UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Clase de Funciones de Bloch Armónico

Tesis para optar el grado de Magíster en Matemáticas

Tutor: Dr. Rodrigo Hernández

JHONATTAN GAONA PAREDES

Valparaíso–Chile

2014

Dedicatoria:

Para Gisselle y Florencia.

Agradecimientos

Primero agradezco a mis padres por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón, por creer en mí todos los días, por entregarme cariño y fuerza para acabar cada etapa en mi vida, por su esfuerzo para que yo puediera llegar a esta instancia.
Agradezco a mis hermanos por su constante apoyo y por acompañarme en el día a día y hacer que todo este proceso sea ameno.
Agradezco a mi pareja Gisselle por acompañarme en este proceso, por su paciencia y apoyo, por esas largas noches de estudio donde siempre estuvo ahí.
Agradezco a mis amigos por acompañarme en los días de universidad y por compartir sus experiencias conmigo, muchas de las cuales me permitieron crecer como persona y como matemático.
Agradezco especialmente a mi profesor Rodrigo Hernández, por la colaboración, paciencia y apoyo y sobre todo por esa gran amistad que me brindó y me brinda, por escucharme y aconsejarme siempre.

Valparaíso-Chile, Julio de 2014 **Jhonattan Gaona Paredes**

Resumen

Esta tesis se desarrolla en el marco de la Teoría Geométrica de Funciones. Inicialmente, establecemos los elementos necesarios para la comprensión del trabajo de investigación desarrollado en esta tesis. Elementos tales como: definiciones básicas, propiedades generales de los mapeos armónicos, el espacio de Bloch analítico, etc.

Luego, daremos una definición de clase de funciones de Bloch armónico y de función establemente de Bloch, estudiando sus propiedades y la relación entre ellos.

Finalmente, responderemos si es posible extender o no algunos resultados de funciones de Bloch analíticas a funciones de Bloch armónicas.

Índice general

Introducción

El principal objetivo del trabajo es estudiar una nueva clase de funciones armónicas, haciendo énfasis en la extensión de los teoremas del correspondiente espacio en el mundo analítico.
Como la analiticidad desaparece, muchos obtáculos se observan. Las funciones analíticas se preservan bajo la composición pero no las funciones armónicas. La inversa de una función armónica no es necesariamente armónica. No obstante, la composición de una función armónica con una función analítica resulta ser una función armónica. Sin embargo, hay muchos resultados de funciones analíticas que se extienden a funciones armónicas.
La presente tesis está organizada en cuatro capítulos. A continuación entregamos una breve descripción de las secciones que la componen:

1. Preliminares

Este capítulo contiene algunos resultados de la Teoría Geométrica de Funciones, así como también algunos teoremas básicos pero importantes que serán fundamentales en el desarrollo posterior de la tesis.

2. Espacio de Bloch analítico

Presentamos resultados sobre funciones de Bloch, nuevamente en el contexto analítico. También veremos algunos teoremas que se satisfacen para funciones de Bloch que son univalentes.

3. Mapeos armónicos. En este capítulo se presentan los mapeos armónicos, el Jacobiano y la representación canónica de estos. Además de algunos resultados relacionados con la Teoría Geométrica de Funciones Armónicas.

4. La clase de funciones armónicas de Bloch.

Finalmente enunciaremos los resultados de nuestro trabajo incluyendo la nueva definición de clase de funciones de Bloch armónico y la defineión de establemente de Bloch.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones analíticas

Comenzaremos este capítulo hablando de las funciones analíticas en el contexto de la Teoría Geométrica de Funciones, ya que es aquí donde han nacido las preguntas que tratamos de responder en esta tesis. Desde principios del siglo veinte que esta teoría se ha trabajado teniendo su mayor desarrollo en los últimos cuarenta años. Muchos de los resultados que se conocen para la clase $\mathcal{S}$, que definiremos más adelante, se pueden extender a la teoría geométrica de funciones armónicas y muchas de estas son problemas abiertos aún.

Como bien sabemos, una función compleja φ es analítica en el disco unitario $\mathbb{D}$, esto es $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, si y solo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Notemos que la equivalencia anterior viene de que $\mathbb{D}$ es simplemente conexo. Una función analítica φ definida en $\mathbb{D}$, cuya imagen esta contenida en $\mathbb{D}$ y que satisface que $\varphi(0) = 0$ se llama una función de Schwarz en honor al lema que enunciaremos a continuación:

Lema 1 (Lema de Schwarz)**.** *Sea φ una función de Schwarz entonces se satisface que*

(i) $|\varphi(z)| \leq |z|$,

(ii) $|\varphi'(0)| \leq 1$;

y si la igualdad se cumple en (i) para algún $z \neq 0$ ó en (ii) se tiene que φ es una rotación de la identidad.

El siguiente lema generaliza el anterior.

Lema 2 (Lema de Schwarz-Pick)**.** *Sea φ analítica, $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, entonces para todo $z \neq z_0$ se tiene que*

(i) $\left|\dfrac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|.$

(ii) $|\varphi'(z)| \leq \dfrac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}.$

Demostración. Sea $\varphi(z_0) = w_0$ y consideremos los automorfismos del disco ψ_{-z_0} y ψ_{w_0} definidos por

$$\psi_{-z_0}(u) = \frac{u+z_0}{1+\overline{z_0}u} \text{ y } \psi_{w_0}(w) = \frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}$$

luego consideremos la función $F(u) = \psi_{w_0} \circ \varphi \circ \psi_{-z_0}(u)$. Notemos que F va de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$, es analítica y $F(0) = \psi_{w_0}(\varphi(\psi_{-z_0}(0))) = 0$. Así F es una función de Schwarz, entonces se tiene que

$$|F(u)| \leq |u|$$

pero si $u = \dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, $\psi_{-z_0}(u) = z$. Así, si $\varphi(z) = w$

$$\left|\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|,$$

lo que demuestra (i). Haciendo que z_0 tienda a z se obtiene (ii). □

1.2. Mapeos conformes

Los mapeos conformes son funciones analíticas y univalentes; se dicen conformes ya que estas conservan los ángulos entre curvas.

Las funciones conformes φ definidas en $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$\varphi(0) = 0 \text{ y } \quad \varphi'(0) = 1,$$

definen la clase $\mathcal{S}$. Así toda función en $\mathcal{S}$ tiene un desarrollo de Taylor de la forma

$$\varphi(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ..., \qquad\qquad |z| < 1.$$

La clase $\mathcal{S}$ es preservada bajo una serie de transformaciones, si $\varphi \in \mathcal{S}$ entonces

1. $\overline{\varphi(\overline{z})}$ pertenece a $\mathcal{S}$.

2. $e^{i\theta}\varphi(e^{-i\theta}z)$ pertenece a $\mathcal{S}$.

3. $r^{-1}\varphi(rz)$ con $0 < |r| < 1$ pertenece a $\mathcal{S}$.

4. $\dfrac{\varphi\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - \varphi(a)}{(1-|a|^2)\varphi'(a)}$ con $|a| < 1$ pertenece a $\mathcal{S}$.

5. Si ϕ es una función analítica y univalente en el rango de φ con $\phi(0) = \phi'(0) - 1 = 0$ entonces $\phi \circ \varphi$ está en $\mathcal{S}$.

6. Si $\omega \notin \varphi(\mathbb{D})$ entonces $\dfrac{\omega\varphi}{\omega - \varphi}$ pertenece a $\mathcal{S}$.

7. $\sqrt{\varphi(z^2)}$ pertenece a $\mathcal{S}$.

Para las funciones de la clase $\mathcal{S}$ el teorema de De Branges dice que si $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ se tiene que $|a_n| \leq n$ para todo n.

Ya en 1907 Koebe descubrió que la imagen de toda función en la clase $\mathcal{S}$ contiene un disco común $|w| < \rho$, donde ρ es una constante absoluta. De hecho es allí, en el año 1907 donde puede establecerse el comienzo de la teoría Geométrica de Funciones con el paper de Koebe, luego en 1914 aparece la demostración del Teorema del Área. En 1916 Bieberbach establece la conjetura que llevó su nombre, la que dice que los coeficientes a_n del desarrollo de Taylor de las funciones de la clase $\mathcal{S}$ satisfacen la desigualdad $|a_n| < n$ y la probó para $n = 2$. Esta conjetura fue muy importante en esta teoría ya que permitió el desarrollo de mucha matemática, teorías que buscaban la demostración de tal afirmación. Como ejemplo esta la Teoría de Loewner.
Muchos avances parciales se realizaron hasta el año 1985 donde la conjetura finalmente fue probada por De Branges.

Teorema 3 ($\frac{1}{4}$-Koebe)**.** *[2, p.31]. El rango de toda función φ en la clase $\mathcal{S}$ contiene el disco $\{w : |w| < \frac{1}{4}\}$*

El siguiente resultado es un criterio de univalencia debido a Becker.

Teorema 4. *[4, p.130] Sea φ analítica y localmente univalente en $\mathbb{D}$. Si*

$$(1-|z|^2)\left|z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right| \leq 1,$$

entonces φ es univalente en $\mathbb{D}$.

Una relación muy útil en la dirección inversa afirma que:

Proposición 5. *Sea φ univalente en $\mathbb{D}$ entonces*

$$\left|(1-|z|^2)\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} - 2\overline{z}\right| \leq 4$$

Demostración. Sea φ univalente en $\mathbb{D}$, consideremos

$$g(z) = \frac{\varphi\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - \varphi(a)}{(1-|a|^2)\varphi'(a)}.$$

Entonces $g \in \mathcal{S}$ y $\dfrac{g''(0)}{2} = \dfrac{1}{2}\left[(1-|a|^2)\dfrac{\varphi''(a)}{\varphi'(a)} - 2\overline{a}\right]$. Así usando el teorema de Bieberbach tenemos que

$$\left|(1-|a|^2)\frac{\varphi''(a)}{\varphi'(a)} - 2\overline{a}\right| \leq 4 \qquad\qquad \text{para todo } a \in \mathbb{D}.$$

Como a es arbitrario se tiene la demostración del teorema. $\square$

Capítulo 2

Espacio de Bloch analítico

El espacio que definiremos a continuación se enmarca en los espacios conformemente invariantes que son muy importantes en el área del análisis complejo.
El espacio de Bloch Analítico $\mathcal{B}$ es el espacio de todas las funciones analíticas φ definidas en $\mathbb{D}$ tal que

$$||\varphi||_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|\varphi'(z)| < \infty.$$

La expresión anterior define una seminorma en $\mathcal{B}$, El Espacio de Bloch con la norma $||\varphi||_{\mathcal{B}} + |\varphi(0)|$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 6. *Como ejemplo trivial tenemos la función identidad $\varphi(z) = z$ para la cual se tiene que*

$$||\varphi||_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|z'| = 1$$

por lo tanto pertenece al espacio de Bloch. Consideremos $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(z) = \log(1-z)$, donde log *es la rama principal del logaritmo, para la cual se tiene que*

$$||\varphi||_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|(\log(1-z))'| = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\left|-\frac{1}{1-z}\right| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}}|1+z| = 2,$$

por lo tanto pertenece al espacio de Bloch.

Una caracterización de las funciones univalentes en este espacio esta dada por la siguiente proposición.

Proposición 7. *Sea φ analítica y univalente en $\mathbb{D}$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\varphi \in \mathcal{B}$.

(ii) la imagen de φ no contiene discos arbitrariamente grandes.

Demostración. Esta proposición es consecuencia del teorema 3 y del Lema de Schwarz. □

Proposición 8. *Si φ es una función conforme de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}$ entonces*

$$||\log(\varphi - a)||_{\mathcal{B}} \leq 4 \text{ para } a \notin \varphi(\mathbb{D})$$

y

$$||\log \varphi'||_{\mathcal{B}} \leq 6.$$

Recíprocamente, si $||g||_{\mathcal{B}} \leq 1$ entonces $g = \log \varphi'$ para alguna función conforme φ.

Demostración. De la proposición 5 tenemos que

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)\left|\frac{d}{dz}\log\varphi'(z)\right| &= (1-|z|^2)\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right| \\ &\leq 4+2|z|, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $||\log \varphi'||_{\mathcal{B}} \leq 6$.
Como $|\varphi(z) - a| \geq d_{\varphi}(z)$ donde $d_{\varphi}(z) = dist(\varphi(z), \partial\varphi(\mathbb{D}))$, por el teorema $\frac{1}{4}$-Koebe se tiene que

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)\left|\frac{d}{dz}\log(\varphi(z)-a)\right| &= \frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)-a|} \\ &\leq 4. \end{aligned}$$

Inversamente, definamos φ tal que $\varphi(0) = 0$ y $g = \log \varphi'$. Si $||g||_{\mathcal{B}} \leq 1$ entonces

$$(1-|z|^2)\left|z\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right| \leq (1-|z|^2)|g'(z)| \leq 1$$

luego por Teorema 4 φ es univalente. □

Para ver más detalles sobre esto ver [7, pag. 73] .

Capítulo 3

Mapeos armónicos

3.1. Funciones armónicas

Un concepto básico en todo lo que haremos en adelante es el de función armónica. Una función real $u(x, y)$ es armónica si satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Un mapeo $f = (u(x, y), v(x, y))$ de una región D en el plano xy a la región Ω en el plano uv es un mapeo armónico si las dos funciones coordenadas son armónicas. Es conveniente usar la notación compleja $z = x + iy$, $w = u + iv$ y escribir $f(z) = u(z) + iv(z)$. Así una función armónica de valores complejos es un mapeo armónico de un dominio $D \subset \mathbb{C}$ si la parte real e imaginaria de f son funciones armónicas reales.

Una función $f = u + iv$ de valores complejos es analítica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ si ésta tiene derivada $f'(z)$ en cada punto $z \in D$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

son una consecuencia inmediata. Inversamente, si f tiene primeras derivadas parciales continuas y las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, entonces f es analítica en D.

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Análogamente $\Delta v = 0$ luego toda función analítica es armónica. Un par de funciones (u, v) que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann se llaman armónicas conjugadas. Una función analítica y univalente es llamada un mapeo conforme porque esta preserva ángulos entre curvas. En efecto, esta propiedad de preservar ángulos caracteriza a las funciones analíticas (o antianalíticas) entre todas las funciones con primeras derivadas parciales continuas y Jacobiano no nulo, ya que esto implica que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen.
Las funciones armónicas $f = u + iv$ tienen una representación canónica que es única salvo por constantes. Así toda función armónica f se puede escribir como una suma $h + \overline{g}$ donde h y g son analíticas.

3.2. El Jacobiano

El Jacobiano de una función $f = u + iv$ es

$$J_f(z) = \left|\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right| = u_x v_y - u_y v_x.$$

donde los subíndices indican derivadas parciales. Si f es analítica, su Jacobiano toma la forma $J_f = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'|^2$. Para funciones analíticas f, se tiene un resultado clásico que dice $J_f(z) \neq 0$ si y solo si f es localmente univalente en z. Hans Lewy mostró en 1936 que esto también es cierto para funciones armónicas.
Dos operadores diferenciales muy importantes, llamados operadores de Wirtinger que definiremos a continuación nos ayudarán para caracterizar la condición de ser una función armónica compleja. Ellos son

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

donde $z = x + iy$. Notemos que si $f = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica si y solo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así una función f es analítica si y solo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - i\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - 2i\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) \\
&= 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}\partial z} \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

luego f es armónica si y solo si $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ es analítica.

Será conveniente denotar por f_z a $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ y $f_{\overline{z}}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$. De esta manera, el Jacobiano de la función $f = u + iv$ puede ser expresado como

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$$

por lo tanto f preserva orientación cuando $|f_z| > |f_{\overline{z}}|$. Además es claro que $f_z(z) \neq 0$ cuando $J_f(z) > 0$. La función $\omega = \dfrac{f_{\overline{z}}}{f_z}$ es llamada segunda dilatación compleja de f. Así, $0 < |\omega| < 1$ si f preserva orientación.

Consideremos $f = u + iv$ armónica en D, un dominio simplemente conexo. Ésta función tiene una representación canónica $f = h + \overline{g}$ donde h y g son analíticas, siendo esta representación única salvo por una constante aditiva. Para ver esto, notemos que de

(3.1) tenemos que f_z es analítica cuando f es armónica, ya que la derivada con respecto a $\overline{z}$ es 0, entonces definiremos $h' = f_z$, luego h es analítica en D. Sea $g = \overline{f} - \overline{h}$ y como

$$g_{\overline{z}} = \overline{f_z} - \overline{h_z} = 0$$

se tiene que g es analítica y $f = h + \overline{g}$.

3.3. Teorema de Lewy

Para funciones analíticas se tiene que si $J_f(z)$ no es cero entonces f es localmente univalente en z. Un teorema de Hans Lewy afirma lo mismo para funciones armónicas.

Teorema 9. *Sea f una función armónica en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Entonces, f es localmente univalente en D si y sólo si su Jacobiano $J_f(z)$ es distinto de 0 para todo $z \in D$.*

Demostración. Por una aplicación directa del Teorema de la función inversa, si $J_f(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{D}$ entonces f es localmente univalente.
Sea $f = u + iv$ y supongamos que $J_f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in D$. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

es cero en z_0 luego el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} au_x + bv_x &= 0 \\ au_y + bv_y &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución no trivial $(a, b) \neq (0, 0)$. Es decir, la función real $\psi = au + bv$ tiene un punto crítico en z_0. Supongamos que $f(z_0) = 0$ y consideremos el conjunto de nivel $\psi(z) = 0$ cerca de z_0, sabemos que el conjunto de nivel de un punto crítico consiste localmente en dos o más (ver [3, p.18]) arcos intersectados en igual ángulo en z_0. Pero f mapea este conjunto de nivel en la linea $au + bv = 0$. Lo que es una contradicción. $\square$

3.4. Funciones armónicas univalentes

La representación canónica de una función $f = h + \overline{g}$ es única si agregamos la condición $g(0) = 0$. Consideremos la expansión en series de potencias de h y g

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Si f es un mapeo armónico localmente univalentes en el disco unitario $\mathbb{D}$, entonces por Teorema 9 su Jacobiano es estrictamente positivo ó negativo. Así, podemos dividir la clase de tales funciones f en funciones que preservan orientación (si $J_f > 0$) ó funciones que invierten la orientación. En el caso de funciones que preservan orientación, dado que $J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$, tenemos que $|h'(z)| \neq 0$. Esto nos muestra que $h'(z) \neq 0$, luego, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h(0) = 0$ y $h'(0) = 1$.

Definición 10. *La clase de funciones armónicas univalentes que preservan orientación definidas en $\mathbb{D}$ con $a_0 = b_0 = 0$ y $a_1 = 1$ son denotadas por $\mathcal{S}_H$. Así $\mathcal{S}_H$ contiene la clase $\mathcal{S}$ estándar de funciones analíticas. La clase de funciones en $\mathcal{S}_H$ con la propiedad de que $g'(0) = 0$ se denotará por $\mathcal{S}_H^0$.*

Para cada función $f \in \mathcal{S}_H$, la función $f_0 = \varphi \circ f$ esta en $\mathcal{S}_H^0$ donde $\varphi(w) = \dfrac{w - \overline{b_1 w}}{1 - |b_1|^2}$, inversamente si f_0 esta en $\mathcal{S}_H^0$ entonces $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$ esta en $\mathcal{S}_H$.

Teorema 11. *[3, p.92] Cada función f en $\mathcal{S}_H^0$ satisface la inecuación*

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4} \frac{|z|}{(1 + |z|)^2}, \quad |z| < 1.$$

En particular, el rango de f contiene el disco $|w| < \frac{1}{16}$.

Una consecuencia de este teorema establece una cota para el segundo coeficiente de h para las funciones en $\mathcal{S}_H^0$.

Teorema 12. *[3, p.95] La inecuación $|a_2| < 49$ se satisface para toda función en la clase $\mathcal{S}_H^0$*

3.5. Funciones armónicas establemente univalentes

Una buena manera de construir funciones armónicas univalentes que preservan orientación es a través de lo que se denomina la "Shear's Construction" introducido en [1]. Esta se basa en el siguiente resultado. Recordemos que f es convexa en la dirección θ $(0 \leq \theta < \pi)$ si la intersección de el dominio $f(\mathbb{D})$ con cada línea paralela a la línea que pasa por 0 y $e^{i\theta}$ es vacía o un intervalo.

Teorema 13. *Sea $f = h + \overline{g}$ un mapeo localmente univalente definido en $\mathbb{D}$. Entonces es univalente y convexa en la dirección θ si y solo si la función analítica $h - e^{2i\theta}g$ es univalente y convexa en la dirección θ.*

Algunos autores han definido y estudiado las funciones armónicas establemente univalentes que se definen como sigue:

Definición 14. *Decimos que un mapeo armónico $f = h + \overline{g}$ que preserva orientación es armónico establemente univalente o SHU en $\mathbb{D}$ si todas las funciones $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$ con $|\lambda| = 1$ son univalentes. Análogamente decimos que la función analítica $h + g$ es analítica establemente univalente si la función $F_\lambda = h + \lambda g$ es univalente para todo λ de módulo 1.*

En base ha estas definiciones se han obtenido varios resultados como :

Teorema 15. *El mapeo armónico $f = h + \overline{g}$ que preserva orientación es SHU si y solo si la función analítica $F = h + g$ es establemente univalente.*

Corolario 16. *Sea $f = h + \overline{g}$ un mapeo armónico que preserva orientación en $\mathbb{D}$. Si para todo $|\lambda| = 1$ la función analítica $h + \lambda g$ es univalente entonces f es univalente.*

Teorema 17. *Sea $f = h + \overline{g}$ un mapeo armónico que preserva orientación establemente univalente en $\mathbb{D}$ entonces para todo λ con $|\lambda| = 1$ se tiene que la función $h + \lambda g$ es univalente en $\mathbb{D}$. En particular, h es univalente.*

Para ver detalles de estos resultados vea [5].

Capítulo 4

La Clase de Funciones Armónicas de Bloch

En este capítulo daremos una definición de la clase de funciones armónicas de Bloch, en la literatura es posible encontrar una definición de función de Bloch armónica, de esta se puede deducir que una función $f = h + \overline{g}$ armónica definida en $\mathbb{D}$ ésta en Bloch armónico si y solo si h y g estan en Bloch analítico. Es decir el espacio de Bloch armónico es, en cierta forma, suma directa de dos espacios de Bloch. Hemos querido extender la definición analítica del espacio de Bloch en otra dirección. Notemos que la expresión que aparece en la definición del Bloch analítico es

$$(1-|z|^2)|f'(z)| = (1-|z|^2)\sqrt{J_f(z)}.$$

En el caso armónico, y cuando la dilatación ω satisface que $|\omega(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$ podemos definir de manera análoga esta expresión y es la siguiente

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)\sqrt{J_f(z)} &= (1-|z|^2)(|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-|z|^2)\left(|h'(z)|^2\left(1-\frac{|g'(z)|^2}{|h'(z)|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

así tenemos la siguiente definición:

Definición 18. *Sea $f = h + \overline{g}$ una función armónica con dilatación ω con $|\omega| < 1$*

entonces f se dice una función de Bloch armónico si

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Esta clase de funciones será denotada por $\mathcal{B}_H$.

Observación 19. *Sea $f=h+\overline{g}$ armónica que preserva orientación, con dilatación compleja ω, notemos que la desigualdad*

$$(1-|z|^2)|h'(z)|\leq(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

implica que si $h\in\mathcal{B}$ entonces $f=h+\overline{g}\in\mathcal{B}_H$.

Observación 20. *La clase de funciones de Bloch armónico no es un espacio vectorial, este conjunto no posee estructura ya que la suma de dos funciones de Bloch armónica no es necesariamente una función armónica de Bloch.*
Como ejemplo consideresmos $f_1=h+\overline{g}$ armónica que preserva orientación, y $f_2=-h$ que también preserva orientación. Si sumamos ambas funciones obtenemos $f_1+f_2=h+\overline{g}+(-h)=\overline{g}$, donde vemos que esta función invierte orientación, luego no pertenece al espacio de Bloch armónico.
Más aún, si consideramos dos funciones de Bloch armónico cuya suma tiene dilatación en el disco, tampoco podemos decir algo de esta suma.

Esta clase no es la suma directa de espacios de Bloch. Para ver esto miremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 21. *Sea $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ tal que $h'(z)=\dfrac{1}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}$ y $\omega(z)=z$ luego*

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}} &= (1-|z|^2)\left|\frac{1}{(1-z)^{\frac{5}{4}}}\right|(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{(1-|z|)^{\frac{3}{2}}(1+|z|)^{\frac{3}{2}}}{(1-|z|)^{\frac{5}{4}}}\\ &= (1-|z|)^{\frac{1}{4}}(1+|z|)^{\frac{3}{2}};\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}}\leq\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|)^{\frac{1}{4}}(1+|z|)^{\frac{3}{2}}<\infty,$$

luego $f \in \mathcal{B}_H$. Pero claramente h no está en $\mathcal{B}$ ya que si consideramos z real tendiendo a 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1} \frac{1-z^2}{(1-z)^{\frac{5}{4}}} &= \lim_{z\to 1} \frac{1+z}{(1-z)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso analítico (ver Proposición 7), un objetivo es caracterizar las funciones armónicas de Bloch.

Proposición 22. *Sea $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$, entonces f contiene el disco $\left\{|w| < \frac{1}{16}(1-|b_1|)\right\}$ donde $b_1 = g'(0)$.*

Demostración. Sea $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$, y definamos $F = \dfrac{f-\overline{b_1 f}}{1-|b_1|}$ donde $b_1 = g'(0)$. Esta función pertenece a $\mathcal{S}_H^0(10)$. Entonces F contiene el disco $\left\{|w| < \frac{1}{16}\right\}$. Así F contiene

$$\left\{|\xi| \le t, \text{ para cada } t < \frac{1}{16}\right\},$$

en particular F contiene $|\xi| = t$.
Notemos que

$$\begin{aligned} F(z) &= \xi \\ \frac{f(z)+\overline{b_1 f}}{1-|b_1|^2} &= \xi \\ f(z)+\overline{b_1 f(z)} &= (1-|b_1|^2)\xi, \qquad (4.1) \end{aligned}$$

ahora multiplicando por b_1 y conjugado obtenemos

$$\overline{b_1 f(z)} + |b_1|^2 f(z) = (1-|b_1|^2)\overline{\xi b_1}, \qquad (4.2)$$

luego restando (4.1) y (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) - |b_1|^2 f(z) &= (1-|b_1|^2)(\xi - \overline{\xi b_1}) \\ f(z)(1-|b_1|^2) &= (1-|b_1|^2)(\xi - \overline{\xi b_1}) \\ f(z) &= \xi - \overline{\xi b_1}. \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\xi - \overline{\xi b_1}| \\ |f(z)| &\ge |\xi| - |\xi||b_1| = |\xi|(1-|b_1|) = t(1-|b_1|), \end{aligned}$$

entonces la imagen de f contiene el disco

$$\left\{|\xi| < \frac{1}{16}(1 - |b_1|)\right\}$$

$\square$

Definición 23. *Sea $f : \mathbb{D} \to \Omega$, se dice que f, definida en $\mathbb{D}$ y $f(\mathbb{D}) = \Omega$, no contiene discos arbitrariamente grandes si y sólo si*

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} dist(f(a), \partial\Omega) < \infty.$$

Teorema 24. *Sea f en $\mathcal{S}_H$ tal que $f(\mathbb{D}) = \Omega$. Entonces Ω omite algún punto del círculo $|w| = \frac{2\pi\sqrt{6}}{9}$.*

Para una demostración ver [3, p.90]. Para las funciones de Bloch armónico tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 25. *Sea $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$, con dilatación ω, sea Ω la imagen de f y $||\omega||_\infty < 1$. Entonces f es una función de Bloch armónico si y sólo si la imagen de f no contiene discos arbitrariamente grande.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}_H$ y $a \in \mathbb{D}$, definamos

$$F(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)h'(a)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

F nuevamente pertenece a $\mathcal{S}_H$ y por la Proposición 22 contiene el disco de radio $\dfrac{1}{16}(1 - |b_1|)$ donde b_1 es el segundo coeficiente en el desarrollo de Taylor de G asociada a F, es decir, $b_1 = \omega(a)$. Sea Ω_F la imagen de $\mathbb{D}$ bajo la función F. Entonces tenemos que

$$dist(0, \partial\Omega_F) \geq \frac{1}{16}(1 - |b_1|),$$

lo que traducido para f dice que

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}(1-|\omega(a)|)(1-|a|^2)|h'(a)| &\leq dist(f(a), \partial\Omega) \\ (1-|a|^2)|h'(a)| &\leq \frac{16\, dist(f(a), \partial\Omega)}{(1-|\omega(a)|)} \\ &\leq \frac{M}{(1-||\omega(a)||_\infty)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ya que $||\omega||_\infty < 1$ y Ω no contiene discos arbitrariamente grandes entonces

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|h'(z)| < c,$$

con c constante lo que implica, por la Observacin 19, que f es una función de Bloch armónico.
Recíprocamente, consideremos

$$F(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)h'(a)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

que esta en $\mathcal{S}_H$, usando el Teorema 24 tenemos que

$$dist(\partial F(\mathbb{D}), 0) \leq \frac{2\pi\sqrt{6}}{9}$$

pero $dist(\partial F(\mathbb{D}), 0) = \dfrac{dist(f(a), \partial\Omega)}{(1-|a|^2)|h'(a)|}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dist(f(a),\partial\Omega)}{(1-|a|^2)|h'(a)|} &\leq \frac{2\pi\sqrt{6}}{9} \\
dist(f(a),\partial\Omega) &\leq \frac{(1-|a|^2)|h'(a)|(1-|\omega(a)|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-|\omega(a)|^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{2\pi\sqrt{6}}{9} \\
\sup_{z\in\mathbb{D}} dist(f(a),\Omega) &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)|h'(a)|(1-|\omega(a)|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-|\omega(a)|^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{2\pi\sqrt{6}}{9} \\
\sup_{z\in\mathbb{D}} dist(f(a),\Omega) &\leq \frac{\frac{2\pi\sqrt{6}}{9}}{(1-||\omega||_\infty^2)^{\frac{1}{2}}} \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|a|^2)|h'(a)|(1-|\omega(a)|^2)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

luego como f esta en Bloch armónico y $||\omega||_\infty < 1$ se tiene que Ω no contiene discos arbitrariamente grandes. $\square$

Lema 26. *Sean a, b números reales positivos tales que $a > b$ entonces*

$$(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}} \leq a+b$$

Demostración. Sea a y b números positivos entonces

$$\begin{aligned}
(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}} &\leq (a^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= a \\
&\leq a+b.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 27. *Sea $h, g \in \mathcal{B}$ tal que $\omega = \dfrac{g'}{h'}$ es una autoaplicación del disco unitario. Entonces $f = h + \overline{g} \in \mathcal{B}_H$*

Demostración. Notemos que si $f = h+\overline{g}$ es una función armónica con dilatación $|\omega| < 1$ entonces

$$(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}} = (1-|z|^2)(|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

luego aplicando el lema 26 tenemos que

$$(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (1-|z|^2)(|h'(z)| + |g'(z)|).$$

Así, si $h, g \in \mathcal{B}$ entonces $f \in \mathcal{B}_H$. □

El recíproco es falso, un ejemplo de esto es el ejemplo 21.

Lema 28. *Sea $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H$ con $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, entonces*

$$|a_2| < 49 + \frac{|b_1|}{2}.$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}_H$ y definamos $f_0 = \dfrac{f - \overline{b_1 f}}{1-|b_1|^2}$, $f_0 \in \mathcal{S}_H^0$. Luego

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{h(z) + \overline{g(z)} - \overline{b_1}\overline{(h(z) + \overline{g(z)})}}{1-|b_1|^2} \\ &= \frac{h(z) - \overline{b_1}g(z)}{1-|b_1|^2} + \overline{\frac{g(z) - b_1 h(z)}{1-|b_1|^2}}. \end{aligned}$$

Así, si llamamos $f_0 = h_0(z) + \overline{g_0(z)}$ tenemos que

$$h_0(z) = \frac{h(z) - \overline{b_1}g(z)}{1-|b_1|^2}$$

y

$$h_0''(z) = \frac{h''(z) - \overline{b_1}g''(z)}{1-|b_1|^2},$$

luego usando el Teorema 12 se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\frac{h''(0) - \overline{b_1}g''(0)}{1-|b_1|^2}\right| &< 98 \\ |2a_2 - 2\overline{b_1}b_2| &< 98(1-|b_1|^2) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por otro lado, notemos que

$$g''(0) = \omega'(0)h'(0) + \omega(0)h''(0)$$

de donde se obtiene que

$$2b_2 = \omega'(0) + \omega(0)2a_2.$$

Usando esto en 4.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
|2a_2 - 2\overline{b_1}b_2| &< 98(1-|b_1|^2)\\
|2a_2 - \overline{b_1}(\omega'(0) + \omega(0)2a_2)| &< 98(1-|b_1|^2)\\
|2a_2(1-\overline{b_1}\omega(0)) - \overline{b_1}\omega'(0)| &< 98(1-|b_1|^2).
\end{aligned}$$

Luego usando que $\omega(0) = b_1$ y lema de Schwarz-Pick para ω se obtiene que

$$\begin{aligned}
|2a_2(1-\overline{b_1}\omega(0)) - \overline{b_1}\omega'(0)| &< 98(1-|b_1|^2)\\
|2a_2(1-|b_1|^2)| - |b_1|(1-|b_1|^2) &< 98(1-|b_1|^2)\\
2|a_2| &< 98 + |b_1|\\
|a_2| &< 49 + \frac{|b_1|}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 29. *Sea $f = h + \overline{g}$ en $\mathcal{S}_H^0$ entonces*

$$(1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| < 101.$$

Demostración. Sea $f = h + \overline{g}$ en $\mathcal{S}_H^0$ y consideremos

$$F(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1-|a|^2)h'(a)},$$

$F = H + \overline{G}$ en $\mathcal{S}_H$, donde $H(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ y $G(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$, tenemos que

$$A_2 = \frac{\left(\dfrac{h''(a)}{h'(a)}(1-|a|^2) - 2\overline{a}\right)}{2}.$$

y usando el Lema 28 se tiene que

$$\left|\frac{\left(\dfrac{h''(a)}{h'(a)}(1-|a|^2) - 2\overline{a}\right)}{2}\right| < 49 + \frac{|B_1|}{2}$$

pero $B_1 = \frac{1}{2}|\omega(a)| < \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{h''(a)}{h'(a)}(1-|a|^2) - 2\overline{a}}{2} \right| &< 49 + \frac{1}{4} \\ \left| \frac{h''(a)}{h'(a)}(1-|a|^2) - 2\overline{a} \right| &< 98 + \frac{1}{2} \\ \left| \frac{h''(a)}{h'(a)}(1-|a|^2) \right| &< 101. \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente teorema se puede encontrar en [6].

Teorema 30 (Criterio de Becker Armónico)**.** *Sea $f = h + \overline{g}$ un mapeo armónico que preserva orientación en el disco unitario, con dilatación ω. Sea $P_f(z) = \dfrac{h''}{h'} - \dfrac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}$. Si para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$|zP_f(z)| + \frac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

entonces f es univalente. La constante 1 es la mejor posible.

En la proposición 8 se muestra un resultado que relaciona la univalencia con el espacio de Bloch, el siguiente teorema muestra un análogo en el caso armónico.

En el siguiente teorema utilizamos el Teorema del Criterio de Becker armónico.

Teorema 31. *Si $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^0$ entonces para todo λ con $|\lambda| = 1$ se tiene que $\log \varphi_\lambda' \in \mathcal{B}$ donde $\varphi_\lambda = h + \lambda g$.*
Inversamente, si existe $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ tal que

$$||\log \varphi_\lambda'||_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon,$$

$$\frac{|\omega'|(1-|z|^2)}{1-|\omega|^2} \leq \varepsilon,$$

y $3\varepsilon < 1$, entonces $f = h + \overline{g}$ es Establemente Univalente.

Demostración. Consideremos $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^0$, como $\omega(z) = \dfrac{g'(z)}{h'(z)}$ se tiene que $g'(z) = \omega(z)h'(z)$ y $g''(z) = h''(z)\omega(z) + h'(z)\omega'(z)$ y

$$(1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)+\lambda g''(z)}{h'(z)+\lambda g'(z)}\right| = (1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)} + \frac{\lambda\omega'(z)}{1+\lambda\omega(z)}\right|$$

ahora aplicando desigualdad triangular y el lema de Schwarz-Pick tenemos que

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)+\lambda g''(z)}{h'(z)+\lambda g'(z)}\right| &\leq (1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| + \frac{1-|\omega(z)|^2}{|1+\lambda\omega(z)|} \\ &\leq (1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| + \frac{1-|\omega(z)|^2}{1-|\omega(z)|} \\ &\leq (1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| + 1 + |\omega(z)| \\ &\leq (1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| + 2\end{aligned}$$

lo que esta acotado, esto se ve gracias al Lema 29, por lo que podemos concluir que $\log\varphi'_\lambda \in \mathcal{B}$ para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$.

En sentido inverso usaremos el criterio de Becker armónico (Teorema 30),

$$\begin{aligned}|zP_f(z)| + \frac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} &= |z|\left[\left|\frac{h''}{h'} - \frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2}\right| + \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2}\right] \\ &= |z|\left[\left|\frac{h''}{h'} + \frac{\lambda\omega'}{1+\lambda\omega} - \left(\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} + \frac{\lambda\omega'}{1+\lambda\omega}\right)\right| + \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2}\right]\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\omega}\omega'}{1-|\omega|^2} + \frac{\lambda\omega'}{1+\lambda\omega} &= \frac{\lambda\omega' - \lambda\omega'|\omega|^2 + \overline{\omega}\omega' + \lambda\omega\overline{\omega}\omega'}{(1+\lambda\omega)(1-|\omega|^2)} \\ &= \frac{\lambda\omega' - \lambda\omega'|\omega|^2 + \overline{\omega}\omega' + \lambda|\omega|^2\omega'}{(1+\lambda\omega)(1-|\omega|^2)} \\ &= \frac{\lambda\omega' + \overline{\omega}\omega'}{(1+\lambda\omega)(1-|\omega|^2)} \\ &= \frac{\lambda+\overline{\omega}}{1+\lambda\omega}\frac{\omega'}{1-|\omega|^2}\end{aligned}$$

como $|\lambda| = 1$ se tiene que $\left|\dfrac{\lambda+\overline{\omega}}{1+\lambda\omega}\right| = 1$, ahora usando desigualdad triangular, que

$|z| < 1$ y lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
|zP_f(z)| + \frac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2} &\leq \left|\frac{h''}{h'} + \frac{\lambda\omega'}{1+\lambda\omega}\right| + \left|\frac{\lambda+\overline{\omega}}{1+\lambda\omega}\frac{\omega'}{1-|\omega|^2}\right| + \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2} \\
&= \left|\frac{h''}{h'} + \frac{\lambda\omega'}{1+\lambda\omega}\right| + \left|\frac{\omega'}{1-|\omega|^2}\right| + \frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2} \\
&= \left|\frac{h''}{h'} + \frac{\lambda\omega'}{1+\lambda\omega}\right| + \frac{2|\omega'|}{1-|\omega|^2} \\
&= \frac{||\log\varphi'_\lambda||_{\mathcal{B}}}{1-|z|^2} + 2\frac{|\omega'|}{1-|\omega|^2} \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{1-|z|^2} \\
&< \frac{1}{1-|z|^2}.
\end{aligned}$$

Ahora como $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$ y $f = h + \overline{g}$ tienen el mismo módulo de dilatación se tiene que la cantidad $|zP_f(z)| + \dfrac{|z\omega'(z)|}{1-|\omega(z)|^2}$ es igual tanto para $f = h+\overline{g}$ como para $f = h+\lambda\overline{g}$, por lo tanto $f = h + \overline{g}$ es establemente univalente. □

Con los siguientes dos ejemplos se muestra que la afirmación:

$$f = h + \overline{g} \in \mathcal{B}_H \Leftrightarrow F = h + g \in \mathcal{B}$$

es falsa en las dos direcciones.

Ejemplo 32. *Sea $f = h + \overline{g}$ tal que $h'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}$, $g'(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}$, nótese que $\omega(z) = z$ y*

$$\begin{aligned}
(1-|z|^2)|h'(z)|(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}} &= (1-|z|^2)^{\frac{3}{2}}\left|\frac{1}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}\right| \\
&\leq \frac{(1-|z|^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-|z|)^{\frac{3}{2}}} \\
&= (1+|z|)^{\frac{3}{2}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Por lo que $f \in \mathcal{B}_H$ pero si consideramos $F = h + g$ tenemos que

$$(1-|z|^2)\,|h'(z)+g'(z)| = (1-|z|^2)\left|\frac{1+z}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

considerando $z = x$ *real en* $(0,1)$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)\left|\frac{1+z}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}\right| &= (1-x^2)\frac{1+x}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(1+x)^2}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

lo que tiende a ∞ *cuando* x *tiende a* 1*. Por lo tanto* F *no esta en* $\mathcal{B}$*.*

Y consideremos el siguiente ejemplo para ver la implicancia inversa

Ejemplo 33. *Sea* $F = h + g$ *la función analítica tal que*

$$h'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \ y \ g'(z) = -\frac{z^2}{(1-z)^2}$$

luego

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)|h'(z)+g'(z)| &= (1-|z|^2)\left|\frac{1-z^2}{(1-z)^2}\right| \\ &= (1-|z|^2)\left|\frac{1+z}{1-z}\right| \\ &\leq (1+|z|)|1+z| \\ &\leq 4 \end{aligned}$$

por lo tanto F *pertenece a* $\mathcal{B}$*. Ahora consideremos la correspondiente* $f = h + \overline{g}$*, notemos que* $|\omega(z)| = |z|^2$ *entonces*

$$(1-|z|^2)(1-|\omega(z)|^2)^{\frac{1}{2}}|h'(z)| = (1-|z|^2)(1-|z|^4)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{(1-z)^2}\right|$$

tomando $z = x$ *en* $(0,1)$ *real tenemos que*

$$\begin{aligned} (1-|z|^2)(1-|z|^4)^{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{(1-z)^2}\right| &= (1-x^2)^{\frac{3}{2}}(1+x^2)\frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

que tiende a ∞ *cuando* x *tiende a 1. Por lo que* f *no está en* $\mathcal{B}_H$*.*

En la Sección 3.5 hemos definido las funciones establemente univalentes y hemos mostrado algunos de los resultados que se han obtenido luego de esa definición. Para ver detalles, vea [5]. Esto nos lleva a definir las funciones establemente de Bloch y establemente de Bloch armónico usando nuestra definición de espacio de Bloch armónico y ver qué resultados se pueden obtener de ella.

Definición 34. *Dada $F = h + g$ una función analítica, decimos que F es establemente de Bloch si $\varphi_\lambda = h + \lambda g \in \mathcal{B}$ para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. Análogamente si $f = h + \overline{g}$ función armónica que preserva orientación, decimos que f es establemente de Bloch armónico si $f_\lambda = h + \lambda\overline{g} \in \mathcal{B}_H$ para todo $\lambda \in \partial\mathbb{D}$*

Tras esta definición han surgido varias preguntas en la dirección de [5] y los resultados se muestran a continuación.

Proposición 35. *Si $\varphi = h + g$ es establemente de Bloch entonces $h \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Consideremos φ establemente de Bloch, entonces

$$\begin{aligned} 2|h'(z)| &= |h'(z) + g'(z) + h'(z) - g'(z)| \\ &\leq |h'(z) + g'(z)| + |h'(z) - g'(z)| \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|h'(z)| &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)2|h'(z)| \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)(|h'(z)+g'(z)| + |h'(z)-g'(z)|) \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|h'(z)+g'(z)| + \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|h'(z)-g'(z)| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $h \in \mathcal{B}$.

□

Notemos que $f = h + \overline{g}$ y $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$ tienen el mismo módulo de dilatación compleja. Luego se tiene que

Proposición 36. *Sea $f = h + \overline{g}$ un mapeo armónico que preserva orientación entonces f está en $\mathcal{B}_H$ si y solo si $f_\lambda = h + \lambda\overline{g}$ está en $\mathcal{B}_H$ para algún λ de mdulo 1.*

Con los siguientes ejemplo y observación mostraremos que las siguientes afirmaciones son falsas:

(i) Si $f = h + \overline{g}$ es establemente de Bloch armónico entonces $h \in \mathcal{B}$.

(ii) $f = h + \overline{g}$ es establemente de Bloch armónico entonces $F = h + g$ es establemente de Bloch analítico.

Ejemplo 37. *Usando la Proposición 36 y el Ejemplo 21 vemos que* $f = h + \overline{g}$ *esta en* $\mathcal{B}_H$ *y* $h \notin \mathcal{B}$.

Observación 38. *(ii) es falso, esto es consecuencia de la Proposición 36 y el Ejemplo 32.*

Bibliografía

[1] J. Clunie y T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I **9**(1984),3-25.

[2] P. L. Duren, *Univalent Function*, Springer-Verlag New York Inc, 1983.

[3] P. L. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] I. Graham y G. Kohr, *Geometric Function Theory In One And Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, Basel, 2003.

[5] R. Hernández y M. J. Martín, *Stable geometric properties of analytic and harmonic functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155**(2013), 343-359.

[6] R. Hernández y M. J. Martín, *Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Harmonic Mappings, J. Geom. Anal.* DOI 10.1007/s12220-013-9413-x. Pubished electronically on April 13th, 2013.

[7] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.