11,1} = (\mathbf{J}_p^{11} - \mathbf{J}_p^{12}\mathbf{J}_p^{22^{-1}}\mathbf{J}_p^{12^T})^{-1}$  y  $\mathbf{J}_p^{22,1} = \mathbf{J}_p^{22^{-1}} + \mathbf{J}_p^{22^{-1}}\mathbf{J}_p^{12^T}\mathbf{J}_p^{11,1}\mathbf{J}_p^{12}\mathbf{J}_p^{22^{-1}}$ . Por lo tanto, la matriz de varianza-covarianza asintótica de  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  está dado por

$$\widehat{\text{Cov}}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})_{\text{aprox}} = \mathbf{J}_p^{-1}(\boldsymbol{\theta})\Big|_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}. \quad (2.14)$$

En particular, se tiene

$$\widehat{\text{Cov}}_{\text{aprox}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\mathbf{f}}) = \mathbf{J}_p^{11,1}\Big|_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} \quad \text{y} \quad \widehat{\text{Cov}}_{\text{aprox}}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\mathbf{f}}^*) = \mathbf{J}_p^{22,1}\Big|_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}.$$

### 2.6.2. Grados de Libertad para $s = l = 1$

En esta sección se presenta una definición de los grados de libertad asociados a las componentes paramétricas y no paramétricas del modelo, basada en la convergencia del proceso iterativo descrito en la Sección

3.5 para la estimación de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{f}^*$ , correspondientes a las funciones suaves del componente de media y del componente de precisión, respectivamente. Dado un valor fijo de los parámetros de suavizamiento  $\lambda$  y  $\lambda^*$ , es posible obtener una estimación de los grados de libertad efectivos asociados a cada función suave. Estos se definen en términos de la traza de las matrices de suavizamiento involucradas en el proceso iterativo de estimación penalizada, donde

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{r}}_{v,a} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{f}}^* = \hat{\mathbf{S}}^* \hat{\mathbf{r}}_{v,a}^*$$

donde  $\hat{\mathbf{r}}_{v,a} = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{a,b} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{a,b} = \hat{\mathbf{D}}_v \hat{\mathbf{z}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{f}}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_{v,a}^* = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{a,b}^* - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{a,b}^* = \hat{\mathbf{D}}_v \hat{\mathbf{z}}^* + \hat{\boldsymbol{\eta}}^*$ ,  $\hat{\boldsymbol{\eta}}^* = \mathbf{N}^* \hat{\mathbf{f}}^*$ ,  $\hat{\mathbf{S}} = (\mathbf{N}^\top \hat{\mathbf{D}}_v \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^\top \hat{\mathbf{D}}_v$ , y  $\hat{\mathbf{S}}^* = (\mathbf{N}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_v \mathbf{N}^*)^{-1} \mathbf{N}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_v$ .

En la literatura existen diferentes enfoques para definir los grados de libertad, dependiendo del contexto en el que se utilicen; ver Buja *et al.* (1989). Los grados de libertad asociados a los componentes paramétricos de media y precisión se definen como:

$$\begin{aligned} \text{gl}_{\mathbf{x}} &= \text{tr} \left\{ \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{D}}_v \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{D}}_v \right\} = p, \\ \text{gl}_{\mathbf{z}^*} &= \text{tr} \left\{ \mathbf{Z}^* (\mathbf{Z}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_v \mathbf{Z}^*)^{-1} \mathbf{Z}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_v \right\} = p^*, \end{aligned}$$

donde  $p$  y  $p^*$  son los rangos de  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Z}^*$ , respectivamente. Por otro lado, los grados de libertad para las componentes no paramétricas  $\mathbf{N}\hat{\mathbf{f}}$  y  $\mathbf{N}^* \hat{\mathbf{f}}^*$  se definen como:

$$\text{gl}(\lambda) = \text{tr} \left\{ \mathbf{N} (\mathbf{N}^\top \hat{\mathbf{D}}_v \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^\top \hat{\mathbf{D}}_v \right\} \quad \text{y} \quad \text{gl}(\lambda^*) = \text{tr} \left\{ \mathbf{N}^* (\mathbf{N}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_v \mathbf{N}^*)^{-1} \mathbf{N}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_v \right\}. \quad (4.4)$$

La suma  $\text{gl}_{\text{total}} = \text{gl}_{\mathbf{x}} + \text{gl}_{\mathbf{z}^*} + \text{gl}(\lambda) + \text{gl}(\lambda^*)$  representa el total de grados de libertad efectivos del modelo estimado.

### 2.6.3. Sobre los parámetros de suavizamiento

En la sección anterior se consideraron los parámetros de suavizamiento  $\lambda$  y  $\lambda^*$  como fijos. Sin embargo, en la práctica, los parámetros de suavizamiento deben seleccionarse a partir de los datos, con el objetivo de lograr un equilibrio adecuado entre el ajuste del modelo y la complejidad de las funciones suaves. A continuación, se describe un criterio comúnmente utilizado para la selección de estos parámetros, basado en el Criterio de Información de Akaike (AIC).

#### Criterio AIC

El AIC o el criterio de información bayesiana (BIC) se pueden utilizar para seleccionar los parámetros de suavizamiento. La idea es minimizar la siguiente función:

$$\text{AIC}(\lambda, \lambda^*) = -2L_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda, \lambda^*) + 2[\text{gl}_{\text{total}}],$$

donde  $L_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda, \lambda^*)$  denota la función de probabilidad logarítmica penalizada encontrada en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Una cuadrícula (superficie) para diferentes valores de  $\lambda$  y  $\lambda^*$  y su correspondientes  $\text{AIC}(\lambda, \lambda^*)$  es útil para elegir los parámetros de suavizamiento óptimos.

## Fijación de los grados de libertad

Otra forma de seleccionar los parámetros de suavizamiento consiste en fijar directamente los grados de libertad, cuando estos dependen únicamente de los parámetros  $\lambda$  y  $\lambda^*$ , como se muestra en la Ecuación (4.4). En este contexto, se puede especificar de antemano el número deseado de grados de libertad efectivos para cada función suave, y posteriormente determinar los valores de  $\lambda$  y  $\lambda^*$  que producen exactamente esa cantidad de complejidad. En otras palabras, se plantea una relación objetivo del tipo  $gl(\lambda) = d$  y  $gl(\lambda^*) = d^*$ , donde  $d$  y  $d^*$  son valores preestablecidos, y luego se resuelve numéricamente para encontrar los valores correspondientes de  $\lambda$  y  $\lambda^*$ , respectivamente. Este procedimiento es útil cuando se desea controlar explícitamente el nivel de suavizamiento de una función, por ejemplo, en situaciones donde se requiere una interpretación directa del número de funciones base activas o de la flexibilidad del ajuste.

Este enfoque ha sido utilizado por varios autores, entre ellos Buja *et al.* (1989) y Rigby y Stasinopoulos (2005), especialmente en el contexto de modelos aditivos generalizados y regresión spline penalizada. Su principal ventaja radica en que ofrece un control más intuitivo sobre la complejidad del modelo, en comparación con métodos automáticos como AIC o GCV (*Generalized Cross-Validation*), aunque requiere resolver la relación entre  $\lambda$ ,  $\lambda^*$  y los grados de libertad, que en general no es explícita y debe calcularse por métodos iterativos o mediante interpolación numérica.

En aplicaciones prácticas, como en este caso, este método puede implementarse evaluando  $gl(\lambda)$  y  $gl(\lambda^*)$  sobre una grilla de valores de  $\lambda$  y  $\lambda^*$ , respectivamente, y luego utilizar interpolación para hallar los valores de  $\lambda$  y  $\lambda^*$  que corresponden al número deseado de grados de libertad.

## Capítulo 3

# Análisis de diagnóstico

En este capítulo se aborda la extensión y aplicación de la técnica de influencia local al modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable. En la Sección 3.1 se presenta una revisión bibliográfica de los principales trabajos relacionados con la técnica de influencia local. En la Sección 3.2 se proponen dos tipos de residuos, basados en el enfoque desarrollado por Leiva *et al.* (2014). La Sección 3.3 proporciona una descripción general del método de influencia local, sus fundamentos y aplicación. Finalmente, en la Sección 3.4 se deriva la expresión de la curvatura normal bajo dos esquemas de perturbación: la perturbación de ponderación de casos y la perturbación en la variable de respuesta.

### 3.1. Introducción

El análisis de diagnóstico es un componente fundamental en la modelación estadística, ya que permite evaluar la estabilidad y sensibilidad de los estimadores frente a perturbaciones en los datos o en los supuestos del modelo. Entre las técnicas más utilizadas en regresión paramétrica se encuentran la influencia global e influencia local, esta última propuesta por Cook (1986) con el propósito de evaluar la sensibilidad de los estimadores de los parámetros cuando se introducen pequeñas perturbaciones en los supuestos del modelo semiparamétrico BSR con parámetro de precisión variando o también en los datos.

En este contexto, se considera la extensión y aplicación del método de influencia local en el modelo propuesto. Existen diversos trabajos en la literatura que abordan esta metodología en distintos marcos. Por ejemplo, Zhu *et al.* (2003) proporcionan un medio conveniente para extender el análisis de influencia local de Cook al EMVP en los modelos normales.

Posteriormente, Ferreira y Paula (2016) extendieron la técnica de influencia local a diferentes esquemas de perturbación considerando un modelo parcialmente lineal sesgado-normal. Asimismo, Bastiani *et al.* (2014) utilizaron la metodología de influencia local para evaluar la sensibilidad de los estimadores de máxima verosimilitud a pequeñas perturbaciones en un conjunto de datos reales y en los supuestos de modelos lineales espaciales. Posteriormente, Ibacache-Pulgar *et al.* (2021) desarrollaron el método de influencia local para modelos semiparamétricos de regresión Beta aditiva y Cárcamo *et al.* (2021) lo aplicaron al modelo BSR-SAM.

Recientemente, Jeldes *et al.* (2022) desarrollaron un modelo de coeficientes parcialmente variables con errores de colas pesadas, específicamente distribuciones t-Student, incorporando técnicas de diagnóstico basadas en influencia local bajo diferentes esquemas de perturbación. Su estudio, aplicado al análisis de

contaminación atmosférica en Santiago de Chile y Lima (Perú), demostró la utilidad de estos métodos para detectar observaciones influyentes y garantizar la robustez de los estimadores en contextos caracterizados por heterogeneidad y presencia de valores extremos.

A continuación se presenta la formulación teórica y computacional del método de influencia local en el marco del modelo, considerando distintos esquemas de perturbación, con el objetivo de evaluar la robustez de los estimadores obtenidos.

## 3.2. Análisis residual

El análisis residual es una herramienta fundamental para evaluar la calidad del ajuste de un modelo de regresión, ya que permite estudiar la variabilidad de los datos que no es explicada por el modelo. Su aplicación es especialmente útil para detectar posibles errores de especificación en la distribución asumida, así como la presencia de observaciones atípicas o influyentes.

Con el propósito de realizar una evaluación diagnóstica más detallada en el contexto del modelo semiparamétrico BSR con parámetro de precisión variable, se proponen dos tipos de residuos basados en los resultados presentados en Leiva *et al.* (2014). A continuación, se describen formalmente estas dos alternativas residuales y su interpretación.

### 3.2.1. Residuos estandarizados

Se introducen los residuos del modelo utilizando la función de enlace definida anteriormente. En particular, se consideran residuos estandarizados de Pearson, los cuales se basan en la diferencia entre las observaciones  $y_i$  y su valor esperado  $\mu_i$ . Este tipo de residuo se define como

$$r_i^s = \frac{y_i - \mu_i}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(Y_i)}} = \frac{\widehat{\phi}_i^{1/2}(y_i - \widehat{\mu}_i)}{\sqrt{\widehat{\mu}_i}}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

donde  $\widehat{\phi}_i = \frac{[\widehat{\delta}_i + 1]^2}{2\widehat{\delta}_i + 5}$ , con

$$\widehat{\mu}_i = g^{-1} \left( \mathbf{x}_i^\top \widehat{\boldsymbol{\beta}} + \widehat{\mathbf{f}}(t_i) \right), \quad \widehat{\delta}_i = h^{-1} \left( \mathbf{z}_i^\top \widehat{\boldsymbol{\alpha}} + \widehat{\mathbf{f}}^*(t_i) \right),$$

evaluadas en las estimaciones de máxima verosimilitud penalizada de  $\boldsymbol{\theta}$ .

### 3.2.2. Residuos de Jørgensen

Otro tipo de residuo que se puede considerar se basa en el trabajo desarrollado por Jørgensen (1984) y extendido a los modelos de regresión BSR por Leiva *et al.* (2014). En el marco del modelo semiparamétrico BSR con parámetro de precisión variando, se propone definir el residuo del tipo Jørgensen como

$$r_i^J = J_i(\widehat{\mu}_i)^{1/2} \kappa_i \widehat{\mu}_i \quad (i = 0, \dots, n),$$

donde

$$\kappa_i \hat{\mu}_i = -\frac{1}{2\hat{\mu}_i} + \frac{\hat{\delta}_i}{[\hat{\delta}_i y_i + y_i + \hat{\delta}_i \hat{\mu}_i]} + \frac{y_i[\hat{\delta}_i + 1]}{4\hat{\mu}_i^2} - \frac{\hat{\delta}_i^2}{4y_i[\hat{\delta}_i + 1]}$$

y,

$$J_i(\hat{\mu}) = -\frac{1}{2\hat{\mu}_i^2} + \frac{\hat{\delta}_i^2}{[\hat{\delta}_i y_i + y_i + \hat{\delta}_i \hat{\mu}_i]^2} + \frac{[\hat{\delta}_i + 1]y_i}{2\hat{\mu}_i^2},$$

con  $\kappa_i \hat{\mu}_i$  siendo el  $i$ -ésimo elemento del vector  $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\mu}) = \partial L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*) / \partial(\boldsymbol{\mu})$  y  $J_i(\hat{\mu}_i)$  el  $i$ -ésimo elemento diagonal de  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\mu}) = \partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*) / \partial \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\mu}$  evaluado en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

### 3.3. Método de Influencia Local

Para el modelo considerado, sea  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$  un vector  $n$ -dimensional de perturbaciones restringido a un subconjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , y sea  $L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})$  el logaritmo de la verosimilitud penalizada bajo perturbación. Supóngase que existe un vector sin perturbación  $\boldsymbol{\omega}_0 \in \Omega$  tal que  $L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega}_0) = L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)$ . Para evaluar la influencia de perturbaciones pequeñas en el estimador de máxima verosimilitud penalizada  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , se define el desplazamiento de verosimilitud como:

$$LD(\boldsymbol{\omega}) = 2 \left[ L_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \lambda, \lambda^*) - L_p(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\omega}}, \lambda, \lambda^*) \right] \geq 0,$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\omega}}$  es el estimador de máxima verosimilitud penalizada bajo perturbación  $\boldsymbol{\omega}$ . Esta cantidad mide la distancia entre  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{\omega}}$ . Cook (1986) propuso estudiar el comportamiento local de  $LD(\boldsymbol{\omega})$  en torno a  $\boldsymbol{\omega}_0$  mediante una expansión cuadrática.

El procedimiento consiste en considerar una dirección  $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\boldsymbol{\ell}\| = 1$ , y estudiar la gráfica de  $LD(\boldsymbol{\omega}_0 + a\boldsymbol{\ell})$  respecto a  $a \in \mathbb{R}$ . Esta gráfica se conoce como línea levantada. Su curvatura en  $a = 0$  se utiliza para medir la sensibilidad del modelo en esa dirección, y está dada por la **curvatura normal**:

$$C_{\boldsymbol{\ell}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = -2 \boldsymbol{\ell}^\top \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\omega}}^\top \ddot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})_p^{-1} \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\ell},$$

donde

$$\ddot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})_p = \left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\omega}} = \left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0}.$$

Aquí,  $\ddot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})_p$  es la matriz hessiana penalizada evaluada en  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , y  $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\omega}}$  representa la matriz de perturbación cruzada. La curvatura  $C_{\boldsymbol{\ell}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  cuantifica la sensibilidad local en la dirección  $\boldsymbol{\ell}$ . Becker y Wu (1992) y Poon y Poon (1999) proponen utilizar la curvatura normal conforme

$$B_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{C_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{\theta})}{2\sqrt{\text{tr}(\boldsymbol{\Delta}_p^\top \ddot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})_p \boldsymbol{\Delta}_p)^2}} = -\frac{\boldsymbol{\ell}^\top \boldsymbol{\Delta}_p^\top \ddot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})_p \boldsymbol{\Delta}_p \boldsymbol{\ell}}{\sqrt{\text{tr}(\boldsymbol{\Delta}_p^\top \ddot{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\theta})_p \boldsymbol{\Delta}_p)^2}}.$$

Esta curvatura se caracteriza por permitir cualquier dirección unitaria  $\boldsymbol{\ell}$  tal que  $0 \leq B_{\boldsymbol{\ell}}(\boldsymbol{\theta}) \leq 1$ . Una sugerencia es considerar la dirección  $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_{max}$  correspondiente a la mayor curvatura  $B_{\boldsymbol{\ell}_{max}}(\boldsymbol{\theta})$  o, alternativamente, evaluar la curvatura normal en la dirección  $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{e}_i$  y observar el gráfico de índices de  $B_{\mathbf{e}_i}(\boldsymbol{\theta})$ .

### 3.4. Esquemas de perturbación

En esta sección se presentan las expresiones de  $\Delta_p$  correspondientes a distintos esquemas de perturbación considerados en el análisis de influencia local. En particular, se abordan los casos de perturbación del peso de los casos y de la variable de respuesta.

#### 3.4.1. Perturbación de ponderación de casos

La perturbación de la ponderación de casos se considera para detectar observaciones con una gran contribución a la función de verosimilitud y que pueden ejercer una gran influencia en los estimadores de máxima verosimilitud penalizados. Se consideran los pesos atribuidos a las observaciones en la función de log-verosimilitud penalizada como

$$L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \ell_i(\boldsymbol{\theta}) - \frac{\lambda}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{K} \mathbf{f} - \frac{\lambda^*}{2} \mathbf{f}^{*\top} \mathbf{K}^* \mathbf{f}^*, \quad (3.1)$$

donde  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$  es el vector de pesos, con  $0 \leq \omega_i \leq 1$  para  $i = 1, \dots, n$ , y  $\boldsymbol{\omega}_0 = (1, \dots, 1)^\top$  denota el vector no perturbado.

Diferenciando  $L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})$  con respecto a los elementos de  $\boldsymbol{\theta}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , se obtienen las siguientes derivadas cruzadas necesarias para la matriz  $\Delta_\omega$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0} &= \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_\mu \boldsymbol{\delta}^*, \\ \left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \mathbf{f} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0} &= \mathbf{N}^\top \widehat{\mathbf{D}}_\mu \mathbf{D}_z, \\ \left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0} &= \mathbf{Z}^\top \mathbf{B}_\delta \boldsymbol{\delta}^*, \\ \left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \mathbf{f}^* \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0} &= \mathbf{N}^{*\top} \widehat{\mathbf{D}}_\delta \mathbf{D}_z, \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ , con  $\mathbf{D}_z$  denotado en secciones anteriores, y donde  $\mathbf{A}_\mu = \text{diag}(a_i^{(1)})$ ,  $\mathbf{B}_\delta = \text{diag}(b_i^{(1)})$ .  $\widehat{\mathbf{D}}_\mu$  y  $\widehat{\mathbf{D}}_\delta$  son matrices diagonales asociadas al componente de media y precisión, respectivamente.  $\mathbf{N}$  es la matriz de incidencia de  $\mathbf{f}$ , y  $\mathbf{N}^*$  la correspondiente a  $\mathbf{f}^*$ .  $\boldsymbol{\delta}^*$  representa el vector de indicadores tipo Kronecker  $\delta_{ij}^*$ , con 1 en la posición  $i = j$ .

#### 3.4.2. Perturbación de la variable de respuesta

De acuerdo a Leiva *et al.* (2014), la perturbación aditiva sobre la  $i$ -ésima variable de respuesta es dada por  $y_{i\omega_i} = y_i + \omega_i s(y_i)$  donde  $s(y_i) = \sqrt{\widehat{\mu}_i^2 / \widehat{\phi}}$  y  $\omega_i \in \mathbb{R}$  para  $i = (1, \dots, n)$ . A continuación, la función de log-verosimilitud penalizada se construye a partir de la ecuación (2.10) con  $y_i$  sustituida por  $y_{i\omega_i}$ , es decir

$$L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta} | y_{i\omega}) - \frac{\lambda}{2} \mathbf{f}^\top \mathbf{K} \mathbf{f} - \frac{\lambda^*}{2} \mathbf{f}^{*\top} \mathbf{K}^* \mathbf{f}^*, \quad (3.2)$$

donde  $L(\cdot)$  es la función de log-verosimilitud definida en la Ecuación (2.6), evaluada con  $y_{i\omega}$ . El vector no perturbado es  $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \dots, 0)^\top$ .

Diferenciando  $L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})$  con respecto a los elementos de  $\boldsymbol{\theta}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , se obtienen las siguientes derivadas cruzadas:

$$\left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}_0} = \mathbf{X}^\top \mathbf{A}_\mu \mathbf{S}_Y \delta_{ij}^*,$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \mathbf{f} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}_0} = \mathbf{N}^\top \hat{\mathbf{D}}_\mu \hat{\mathbf{D}}_Y \hat{\mathbf{D}}_\vartheta,$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}_0} = \mathbf{Z}^\top \mathbf{B}_\delta \mathbf{S}_Y \delta_{ij}^*,$$

$$\left. \frac{\partial^2 L_p(\boldsymbol{\theta}, \lambda, \lambda^*; \boldsymbol{\omega})}{\partial \mathbf{f}^* \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\omega}_0} = \mathbf{N}^{*\top} \hat{\mathbf{D}}_\delta \hat{\mathbf{D}}_Y \hat{\mathbf{D}}_\vartheta,$$

para  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\hat{\mathbf{D}}_Y = \text{diag}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_\vartheta = \text{diag}(\hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n)$ ,  $\mathbf{S}_Y = \text{diag}(s(y_1), \dots, s(y_n))$ , y  $\delta_{ij}^*$  es el delta de Kronecker.

Las cantidades  $\hat{\vartheta}_i$  se definen como

$$\hat{\vartheta}_i = \frac{\delta_i [\delta_i + 1]}{[\delta_i y_i + y_i + \delta_i \mu_i]^2} + \frac{[\delta_i + 1]}{4\mu_i^2} + \frac{\delta_i^2}{4[\delta_i + 1]y_i^2}.$$

## Capítulo 4

# Aplicación a datos de contaminación atmosférica

En este capítulo se presenta la aplicación del modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable. En la Sección 4.1 se muestra una introducción sobre la importancia e impacto del material particulado en la salud humana y el medioambiente, junto con una revisión de trabajos relevantes que abordan esta problemática desde diversas perspectivas. En la Sección 4.2 se desarrolla un análisis exploratorio de los datos proporcionados por el Sistema de Información de la Calidad del Aire, correspondientes a la contaminación atmosférica en la comuna de Pudahuel durante el periodo GEC del año 2024. La Sección 4.3 está dedicada a la estimación de los parámetros del modelo y a la verificación de supuestos, considerando dos tipos de residuos diagnósticos. En la Sección 4.4 se lleva a cabo un análisis de influencia local bajo dos esquemas de perturbación: ponderación de casos y perturbación de la variable de respuesta. Finalmente, en la Sección 4.5 se presenta un análisis confirmatorio, con el objetivo de identificar aquellas observaciones que pueden considerarse potencialmente influyentes en los resultados del modelo.

### 4.1. Introducción

Las partículas en suspensión con un diámetro inferior a 2.5 micrómetros, conocidas como PM<sub>2.5</sub>, están compuestas por elementos lo suficientemente pequeños como para penetrar profundamente en las vías respiratorias, alcanzando los pulmones e incluso los alvéolos, generando serios riesgos para la salud humana (Sinca, 2024).

Diversos estudios han documentado estos efectos adversos. Por ejemplo, Cakmak *et al.* (2010) reportaron asociaciones entre la exposición a contaminantes atmosféricos y condiciones como epilepsia, cefaleas y enfermedad tromboembólica venosa. Posteriormente, Stanek *et al.* (2011) realizaron una revisión de estudios epidemiológicos, toxicológicos y de exposición controlada en humanos, concluyendo que existen evidencias consistentes sobre los efectos adversos del material particulado, especialmente aquellos derivados de la tracción vehicular. Entre las afecciones más destacadas se incluyen asma, exacerbación de enfermedades respiratorias crónicas, problemas respiratorios generales y aumento de la mortalidad cardiovascular total.

En el contexto latinoamericano, Santiago de Chile se ha caracterizado por presentar, desde hace más de tres décadas, niveles de contaminación que superan los estándares nacionales e internacionales (Alvarado *et al.* 2010). Su ubicación geográfica, topografía y condiciones meteorológicas generan un escenario propicio

para la acumulación de contaminantes, especialmente durante los meses de otoño e invierno, cuando estos quedan atrapados en el valle. En verano, por otra parte, el incremento de la radiación solar favorece reacciones fotoquímicas. En este contexto, se producen episodios periódicos de contaminación extrema, cuyos niveles varían en función de factores meteorológicos y geográficos, así como del tipo y magnitud de las emisiones. Estas variaciones hacen que los niveles de contaminantes atmosféricos sean tratados como variables aleatorias, susceptibles de ser modeladas mediante distribuciones de probabilidad.

Las condiciones meteorológicas se consideran un factor determinante en la variabilidad de la contaminación del aire, llegando incluso a superar la influencia de ciertos efectos antropogénicos, como el tránsito vehicular (Alvarado *et al.* 2010). La relación entre variables meteorológicas y concentración de material particulado ha sido ampliamente estudiada a nivel internacional, y varias de estas variables se incorporan como covariables explicativas en el modelo propuesto en este estudio.

Para evaluar dicho efecto, se han utilizado diversas herramientas estadísticas, tales como modelos de regresión lineal múltiple, modelos aditivos generalizados, splines de regresión adaptativa multivariante y redes neuronales, entre otras (Puentes *et al.* 2021). En el presente capítulo, se analizarán datos reales de contaminación atmosférica registrados en la comuna de Pudahuel durante el 2024, con el objetivo de aplicar el modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable, en función de las variables explicativas meteorológicas y contaminantes.

## 4.2. Análisis exploratorio de los datos

Para este estudio se considera un conjunto de datos medioambientales relacionados con la contaminación atmosférica, en particular, la información proporcionada por el Sistema Nacional de Información de la Calidad del Aire (<https://sinca.mma.gob.cl>), correspondientes a la comuna de Pudahuel durante el período GEC, comprendido entre el 1 de abril y el 31 de agosto del año 2024. El conjunto de datos incluye las variables de concentraciones horarias de material particulado MP2.5 y MP10 (ambos en  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ), así como la velocidad del viento (m/s), temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) y humedad relativa (%). Del total de registros, se identificó un 2,6% de datos faltantes, los cuales se distribuyen de manera no sistemática a lo largo del período de estudio. Para abordar esta situación, se aplicó método de imputación de medias móviles, con el objetivo de mantener la estructura temporal. Posteriormente, las series horarias fueron agregadas mediante el cálculo de promedios diarios, obteniéndose un total de 153 observaciones para cada variable. Todo el procesamiento de datos y los análisis estadísticos fueron realizados utilizando el software RStudio (R2021.09.0).

El objetivo de este análisis es evaluar la asociación entre las concentraciones de material particulado y variables meteorológicas mediante la aplicación del modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variable. Con el fin de motivar el uso de modelos semiparamétricos y destacar su flexibilidad, se consideran como variable de respuesta las concentraciones promedio diarias de MP2.5, lo cual permite capturar posibles relaciones no lineales con las covariables explicativas.

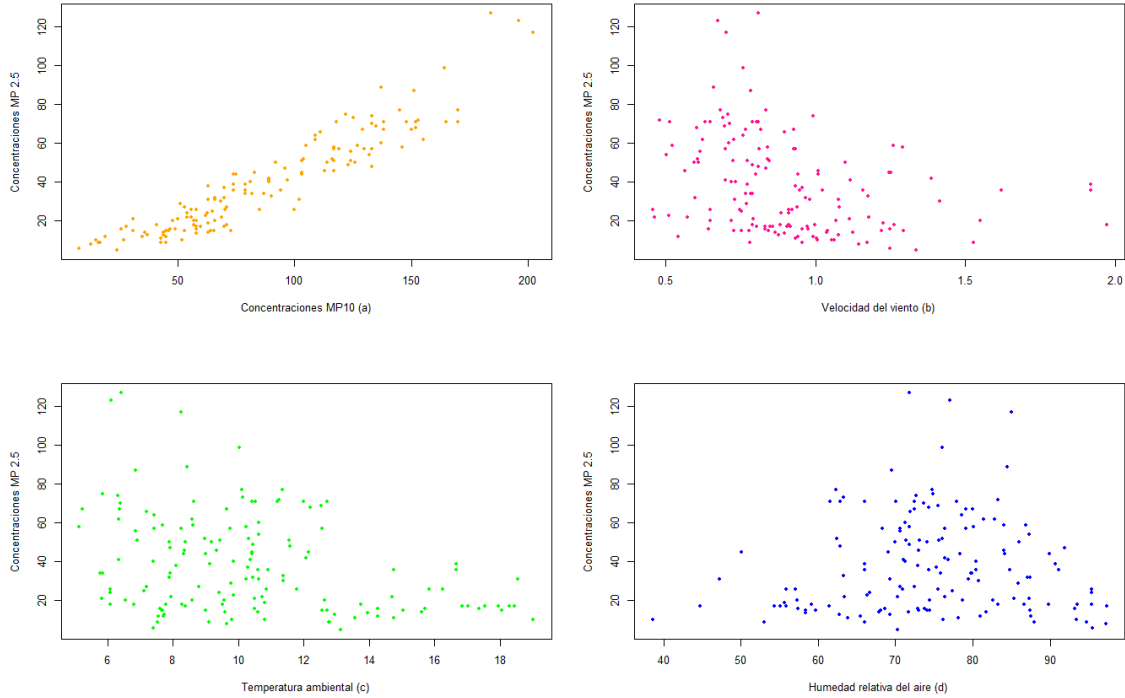


Figura 4.1: Scatter plots de MP2.5 vs MP10 (a), MP2.5 vs velocidad del viento (b), MP2.5 vs Temperatura (c) y MP2.5 vs Humedad (d).

La Figura 4.1 contiene los gráficos de dispersión entre la variable de respuesta y la covariable MP10 (a), velocidad del viento (b), temperatura ambiental (c) y humedad relativa del aire (d), se aprecia una relación lineal positiva entre las concentraciones de MP2.5 y MP10 (a). Este resultado es esperable, dado que ambos tipos de material particulado comparten fuentes comunes, como la combustión residencial y el tránsito vehicular, y suelen coexistir en condiciones ambientales similares. Esto puede ser apoyado por la correlación entre ambas variables que es igual a 0.93. Mientras que, la relación entre la concentración de MP2.5 y la velocidad del viento (b) presenta una clara tendencia negativa, indicando que a mayores velocidades de viento tienden a registrarse menores concentraciones de MP2.5. Esto concuerda con el comportamiento físico del MP, ya que la acción del viento favorece la dispersión de los contaminantes atmosféricos. Esta relación no parece ser estrictamente lineal, lo que sugiere que podría modelarse mejor mediante un efecto no paramétrico. Finalmente, en la Figura 4.1 (c) y (d) se muestran relaciones más difusas entre MP2.5 y las variables temperatura y humedad relativa, respectivamente. En el caso de la temperatura, se observa una leve disminución en los concentraciones de MP2.5 a medida que aumenta la temperatura, aunque con alta dispersión. Para la humedad relativa, se aprecia una mayor concentración de puntos con bajos niveles de MP2.5 en rangos altos de humedad, no obstante, no se alcanza a apreciar algún tipo de tendencia en los datos. Estas observaciones sugieren que las variables meteorológicas podrían tener efectos no lineales sobre la concentración de MP2.5, lo cual justifica su inclusión en el modelo mediante funciones suaves. En cambio, la variable MP10 muestra una asociación suficientemente fuerte y lineal como para ser incorporada en el componente paramétrico del modelo propuesto.

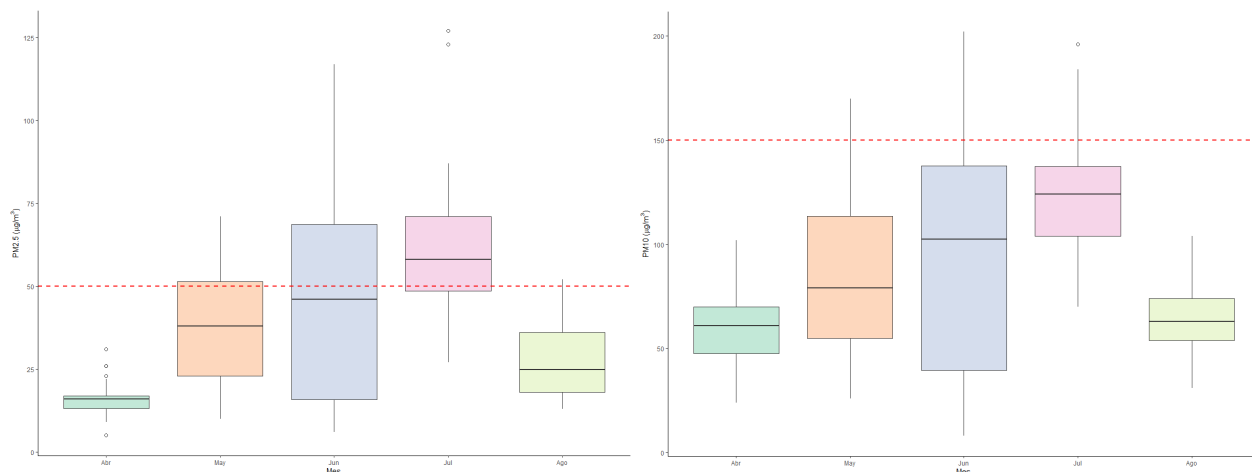


Figura 4.2: Boxplots ajustados para MP2.5 (izq) y MP10 (der) por meses del periodo GEC registrado por la estación de monitoreo Pudahuel, Chile 2024.

La Figura 4.2 presenta los bloxplots de las concentraciones diarias de MP2.5 y MP10 registradas entre abril y agosto, periodo correspondiente a la GEC. Con el fin de contrastar los niveles observados con la normativa vigente, se incorporan como referencia los valores máximos de concentración promedio diaria establecidos para MP2.5 y MP10, correspondientes a  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$  y  $150 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$ , respectivamente, lo que permite identificar visualmente los períodos en los cuales se registran superaciones de dichos umbrales. Se observa que, en ambos casos, las concentraciones tienden a ser más bajas en abril y agosto, y más elevadas entre mayo y julio. En el gráfico de la izquierda, correspondiente al MP2.5, se muestra un aumento progresivo de las concentraciones desde abril hasta junio, alcanzando su punto máximo en este último mes, donde también se observan varios posibles valores atípicos por sobre los  $120 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$ . Este comportamiento puede explicarse por la combinación de condiciones meteorológicas adversas (baja ventilación, menor precipitación y temperaturas más bajas) y un incremento en las emisiones residenciales por calefacción a leña, práctica habitual durante el invierno. Un comportamiento similar se presenta en el gráfico del lado derecho para MP10, con valores centrales más altos en junio y julio. A partir de agosto, ambos gráficos presentan una marcada disminución, lo cual refleja una mejora en las condiciones de ventilación atmosférica hacia el final del periodo de invierno. En general, estos resultados ponen de manifiesto la estacionalidad en los niveles de contaminación atmosférica, así como la necesidad de aplicar modelos que consideren variaciones temporales e influencia de covariables meteorológicas, como el propuesto en este trabajo.

#### 4.2.1. Variable de respuesta MP2.5

Como se ha señalado, resulta de gran interés analizar los promedios diarios de las concentraciones de MP2.5 durante el período GEC, debido al incremento significativo de MP observado en dichos meses en la comuna de Pudahuel.

Media	Mediana	SD	CV	CS	CK	Mínimo	Máximo	$n$
38	33.5	24.7	64.9	1.03	4.06	5	127	153

Cuadro 4.1: Tabla de estadísticas descriptivas para concentraciones de MP2.5 registrado por la estación de monitoreo de Pudahuel, Chile 2024.

El Cuadro 4.1 proporciona un resumen descriptivo de la variable de respuesta MP2.5. Se observa que el valor promedio diario de MP2.5 durante el periodo analizado fue de  $38 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$ , mientras que la mediana fue de  $33.5 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$ , lo cual indica una leve asimetría en la distribución de los datos. Esto se ve respaldado por el coeficiente de asimetría (CS) de 1.03, que indica una asimetría positiva moderada, es decir, presencia de valores extremos altos. El coeficiente de variación (CV) de 64.9 % lo cual indica una alta dispersión relativa en los datos respecto al promedio, lo que es esperable en variables ambientales sujetas a factores meteorológicos. Además, el coeficiente de curtosis (CK) de 4.06 indica que la distribución es leptocúrtica, es decir, tiene colas más pesadas que la distribución normal, lo que confirma la presencia de observaciones extremas. El valor mínimo registrado fue de  $5 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$  y el máximo alcanzó  $127 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$ , evidenciando episodios de alta concentración que podrían tener efectos significativos en la salud humana y la calidad del aire. El número total de observaciones corresponde a 153 días del periodo GEC 2024 en la comuna de Pudahuel. Se logra identificar que los valores están distribuidos de forma asimétrica. A partir de estos resultados, se identifica que los valores se distribuyen de forma asimétrica. Para respaldar gráficamente esto, a continuación se presenta la visualización correspondiente de la variable de respuesta.

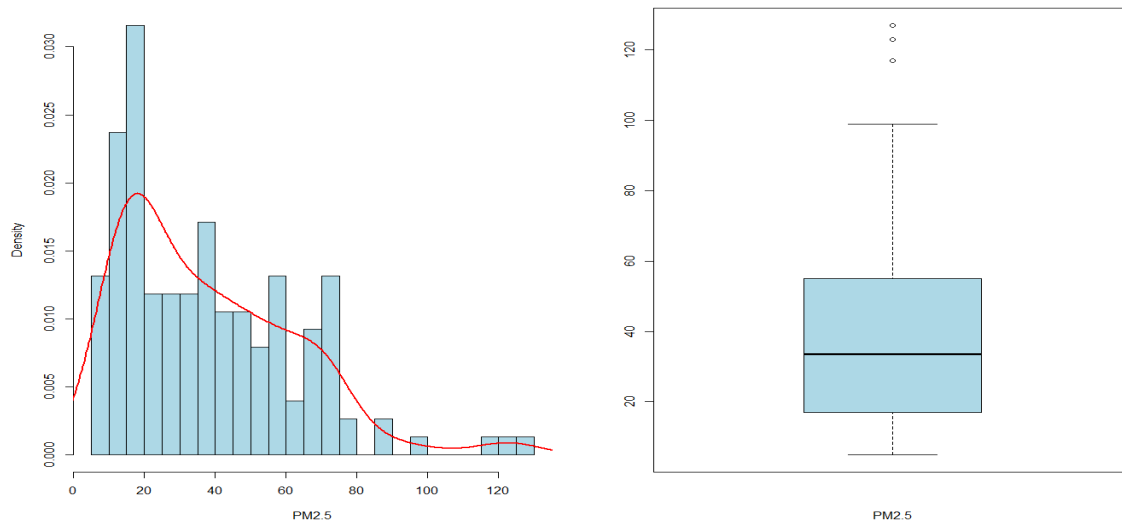


Figura 4.3: Histograma y boxplot de la variable de respuesta MP2.5, durante el periodo GEC del año 2024 en la comuna de Pudahuel.

La Figura 4.3 muestra el histograma y el boxplot correspondientes a la variable de respuesta MP2.5, para el período GEC del año analizado en la comuna de Pudahuel. Se observa que la densidad empírica de MP2.5 es asimétrica hacia la derecha, es decir, presenta una asimetría positiva, con una cola alargada hacia valores más altos, que en algunos casos superan los  $50 \mu\text{g}/\text{m}^3\text{N}$ . Este comportamiento es consistente con el valor positivo del coeficiente de asimetría ( $CS = 1.03$ ) obtenido previamente, que indica la presencia de eventos puntuales con concentraciones significativamente elevadas. El boxplot refuerza esta observación al mostrar una mediana por debajo del valor medio, así como la presencia de posibles *outliers* por encima del bigote superior. Estos valores extremos reflejan episodios de alta contaminación atmosférica, potencialmente asociados a condiciones meteorológicas desfavorables. En conjunto, la forma de la distribución sugiere que las concentraciones de MP2.5 presentan variabilidad considerable y no siguen una distribución normal, lo que justifica la elección de modelos semiparamétricos más flexibles para su análisis, como el propuesto en este trabajo.

### 4.3. Estimación y verificación de supuestos

Una vez efectuado el análisis exploratorio y corroboradas las tendencias observadas en los datos descritos en la Sección 4.1, se propone emplear una extensión modelo semiparamétrico Birnbaum–Saunders reparametrizado para modelar la relación entre las concentraciones de MP2,5 y las covariables seleccionadas: MP10, velocidad del viento y temperatura. Para ello, se asumen las siguientes estructuras funcionales para las correspondientes funciones de enlace:

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + f(t_i), \quad h(\delta_i) = \mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\alpha} + f^*(t_i), \quad (i = 1, 2, \dots, 153).$$

La función  $g(\cdot)$  es la función de enlace del componente de media, definida en la sección 2.3. El vector de parámetros  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^\top$  corresponde al componente paramétrico, mientras que  $f(\cdot)$  representa la función suave asociada a la variable continua velocidad del viento  $t_i$ . Para el componente de precisión, se considera la función de enlace  $h(\cdot)$ , también definida en la Sección 2.3, donde  $\mathbf{z}_i$  representa el vector de covariables correspondiente a la  $i$ -ésima medición de MP10,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top$  es un vector de parámetros, y  $f^*(\cdot)$  es la función suave asociada a la variable continua temperatura  $t_i$ .

Se aplica el algoritmo iterativo descrito en la Sección 4.4 para estimar los parámetros de suavizamiento  $\lambda$  y  $\lambda^*$  de los componentes no paramétrico, obteniéndose el estimador  $\widehat{\lambda}_1 = 0.7$  y  $\widehat{\lambda}_1^* = 0.9$ . Para estimar los parámetros de los componentes paramétricos del modelo, se maximiza la función de log-verosimilitud penalizada, como se describe en la Sección 2.4. Los estimadores de máxima verosimilitud penalizada obtenidos para los vectores de parámetros son:

Parámetro	Estimación	Error estándar	p-valor
$\hat{\beta}_1$	-9.225822	0.001388817	< 0.00001
$\hat{\beta}_2$	0.556225	$2.648415 \times 10^{-5}$	< 0.00001
$\hat{\alpha}_1$	-1.6688346	0.000653432	< 0.00001
$\hat{\alpha}_2$	0.9453671	0.0002562161	< 0.00001

Cuadro 4.2: Estimaciones de los parámetros, errores estándar y  $p$ -valores.

Para comprobar que el modelo propuesto es adecuado, se verifica que los coeficientes estimados  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  son estadísticamente significativos al nivel del 5 %, ya que sus respectivos  $p$ -valores son cercanos a cero, lo cual concuerda con las relaciones observadas previamente en el análisis exploratorio. En consecuencia, se concluye que el componente paramétrico especificado es adecuado para describir la media de la variable de respuesta MP2.5.

Como parte del análisis del modelo propuesto, es relevante examinar el comportamiento de las funciones suaves  $f(t_i)$  y  $f^*(t_i)$ , estimadas para las covariables continuas: velocidad del viento y temperatura, respectivamente. Estas funciones permiten capturar relaciones no lineales entre las covariables y los componentes del modelo. En particular, la función  $f(t_i)$  forma parte del componente de media del modelo, mientras que  $f^*(t_i)$  está asociada al componente de precisión, permitiendo modelar la heterocedasticidad presente en los datos. A continuación, se presentan los gráficos correspondientes a ambas funciones suaves estimadas contaminación atmosférica durante el período de estudio.

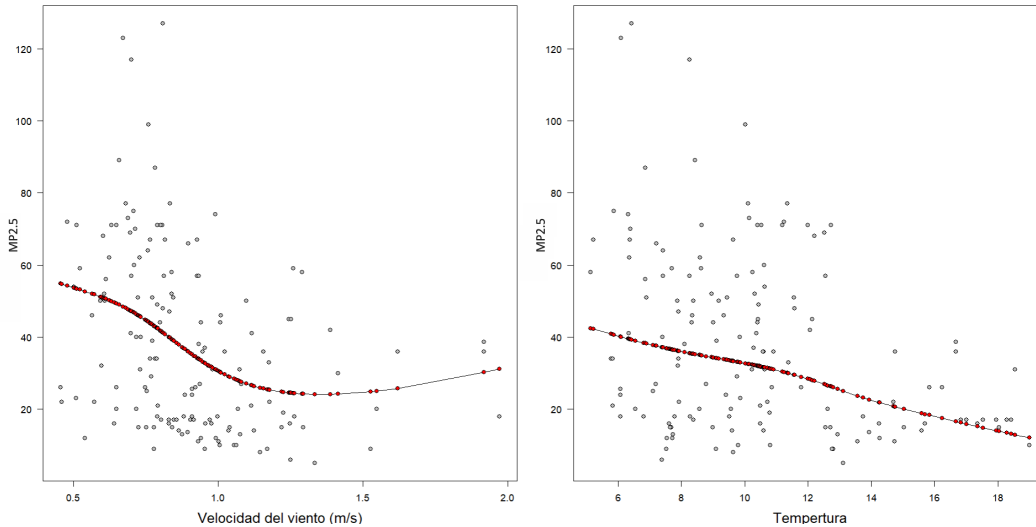


Figura 4.4: Funciones suaves estimadas para velocidad del viento y temperatura.

La Figura 4.4 presenta las funciones suaves estimadas correspondientes a los efectos no paramétricos incluidos en el modelo. La gráfica de la izquierda representa el efecto de la velocidad del viento  $t_i$  en el componente de la media, mientras que la gráfica de la derecha representa el efecto de la temperatura  $t_i^*$  en el componente de precisión.

En el primer gráfico, se observa que la velocidad del viento tiene un efecto no lineal negativo sobre los concentraciones de MP2.5, con una clara tendencia decreciente. Esto indica que, generalmente, a mayor velocidad del viento, menor concentración de MP2.5, lo cual tiene relación con el fenómeno físico de dispersión de contaminantes atmosféricos por efecto del viento.

En el segundo gráfico, se aprecia el efecto de la temperatura sobre la precisión del modelo. Se observa una tendencia negativa, lo que sugiere que a medida que aumenta la temperatura, disminuye la dispersión de los residuos. Esto puede interpretarse como una mayor estabilidad en las observaciones para valores altos de temperatura, fenómeno esperable dado que condiciones térmicas estables pueden regular las emisiones y la acumulación de partículas contaminantes.

Se logra visualizar que ambas funciones permiten capturar relaciones no lineales entre las covariables meteorológicas y los parámetros del modelo. Adicionalmente, no se presentan saltos ni quiebres pronunciados.

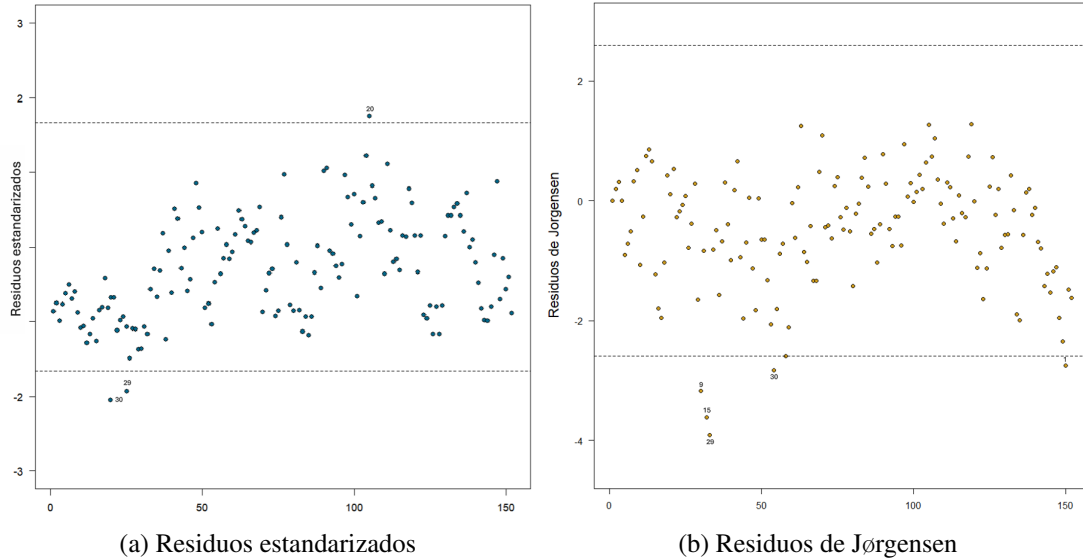


Figura 4.5: Gráficos residuos del modelo.

En la Figura 4.5 se presentan los gráficos de residuos estandarizados (a) y residuos de Jørgensen (b), los cuales permiten evaluar el ajuste del modelo propuesto y detectar posibles observaciones atípicas.

En el gráfico (a), se observa que la mayoría de los residuos estandarizados se encuentran dentro del rango aceptable de  $[-2, 2]$ , sin evidenciar patrones sistemáticos, lo que sugiere un ajuste adecuado del modelo en términos generales. Sin embargo, se identifican algunas observaciones que superan la línea inferior, las cuales podrían estar asociadas a eventos puntuales de la variable respuesta. Por otro lado, el gráfico (b) muestra los residuos de Jørgensen, definidos en Jørgensen, (1987), cuya dispersión es algo mayor en comparación con los residuos estandarizados, destacándose algunas observaciones por debajo de la línea inferior de  $-2$ . Esta diferencia sugiere una mayor sensibilidad de los residuos de Jørgensen frente a ciertas observaciones.

Adicionalmente, la comparación entre los residuos estandarizados y los residuos de Jørgensen aporta evidencia empírica que respalda la hipótesis de heterocedasticidad en la variable respuesta. La mayor dispersión observada en los residuos de Jørgensen para ciertos rangos de las observaciones sugiere que la variabilidad de MP2.5 no es constante a lo largo del dominio de los predictores, sino que depende de las condiciones meteorológicas y del nivel de la respuesta. Este comportamiento motiva la necesidad de modelar explícitamente el parámetro de precisión del modelo, permitiendo capturar adecuadamente cambios en la varianza condicional y mejorar la calidad del ajuste. En este contexto, la inclusión de una estructura para la precisión resulta fundamental para describir de manera más realista el proceso generador de los datos, especialmente en presencia de episodios de alta contaminación.

Asimismo, se identifican algunas observaciones que exceden las bandas de referencia en ambos gráficos de residuos, las cuales podrían corresponder a eventos atípicos o potencialmente influyentes. Para un análisis más detallado de estas observaciones, resulta pertinente emplear herramientas de diagnóstico adicionales, tales como el comando `identify()`, que permite visualizar y examinar los valores específicos asociados a dichos puntos. Este análisis complementario contribuiría a evaluar su impacto sobre las estimaciones del modelo y a determinar si corresponden a fenómenos reales.

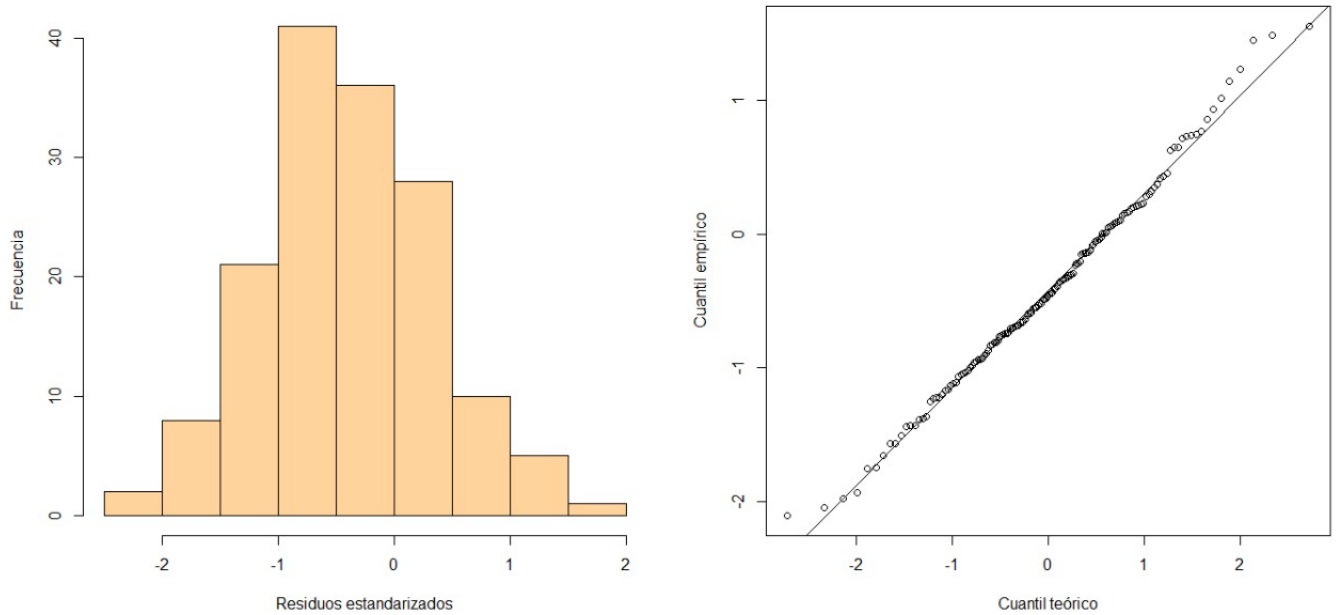


Figura 4.6: Histograma y QQplot de los residuos estandarizados.

En la Figura 4.6 se presentan el histograma y el gráfico Q-Q de los residuos estandarizados con el objetivo de evaluar el supuesto de normalidad. El histograma muestra una distribución aproximadamente simétrica y centrada en cero, aunque con una leve asimetría hacia la izquierda. Esta forma es consistente con una distribución normal, sin evidencias de colas. Por otra parte, el gráfico Q-Q revela que los cuantiles empíricos de los residuos se alinean de manera razonable con los cuantiles teóricos de una normal estándar, especialmente en la parte central de la distribución. No obstante, se observa una ligera desviación en los extremos superiores, lo cual podría estar asociado a la presencia de observaciones atípicas. Con el fin de complementar este análisis, se aplicó el test de Kolmogorov–Smirnov con corrección de Lilliefors sobre los residuos estandarizados, obteniéndose un  $p$ -valor de 0.216. Dado que este valor es superior al nivel de significancia del 5 %, no se rechaza la hipótesis nula de normalidad, lo que respalda formalmente la validez del supuesto de normalidad de los residuos. En conjunto, el análisis gráfico y el contraste estadístico sugieren que la aproximación normal resulta razonable para los residuos del modelo, permitiendo sustentar el análisis realizado.

## 4.4. Análisis de Influencia Local

Las técnicas de influencia local para el modelo semiparamétrico BSR con parámetro de precisión variando propuestas en la Sección 2.3 se presentan gráficamente a continuación

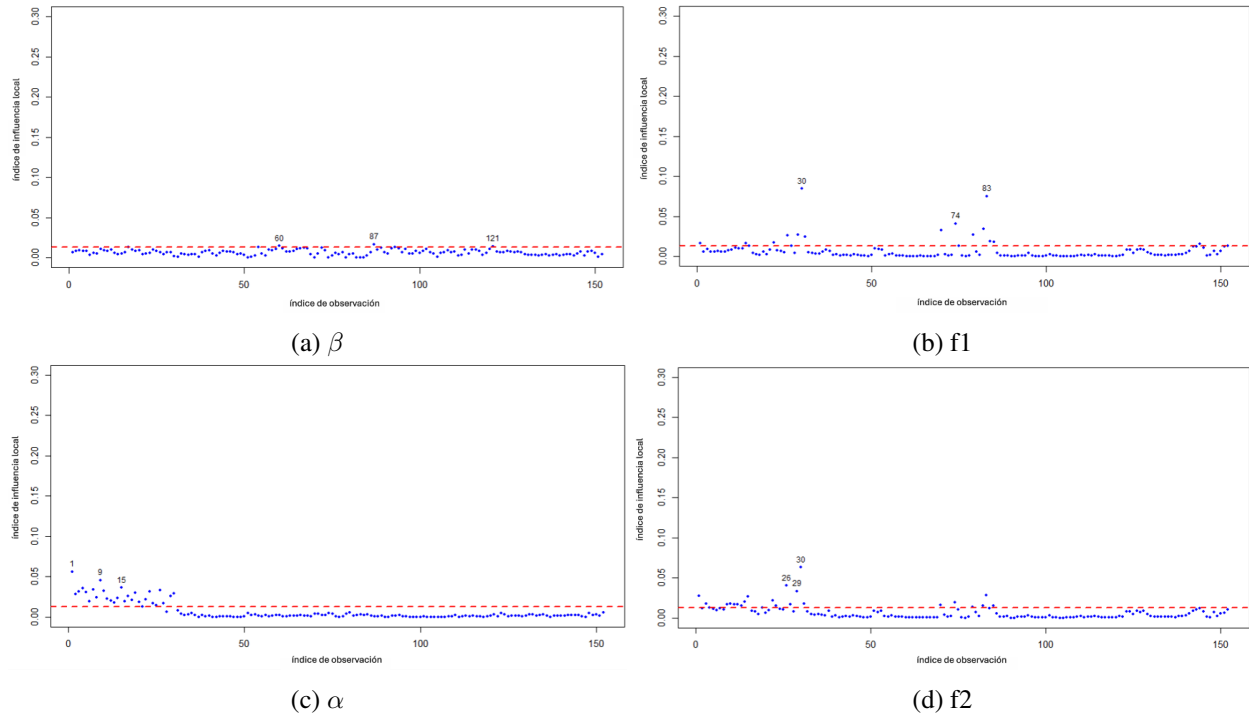


Figura 4.7: Gráficos de índice  $C_i$  para  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $f$  y  $f^*$  bajo el esquema de perturbación de ponderación de casos.

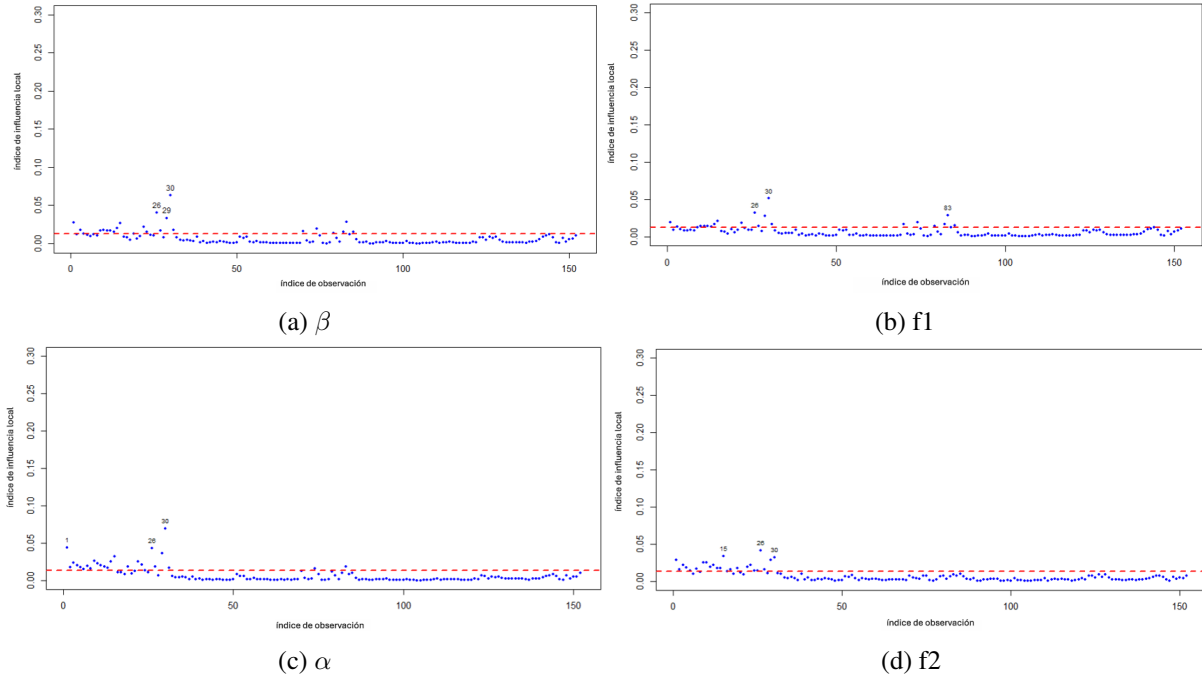


Figura 4.8: Gráficos de índice  $C_i$  para  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $f$  y  $f^*$  bajo el esquema de perturbación de la variable de respuesta.

Las Figuras 4.7 y 4.8 muestran el análisis de influencia local para los esquemas de perturbación por casos y de la variable de respuesta, respectivamente, aplicados a los componentes del modelo. Cada fila corresponde a los efectos en los parámetros del componente de media ( $\beta$  y  $f$ ) y del componente de precisión ( $\alpha$  y  $f^*$ ). En ambos gráficos se incluye una línea roja discontinua que representa el umbral de corte para detectar observaciones potencialmente influyentes. Aquellas observaciones que superan este umbral pueden considerarse como posibles *outliers* en la estimación del parámetro correspondiente.

En el caso de la perturbación por casos se identifican observaciones posiblemente influyentes, tales como la 83, 1, 22, 121, 74 y 30, las cuales son recurrentes en distintos componentes del modelo. Esto refuerza la evidencia de que dichas observaciones podrían ser influyentes para más de un componente del modelo, y por lo tanto deben ser analizadas con mayor detalle.

Por otro lado, en la perturbación de respuesta, se observa que ciertas observaciones, tales como la 30, 29, 1, 3, 22, 26 y 83 presentan valores altos de al menos uno de los componentes, lo que sugiere que su presencia podría afectar de cierta forma la estimación de los parámetros.

En conjunto, este análisis permite diagnosticar qué observaciones ejercen mayor influencia sobre cada uno de los parámetros del modelo, entregando información para evaluar la robustez del mismo frente a datos potencialmente atípicos.

#### 4.4.1. Análisis confirmatorio

A partir de los resultados anteriores, se identificaron un conjunto de observaciones que podrían considerarse influyentes. Con el fin de cuantificar el impacto que estas observaciones tienen sobre los parámetros estimados, se procede a realizar un análisis confirmatorio. Este consiste en eliminar las observaciones identificadas previamente, específicamente los subconjuntos  $\{30\}$ ,  $\{29\}$ ,  $\{26\}$ ,  $\{30, 29\}$ ,  $\{29, 26\}$  y  $\{30, 29, 26\}$  y volver a estimar los parámetros del modelo.

Para evaluar el efecto de estas eliminaciones, se calcularán los cambios relativos (CR) en las estimaciones de los parámetros, así como en sus respectivos errores estándar y  $p$ -valores. La expresión matemática utilizada para calcular el cambio relativo es la siguiente:

$$CR_{\hat{\theta}_{j(i)}} = \left| \frac{\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_{j(i)}}{\hat{\theta}_j} \right| \times 100\% \quad \text{y} \quad CR_{SE(\hat{\theta}_{j(i)})} = \left| \frac{SE(\hat{\theta}_j) - SE(\hat{\theta}_{j(i)})}{SE(\hat{\theta}_j)} \right| \times 100\%,$$

donde  $\hat{\theta}_{j(i)}$  y  $SE(\hat{\theta}_{j(i)})$  denotan las estimaciones de máxima verosimilitud penalizada de  $\theta_j$  y  $SE$  sus correspondientes errores estándar, obtenido después de extraer la observación  $i$ -ésima, para  $j = 1, 2$  y  $i = 1, 2, \dots, 153$ .

Casos eliminados	Estimación	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
Ninguno	$\hat{\theta}$	-	-	-	-
	SE	-	-	-	-
	$p$ -valor	-	-	-	-
{30}	$\hat{\theta}$	2.430801	1.560264	1.874038	8.675556
	SE	0.000144	2.319062	0.000198	7.54124
	$p$ -valor	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
{29}	$\hat{\theta}$	2.672818	9.169814	2.340081	4.955074
	SE	0.000191	2.720661	0.000853	0.000337
	$p$ -valor	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
{26}	$\hat{\theta}$	1.107166	7.296805	2.350814	6.870669
	SE	0.000197	0.225587	2.048961	0.000526
	$p$ -valor	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
{30, 29}	$\hat{\theta}$	1.695619	5.8861	3.292856	2.34522
	SE	0.006713	9.51218	0.000184	0.000369
	$p$ -valor	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
{29, 26}	$\hat{\theta}$	1.84033	4.46931	2.670932	1.35713
	SE	0.003901	5.362958	0.000566	0.000350
	$p$ -valor	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01
{30, 29, 26}	$\hat{\theta}$	3.476363	8.014248	3.153739	1.277435
	SE	0.053332	7.530216	0.001002	0.000213
	$p$ -valor	< 0.01	< 0.01	< 0.01	< 0.01

Cuadro 4.3: Estimaciones de máxima verosimilitud, los correspondientes errores estándar estimados para los casos eliminados indicados, y los respectivos  $p$ -valor.

En el Cuadro 4.3 se presentan las estimaciones de los parámetros del modelo, sus respectivos errores estándar y  $p$ -valores, al eliminar las observaciones 30, 29 y 26, tanto de forma individual como combinada. Se observa que los cambios individuales en las estimaciones de  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  son menores al 1 %, lo cual indica que el componente de media del modelo es bastante robusto frente a estas observaciones. Sin embargo, cuando se eliminan conjuntamente las observaciones 30, 29, 26, el cambio relativo en  $\hat{\beta}_1$  alcanza un 5.3 %, lo que sugiere una mayor sensibilidad acumulada. En cuanto al componente de precisión, se evidencian mayores variaciones, especialmente en las estimaciones de  $\hat{\alpha}_1$  y  $\hat{\alpha}_2$ , donde los cambios relativos superan el 3 %, incluso con combinaciones de sólo dos observaciones (ejemplo 29, 26). Estos resultados indican que la precisión del modelo es más susceptible a la presencia de estas observaciones en comparación con la media. A pesar de estos cambios, los  $p$ -valores asociados a los coeficientes paramétricos se mantienen por debajo de 0.01 en todos los escenarios, lo que indica que las estimaciones continúan siendo estadísticamente significativas al 5 %. Cabe destacar que estas observaciones corresponden a los días 30 de mayo (observación 30), 29 de mayo (observación 29) y 26 de mayo (observación 26) del período GEC 2024 en la comuna de Pudahuel. Estas fechas coinciden con concentraciones elevadas de MP2.5 y podrían estar asociadas a eventos de contaminación atmosférica relevantes, lo que refuerza su impacto detectado en el análisis de influencia. En síntesis, este análisis de diagnóstico basado en el enfoque de la influencia local y los residuos confirman que el modelo semiparamétrico Birnbaum-Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando, presentado en la Subsección 2.4, es adecuado para modelar datos ambientales, incluso si existen valores atípicos y observaciones potencialmente influyentes.

## 7. Conclusión y trabajos futuros

En este trabajo se estudió el modelo semiparamétrico Birnbaum–Saunders reparametrizado con parámetro de precisión variando, extendiendo y generalizando contribuciones previas en la literatura. Este enfoque permitió modelar datos ambientales sin necesidad de realizar transformaciones sobre la variable de respuesta, conservando así la interpretabilidad original de las concentraciones contaminantes. La distribución Birnbaum–Saunders demostró ser particularmente adecuada en este contexto, debido a sus propiedades asimétricas y flexibilidad frente a datos reales.

Se desarrolló una metodología de estimación basada en la maximización de la log-verosimilitud penalizada, utilizando algoritmos como Scoring de Fisher y Backfitting ponderado. Asimismo, se implementó un completo análisis de diagnóstico, incluyendo gráficos de residuos y técnicas de influencia local bajo diferentes esquemas de perturbación, lo que permitió identificar observaciones potencialmente influyentes y evaluar la robustez del modelo.

Un aspecto destacable del modelo propuesto es su capacidad para modelar simultáneamente los componentes de media y precisión de la variable de interés, otorgándole mayor flexibilidad y precisión inferencial, lo cual resulta especialmente relevante en aplicaciones ambientales donde la variabilidad no es constante.

Finalmente, la aplicación del modelo a datos reales de contaminación atmosférica en la comuna de Pudahuel, Región Metropolitana, Chile evidenció su buen desempeño, confirmando su utilidad práctica para el análisis de fenómenos ambientales.

Como líneas futuras de investigación, se propone extender este enfoque a contextos más complejos, tales como modelos con coeficientes parcialmente variantes, estructuras espaciales o temporales, o considerar penalizaciones alternativas. En conclusión, el modelo propuesto representa una herramienta estadística robusta y versátil, con potencial de aplicación en diversas áreas donde se requiere modelar simultáneamente la media y la variabilidad de una variable de interés.

## Anexos

```
datos <- read_excel("")
summary(datos$MP2.5)
sd(datos$MP2.5)
cv(datos$MP2.5)

Y <- datos$MP2.5
L1 <- datos$MP10
L1 <- matrix(L1, nrow = length(L1), ncol = 1)
L2 <- datos$TEMPERATURA
L2 <- matrix(L2, nrow = length(L1), ncol = 1)
n <- nrow(Y)
W <- cbind(rep(1,n),L1)
WT <- t(W)
p <- ncol(W)
X1 <- datos$VIENTO
X1 <- matrix(X1, nrow = length(X1), ncol = 1)

X2 <- datos$TEMPERATURA
X2 <- matrix(X2, nrow = length(X2), ncol = 1)
cor(datos$MP10, datos$MP2.5)

hist(Y, breaks = 30, col = "lightblue", probability = TRUE,
main = "Histograma de PM2.5", xlab = "PM2.5")
lines(density(Y, na.rm = TRUE), col = "red", lwd = 2)
par(mfrow = c(1, 2))
plot(datos$PM10, datos$MP2.5, col="orange",pch=20, cex=1.5, xlab = "Concentración MP10 (a)", ylab = "Concentraci?n MP 2.5")
plot(datos$VIENTO, datos$PM2.5, col="deeppink",pch=20, cex=1.5, xlab = "Velocidad del viento (b) ", ylab = "Concentraciones MP 2.5")

par(mfrow = c(2, 2))
plot(datos$MP10, datos$MP2.5, col="orange",pch=20, cex=1.5, xlab = "Concentración MP10 (a)", ylab = "Concentración MP 2.5")
plot(datos$VIENTO, datos$MP2.5, col="deeppink",pch=20, cex=1.5, xlab = "Velocidad del viento (b) ", ylab = "Concentración MP 2.5")
plot(datos$TEMPERATURA, datos$MP2.5, col="green",pch=20, cex=1.5, xlab = "Temperatura ambiente (c)", ylab = "Concentración MP 2.5")
plot(datos$HUMEDAD, datos$MP2.5, col="blue",pch=20, cex=1.5, xlab = "Humedad relativa del aire (d) ", ylab = "Concentración MP 2.5")

#Matriz que contiene los regresores lineales#
Z <- cbind(rep(1,n),L2)
ZT <- t(Z)
D.X1 <- unique(X1)
T1 <- matrix(sort(D.X1), nrow = nrow(D.X1), ncol = 1)

#Dimensiones#
k1 <- nrow(X1)
r1 <- nrow(T1)

D.X2 <- unique(X2)
T2 <- matrix(sort(D.X2), nrow = nrow(D.X2), ncol = 1)

#Matriz Q1#
h1 <- matrix(numeric(r1-1), nrow = (r1-1), ncol = 1)

for(i in 1:(r1-1)){
h1[i,1] <- T1[i+1,1] - T1[i,1]
}

Q1 <- matrix(0, nrow = r1, ncol = (r1-1), byrow = TRUE)

for(i in 1:r1){
for(j in 2:(r1-1)){
if(abs(i-j)<2){
Q1[j-1,j] <- solve(h1[j-1,1])
Q1[j,j] <- -(solve(h1[j-1,1]) + solve(h1[j,1]))
Q1[j+1,j] <- solve(h1[j,1])
}else Q1[i,j] <- 0
}
}

Q1 <- Q1[1:r1,2:(r1-1)]
Q1 <- matrix(Q1, nrow = r1, ncol = (r1-2))
Q1T <- t(Q1)

#Matriz K1#
R1 <- matrix(0, nrow = (r1-1), ncol = (r1-1), byrow = TRUE)

for(i in 2:(r1-1)){
for(j in 2:(r1-1)){
if(abs(i-j) < 2){
R1[i,i] <- (1/3)*(h1[i-1,1] + h1[i,1])
if(i < (r1-1)){
R1[i,i+1] <- (1/6)*h1[i,1]

```

```

R1[i+1,i] <- (1/6)*h1[i,1]
}
}else R1[i,j] <- 0
}
}

R1 <- R1[2:(r1-1),2:(r1-1)]
R1 <- matrix(R1, nrow = (r1-2), ncol = (r1-2))
R1I <- solve(R1)

K1 <- Q1%*%R1I%*%Q1T

#Matriz N1#
N1 <- matrix(1,nrow = k1, ncol=r1, byrow = TRUE)

for (i in 1:k1){
  for(j in 1:r1){
    if(X1[i,1] == T1[j,1]){
      N1[i,j] <- 1
    }else N1[i,j] <- 0
  }
}
N1T <- t(N1)

X2 <- matrix(X2, nrow = length(X2), ncol = 1)
D.X2 <- unique(X2)
T2 <- matrix(sort(D.X2), nrow = nrow(D.X2), ncol = 1)

#Dimensiones#
k2 <- nrow(X2)
r2 <- nrow(T2)

#Matriz Q2#
h2 <- matrix(numeric(r2-1), nrow = (r2-1), ncol = 1)

for(i in 1:(r2-1)){
  h2[i,1] <- T2[i+1,1] - T2[i,1]
}

Q2 <- matrix(0, nrow = r2, ncol = (r2-1), byrow = TRUE)

for(i in 1:r2){
  for(j in 2:(r2-1)){
    if(abs(i-j)<2){
      Q2[j-1,j] <- solve(h2[j-1,1])
      Q2[j,j] <- -(solve(h2[j-1,1]) + solve(h2[j,1]))
      Q2[j+1,j] <- solve(h2[j,1])
    }else Q2[i,j] <- 0
  }
}

Q2 <- Q2[1:r2,2:(r2-1)]
Q2 <- matrix(Q2, nrow = r2, ncol = (r2-2))
Q2T <- t(Q2)

#Matriz K1#
R2 <- matrix(0, nrow = (r2-1), ncol = (r2-1), byrow = TRUE)

for(i in 2:(r2-1)){
  for(j in 2:(r2-1)){
    if(abs(i-j) < 2){
      R2[i,i] <- (1/3)*(h2[i-1,1] + h2[i,1])
    }
    if(i < (r2-1)){
      R2[i,i+1] <- (1/6)*h2[i,1]
      R2[i+1,i] <- (1/6)*h2[i,1]
    }
  }else R2[i,j] <- 0
}
}

R2 <- R2[2:(r2-1),2:(r2-1)]
R2 <- matrix(R2, nrow = (r2-2), ncol = (r2-2))
R2I <- solve(R2)

K2 <- Q2%*%R2I%*%Q2T
\remove{text}
#Matriz N2#
N2 <- matrix(1,nrow = k2, ncol=r2, byrow = TRUE)

```

```

for (i in 1:k2){
for(j in 1:r2){
if(X2[i,1] == T2[j,1]){
N2[i,j] <- 1
}else N2[i,j] <- 0
}
}
N2T <- t(N2)

#Vectores#
V1 <- matrix(rep(1,r1), nrow = r1, ncol = 1)
V1T <- t(V1)

#Matrices de unos en la diagonal principal#
Jn <- diag(n)
Jr1 <- diag(r1)

lambda1 <- 0.1
lambda2 <- 2.3

#Estimacion de los beta y F#
F1_0 <- solve(N1T**N1 + lambda1*K1)**N1T**Y #F1
F2_0 <- solve(N2T**N2 + lambda2*K2)**N2T**Y #F2

ybar <- mean(Y)

#Grados de libertad
sum( diag( N1**solve(N1T**N1 + (lambda1*K1))**N1T ) )
sum( diag( N2**solve(N2T**N2 + (lambda2*K2))**N2T ) )

vart = (n / (n - 1)) * var(Y)
vart = vart[1,1]

beta_0 <- solve(WT**W)**WT**Y #W = X
alfa_0 <- solve(ZT**Z)**ZT**Y #Z = Z
alfa_i <- alfa_0
f_i2 <- F2_0

conteo4 <- 0
I0 <- matrix(0, nrow = n, ncol = 1)
tau_i <- (Z**alfa_i) + (N2**f_i2)
tau <- tau_i

Betas <- beta_0
F1 <- F1_0

mu0 <- (W**Betas) + (N1**F1)
delta_0 <- (Z**alfa_0) + (N2**F2_0)

L_i <- sum( (delta_0/2) - ((log(delta_0+1))/2) - ((log(mu0))/2) - ((3*log(Y))/2) + (log((delta_0*Y)+Y+(delta_0*mu0))) - ((Y*(delta_0+1))/(4*mu0)) - ((
conteo3 <- 0
NORMA3 <- 1000
epsilon3 <- 0.01

while (NORMA3 > epsilon3){

beta_ant <- Betas
f1_ant <- F1

conteo1 <- 0
NORMA <- 1000
epsilon <- 0.001

while (NORMA > epsilon) {
if(conteo1 > 0){
beta_i <- Betas
f_i1 <- F1
mu0 <- (W**Betas) + (N1**F1)
delta_0 <- (Z**alfa_i) + (N2**f_i2)

for (k in 1:n) {

f.bs0 <- function(x){
( sqrt(delta_0[k,1]+1)*(exp(1)^(delta_0[k,1]/2)) ) / (4*sqrt(pi*ybar)*(x^(3/2))) ) * ( ( x + ((delta_0[k,1]*ybar)/(delta_0[k,1]+1)) ) ^ (3) ) *
( exp(1)^(-(delta_0[k,1]/4)*( ((delta_0[k,1]+1)*x)/(delta_0[k,1]*ybar) + ((delta_0[k,1]*ybar)/((delta_0[k,1]+1)*x)) ) ) )
}
integral0 <- integrate(f.bs0, lower = 0, upper = Inf)
I0[k,1] <- integral0$value
}

a0 <- matrix(1,nrow=n,ncol=1)
Da0 <- diag(as.vector(a0))
b <- matrix(rep(1,n), nrow = n, ncol = 1)
v0 <- ( (delta_0*(a0^2)) / ((2*(mu0^2))) ) + ( ((delta_0^2)*(a0^2)) / ((delta_0+1)^2) ) * I0
b0 <- (1/2) - (1/(2*(delta_0+1))) + ((Y+ mu0)/(delta_0*Y + Y + delta_0*mu0)) - (Y/(4*mu0)) - ((delta_0*(delta_0+2)*mu0)/(4*((delta_0+1)^2)*Y)) #MIA REV
Dv0 <- diag(as.vector(v0))
Dva0 <- solve(Dv0)**Da0
S0 <- ( ( 1) / (2*mu0*(delta_0+1)) ) + ( (delta_0*mu0) / ((delta_0+1)^3) ) * I0 ) * a0 * b
Ds0 <- diag(as.vector(S0))

```

```

Dvs0 <- solve(Dv0)%*%Ds0
mu.ast <- 1/(2*mu0)
Y.ast.mu <- ( delta_0/((delta_0*Y) + Y + (delta_0*mu0)) ) + ( (Y*(delta_0+1))/(4*(mu0)^2) ) - ( (delta_0^2)/(4*Y*(delta_0+1)) ) #-> Funciones scores
eta_i <- (W%*%Betas) + (N1%*%F1)

if(conteo1 <= 0){
Betas <- solve(WT%*%Dv0%*%W)%*%WT%*%Dv0%*%(Dva0%*%(Y.ast.mu-mu.ast) + eta_i - N1%*%F1)}else{
Betas <- solve(WT%*%Dv0%*%W)%*%WT%*%Dv0%*%(Dva0%*%(Y.ast.mu-mu.ast) + eta_i + Dvs0%*%tau_i - Dvs0%*%tau - N1%*%F1) }
Betas
if(conteo1 <= 0){
F1 <- solve(N1T%*%Dv0%*%N1 + (lambda1*K1))%*%N1T%*%Dv0%*%(Dva0%*%(Y.ast.mu-mu.ast) + eta_i - W%*%Betas)}else{
F1 <- solve(N1T%*%Dv0%*%N1 + (lambda1*K1))%*%N1T%*%Dv0%*%(Dva0%*%(Y.ast.mu-mu.ast) + eta_i + Dvs0%*%tau_i - Dvs0%*%tau - W%*%Betas)}

if(conteo1 > 0){
NORMA.beta.dif <- sqrt( t(Betas - beta_i)%*%(Betas - beta_i) )
NORMA.f1.dif <- sqrt( t(F1 - f_i1)%*%(F1 - f_i1) )
NORMA.beta <- sqrt( t(beta_i)%*%beta_i )
NORMA.f1 <- sqrt( t(f_i1)%*%f_i1 )
NORMA <- (NORMA.beta.dif + NORMA.f1.dif)/(NORMA.beta + NORMA.f1)
}

beta_i <- Betas
f_i1 <- F1

conteo1 <- conteo1 + 1

}

mu <- (W%*%Betas) + (N1%*%F1)
eta <- (W%*%Betas) + (N1%*%F1)
eta_ant <- (W%*%beta_ant) + (N1%*%f1_ant)

Alfas <- alfa_0
F2 <- F2_0

epsilon2 <- 0.001
conteo2 <- 0
NORMA2 <- 1000

while (NORMA2 > epsilon2) {
delta_0 <- (Z%*%alfa_i) + (N2%*%f_i2)
for (k in 1:n) {

f.bs0 <- function(x){
( (sqrt(delta_0[k,1]+1)*(exp(1)^(delta_0[k,1]/2)))/(4*sqrt(pi*ybar)*(x^(3/2))) ) * ( (x + ((delta_0[k,1]*ybar)/(delta_0[k,1]+1)))^(3) ) *
exp(1)^(-(delta_0[k,1]/4)*((delta_0[k,1]+1)*x)/(delta_0[k,1]*ybar) + ((delta_0[k,1]*ybar)/((delta_0[k,1]+1)*x))) ) )
}
integral0 <- integrate(f.bs0, lower = 0, upper = Inf)
I0[k,1] <- integral0$value
}

b <- matrix(rep(1,n), nrow = n, ncol = 1)
Db0 <- diag(as.vector(b))

u0 <- ( ( (delta_0^2) + (3*delta_0) + 1 ) / ( 2*(delta_0^2)*((delta_0+1)^2) ) ) + ( (mu^2) / ((delta_0+1)^4) ) * I0 ) * b^2
Du0 <- diag(as.vector(u0))
Dub0 <- solve(Du0)%*%Db0

Dus0<-solve(Du0)%*%Ds0

delta.ast <- -(delta_0)/(2*(delta_0+1))

Y.ast.delta <- ( (Y + mu)/((delta_0*Y) + Y + (delta_0*mu0)) ) - (Y/(4*mu)) - ( (delta_0*(delta_0+2)*mu)/(4*((delta_0+1)^2)*Y) )
tau_i <- (Z%*%Alfas) + (N2%*%F2)

if(conteo2 <= 0){
Alfas <- solve(ZT%*%Du0%*%Z)%*%ZT%*%Du0%*%(Dub0%*%(Y.ast.delta-delta.ast) + tau_i - N2%*%f_i2)}else{
Alfas <- solve(ZT%*%Du0%*%Z)%*%ZT%*%Du0%*%(Dub0%*%(Y.ast.delta-delta.ast) + tau_i + Dus0%*%eta_ant - Dus0%*%eta - N2%*%f_i2)}

if(conteo2 <= 0){
F2 <- solve(N2T%*%Du0%*%N2 + (lambda2*K2))%*%N2T%*%Du0%*%(Dub0%*%(Y.ast.delta-delta.ast) + tau_i - Z%*%Alfas )}else{
F2 <- solve(N2T%*%Du0%*%N2 + (lambda2*K2))%*%N2T%*%Du0%*%(Dub0%*%(Y.ast.delta-delta.ast) + tau_i + Dus0%*%eta_ant - Dus0%*%eta - Z%*%Alfas) }

if(conteo2 > 0){

NORMA.alfa.dif <- sqrt( t(Alfas - alfa_i)%*%(Alfas - alfa_i) )
NORMA.alfa.dif
NORMA.f2.dif <- sqrt( t(F2 - f_i2)%*%(F2 - f_i2) )
NORMA.alfa <- sqrt( t(alfa_i)%*%alfa_i )

NORMA.f2 <- sqrt( t(f_i2)%*%f_i2 )
NORMA2 <- (NORMA.alfa.dif + NORMA.f2.dif)/(NORMA.alfa + NORMA.f2)

}

alfa_i <- Alfas
f_i2 <- F2

```

```

conteo2 <- conteo2 + 1
}

tau <- (Z**%Alfas) + (N2**%F2)

delta <- (Z**%Alfas) + (N2**%F2)

L <- sum( (delta/2) - ((log(delta+1))/2) - ((log(mu))/2) - ((3*log(Y))/2) + (log((delta*Y)+Y+(delta*mu))) - ((Y*(delta+1))/(4*mu)) - (((delta^2)*mu)/(4*mu)) )
NORMA.vero.dif <- sqrt( t(L - L_i)**%(L - L_i) )
NORMA.vero <- sqrt( t(L_i)**%L_i )
NORMA3 <- (NORMA.vero.dif)/(NORMA.vero)
L_i <- L
conteo3 <- conteo3 + 1
}

#Estimaciones#
Betas
Alfas
F1
F2

#Grados de libertad#
sum(diag(N1**%solve(N1T**%Dv0**%N1 + (lambda1*K1))**%N1T**%Dv0))
sum(diag(N2**%solve(N2T**%Du0**%N2 + (lambda2*K2))**%N2T**%Du0))

#Funciones
par(mfrow = c(1, 2))

#1

plot(X1,Y,
type="p",
col="black",
bg="gray",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex.main=1,
xlab="Velocidad del viento (m/s)",
ylab="MP2.5",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

lines(T1,F1, type = "o", col = "black", bg = "red", pch = 21)

#2

plot(X2,Y,
type="p",
col="black",
bg="gray",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex.main=1,
xlab="Tempertura",
ylab="MP2.5",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

lines(T2,F2, type = "o", col = "black", bg = "red", pch = 21)

Yn <- (Y - W**%beta_i)
plot(X1, Yn,
type="p",
col="black",
bg="tomato",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex.main=1,
xlab="",
ylab="",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)
par(new=TRUE)
plot(T1,f_i1,type="l",ylab="f",xlab="T1_0",main="",axes=F,lwd=2,col="black")

#2

```

```

Yn <- (Y - Z**%alfa_i)
plot(X2, Yn,
type="p",
col="black",
bg="tomato",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex.main=1,
xlab="",
ylab="",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)
par(new=TRUE)
plot(T2, f_i2, type="l", ylab="f", xlab="T2_0", main="", axes=F, lwd=2, col="black")

#Variable respuesta estimada#
Y_e <- W**%beta_i + N1**%f_i1
plot(Y, Y_e,
type="p",
col="black",
bg="aquamarine",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex=1.4,
cex.main=1,
xlab="MP2.5",
ylab="MP2.5 estimado",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=6.1)

#Matriz de informaci?n esperada de Fisher y covarianza#

Kbb <- t(W)**%Dv0**%W
Kbf <- t(W)**%Dv0**%N1
Kbd <- t(W)**%Ds0**%Z
Kbf2 <- t(W)**%Ds0**%N2

Kfb <- t(Kbf)
Kff <- t(N1)**%Dv0**%N1 + lambda1*K1
Kfd <- t(N1)**%Ds0**%Z
Kff2 <- t(N1)**%Ds0**%N2

Kdb <- t(Kbd)
Kdf <- t(Kfd)
Kdd <- t(Z)**%Du0**%Z
Kdf2 <- t(Z)**%Du0**%N2

Kf2b <- t(Kbf2)
Kf2f <- t(Kff2)
Kf2d <- t(Kdf2)
Kf2f2 <- t(N2)**%Du0**%N2 + lambda2*K2

q=2

A1<-cbind(Kbb,Kbf,Kbd,Kbf2)
A2<-cbind(Kfb,Kff,Kfd,Kff2)
A3<-cbind(Kdb,Kdf,Kdd,Kdf2)
A4<-cbind(Kf2b,Kf2f,Kf2d,Kf2f2)

fisher <- rbind(A1,A2,A3,A4)
se.f = sqrt(diag(ginv(fisher)))
length(se.f)
which(fisher < 0, arr.ind = TRUE)

dmu1 <- (tau/(tau*Y + Y + tau*mu)) + ((Y*(tau+1))/(4*(mu^2))) - ((tau^2)/(4*Y*(tau+1))) - (1/(2*mu))
dmu2 <- (1/(2*(mu^2))) - ((tau^2)/((tau*Y + Y + tau*mu)^2)) - ((Y*(tau+1))/(2*(mu^3)))

ci <- numeric(n)
for (i in 1:n) {

ci[i] <- dmu2[i]*(a0[i]^2) + dmu1[i]*t(a0[i])*a0[i]

}

delta_ikro <- matrix(0, nrow = n, ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:n) {

delta_ikro[i,i] <- 1

}

Dc <- matrix(0, nrow = n, ncol = n, byrow = TRUE)

```

```

for (i in 1:n) {
for (j in 1:n) {

Dc[j,i] <- ci[i]*delta_ikro[j,i]

}
}

dm <- matrix(1,nrow=n,ncol=1)
dmu00 <- (Y/(tau*Y + Y + tau*mu0)^2)+((Y/(4*(mu0^2))))-(((tau)*(tau+2))/(4*Y*(tau+1)^2))
Dmu00 <- diag(as.vector(dmu00))
d-del101 <- ((tau + mu0)/(tau*Y + Y + tau*mu0))-((Y)/(4*(mu0^2)))-((tau*mu0*(tau+2))/(4*Y*(tau+1)^2))+((tau)/(2*(tau+1)))
d-del102 <- (1/(2*(tau + 1)^2))-(((Y + mu0)^2)/((tau*Y + Y + tau*mu0)^2))-((mu0)/(2*Y*(tau + 1)^3))
c=2
bi <- numeric(c)
for (i in 1:c) {

ci[i] <- d-del102[i]*(b0[i]^2) + d-del101[i]*t(b0[i])*b0[i]

}

delta_ikro <- matrix(0,nrow = n,ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:c) {

delta_ikro[i,i] <- 1

}

Wc <- matrix(0, nrow = n, ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:n) {
for (j in 1:n) {

Wc[j,i] <- bi[i]*delta_ikro[j,i]

}
}

# Bloques de la matriz Hessiana
Kbb <- t(W) %*% Dv0 %*% W
Kbf <- t(W) %*% Dv0 %*% N1
Kbd <- t(W) %*% Ds0 %*% Z
Kbf2 <- t(W) %*% Ds0 %*% N2

Kfb <- t(Kbf)
Kff <- t(N1) %*% Dv0 %*% N1 + lambda1 * K1
Kfd <- t(N1) %*% Ds0 %*% Z
Kff2 <- t(N1) %*% Ds0 %*% N2

Kdb <- t(Kbd)
Kdf <- t(Kfd)
Kdd <- t(Z) %*% Du0 %*% Z
Kdf2 <- t(Z) %*% Du0 %*% N2

Kf2b <- t(Kbf2)
Kf2f <- t(Kf2)
Kf2d <- t(Kdf2)
Kf2f2 <- t(N2) %*% Du0 %*% N2 + lambda2 * K2

# Construcción de la matriz Hessiana
A1 <- cbind(Kbb, Kbf, Kbd, Kbf2)
A2 <- cbind(Kfb, Kff, Kfd, Kff2)
A3 <- cbind(Kdb, Kdf, Kdd, Kdf2)
A4 <- cbind(Kf2b, Kf2f, Kf2d, Kf2f2)

hessiana <- rbind(A1, A2, A3, A4)
covarianza <- solve(hessiana)
se.f <- sqrt(diag(covarianza)) # Errores estándar

zstatbeta = beta_i / se.f[1:p]
pvalorbeta = 2 * pnorm(abs(zstatbeta), lower.tail = F)
desv.e <- se.f[(r1 + p + 1):(r2 + r1 + p)]

#Bandas de confianza para las funciones suaves F1 y F2#
SD_BETA <- se.f[1:p]
SD_BETA <- se.f[1:q]

SD_F <- se.f[(r1+q):(r1+p+q)]
SD_F2 <- desv.e[(r1+p+1):(r2+r1+p)]

#SD_fi <- desv.e[r2+r1+p+1]
SD_fi <- se.f[p+q]
se.f[3]

Band1_F <- f_i1 + 2*SD_F
Band2_F <- f_i1 - 2*SD_F

mi <- min(f_i1) -0.5
ma <- max(f_i1) +0.5

#(2) #Bandas de confianza para las funciones suaves F1 y F2#
SD_BETA <- se.f[1:p]

```

```

SD_BETA <- se.f[1:q]

SD_F <- se.f[(r1+q+q):(r1+p+q)]
SD_F2 <- desv.e[(r1+p+1):(r2+r1+p)]

#SD_fi <- desv.e[r2+r1+p+1]
SD_fi <- se.f[p+q]
se.f[3]

Band1_F <- f_i2 + 2*SD_F
Band2_F <- f_i2 - 2*SD_F

mi <- min(f_i2) -0.5
ma <- max(f_i2) +0.5
# Calcular las bandas de confianza del 95%
upper_band_F1 <- fit_F1 + 1.96 * se_F1
lower_band_F1 <- fit_F1 - 1.96 * se_F1

upper_band_F2 <- fit_F2 + 1.96 * se_F2
lower_band_F2 <- fit_F2 - 1.96 * se_F2

plot(x, fit_F1, type = "l", col = "blue", ylim = range(c(lower_band_F1, upper_band_F1)))
lines(x, upper_band_F1, col = "red", lty = 2)
lines(x, lower_band_F1, col = "red", lty = 2)

lines(x, fit_F2, col = "green") # Para la segunda función
lines(x, upper_band_F2, col = "orange", lty = 2)
lines(x, lower_band_F2, col = "orange", lty = 2)

par(mfrow = c(1, 1))
plot(T2,F2,type='l',col="black", ylim=c(mi,ma),sub="", xlab = "Viento", ylab="f(Viento)", las=1, main="",cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)
par(new=TRUE)
plot(T2,Band1_F,type='l',col="red",ylim=c(mi,ma), xlab = "", ylab="",axes = F)
par(new=TRUE)
plot(T2,Band2_F,type='l',col="red",ylim=c(mi,ma), xlab = "", ylab="",axes = F)

#Análisis residual
alpha = sqrt(2 / tau)
bet_a = as.vector((tau*mu0) / (tau + 1))

#Residuos estandarizados#

dif = Y - mu0
phi = sqrt(2 * ((tau + 1) ^ 2)) / ((2 * tau) + 5)
raiz = sqrt(2 * mu0 * mu0)
res.est = (((dif)*phi) / raiz) + 1.8
mean(res.est)
sd(res.est)
min(res.est)
max(res.est)

par(mfrow = c(1, 2))

plot(res.est,
type="p",
col="black",
bg="deepskyblue4",
pch=21,
lwd=1,
main="",
sub="(a)",
cex.main=1.4,
xlab="",
ylim=c(-3,3),
ylab="Residuos estandarizados",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

abline(h=2.5*sd(res.est),lwd=1,col="black",lty=2)
abline(h=-2.5*sd(res.est),lwd=1,col="black",lty=2)
#identify(res.est,cex=0.8, n= 4 )

hist(res.est,
col = "gray",
main = "",
sub="(b)",
xlim = c(-2,2),
xlab = "Residuals",
ylab = "Frequency")

qqnorm(res.est,col="black", xlab="Cuantil te?rico",sub="(b)", ylab="Cuantil emp?rico", main="")
qqline(res.est,col="black")

vJ = (- 1 / (2 * (mu0 ^ 2))) + (tau ^ 2) / (((Y * tau) + Y + (tau * mu0)) ^ 2) + ((tau + 1) / 2) * (Y / (mu0 ^ 3))
vmu = 1 / (((tau + 1) / tau) * Y + mu0) + (Y * (tau + 1)) / (4 * (mu0 ^ 2)) - ((tau ^ 2) / (4 * tau + 4)) * (1 / Y) - 0.5 / mu0

```

```

rbJ = (vmu / sqrt(vJ))
par(mfrow = c(1, 1))
plot(rbJ,
type="p",
col="black",
bg="goldenrod3",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex.main=1,
sub="(b)",
xlab="",
#ylim=c(-4, 4),
ylab="Residuos de Jorgensen",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

abline(h=2.7,lwd=1,col="black",lty=2)
abline(h=-2.7,lwd=1,col="black",lty=2)

hist(rbJ,
col = "gray",
main = "",
sub="(b)",
xlab = "Residuals",
ylab = "Frequency")

qqnorm(rbJ,col="black",xlab="Theoretical quantile",sub="(b)", ylab="Empirical quantile", main="",cex.lab=1.5, cex.sub=1.4)
qqline(rbJ,col="black")
lillie.test(rbJ)

Kbb <- t(W) %>% Dv0 %>% W
Kbf <- t(W) %>% Dv0 %>% N1
Kbd <- t(W) %>% Ds0 %>% Z
Kbf2 <- t(W) %>% Ds0 %>% N2

Kfb <- t(Kbf)
Kff <- t(N1) %>% Dv0 %>% N1 + lambda1 * K1
Kfd <- t(N1) %>% Ds0 %>% Z
Kff2 <- t(N1) %>% Ds0 %>% N2

Kdb <- t(Kbd)
Kdf <- t(Kfd)
Kdd <- t(Z) %>% Du0 %>% Z
Kdf2 <- t(Z) %>% Du0 %>% N2

Kf2b <- t(Kbf2)
Kf2f <- t(Kff2)
Kf2d <- t(Kdf2)
Kf2f2 <- t(N2) %>% Du0 %>% N2 + lambda2 * K2

q=2

A1<-cbind(Kbb,Kbf,Kbd,Kbf2)
A2<-cbind(Kfb,Kff,Kfd,Kff2)
A3<-cbind(Kdb,Kdf,Kdd,Kdf2)
A4<-cbind(Kf2b,Kf2f,Kf2d,Kf2f2)

fisher <- rbind(A1,A2,A3,A4)
se.f = sqrt(diag(ginv(fisher)))

sum(is.na(A2))

which(fisher < 0, arr.ind = TRUE)

#Matriz hessiana#
dmu1 <- (delta/(delta*Y + Y + delta*mu)) + ((Y*(delta+1))/(4*(mu^2))) - ((delta^2)/(4*Y*(delta+1))) - (1/(2*mu))
dmu2 <- (1/(2*(mu^2))) - ((delta^2)/((delta*Y + Y + delta*mu)^2)) - ((Y*(delta+1))/(2*(mu^3)))

dmu1 <- (tau/(tau*Y + Y + tau*mu)) + ((Y*(tau+1))/(4*(mu^2))) - ((tau^2)/(4*Y*(tau+1))) - (1/(2*mu))
dmu2 <- (1/(2*(mu^2))) - ((tau^2)/((tau*Y + Y + tau*mu)^2)) - ((Y*(tau+1))/(2*(mu^3)))

ci <- numeric(n)
for (i in 1:n) {

ci[i] <- dmu02[i]*(b0[i]^2) + dmu01[i]*t(b0[i])*b0[i]

}

delta_ikro <- matrix(0,nrow = n,ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:c) {

delta_ikro[i,i] <- 1

}

```

```

Dc <- matrix(0, nrow = n, ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:n) {
  for (j in 1:n) {

Dc[j,i] <- ci[i]*delta_ikro[j,i]

  }
}

dm <- matrix(1,nrow=n,ncol=1)
dmu00 <- (Y/(tau*Y + Y + tau*mu0)^2)+(Y/(4*(mu0^2)))-((tau)*(tau+2))/(4*Y*(tau+1)^2)}
Dmu00 <- diag(as.vector(dmu00))

ddel01 <- ((tau + mu0)/(tau*Y + Y + tau*mu0))-((Y)/(4*(mu0^2)))-((tau*mu0*(tau+2))/(4*Y*(tau+1)^2))+((tau)/(2*(tau+1)))
ddel02 <- (1/(2*(tau+ 1)^2))-((Y + mu0)^2)/((tau*Y + Y + tau*mu0 ^2))-((mu0)/(2*Y*(tau +1)^3))

bi <- numeric(c)
for (i in 1:c) {

ci[i] <- ddel02[i]*(b0[i]^2) + ddel01[i]*t(b0[i])*b0[i]

}

delta_ikro <- matrix(0,nrow = n,ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:c) {

delta_ikro[i,i] <- 1

}

Wc <- matrix(0, nrow = n, ncol = n, byrow = TRUE)
for (i in 1:n) {
  for (j in 1:n) {

Wc[j,i] <- bi[i]*delta_ikro[j,i]

  }
}

m <- (Y/((delta*Y + Y + delta*mu)^2)) + (Y/((4*mu)^2)) - ((delta*(delta+2))/(4*((delta+1)^2)*Y))
d <- (1/(2*((delta+1)^2)))-((Y+mu)^2)/((delta*Y + Y + delta*mu)^2)-((mu)/(2*(delta+1)^3)*Y)

m <- (Y/((tau*Y + Y + tau*mu)^2)) + (Y/((4*mu)^2)) - ((tau*(tau+2))/(4*((tau+1)^2)*Y))
d <- (1/(2*((tau+1)^2)))-((Y+mu)^2)/((tau*Y + Y + tau*mu)^2)-((mu)/(2*(tau+1)^3)*Y)

lbb <- WT%*%Dc%*%W
lbd <- WT%*%Da0%*%m
lbf <- WT%*%Dc%*%N
ldb <- t(lbd)
ldd <- sum(d)
lfd <- NT%*%Da0%*%m
ldf <- t(lfd)
lfb <- t(lbf)
lff <- NT%*%Dc%*%N - lambda1*K1

lbb <- WT%*%Dc%*%W
lbd <- WT%*%Dmu00%*%Z
lbf <- WT%*%Dc%*%N

ldb <- t(lbd)
dd <- ZT%*%Wc%*%Z
lfd <- NT%*%Da0%*%m
ldf <- t(lfd)
lfb <- t(lbf)
lff <- NT%*%Dc%*%N - lambda1*K1

l1<-matrix(c(Kbb,Kbd,Kbf), 2, r1+p+q)
l2<-matrix(c(Kdb,Kdd,Kdf), 2, r1+p+q)
l3<-matrix(c(Kfb,Kfd,Kff), r1, r1+p+q)

H <- rbind(l1,l2,l3)
se.h<-sqrt(diag(qinv(H)))
L1 <- -ginv(H)
#Valores p#

zstatbeta = beta_i / se.h[1:p]
pvalorbeta = 2 * pnorm(abs(zstatbeta), lower.tail = F)

#Bandas de confianza para las funciones suaves F1 y F2#
SD_BETA <- se.f[1:p]
SD_BETA <- se.f[1:q]

SD_F <- se.f[(r1+q+q):(r1+p+q)]
SD_F2 <- desv.e[(r1+p+1):(r2+r1+p)]

#SD_fi <- desv.e[r2+r1+p+1]
SD_fi <- se.f[p+q]
se.f[3]

Band1_F <- f_i + 2*SD_F

```

```

Band2_F <- f_i - 2*SD_F

mi<- min(f_i) -0.5
ma <- max(f_i) +0.5

#Bandas de confianza para F1#
plot(T1_0,f_i,type='l',col="black", ylim=c(mi,ma),sub="", xlab = "Viento", ylab="f(Viento)", las=1, main="",cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)
par(new=TRUE)
plot(T1_0,Band1_F,type='l',col="red",ylim=c(mi,ma), xlab = "", ylab="",axes = F)
par(new=TRUE)
plot(T1_0,Band2_F,type='l',col="red",ylim=c(mi,ma), xlab = "", ylab="",axes = F)

#Análisis residual

alpha = sqrt(2 / delta_i)
bet_a = as.vector((delta_i*mu0) / (delta_i + 1))

alpha = sqrt(2 / tau)
bet_a = as.vector((tau*mu0) / (tau + 1))

#Residuos estandarizados#

dif = Y - mu0
phi = sqrt((2 * ((tau + 1) ^ 2)) / ((2 * tau) + 5))
raiz = sqrt(2 * mu0 * mu0)
res.est = ((dif)*phi) / raiz
mean(res.est)
sd(res.est)
min(res.est)
max(res.est)

par(mfrow = c(1, 2))

plot(res.est,
type="p",
col="black",
bg="deepskyblue4",
pch=21,
lwd=1,
main="",
sub="(a)",
cex.main=1.4,
xlab="",
ylim=c(-4.5,3),
ylab="Residuos estandarizados",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

abline(h=2.5*sd(res.est),lwd=1,col="black",lty=2)
abline(h=-2.5*sd(res.est),lwd=1,col="black",lty=2)
identify(res.est,cex=0.8, n= 4 )

dif = Y - mu0
phi = sqrt((2 * ((tau + 1) ^ 2)) / ((2 * tau) + 5))
raiz = sqrt(2 * mu0 * mu0)
res.est = (((dif)*phi) / raiz)+2
mean(res.est)
sd(res.est)
min(res.est)
max(res.est)

plot(res.est,
type="p",
col="black",
bg="gray",
pch=21,
lwd=1,
main="",
sub="(a)",
cex.main=1.4,
xlab="Index",
ylim=c(-4.5,3),
ylab="Residuals",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",
cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

abline(h=2.5*sd(res.est),lwd=1,col="black",lty=2)
abline(h=-2.5*sd(res.est),lwd=1,col="black",lty=2)

par(mfrow = c(1, 2))
hist(res.est,
col = "gray",

```

```

main = "",
sub="(a)",
xlab = "Residuos estandarizados",
ylab = "Frecuencia")

qqnorm(res.est,col="black", xlab="Cuantil te?rico",sub="(b)", ylab="Cuantil emp?rico", main="")
qqline(res.est,col="black")
lillie.test(res.est)

#Residuos propuestos por Jorgensen#

vJ = (- 1 / (2 * (mu0 ^ 2))) + (tau ^ 2) / (((Y * tau) + Y + (tau * mu0) ^ 2) + ((tau + 1) / 2) * (Y / (mu0 ^ 3)))
vmu = 1 / (((tau + 1) / tau) * Y + mu0) + (Y * (tau + 1)) / (4 * (mu0 ^ 2)) - ((tau ^ 2) / (4 * tau + 4)) * (1 / Y) - 0.5 / mu0
rbJ = vmu / sqrt(vJ)

plot(rbJ,
type="p",
col="black",
bg="goldenrod3",
pch=21,
lwd=1,
main="",
cex.main=1,
sub="(b)",
ylim=c(-4.5,3),
xlab="",
ylab="Residuos de Jorgensen",
axes=TRUE,
las=1,
bty="o",cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4)

abline(h=2.7*sd(rbJ),lwd=1,col="black",lty=2)
abline(h=-2.7*sd(rbJ),lwd=1,col="black",lty=2)
identify(rbJ, cex=0.8, n = 5)

hist(rbJ,
col = "gray",
main = "",
sub="(b)",
xlab = "Residuals",
ylab = "Frequency")

qqnorm(rbJ,col="black",xlab="Theoretical quantile",sub="(b)", ylab="Empirical quantile", main="",cex.lab=1.5, cex.sub=1.4)
qqline(rbJ,col="black")
lillie.test(rbJ)

#Perturbaci?n de la ponderaci?n por casos
#Matrices

vt = Y
vu = mu0
vd = tau
ve = (-1/(2*vu)) + vd / ((vt*vd) + vt + (vd*vu)) +
((vd+1)*vt)/(4*(vu^2)) - (vd^2)/(4*vt*(vd+1))

vb = 1/2 - (1/2)*(vd+1)^(-1) + (vt+vu)/((vt*vd) + vt + (vd*vu)) -
(1/4)*(vt/vu) - (vd*(vd+2)*vu)/(4*vt*(vd+1)^2)

va=(Y+vu)/((vd*Y) + Y + (vd*vu)) - (Y/(4*vu)) - ((vd*(vd+2)*vu)/(4*((vd + 1)^2)*Y)) + vd / (2*(vd+1))

De = diag(as.vector(ve))
Dz = diag(as.vector(va))

ai <- W%*%beta_i
bi<-Z%*%alfa_i

D1 = diag(as.vector(ai))
D2 = diag(as.vector(ve))

D3 = diag(as.vector(bi))
D4 = diag(as.vector(va))

Deltab<-W*diag(ai*ve)
Deltad<-Z*diag(bi*va)
Deltaf = N1T%*%Da0%*%De
DeltaF1 <- N1T %*% Da0 %*% diag(as.vector(ve))
Deltamu <- crossprod(W,diag(D1%*%D2))
DeltaAlpha <- ZT %*% D3 %*% diag(as.vector(va)) # Donde va es el peso en la precisi?n

e0 <- matrix(1, nrow = n, ncol = 1)
De2 <- diag(as.vector(e0))

DeltaF2 <- N2T %*% De2 %*% diag(as.vector(va))

Deltab<-WT%*%D1%*%D2
Deltad<-ZT%*%D3%*%D4

Deltacw <- rbind(Deltab, DeltaF1, DeltaAlpha, DeltaF2)
Deltab_new <- t(Deltab) # Ahora tendr? 2 x 152
Deltad_new <- t(Deltad) # Ahora tendr? 2 x 152

```

```

Deltacw = rbind(Deltab,Deltaf,Deltad, DeltaF2)

#Perturbaci?n de la respuesta

phi = ((2*vd)+5)/((vd+1)^2)
vk = sqrt((vu^2)*phi)
Dk = diag(as.vector(vk))

vpsi = -(vd*(vd+1))/((vd*vt) + vt + (vd*vu)^2) +
(vd+1)/(4*(vu^2)) + ((vd^2)/(4*(vd+1)*(vt^2)))

Dpsi = diag(as.vector(vpsi))

vro = (-vu/((vd*vt) + vt + (vd*vu)^2)) -
1/(4*vu) + (vd*(vd+2)*vu)/(4*(vt^2)*(vd+1)^2)

Dvro = diag(as.vector(vro))

Deltab = WT%Da0%Dpsi*sd(Y)
Deltaf = N1T%Da0%Dk%Dpsi
Deltad = ZT%Da0%Dvro*sd(Y)
Deltares = rbind(Deltab, Deltaf, Deltad)
caseweightspert = Deltacw #Case-weights perturbaci?n
responsepert = Deltares #Response perturbaci?n

#Generalized leverage#

phi = (2*((vd+1)^2))/((2*vd) +5)
vpsi = -(vd*(vd+1))/((vd*vt) + vt + (vd*vu)^2) +
(vd+1)/(4*(vu^2)) + ((vd^2)/(4*(vd+1)))*(1/(vt^2))
Dpsi = diag(as.vector(vpsi))
vro = (-vu/((vd*vt) + vt + (vd*vu)^2)) +
1/(4*vu^2) + (vd*(vd+2)*vu)/(4*(vt^2)*(vd+1)^2)
Deltab = WT%Da0%Dpsi
Deltaf = N1T%Da0%Dpsi
Deltad = t(as.matrix(vro))
Deltalev = rbind(Deltab,Deltaf, Deltad)

Bcw = function(I, M)
{
B =(t(Deltacw)%*(I-M)%*Deltacw)
return(B)
}

Bres = function(I, M)
{
B =(t(Deltares)%*(I-M)%*Deltares)
return(B)
}

#matrices auxiliares
Lbeta = hessiana[1:p,1:p]
Lf = hessiana[(p+2):(p+1+r1), (p+2):(p+1+r1)]
Ldelta = hessiana[1:q,1:q]
b11 = cbind(matrix(0, p, p), matrix(0, p, q),matrix(0,p,r1))
b12 = cbind(matrix(0, p, p), -Ldelta^(-1), matrix(0,p,r1))
b13 = cbind(matrix(0, r1, p), matrix(0,r1,q),-solve(Lf))
B1 = rbind(b11, b12, b13) #parametro beta
b211 = cbind(-solve(Lbeta), matrix(0, p, q),matrix(0,p,r1))
b212 = cbind(matrix(0, q, p), matrix(0, q, q),matrix(0,q,r1))
b213 = cbind(matrix(0, r1, p), matrix(0,r1,q),-solve(Lf))
B2 = rbind(b211, b212, b213) # parametro alpha
b311 = cbind(-solve(Lbeta), matrix(0, p, q),matrix(0,p,r1))
b312 = cbind(matrix(0, q, p), -Ldelta^(-1), matrix(0,q,r1))
b313 = cbind(matrix(0, r1, p), matrix(0,r1,q),matrix(0,r1,r1))
B3 = rbind(b311, b312, b313) #funci?n

#CW#
FPC1 = Bcw(L1, B1)#beta
autovmaxbPC = eigen(FPC1)$val[1]
vetorpcbPC = eigen(FPC1)$vec[,1]

FPC2 = Bcw(L1, B2)#alpha
autovmaxdPC = eigen(FPC2)$val[1]
vetorpcdPC = eigen(FPC2)$vec[,1]

FPC3 = Bcw(L1, B3)#F
autovmaxfPC = eigen(FPC3)$val[1]
vetorpcfPC = eigen(FPC3)$vec[,1]

vCiPC = 2 * abs(diag(FPC1))
vCiPC = 2 * abs(diag(FPC2))
vCiPC = 2 * abs(diag(FPC3))

#Response#
FPR1 = Bres(L1, B1)#beta
autovmaxbPR = eigen(FPR1, symmetric = TRUE)$val[1]
vetorpcbPR = eigen(FPR1, symmetric = TRUE)$vec[,1]

FPR2 = Bres(L1, B2)#alpha

```

```

autovmaxdPR = eigen(FPR2, symmetric = TRUE)$val[1]
vetorpcdPR = eigen(FPR2, symmetric = TRUE)$vec[,1]

FPR3 = Bres(L1, B3)#f
autovmaxfPR = eigen(FPR3, symmetric = TRUE)$val[1]
vetorpcfPR = eigen(FPR3, symmetric = TRUE)$vec[,1]

vCiPR      = 2 * abs(diag(FPR1))
vCidPR     = 2 * abs(diag(FPR2))
vCifPR     = 2 * abs(diag(FPR3))

#Plots leverage, dmax y Cii#

#Leverage#

plot(yest, GL,
     type="p",
     col="black",
     bg="gray",
     cex = 0.7,
     pch=21,
     lwd=1,
     main="",
     cex.main=1,
     xlab="fv",
     ylab="al",
     cex.lab=1.5,
     cex.sub=1.4,
     axes=TRUE,
     las=1,
     bty="o")

identify(yest, GL, cex=1.5, n = )

#Case-weight perturbation#

#dmax

infl1 = vetorpcbPC
dmaxG1 = abs(infl1)

infl2 = vetorpcdPC
dmaxG2 = abs(infl2)

infl3 = vetorpcfPC
dmaxG3 = abs(infl3)

par(mfrow = c(1, 1))
plot(1:length(dmaxG1), dmaxG1, xlab = "id", ylim = c(0, 1), ylab = "dmaxpcbeta", sub = "", cex = 0.7, bg="green", pch=21)
identify(1:length(dmaxG1), dmaxG1, n = 7 )

par(mfrow = c(1, 1))
plot(1:length(dmaxG2), dmaxG2, xlab = "id", ylim = c(0, 1), ylab = "dmaxpcalpha", sub = "", cex = 0.7, bg="green", pch=21)
identify(1:length(dmaxG2), dmaxG2, n = 6)

plot(1:length(dmaxG3), dmaxG3, xlab = "id", ylim = c(0, 1), ylab = "dmaxpcf", sub = "", cex = 0.7, bg="yellow", pch=21)
identify(1:length(dmaxG3), dmaxG3, n = 2)

#Ci

Cb1 = vCiPC
Cb1 = Cb1 / sum(Cb1)

Cb2 = vCidPC
Cb2 = Cb2/sum(Cb2)

Cb3 = vCifPC
Cb3 = Cb3/sum(Cb3)

par(mfrow = c(1, 1))

limi = 2 * mean(Cb1)
plot(1:length(Cb1), Cb1, xlab = "id", ylab = "Cbeta", sub = "", cex = 0.7, bg="gray", pch=21, cex.lab=1.5,
     cex.sub=1.4)
abline(h = limi, lty = 2, lwd = 2)
identify(1:length(Cb1), cex=0.8, Cb1, n = 10)

limi = 2 * mean(Cb2)
plot(cex.lab=1.5,
     cex.sub=1.4, 1:length(Cb2), Cb2, xlab = "id", ylab = "Calpha", sub = "", cex = 0.7, bg="gray", pch=21)
abline(h = limi, lty = 2, lwd = 2)
identify(1:length(Cb2), cex=0.8, Cb2, n = 11 )

limi = 2 * mean(Cb3)
plot(cex.lab=1.5,
     cex.sub=1.4, 1:length(Cb3), Cb3, xlab = "id", ylab = "Cf", sub = "", cex = 0.7, bg="gray", pch=21)
abline(h = limi, lty = 2, lwd = 2)
identify(1:length(Cb3), cex=0.8, Cb3, n =)

#Response perturbation#

```

```

#dmax

infl1 = vetorpcbPR
dmaxG1 = abs(infl1)

infl2 = vetorpcdPR
dmaxG2 = abs(infl2)

infl3 = vetorpcfPR
dmaxG3 = abs(infl3)

plot(1:length(dmaxG1), dmaxG1, xlab = "id", ylim = c(0, 0.5), ylab = "dmaxpcbalpha", sub = "", cex = 0.7,bg="red",pch=21)
identify(1:length(dmaxG1), dmaxG1, n = 12 )

plot(1:length(dmaxG2), dmaxG2, xlab = "id", ylim = c(0, 0.5), ylab = "dmaxpcalpha", sub = "", cex = 0.7,bg="green",pch=21)
identify(1:length(dmaxG2), dmaxG2, n = 9)

plot(1:length(dmaxG3), dmaxG3, xlab = "id", ylim = c(0, 0.5), ylab = "dmaxpcf", sub = "", cex = 0.7,bg="yellow",pch=21)
identify(1:length(dmaxG3), dmaxG3, n = 7 )

#Ci

Cb1 = vCiPR
Cb1 = Cb1 / sum(Cb1)

Cb2 = vCidPR
Cb2 = Cb2 / sum(Cb2)

Cb3 = vCifPR
Cb3 = Cb3 / sum(Cb3)

limi = 2 * mean(Cb1)
plot(cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4,1:length(Cb1), Cb1, xlab = "id", ylab = "Cbalpha", ylim = c(0, 0.17),sub = "", cex = 0.7,bg="gray",pch=21)
abline(h = limi, lty = 2, lwd = 2)
identify(1:length(Cb1),cex=0.8, Cb1, n = 18 )

limi = 2 * mean(Cb2)
plot(cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4,1:length(Cb2), Cb2, xlab = "id", ylab = "Cbeta", ylim = c(0, 0.17),sub = "", cex = 0.7,bg="gray",pch=21)
abline(h = limi, lty = 2, lwd = 2)
identify(1:length(Cb2),cex=0.8, Cb2, n = 17)

limi = 2 * mean(Cb3)
plot(cex.lab=1.5,
cex.sub=1.4,1:length(Cb3), Cb3, xlab = "id", ylab = "Cgamma", ylim = c(0, 0.19),sub = "", cex = 0.7,bg="gray",pch=21)
abline(h = limi, lty = 2, lwd = 2)
identify(1:length(Cb3),cex=0.8, Cb3, n = 15)

vt <- Y
vu <- mu0
vd <- tau

ve <- (-1/(2 * vu)) + vd/((vt * vd) + vt + (vd * vu)) +
((vd + 1) * vt) / (4 * (vu^2)) - (vd^2) / (4 * vt * (vd + 1))

vb <- 1/2 - (1/2) * (vd + 1)^(-1) +
(vt + vu) / ((vt * vd) + vt + (vd * vu)) -
(1/4) * (vt / vu) - (vd * (vd + 2) * vu) / (4 * vt * ((vd + 1)^2))

va <- (vt + vu) / ((vd * vt) + vt + (vd * vu)) -
(vt / (4 * vu)) -
((vd * (vd + 2) * vu) / (4 * ((vd + 1)^2) * vt)) +
vd / (2 * (vd + 1))

De <- diag(as.vector(ve))
Dz <- diag(as.vector(va))

ai <- W %%% beta_i
bi <- Z %%% alfa_i
D1 <- diag(as.vector(ai))
D3 <- diag(as.vector(bi))
Deltab <- WT %%% D1 %%% De
Deltad <- ZT %%% D3 %%% Dz

Deltacw <- rbind(Deltab, Deltad)
influencia <- apply(Deltacw, 1, function(row) sqrt(sum(row^2)))
plot(influencia, type = "h", lwd = 2, col = "blue",
main = "Medida de influencia local",
xlab = "Índice de observación", ylab = "Norma de la influencia")
umbral <- quantile(influencia, 0.95)
abline(h = umbral, col = "red", lty = 2)
text(x = which(influencia > umbral), y = influencia[influencia > umbral],
labels = which(influencia > umbral), pos = 3)
D1 <- diag(as.vector(W %%% beta_i))
Deltab <- WT %%% (W %%% beta_i)

DeltaF1 <- N1T %%% Da0 %%% diag(as.vector(ve))

```

```

D3 <- diag(as.vector(Z %%% alfa_i))
DeltaAlpha <- ZT %%% D3 %%% diag(as.vector(va))

e0 <- matrix(1, nrow = n, ncol = 1)
De2 <- diag(as.vector(e0))
DeltaF2 <- N2T %%% De2 %%% diag(as.vector(va))
Deltacw <- rbind(Deltab, DeltaF1, DeltaAlpha, DeltaF2)
influencia <- apply(Deltacw, 1, function(row) sqrt(sum(row^2)))
plot(influencia, type = "h", lwd = 2, col = "blue",
     main = "Medida de influencia local",
     xlab = "Índice de observación", ylab = "Norma de la influencia")
abline(h = quantile(influencia, 0.95), col = "red", lty = 2)
text(x = which(influencia > quantile(influencia, 0.95)),
     y = influencia[influencia > quantile(influencia, 0.95)],
     labels = which(influencia > quantile(influencia, 0.95)), pos = 3)

Kbb <- t(W) %%% Dv0 %%% W
Kbf <- t(W) %%% Dv0 %%% N1
Kbd <- t(W) %%% Ds0 %%% Z
Kbf2 <- t(W) %%% Ds0 %%% N2

Kfb <- t(Kbf)
Kff <- t(N1) %%% Dv0 %%% N1 + lambda1 * K1
Kfd <- t(N1) %%% Ds0 %%% Z
Kff2 <- t(N1) %%% Ds0 %%% N2

Kdb <- t(Kbd)
Kdf <- t(Kfd)
Kdd <- t(Z) %%% Du0 %%% Z
Kdf2 <- t(Z) %%% Du0 %%% N2

Kf2b <- t(Kbf2)
Kf2f <- t(Kff2)
Kf2d <- t(Kdf2)
Kf2f2 <- t(N2) %%% Du0 %%% N2 + lambda2 * K2

# Unimos los bloques (4x4)
A1 <- cbind(Kbb, Kbf, Kbd, Kbf2)
A2 <- cbind(Kfb, Kff, Kfd, Kff2)
A3 <- cbind(Kdb, Kdf, Kdd, Kdf2)
A4 <- cbind(Kf2b, Kf2f, Kf2d, Kf2f2)

fisher <- rbind(A1, A2, A3, A4)

inv_fisher <- ginv(fisher)
se.f <- sqrt(diag(inv_fisher))
inv_fisher <- ginv(fisher)
L1 <- -inv_fisher
vt <- Y
vu <- mu0
ve <- (-1/(2*vu)) + vd/((vt*vd) + vt + (vd*vu)) +
      ((vd+1)*vt)/(4*(vu^2)) - (vd^2)/(4*vt*(vd+1))

De <- diag(as.vector(ve))
Deltab_new <- t(Deltab)
Deltad_new <- t(Deltad)

Deltacw <- rbind(Deltab_new, Deltaf, DeltaAlpha, Deltaf2)

## 4) Análisis de influencia local - Perturbación respuesta

phi <- ((2*vd)+5)/((vd+1)^2)
vk <- sqrt((vu^2)*phi)
Dk <- diag(as.vector(vk))

Deltares <- rbind( Deltab_res, Deltaf_res, Deltad_res, Deltaf2_res )

Bcw <- function(I, M) {
# I es la identidad n x n, M alguna proyección?
B <- t(Deltacw) %%% (I - M) %%% Deltacw
return(B)
}

Bres <- function(I, M) {
B <- t(Deltares) %%% (I - M) %%% Deltares
return(B)
}

# Ejemplo: FPC1 para beta
L1_sub <- L1[1:150, 1:150]
FPC1 <- Bcw(L1_sub, B1)
Bcw <- function(I, M) {
B <- t(Deltacw) %%% (I - M) %%% Deltacw
return(B)
}

FPC1 <- Bcw(L1, B1) # Ajusta L1, B1 según tu derivación
autovmaxbPC <- eigen(FPC1)$values[1]
vetorpcbPC <- eigen(FPC1)$vectors[,1]
vcIPC <- 2 * abs(diag(FPC1))

# Ejemplo para Case Weights - Beta

```

```

Cb1 <- vCiPC # normalizamos si deseamos
Cb1 <- Cb1 / sum(Cb1)
limi <- 2 * mean(Cb1)

plot(1:length(Cb1), Cb1, pch=21, bg="gray",
xlab="Índice de observación", ylab="Cbeta",
main="Case-Weights: Beta")
abline(h=limi, lty=2, lwd=2, col="red")
# Identificar outliers
identify(1:length(Cb1), Cb1, n=5)

#####
## 7) Visualización de Residuos y otras validaciones
#####
dif <- Y - mu0
phi <- sqrt((2 * ((tau + 1)^2)) / ((2 * tau) + 5))
raiz <- sqrt(2 * mu0^2)
res.est <- (dif * phi) / raiz

# Graficar
par(mfrow=c(1,2))
plot(res.est, pch=21, bg="deepskyblue4",
ylab="Residuos estandarizados", xlab="Índice")
abline(h=2.5*sd(res.est), lty=2)
abline(h=-2.5*sd(res.est), lty=2)

hist(res.est, col="gray", main="Hist Res. Estandarizados", xlab="res.est")

# Residuos de Jørgensen (rbJ):
vJ <- (-1/(2*mu0^2)) + (tau^2)/(((Y*tau)+Y+(tau*mu0))^2) + ((tau+1)/2)*(Y/(mu0^3))
vmu <- 1/(((tau+1)/tau)*Y + mu0) + (Y*(tau+1))/(4*(mu0^2)) - ((tau^2)/(4*tau+4))*(1/Y) - 0.5/mu0
rbJ <- vmu / sqrt(vJ)

plot(rbJ, pch=21, bg="goldenrod3",
ylab="Residuos Jørgensen", xlab="Índice")
abline(h=2.7*sd(rbJ), lty=2)
abline(h=-2.7*sd(rbJ), lty=2)

qqnorm(rbJ); qqline(rbJ, col="red")

vCi_case <- apply(Deltacw, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_case_norm <- vCi_case / sum(vCi_case)

#####
## Gráficos: Influencia Local (Case Weights)
#####
par(mfrow = c(1,1), mar = c(4,4,2,1))
plot(1:length(vCi_case_norm), vCi_case_norm,
pch = 20, col = "blue", cex = 1,
xlab = "Índice de observación",
ylab = "Índice de Influencia Local",
main = "Influence Local (Case Weights)")
# Ejemplo de umbral: 2 * mean del índice
umbral <- 2 * mean(vCi_case_norm)
abline(h = umbral, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
# Identificar puntos que exceden el umbral:
outliers <- which(vCi_case_norm > umbral)
text(outliers, vCi_case_norm[outliers], labels = outliers, pos = 3, cex = 0.8)

Deltab_res_new <- t(Deltab_res)
DeltaAlpha_res_new <- t(Deltad_res)
Deltares <- rbind(Deltab_res_new, Deltaf_res, DeltaAlpha_res_new, Deltaf2_res)

vCi_resp <- apply(Deltares, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_resp_norm <- vCi_resp / sum(vCi_resp)

par(mfrow = c(1,1), mar = c(4,4,2,1))
plot(1:length(vCi_resp_norm), vCi_resp_norm,
pch = 20, col = "darkgreen", cex = 1,
xlab = "Índice de observación",
ylab = "Índice de Influencia Local",
main = "Influence Local (Response)")
umbral_resp <- 2 * mean(vCi_resp_norm)
abline(h = umbral_resp, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
outliers_resp <- which(vCi_resp_norm > umbral_resp)
text(outliers_resp, vCi_resp_norm[outliers_resp],
labels = outliers_resp, pos = 3, cex = 0.8)
Delta_media <- rbind(Deltab, Deltaf1)
# Índice de influencia local para la media:
vCi_media <- apply(Delta_media, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_media_norm <- vCi_media / sum(vCi_media)
Delta_disp <- rbind(Deltad, Deltaf2)

# Índice de influencia local para la dispersión:
vCi_disp <- apply(Delta_disp, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_disp_norm <- vCi_disp / sum(vCi_disp)

par(mfrow = c(1,2), mar = c(4,4,2,1))

plot(1:length(vCi_media_norm), vCi_media_norm,
pch = 20, col = "blue",
xlab = "Índice de observación",

```

```

ylab = "Influencia Local (Media)",
main = "Influencia Local: Media")
abline(h = 2 * mean(vCi_media_norm), col = "red", lty = 2, lwd = 2)
text(which(vCi_media_norm > 2 * mean(vCi_media_norm)),
vCi_media_norm[vCi_media_norm > 2 * mean(vCi_media_norm)],
labels = which(vCi_media_norm > 2 * mean(vCi_media_norm)), pos = 3, cex = 0.8)

plot(1:length(vCi_disp_norm), vCi_disp_norm,
pch = 20, col = "darkgreen",
xlab = "Índice de observación",
ylab = "Influencia Local (Dispersión)",
main = "Influencia Local: Dispersión")
abline(h = 2 * mean(vCi_disp_norm), col = "red", lty = 2, lwd = 2)
text(which(vCi_disp_norm > 2 * mean(vCi_disp_norm)),
vCi_disp_norm[vCi_disp_norm > 2 * mean(vCi_disp_norm)],
labels = which(vCi_disp_norm > 2 * mean(vCi_disp_norm)), pos = 3, cex = 0.8)

## Influencia Local { Perturbación de la Respuesta
Deltab_res_new <- t(Deltab_res) # De 152 x 2 a 2 x 152
Delta_media_resp <- rbind(Deltab_res, Deltaf1_res)
vCi_media_resp <- apply(Delta_media_resp, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_media_resp_norm <- vCi_media_resp / sum(vCi_media_resp)
DeltaAlpha_res_new <- t(Deltad_res) # De 152 x 2 a 2 x 152
Delta_disp_resp <- rbind(DeltaAlpha_res_new, Deltaf2_res) # Dimensiones: 148 x 152
vCi_disp_resp <- apply(Delta_disp_resp, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_disp_resp_norm <- vCi_disp_resp / sum(vCi_disp_resp)

#####
## Graficar la Influencia Local para la Respuesta
#####
par(mfrow = c(1,2), mar = c(4,4,2,1))

# Gráfico para la MEDIA (perturbación de la respuesta)
plot(1:length(vCi_media_resp_norm), vCi_media_resp_norm,
pch = 20, col = "blue",
xlab = "Índice de observación",
ylab = expression("Influencia Local (Media, Response)"),
main = "Influencia Local: Media (Response)")
umbral_media_resp <- 2 * mean(vCi_media_resp_norm)
abline(h = umbral_media_resp, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
out_media_resp <- which(vCi_media_resp_norm > umbral_media_resp)
text(out_media_resp, vCi_media_resp_norm[out_media_resp],
labels = out_media_resp, pos = 3, cex = 0.8)

# Gráfico para la DISPERSIÓN (perturbación de la respuesta)
plot(1:length(vCi_disp_resp_norm), vCi_disp_resp_norm,
pch = 20, col = "darkgreen",
xlab = "Índice de observación",
ylab = expression("Influencia Local (Dispersión, Response)"),
main = "Influencia Local: Dispersión (Response)")
umbral_disp_resp <- 2 * mean(vCi_disp_resp_norm)
abline(h = umbral_disp_resp, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
out_disp_resp <- which(vCi_disp_resp_norm > umbral_disp_resp)
text(out_disp_resp, vCi_disp_resp_norm[out_disp_resp],
labels = out_disp_resp, pos = 3, cex = 0.8)

vCi_beta <- apply(Deltab, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_beta <- apply(Deltab, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_beta_norm <- vCi_beta / sum(vCi_beta)

vCi_f1 <- apply(Deltaf, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_f1_norm <- vCi_f1 / sum(vCi_f1)
Deltad_alpha <- Deltad
vCi_alpha <- apply(Deltad_alpha, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_alpha_norm <- vCi_alpha / sum(vCi_alpha)
vCi_f2 <- apply(Deltaf2, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCi_f2_norm <- vCi_f2 / sum(vCi_f2)

par(mfrow = c(2,2), mar = c(4,4,2,1))
plot(1:length(vCi_beta_norm), vCi_beta_norm,
pch = 20, col = "blue",
xlab = "Índice de observación",
ylab = expression(C[i]^beta),
main = "Influencia local por casos: beta (Media)",
ylim = c(0,0.30))
umbral_beta <- 2 * mean(vCi_beta_norm)
abline(h = umbral_beta, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
out_beta <- which(vCi_beta_norm > umbral_beta)
if (length(out_beta) > 0) {
text(out_beta, vCi_beta_norm[out_beta], labels = out_beta, pos = 3, cex = 0.8)
} else {
cat("No se detectaron outliers en beta según el umbral.n")
}

# Gráfico para f1:
plot(1:length(vCi_f1_norm), vCi_f1_norm,
pch = 20, col = "darkgreen",
xlab = "Índice de observación",
ylab = expression(C[i]^(f[1])),
main = "Influencia local por casos: f1 (Media)",
ylim = c(0,0.30))
abline(h = 2 * mean(vCi_f1_norm), col = "red", lty = 2, lwd = 2)

```

```

out_f1 <- which(vCi_f1_norm > 2 * mean(vCi_f1_norm))
text(out_f1, vCi_f1_norm[out_f1], labels = out_f1, pos = 3, cex = 0.8)
plot(1:length(vCi_alpha_norm), vCi_alpha_norm,
     pch = 20, col = "purple",
     xlab = "Índice de observación",
     ylab = expression(C[i]^alpha),
     main = "Influencia local por casos: alpha (Precisión)",
     ylim = c(0,0.30))
umbral_alpha <- 2 * mean(vCi_alpha_norm)
abline(h = umbral_alpha, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
out_alpha <- which(vCi_alpha_norm > umbral_alpha)
if (length(out_alpha) > 0) {
  text(out_alpha, vCi_alpha_norm[out_alpha], labels = out_alpha, pos = 3, cex = 0.8)
} else {
  cat("No se detectaron outliers en alfa según el umbral.n")
}

plot(1:length(vCi_f2_norm), vCi_f2_norm,
     pch = 20, col = "orange",
     xlab = "Índice de observación",
     ylab = expression(C[i]^(f[2])),
     main = "Influencia local por casos: f2 (Precisión)",
     ylim = c(0,0.30))
abline(h = 2 * mean(vCi_f2_norm), col = "red", lty = 2, lwd = 2)
out_f2 <- which(vCi_f2_norm > 2 * mean(vCi_f2_norm))
text(out_f2, vCi_f2_norm[out_f2], labels = out_f2, pos = 3, cex = 0.8)

vCiPR_beta <- apply(Delta_b_res, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCiPR_f1 <- apply(Delta_f1_res, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCiPR_alpha <- apply(Delta_d_res, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))
vCiPR_f2 <- apply(Delta_f2_res, 2, function(x) sqrt(sum(x^2)))

vCiPR_beta_norm <- vCiPR_beta / sum(vCiPR_beta)
vCiPR_f1_norm <- vCiPR_f1 / sum(vCiPR_f1)
vCiPR_alpha_norm <- vCiPR_alpha / sum(vCiPR_alpha)
vCiPR_f2_norm <- vCiPR_f2 / sum(vCiPR_f2)

umbral_beta_r <- 2 * mean(vCiPR_beta_norm)
umbral_f1_r <- 2 * mean(vCiPR_f1_norm)
umbral_alpha_r <- 2 * mean(vCiPR_alpha_norm)
umbral_f2_r <- 2 * mean(vCiPR_f2_norm)

100*(abs((-9.2343749 - beta_i[1])/ -9.2343749))
100*(abs((0.002668485 - se.f[1])/0.002668485))

100*(abs((0.5559835 - beta_i[2])/0.5559835))
100*(abs((2.763022e-05 - se.f[2])/2.763022e-05))

100*(abs((-4.982757 - Alfas[1])/ -4.982757))
100*(abs((0.001803066 - se.f[3])/0.001803066))

100*(abs((1.186317 - Alfas[2])/1.186317))
100*(abs((0.000759414 - se.f[4])/0.000759414))

# Estimaciones reales
beta_real <- c(-9.225822, 0.556225)
alfa_real <- c(-1.6688346, 0.9453671)
beta_perturbado <- c(-9.2343616, 0.5559834)
alfa_perturbado <- c(-4.982767, 1.186318)
cambio_beta1 <- 100 * abs((beta_real[1] - beta_perturbado[1]) / beta_real[1])
cambio_beta2 <- 100 * abs((beta_real[2] - beta_perturbado[2]) / beta_real[2])

cambio_alfa1 <- 100 * abs((alfa_real[1] - alfa_perturbado[1]) / alfa_real[1])
cambio_alfa2 <- 100 * abs((alfa_real[2] - alfa_perturbado[2]) / alfa_real[2])

cat("Cambio % en Beta1:", cambio_beta1, "\n")
cat("Cambio % en Beta2:", cambio_beta2, "\n")
cat("Cambio % en Alfa1:", cambio_alfa1, "\n")
cat("Cambio % en Alfa2:", cambio_alfa2, "\n")

```

# Bibliografía

- Alvarado, Sergio A., Silva, Claudio S., y Cáceres, Dante D. (2010). Modelación de episodios críticos de contaminación por material particulado (PM10) en Santiago de Chile: Comparación de la eficiencia predictiva de los modelos paramétricos y no paramétricos. *Gaceta Sanitaria*, **24(6)**: 466-472. Recuperado en 16 de abril de 2025, de <http://scielo.isciii.es/scielo>.
- Birnbaum, Z. W., y Saunders, S.C. (1969a). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*. **6**: 319–27.
- Buja A, Hastie T, Tibshirani R. (1989). Linear smoothers and additive models. *Annals of Statistics*. **17**: 453-555.
- Caamaño, C., Ibacache-Pulgar, G., y Morales, B. (2023). A partially varying-coefficient model with Skew-t random errors for environmental data modeling. *Environmetrics*, env-24-0039.
- Cárcamo, E., Marchant, C., Ibacache-Pulgar, G., y Leiva, V. (2024). Birnbaum-Saunders Semi-parametric Additive Modelling: Estimation, Smoothing, Diagnostics, and application. *REVSTAT-Statistical Journal*, **22**: 211-237. <https://doi.org/10.57805/revstat.v22i2.483>
- Chen, F., Zhu, H.-T., Song, X.-Y., y Lee, S.-Y. (2010). Perturbation Selection and Local Influence Analysis for Generalized Linear Mixed Models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **19(4)**: 826–842.
- Cook, R. y Weisberg, S. (1983). Diagnostics for heteroscedasticity in regression. *Biometrika*, **70**: 1–10.
- Cook, R. D. (1986). Assessment of local influence (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**: 133-169.
- Eubank, R.L. (1984). The hat matrix for smoothing splines. *Statistics and Probability Letters*. **2**: 9–14.
- Ferrari, S. Espinheira, P. Cribari-Neto, F. (2011). Diagnostic tools in beta regression with varying dispersion. *Statistica Neerlandica*, **65**: 337–351.
- Galea, M., Paula, G.A., y Leiva, V. (2004). Influence diagnostics in log–Birnbaum–Saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*. **31**: 1049-1064.
- Gannaz, I. (2007). Robust estimation and wavelet thresholding in partially models. *Statistics and Computing*. **17**: 239–310.
- González, A. (2020). *La ciencia y los datos para el medio ambiente, al alcance de todos los profesionales*. Comunidadism. Recuperado el 09 de mayo del 2020, desde: <http://www.comunidadism.es/blogs/laciencia-y-los-datos-para-el-medio-ambiente-al-alcance-de-todos-los-profesionales>.

- Grantz, D. Garner, J. y Johnson, D. (2003) Ecological effects of particulate matter, *Environment International*, **29**(2): 213-239
- Green, P.J. (1987). Penalized likelihood for general semi-parametric regression models. *International Statistical Review*. **55**: 245–259.
- Green, P. y Silverman, B.(1990) On use of the EM algorithm for penalized likelihood estimation. *Journal of the Royal Statistical Society*, **443-452**.
- Green, P., y Silverman, B. (1994). *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models: A roughness penalty*, Chapman and Hall/CRC.
- Hastie, T. e Tibshirani, R. (1987). Generalized additive models: some applications. *Journal of the American Statistical Association*, **82**: 371-386.
- Hastie, T., y Tibshirani, R. (1990). *Generalized additive models*. Chapman and Hall.
- Hastie, T., y Tibshirani, R. (1993). Varying-Coefficient Models. *Journal of the Royal Statistical Society*, **55**: 757-796.
- Heckman, N. (1986). Spline smoothing in a partly linear model. *Journal of the Royal Statistical Society*. **48**: 244–248.
- Ibacache-Pulgar, G., Paula, G. (2011). Local influence for Student-t partially linear models. *Computational Statistics and Data Analysis*. **55**: 1462–1478.
- Ibacache-Pulgar, G., Paula, G. A., y Galea, M. (2012). Influence diagnostics for elliptical semiparametric mixed models. *Statistical Modelling*, **12**:165-193.
- Ibacache-Pulgar, G., Figueroa-Zúñiga, J., y Marchant, C. (2021). Semiparametric additive beta regression models: inference and local influence diagnostics. *REVSTAT*.
- Ibacache-Pulgar, G., Caamaño, C., y Conde, F. (2023). Semiparametric additive beta regression model with varying precision parameter: estimation, diagnostics, and applications. *Statistics Papers*, STPAD-23-00408.
- Ibacache-Pulgar, G., Lira, V., y Villegas, C. (2024). Assessing influence in the Varying-Coefficient Generalized Linear Model. *REVSTAT-Statistical Journal*. <https://doi.org/10.57805/revstat.v22i3.507>. **12**:165-193
- Ibacache-Pulgar, G., Pacheco, P., Nicolis, O., y Uribe-Opazo, M. (2024). Local Influence for the Thin-Plate Spline Generalized Linear Model. *Axioms*, **13**: 346. <https://doi.org/10.3390/axioms13060346>
- Jeldes, N., Ibacache-Pulgar, G., Marchant, C., y López-Gonzales, J. (2022). Modelling Air Pollution using Partially Varying-Coefficient Models with Heavy Tails. *Mathematics*. <https://doi.org/10.3390/math10193677>
- Jorgensen, B. (1987). Exponential dispersion models. Wiley.
- Leiva ,V., Barros, M., Paula, G.A., y Sanhueza, A. (2008). Generalized Birnbaum–Saunders distributions applied to air pollutant concentration. *Environmetrics*. **19**: 235-249.
- Leiva, V., Santos-Neto, M., Cysneiros, FJA, Barros, M. (2014). Birnbaum–Saunders statistical modelling: A new approach. *Statistical Modelling*. **14**: 21-48.
- Leiva, V., Santos-Neto, M., Cysneiros, F.J.A., y Barros, M. (2014). Birnbaum–Saunders statistical modelling: A new approach. *Statistical Modelling*, **14**: 21-48.

- Lin, J. Zhu, L. Xie, F. (2009). Heteroscedasticity diagnostics for t linear regression models. *Metrika*, **70**: 59–77.
- Marchant, C., Leiva, V., y Cysneiros, F.J.A. (2016). A multivariate log-linear model for Birnbaum-Saunders distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, **65**: 816-827.
- Marchant, C., Leiva, V., Cysneiros, F.J.A., y Vivanco, J.F. (2016). Diagnostics in multivariate Birnbaum-Saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*. **43(15)**: 2829-2849.
- Ministerio del Medio Ambiente. (2024). *Sistema de Información Nacional de Calidad del Aire (SINCA)*. Recuperado el 20 de enero del 2024, desde: <https://sinca.mma.gob.cl/>.
- Oyarzún G., Manuel, y Valdivia C., Gonzalo. (2021). Impactos en la salud de la contaminación del aire. *Revista chilena de enfermedades respiratorias*, **37(2)**: 103-106. <https://dx.doi.org/10.4067/S0717-73482021000200103>
- Paula, G.A., Leiva, V., Barros, M., y Liu, S. (2012). Robust statistical modeling using the Birnbaum-Saunders-*t* distribution applied to insurance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **28**: 16-34.
- Paula, G. (2013). On diagnostics in double generalized linear models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **68**: 44–51.
- Poon, W. y Poon, Y. S. (1999). Conformal normal curvature and assessment of local influence. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **61**: 51-61.
- Puentes, R., Marchant, C., Leiva, V., Figueroa-Zúñiga, J.I., y Ruggeri, F. (2021). Predicting PM2.5 and PM10 Levels during Critical Episodes Management in Santiago, Chile, with a Bivariate Birnbaum-Saunders Log-Linear Model. *Mathematics*, **9**: 645.
- Rieck, J. y Nedelman, J. (1991). A log-linear model for the Birnbaum- Saunders distribution. *Technometrics*, **3**: 51–60.
- Rigby y Stasinopoulos. (2005). Generalized additive models for location, scale and shape. *Applied Statistics*, **54**: 507-554.
- Rocha, A. Simas, A. (2011). Influence diagnostic in a general class of beta regression models. *TEST*, **20**: 95–119.
- Sánchez, D., Ibacache-Pulgar, G., y Marchant, C. (2023). Modelling Environmental Pollution using Varying-Coefficient Quantile Regression Models under Log-Symmetric Distributions. *Axioms*, <https://doi.org/10.3390/axioms12100976>
- Santos-Neto M, Cysneiros FJA, Leiva V, Ahmed SE (2012) On new parametrizations of the Birnbaum-Saunders distribution. *Pakistan Journal of Statistics*. **1**: 1-26.
- Santos-Neto, M., Cysneiros, F.J.A., Leiva, V., y Barros, M. (2014). On a reparameterized Birnbaum-Saunders distribution and its moments, estimation and applications. *REVSTAT-Statistical Journal*, **12(3)**: 247-272.
- Santos-Neto, M. Cysneiros, F. Leiva, F. Barros, M. (2016). Reparameterized Birnbaum-Saunders regression models with varying precision. *Electronic Journal of Statistics*. **10**: 2825-2855.
- Silverman, B. (1985). Some aspects of the Spline Smoothing approach to non-parametric regression curve fitting. *Journal of the Royal Statistical Society*. **47**: 1-52.

- Simas, A. Barreto-Souza, W. Rocha, A. (2010). Improved estimators for a general class of beta regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**: 348–366.
- Speckman, P. (1988). Kernel smoothing in partial linear models. *Journal of the Royal Statistical Society* . **50**: 413–436.
- Taylor, J. y Verbyla, A. (2004). Joint modeling of location and scale parameters of the t distribution. *Statistical Modelling*, **4**: 91–112.
- Van Keilegom, I. y Wang, L. (2010). Semiparametric modeling and estimation of heteroscedasticity in regression analysis of cross-sectional data. *Electronic Journal of Statistics*, **4**: 133–160.
- Vilca, F. Sanhueza, A. Leiva, V. y Christakos, G. (2010). An extended Birnbaum–Saunders model and its application in the study of environmental quality in Santiago, Chile. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*. **24**: 771-782.
- Xie, F. y Wei, B. (2007). Diagnostics analysis for log-Birnbaum-Saunders regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**: 4692–4706.
- Zhu, Z.Y., He, X., Fung, W.K. (2003). Local influence analysis for penalized Gaussian likelihood estimators in partially linear models. *Scandinavian Journal of Statistics*. **30**: 767–770.