



Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística

MUESTREOS DE ACEPTACIÓN BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN BIRNBAUM-SAUNDERS

Trabajo final para optar al título profesional de:
Ingeniero en Estadística

Presentado por:
Daniela Fernández Irarrázabal

Profesor guía:
Dr. Víctor Leiva

Valparaíso, Chile, Mayo de 2011

AGRADECIMIENTOS

A mis padres Viviana y Osvaldo.

Por haberme apoyado, por sus consejos y valores, por acompañarme y estar presente en todo momento.

Gracias por todo el amor que me han entregado siempre.

RESUMEN

El modelo Birnbaum-Saunders (BS) es una distribución de vida que surge desde un problema de fatiga de materiales. La distribución BS describe el tiempo total que transcurre hasta que el desarrollo y crecimiento de una grieta dominante producida por un tipo de daño acumulativo sobrepasa un umbral y causa una falla por fractura. Esta distribución ha sido aplicada en el área de la calidad, específicamente en cartas de control y en el muestreo de aceptación. Este último es una herramienta estadística que consiste en evaluar una característica de calidad en cada una de las unidades que componen una muestra de productos desde un lote recibido, determinando si estos productos cumplen o no con las especificaciones establecidas, permitiendo aceptar o rechazar el lote completo. Existen muestreos de aceptación por variables y por atributos. Entre los principales planes de muestreos de aceptación por atributos se encuentran los de tipo simple, doble, por grupos, económico, múltiple y secuencial, cada uno de éstos con una metodología distinta para tomar una decisión. Por otro lado, en un muestreo de aceptación por atributos basado en una prueba de vida, si la vida media o algún percentil de la vida de los productos es mayor que un valor especificado, el lote de productos es aceptado. De lo contrario, es rechazado. Este último procedimiento es análogo a clasificar cada producto como defectuoso o no defectuoso basado en su tiempo de vida y entonces se puede aplicar algunos de los muestreos de aceptación por atributos mencionados. En este trabajo se presenta el desarrollo e implementación de planes de muestreos de aceptación por atributos basados en pruebas de vida, donde el tiempo de vida de una entidad es modelado mediante una distribución BS. Los procedimientos desarrollados se implementan mediante el software estadístico R-project (<http://www.R-project.org>). Además se presenta un estudio de simulación para analizar las probabilidades de aceptación, riesgo del productor y comparar los tamaños muestrales para la distribución Gaussiana inversa y BS. Por último, se presenta una aplicación para todos los planes implementados.

ABREVIATURAS Y SIMBOLOGÍAS

A continuación se presentan algunas abreviaturas y simbologías que se utilizarán a lo largo de este trabajo de titulación.

ASN	Número promedio de muestra (del inglés average sample number).
BS	Birnbaum-Saunders.
CO	Característica de operación.
CT	Costo total.
fda	Función de distribución acumulativa.
LIE	Límite inferior de especificación.
LSE	Límite superior de especificación.
MA	Muestreo de aceptación.
MAPV	Muestreo de aceptación por atributos basado en una prueba de vida.
NCA	Nivel de calidad aceptable.
RC	Riesgo del consumidor.
RP	Riesgo del productor.
v.a.	Variable aleatoria.
c	Valor del criterio de aceptación.
c_1	Valor del criterio de aceptación de la primera muestra.
c_2	Valor del criterio de aceptación para n_1 y n_2 combinadas.
d_1	Número de artículos defectuosos de la primera muestra.
d_2	Número de artículos defectuosos de la segunda muestra.
$F_T(t)$	Función de distribución acumulativa de T .
n_1	Tamaño muestral de la primera muestra.
n_2	Tamaño muestral de la segunda muestra.
r_1	Valor de la relación media del riesgo de consumidor.
r_2	Valor de la relación media del riesgo del productor.
p	Fracción defectuosa del lote.
T	Variable aleatoria que representa el tiempo de vida de una entidad.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	1
RESUMEN	2
ABREVIATURAS Y SIMBOLOGÍAS	3
OBJETIVOS	6
REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	7
1 MUESTREO DE ACEPTACIÓN	9
1.1 Introducción	9
1.2 Definiciones	9
1.3 Generalidades	10
1.4 Ventajas y desventajas	11
1.5 Clasificación	11
1.6 Muestreo de aceptación por variables	12
1.6.1 Ventajas y desventajas	12
1.6.2 Procedimientos para aplicar un plan de MA	12
1.6.3 Norma MIL STD 414 (ANSI/ASQC Z1.96T)	13
1.6.4 Método del diagrama del lote	14
1.7 Muestreo de aceptación por atributos	14
1.7.1 Plan de muestreo de aceptación simple	15
1.7.2 Plan de muestreo de aceptación doble	15
1.7.3 Plan de muestreo de aceptación múltiple	16
1.7.4 Plan de muestreo de aceptación secuencial	16
1.7.5 Plan de muestreo de aceptación económico	17
1.8 Curvas características de operación	18

1.8.1	Norma militar estándar 105D	21
1.9	Muestreos por atributos basados en pruebas de vida	22
1.9.1	Plan de muestreo de aceptación por grupos	22
1.9.2	Plan de muestreo de aceptación económico confiable	23
1.9.3	Planes basados en uno y dos puntos de la curva CO	23
2	PLANES DE MUESTREOS DE ACEPTACIÓN BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN BS	25
2.1	Introducción	25
2.2	Distribución Birnbaum-Saunders	25
2.3	Planes basados en un punto de la curva CO	26
2.3.1	Plan de muestreo de aceptación simple	27
2.3.2	Plan de muestreo de aceptación doble	28
2.3.3	Plan de muestreo de aceptación por grupos	29
2.3.4	Plan de muestreo de aceptación económico confiable	29
2.4	Planes basados en dos puntos de la curva CO	30
2.4.1	Plan de muestreo de aceptación simple	30
2.4.2	Plan de muestreo de aceptación doble	31
2.4.3	Plan de muestreo de aceptación por grupos	31
3	IMPLEMENTACIÓN, SIMULACIÓN Y APLICACIÓN	33
3.1	Estudio de simulación	33
3.2	Aplicación	34
3.2.1	Planes basados en un punto de la curva CO	35
3.2.2	Planes basados en dos puntos de la curva CO	37
	CONCLUSIONES	42
	ANEXO: PAQUETE BSASP	43

OBJETIVOS

Los objetivos de este trabajo se presentan a continuación.

Objetivo general

Desarrollar e implementar planes de muestreo de aceptación por atributos desde pruebas de vida basadas en una distribución BS.

Objetivos específicos

- (i) Desarrollar planes de muestreos de aceptación simple y por grupos desde pruebas de vida basados en la distribución BS considerando el riesgo del consumidor y del productor.
- (ii) Implementar un código R para muestreos de aceptación desde pruebas de vida basadas en la distribución BS.
- (iii) Llevar a cabo un estudio de simulación para muestreos de aceptación desde pruebas de vida basadas en la distribución BS.
- (iv) Aplicar los resultados obtenidos.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Birnbaum & Saunders (1969a) derivaron un modelo que muestra que las fallas se deben al desarrollo y crecimiento de una fisura dominante. A su vez, ellos demostraron que su distribución está relacionada a la distribución normal. Desmond (1985) demostró que la distribución BS describe el tiempo total que transcurre hasta que cierta clase de daño acumulativo excede un umbral y provoca una falla. El mismo Desmond entregó una derivación más general de esta distribución basada en un modelo biológico y consolidó la justificación física para el uso de esta distribución relajando los supuestos hechos por Birnbaum & Saunders (1969a) indicando, por ejemplo, que la distribución BS también puede obtenerse desde modelos distintos al normal.

Existe una amplia literatura de muestreo de aceptación (MA). Por ejemplo, los libros de Montgomery (1991), Duncan (1996), Stephens (2001) y Schilling & Neubauer (2009) pueden ser revisados. El MA por atributos basado en una prueba de vida (MAPV) ha sido analizado por diversos autores, los cuales han considerado diferentes modelos probabilísticos para los tiempos de vida. Epstein (1954) desarrolló los planes de MAPVs truncadas bajo el supuesto de que el tiempo de vida de una entidad sigue una distribución exponencial. Goode & Kao (1961) consideraron el modelo Weibull. Posteriormente, Gupta (1962) obtuvo planes de MAPVs considerando las distribuciones normal y lognormal. Kantam & Rosaiah (1998) introdujeron una nueva densidad llamada distribución semi-logística en el ámbito de los planes de MAPV. Más tarde, Kantam et al. (2001) consideraron MAPV cuando los tiempos de vida siguen una distribución log-logística. Baklizi (2003) consideró MAPV cuando los tiempo siguen una distribución de Pareto de segunda clase y satisface sólo el riesgo del consumidor. Rosaiah & Kantam (2005) incorporaron la distribución inversa de Rayleigh en MAPV. Por otra parte, Tsai & Wu (2006) consideraron la distribución de Rayleigh generalizada. Rosaiah et al. (2006) utilizaron la distribución log-logística generalizada. Balakrishnan et al. (2007) propusieron el MAPV simple para la distribución BS generalizada. Rao (2009) desarrolló el MAPV por grupos considerando la distribución exponencial generalizada. Por último, Aslam et al. (2009a) desarrollaron un plan de MAPV para la distribución exponencial generalizada cuando las pruebas de vida se truncan en un tiempo asignado previamente.

Basados en la distribución BS, varios autores han estudiado distintos tipos de planes de MAPV. Baklizi & El Masri (2004) utilizaron la distribución BS para modelar tiempos de vida cuando la prueba de vida se trunca en un tiempo asignado previamente. Sin embargo, en este trabajo existen errores conceptuales en la obtención de sus resultados. Tsai & Wu (2005) propusieron el MAPV simple basado en el riesgo del consumidor. Aslam & Kantam (2008) propusieron el plan de MAPV económico confiable para encontrar el tiempo mínimo necesario para desarrollar el plan de MAPV. Aslam et al. (2009b) desarrollaron un plan de MAPV doble y por grupos basándose en los riesgos del consumidor y del productor, en donde propusieron especificar el tiempo como un múltiplo de la vida media especificada. Por último, basándose en el riesgo del consumidor, Aslam (2010) propuso un plan de MAPV doble, especificando también el tiempo como un múltiplo de la vida especificada.

La revisión bibliográfica presentada comprueba que aun no se ha desarrollado un plan de MAPV simple basado en el riesgo del consumidor y productor y un plan de MAPV por grupos basado en el riesgo del consumidor para la distribución BS, los cuales se desarrollaron en este trabajo.

MUESTREO DE ACEPTACIÓN

En este capítulo se presentan aspectos y definiciones del MA por variables y por atributos.

1.1 Introducción

El MA es una herramienta ampliamente utilizada en control de calidad, debido a que permite determinar si un lote de productos cumple con las condiciones de calidad requeridas por el cliente para su uso. El MA se puede aplicar cuando existe una relación entre productor y consumidor, ya sea en el interior de una empresa o entre diferentes empresas. Un lote es un conjunto de productos que presentan una característica de calidad. El MA consiste de evaluar esta característica de calidad en cada una de las unidades que componen la muestra y en determinar si cumplen o no con las especificaciones preestablecidas. Si una unidad no cumple, es considerada disconforme o defectuosa, y si cumple con ellas es considerada aceptable o conforme. Dependiendo del número de unidades disconformes en la muestra, se toma la decisión de aceptar el lote o rechazarlo. El uso más eficiente del MA no es “inyectar calidad al producto mediante la inspección”, sino más bien es una herramienta de verificación con el objetivo de asegurar que la producción o salida de un proceso está conforme con los requisitos establecidos para el producto.

1.2 Definiciones

Definición 1.2.1 (Lote). *Conjunto de unidades (de estudio) que tienen características comunes y que se agrupan con un fin determinado.*

Definición 1.2.2 (Inspección). *Actividades tales como medir, examinar o probar una o más características de un producto o servicio y compararlos con los requisitos especificados para determinar la conformidad.*

Definición 1.2.3 (Muestreo de aceptación). *Es una inspección de muestreo en la que se toma la decisión de aceptar o no un lote.*

Definición 1.2.4 (Artículo defectuoso). *Es aquel que no cumple con las especificaciones en algún aspecto.*

Definición 1.2.5 (Criterio de aceptación (c)). *Es el número máximo admisible de artículos defectuosos en una muestra.*

Definición 1.2.6 (Nivel de calidad aceptable (NCA)). *Es la proporción de artículos defectuosos que el consumidor está dispuesto a admitir.*

Definición 1.2.7 (Riesgo del productor (RP)). *Corresponde a la probabilidad de que un lote de calidad aceptable sea rechazado. El RP corresponde estadísticamente a la probabilidad de cometer el error de tipo I (α), esto es cuando la muestra arroja que el lote es malo cuando realmente era bueno.*

Definición 1.2.8 (Tolerancia de la fracción defectuosa (PDTL)). *Es la proporción de artículos defectuosos en un lote que el consumidor considera inaceptable.*

Definición 1.2.9 (Riesgo del consumidor (RC)). *Corresponde a la probabilidad de que un lote de calidad inaceptable sea aceptado. El RC corresponde estadísticamente a la probabilidad de cometer el error de tipo II (β), esto es cuando la muestra arroja que el lote es bueno cuando realmente era malo.*

1.3 Generalidades

El MA es un campo importante del control de calidad. La mayoría de las industrias reciben materias primas, repuestos y/o componentes desde proveedores externos. Un problema que surge es la comprobación de la calidad satisfactoria de éstos. Normalmente, la decisión que un distribuidor debe tomar es rechazar o aceptar los lotes adquiridos. Para tomar esta decisión de un lote se puede:

- (i) Aceptarlo sin inspección.
- (ii) Realizar una inspección al 100% de las unidades.
- (iii) Examinar un número arbitrario de unidades.
- (iv) Aceptar los certificados de inspección presentados por los proveedores en lugar de examinar el lote.
- (v) Utilizar el MA.

Existen varias consideraciones importantes para formar los lotes destinados a la inspección. Éstas pueden afectar en la eficacia del plan de MA. Algunas de estas consideraciones son las siguientes:

- (i) Deben ser homogéneos.
- (ii) Son preferibles lotes grandes en vez de pequeños.
- (iii) Los lotes deben adecuarse a los sistemas de manejo o manipulación de materiales que se utilizan en las instalaciones del proveedor y del consumidor.

1.4 Ventajas y desventajas

Cuando se compara el MA con una inspección al 100%, el primero tiene las siguientes ventajas:

- (i) Es menos costoso, pues requiere menos inspección.
- (ii) Puede aplicarse en el caso de pruebas destructivas.
- (iii) Hay menos personal implicado en las actividades de inspección.
- (iv) Reduce notablemente la cantidad de errores de inspección.

El MA, sin embargo, tiene también las siguientes desventajas:

- (i) Existe el riesgo de aceptar lotes “malos” y rechazar lotes “buenos”.
- (ii) Necesita planeación del procedimiento de muestreo.

1.5 Clasificación

El MA se puede clasificar en dos tipos según la característica observada:

- (i) **MA por variables.** En la inspección de los artículos se mide una variable cuantitativa. Con las mediciones se calcula un estadístico que se compara con un valor especificado para tomar la decisión de aceptar o rechazar el lote.
- (ii) **MA por atributos.** En la inspección los artículos se dividen en defectuosos o no defectuosos, dependiendo si cumplen con un conjunto de requerimientos. Este MA es el más utilizado. Con los resultados se toma la decisión de aceptar o rechazar el lote.

En la siguiente sección se detalla en qué consisten estos tipos de MAs. Para el caso de MAs por atributos se muestran los diferentes tipos de planes de MAs que existen, además de sus procedimientos.

1.6 Muestreo de aceptación por variables

Cuando una característica de calidad se puede medir en una escala continua y se sabe que tiene una distribución específica, puede ser posible utilizarla como sustituto de un procedimiento de MA por atributos. Estos planes se basan generalmente en la media y la desviación estándar muestrales de la característica de calidad.

1.6.1 Ventajas y desventajas

La ventaja fundamental de estos procedimientos de MA por variables es que puede obtenerse la misma curva característica de operación (CO), con una muestra menor de la necesaria para los procesos por atributos. Una segunda ventaja es que las mediciones de una característica de calidad proporcionan normalmente más información sobre el lote que el número de defectuosos.

La principal desventaja de estos planes de MA es que se debe conocer la distribución de la característica de calidad. En la mayoría de los planes de MA por variables se supone que la distribución de la característica de calidad es normal. La segunda desventaja del MA por variables es que se debe usar un plan para cada característica de calidad que hay que inspeccionar. Por ejemplo, si se deben inspeccionar tres características, es necesario tener tres planes de MA para inspeccionar las variables. En cambio, si se inspecciona a través de un MA por atributos, se podría utilizar sólo un plan.

1.6.2 Procedimientos para aplicar un plan de MA

Existen dos procedimientos de MA por variables para controlar la fracción no conforme del lote o del proceso. Como la característica de calidad es una variable, habrá un límite inferior de especificación (LIE), o uno superior (LSE), o bien ambos, lo que definen los valores aceptables de este parámetro.

Suponga que se conoce la desviación estándar σ de los datos. Se desea muestrear el lote para determinar si el valor de la media permite o no aceptar una fracción defectuosa p . A continuación se presentan dos procedimientos para controlar la fracción defectuosa de un plan de MA por variables.

- (i) **Procedimiento 1.** Se obtiene una muestra aleatoria de n artículos del lote y si hay un límite inferior de especificación se calcula la estadística

$$Z_{\text{LIE}} = \frac{\bar{X} - \text{LIE}}{\sigma}.$$

Se debe especificar una distancia crítica k , para Z_{LIE} . Entonces, si

- (a) $Z_{\text{LIE}} \geq k$, se acepta el lote, porque los datos muestrales indican que la media del lote se halla sobre el LIE para asegurar que la fracción no conforme del lote es satisfactoria.

(b) $Z_{LIE} < k$, se rechaza el lote, ya que la media está demasiado cerca del LIE.

Ahora, si existe un límite superior de especificación se calcula la estadística

$$Z_{LSE} = \frac{LSE - \bar{X}}{\sigma}.$$

Se debe especificar también una distancia crítica k , para Z_{LSE} . Entonces, si

(a) $Z_{LSE} \geq k$, se acepta el lote.

(b) $Z_{LSE} < k$, se rechaza el lote.

(ii) **Procedimiento 2.** Este procedimiento se utiliza cuando están presentes los límites inferior y superior. Se obtiene una muestra aleatoria de n artículos y se calcula Z_{LIE} . Para estimar la fracción defectuosa del lote (p) se utiliza Z_{LIE} como el área bajo la curva normal estándar a la izquierda. Sea \hat{p} el estimador de p y M un máximo especificado. Entonces, si

(a) $\hat{p} > M$, se rechaza el lote.

(b) $\hat{p} \leq M$, se acepta el lote.

Cuando se desconoce la desviación estándar σ , ésta se estima mediante la desviación estándar muestral S y se sustituye σ por S .

1.6.3 Norma MIL STD 414 (ANSI/ASQC Z1.96T)

La norma MIL STD 414 es un plan de MA por variables. Existen 5 niveles generales de inspección. Todos los planes y procedimientos de MA en esta norma suponen que la característica de calidad de interés tiene una distribución normal. La organización de la norma es de la siguiente manera:

- (i) En el caso en que exista un límite unilateral, es decir LIE o LSE, se puede aplicar el procedimiento 1 ó el procedimiento 2, descritos anteriormente.
- (ii) Si existen límites bilaterales, es decir, LIE y LSE, entonces se deberá utilizar el procedimiento 2.
- (iii) Si se conoce la variabilidad del lote o del proceso y ésta es estable, los planes que corresponden a la variabilidad conocida son los más eficaces económicamente.
- (iv) Cuando la variabilidad es desconocida, se podrá usar la desviación estándar o la amplitud de la muestra para el plan de MA. El método de la amplitud requiere un tamaño muestral más grande y su uso no es recomendable.

La norma se divide en 4 secciones (A, B, C, D). La sección A es una descripción general de los planes de MA, incluyendo definiciones y letras códigos para encontrar el tamaño muestral y curvas CO. La sección B tiene planes de MA por variables que se basan en la desviación estándar de la muestra, cuando se desconoce la variabilidad del lote o proceso. La sección C presenta planes de MA por variables que se basan en el método de la amplitud muestral R (en vez de S). La sección D presenta planes de MA por variables para el caso en que se conoce la desviación estándar del proceso. Existen tablas para la inspección normal, estricta y reducida, que proporcionan cambios para estas inspecciones cuando sea necesario; ver Montgomery (1991, páginas 381-386)

1.6.4 Método del diagrama del lote

Este método es un plan de MA por variables en que se utiliza una distribución de frecuencias para los datos muestrales para decidir si rechazar o no el lote. El método del diagrama del lote se puede utilizar cuando la característica de calidad se distribuye normalmente o no. El procedimiento para efectuar este método consiste en tomar 10 muestras aleatorias del lote, cada una de 5 artículos. Luego se construye un histograma o una distribución de frecuencias para estos resultados muestrales. Se calculan límites inferior y superior del lote a partir del histograma. Después de construir el histograma y los límites señalados se puede tomar la decisión de rechazar o aceptar el lote. Para tomar esta decisión se debe comparar el histograma del lote con 11 diferentes tipos de diagramas. Este procedimiento es relativamente sencillo, entregando muchas veces costos de inspección menores; ver Montgomery (1991).

1.7 Muestreo de aceptación por atributos

El MA por atributos se puede aplicar de diferentes formas. Por ejemplo, se utiliza para comprobar los elementos de entrada de un proceso de producción y así satisfacer ciertas condiciones antes de que se ensamblen. Los productos terminados deben satisfacer las especificaciones del consumidor. Este tipo de MA tiene tres parámetros de diseño: N , n y c , donde N es el tamaño del lote, n el tamaño de la muestra y c el número de aceptación. La Figura 1.1 presenta los diferentes tipos de planes de MAs que existen.

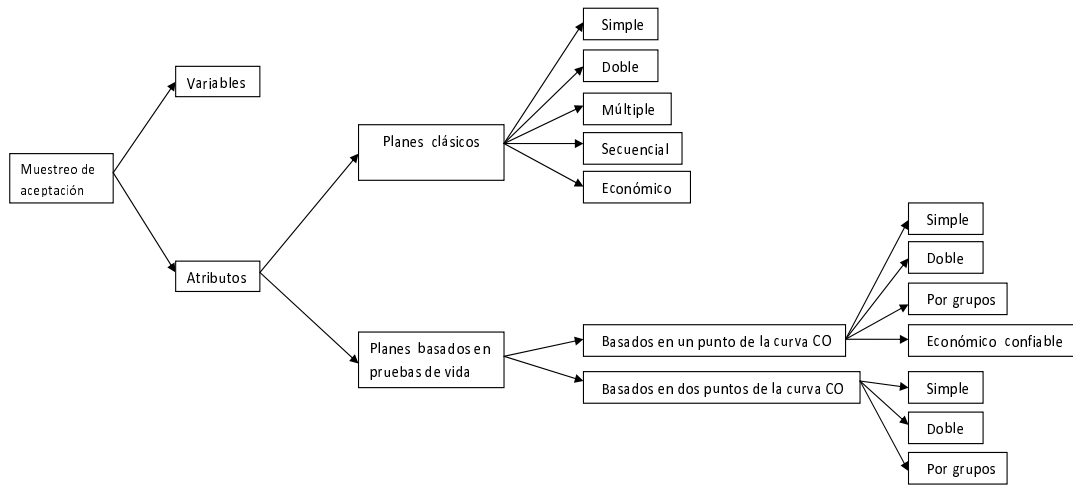


Figura 1.1: tipos de planes de MAs.

1.7.1 Plan de muestreo de aceptación simple

Un plan de MA simple es un procedimiento en el que se toma una muestra aleatoria de n unidades del lote para su apreciación y se determina el destino del lote basado en la información contenida en esa muestra. Es decir, este plan de MA consiste de especificar:

- (i) Tamaño del lote (N).
- (ii) Tamaño de la muestra (n).
- (iii) Criterio de aceptación (c).

La aceptación de un lote ocurre si la cantidad de unidades defectuosas en una muestra de tamaño n es menor que el criterio de aceptación c , en caso contrario se debe optar por el rechazo.

1.7.2 Plan de muestreo de aceptación doble

Un plan de MA doble es un procedimiento en el que después de una muestra inicial, se toma una decisión basada en la información de esta muestra para aceptar el lote, rechazarlo o tomar una segunda muestra. Si se toma esta última, se combina la información de ambas

muestras para decidir si rechazar o no el lote. El plan de MA consiste de tomar la primera muestra de tamaño n_1 . Si la cantidad de artículos defectuosos d_1 es menor o igual que c_1 se acepta el lote, de lo contrario se compara con c_2 . Si $d_1 > c_2$ se rechaza el lote, si no, se toma la segunda muestra de tamaño n_2 . Ahora, si $d_1 + d_2 \leq c_2$, se acepta el lote, si no, se rechaza.

En algunos casos, un plan de MA doble tiene la ventaja de dar una segunda oportunidad al lote. Por otro lado, una desventaja es que puede requerir más inspección total que un plan de MA simple.

1.7.3 Plan de muestreo de aceptación múltiple

Es una extensión del MA doble en el que puede necesitarse más de dos muestras para decidir. Los tamaños muestrales suelen ser menores que en un MA simple o doble. El plan de MA múltiple se divide en etapas, en donde en la primera muestra se hace una inspección al 100% de la muestra. La inspección se detiene tan pronto como el número de rechazo ha sido alcanzado en cualquier etapa posterior a la primera.

La ventaja principal de este tipo de plan es que las muestras en cada etapa son habitualmente más pequeñas que las de un MA simple o doble, además de una economía asociada con este procedimiento. Una desventaja del plan de MA múltiple es que es mucho más complicado de administrar.

1.7.4 Plan de muestreo de aceptación secuencial

Es una extensión del MA múltiple en el que se seleccionan artículos (uno a la vez) del lote y, según la inspección de cada unidad, se toma una decisión de aceptar, rechazar el lote o seleccionar otro artículo. Para realizar este plan de MA se utiliza un gráfico que se presenta en la Figura 1.2 (tomada desde Duncan, 1996, página 191), donde, para cada punto, la abscisa representa el número total de artículos seleccionados hasta ese momento y la ordenada es el número total de artículos defectuosos. Este gráfico contiene dos rectas, una que pasa por la abscisa (de aceptación) y otra por la ordenada (de rechazo). Si los puntos quedan entre las líneas de aceptación y rechazo hay que tomar otra muestra. Cuando el punto cae en la línea superior o sobre ésta, se rechaza el lote. Por el contrario, si cae en la línea inferior o bajo ésta, se acepta el lote; ver Duncan (1996). Aslam (2009) se refirió a este plan de MA como: “El MA secuencial se utiliza para reducir al mínimo el número de elementos de prueba cuando los primeros resultados muestran claramente que el lote cumple o no con las especificaciones”.

donde

nS_1 = costo del muestreo y los n elementos de pruebas.

$y_e S_2$ = costo de reparación de artículos defectuosos en la muestra.

$x e_2 A_2$ = costo asociado con el número esperado de unidades defectuosas en la muestra que se clasifican como buenas y aceptadas.

$(N - n)A_1$ = costo asociado con la manipulación de los $(N - n)$ artículos que no hayan sido inspeccionados en un lote aceptado.

$(X - x)A_2$ = costo asociado con los elementos defectuosos del lote inspeccionado.

El CT esperado, dado que el lote se rechaza, es:

$$CT = nS_1 + y_e S_2 + (N - n)R_1 + X e_2 A_2 + (Y_e - y_e)R_2,$$

donde

nS_1 = costo del muestreo y los n elementos de pruebas.

$y_e S_2$ = costo de reparación de artículos defectuosos en el lote.

$(N - n)R_1$ = costo de la inspección de los $(N - n)$ artículos restantes de un lote rechazado.

$X e_2 A_2$ = costo asociado con el número esperado de unidades defectuosas en el lote que se clasifican como buenas y aceptadas.

$(Y_e - y_e)R_2$ = costo de reparación de artículos defectuosos observados en los $(N - n)$ artículos de un lote rechazado.

El lote será aceptado si el costo esperado de la aceptación es menor o igual al costo esperado del rechazo del lote.

1.8 Curvas características de operación

Un plan de MA se caracteriza por su curva CO. Esta curva representa la probabilidad de aceptar un lote (en la ordenada) contra la fracción muestral defectuosa (en la abscisa). Es decir, muestra la probabilidad de que un lote con cierta fracción de artículos defectuosos sea aceptado o rechazado.

Un plan de MA que separa perfectamente lotes buenos de lotes malos tendría una curva CO como lo muestra la Figura 1.3 (tomada desde Montgomery, 1991, página 311), denominada curva CO ideal. Si se pudiera usar este plan, se rechazarían todos los lotes de mala calidad y se aceptarían todos los de buena calidad. Sin embargo, es casi imposible obtener en la práctica la curva CO ideal. Desafortunadamente, para lograr esto se requiere una inspección al 100%. Sin embargo, es posible acercarse a este tipo de curva incrementando el tamaño muestral, como lo muestra la Figura 1.3 (tomada desde Montgomery, 1991, página 311).

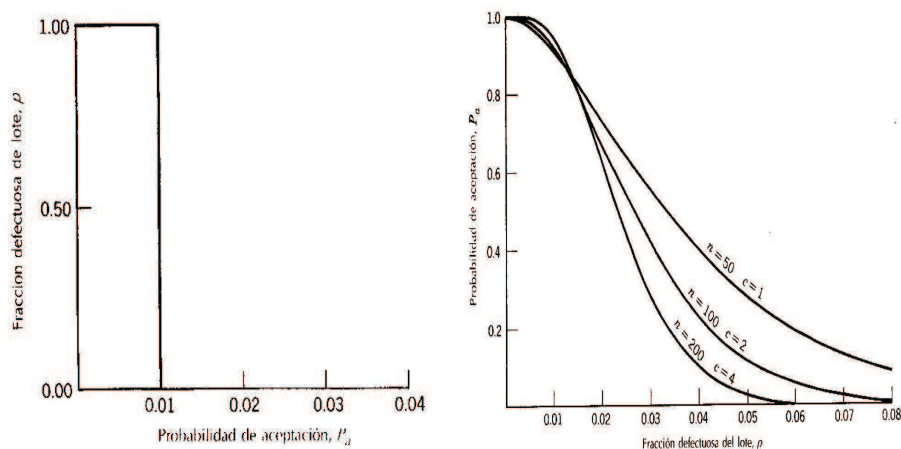


Figura 1.3: curvas CO ideal (izquierda) y para tamaños muestrales diferentes.

Se pueden distinguir dos tipos de curvas CO, las de tipo A y las de tipo B.

- Curva CO de tipo A:

Se utiliza este tipo de curva para calcular las probabilidades de aceptación de un lote aislado de tamaño finito, donde la probabilidad de aceptación está dada por una distribución hipergeométrica expresada por:

$$P(d \leq c) = \sum_{d=0}^c \frac{(pN)!}{d!(pN-d)!} \left(\frac{n}{N}\right)^d \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{pN-d}.$$

- Curva CO de tipo B:

Es aquella curva que indica las probabilidades de aceptación para lotes de tamaño infinito, donde la probabilidad de aceptación está dada por una distribución binomial expresada por:

$$P(d \leq c) = \sum_{d=0}^c \frac{(n)!}{d!(n-d)!} p^d (1-p)^{n-d}.$$

Para estas curvas, d representa el número de unidades defectuosas en la muestra de tamaño n (extraída desde un lote de tamaño N) y c el criterio de aceptación.

La diferencia entre la curva CO de tipo A y de tipo B es principalmente que en la curva CO de tipo A se emplea la distribución hipergeométrica, mientras que en la curva CO de tipo B se hace uso de la distribución binomial. Además, la curva CO tipo A se asemeja cada vez más a una CO tipo B cuando N es grande.

Aun cuando la mayor información de un plan de MA la proporciona la curva CO, en ocasiones el interés se centra en ciertos puntos de la curva. Por un lado, el productor estará interesado en la calidad del lote o producto que le dé una probabilidad de aceptación

mayor. De esta forma, el productor se esforzará para obtenerla y centrará su atención en las probabilidades 0.95 ó 0.99 (podrían ser otras), las cuales se denotan por $p'_{0.95}$ y $p'_{0.99}$. Por otro lado, el consumidor podría estar interesado en la calidad del lote o producto (curvas CO de tipo A y de tipo B, respectivamente) que dé una probabilidad de aceptación menor. Así, él centra su atención en las probabilidades 0.01 ó 0.05, es decir, en los puntos $p'_{0.01}$ y $p'_{0.05}$.

El funcionamiento de un plan de MA simple está dado por la curva CO, dada en la Figura 1.4.

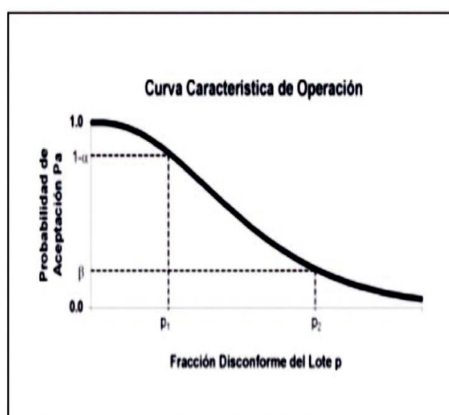


Figura 1.4: curva CO para el plan de MA simple.

La fracción defectuosa, representada por p , es la probabilidad de encontrar una unidad defectuosa en el lote (cantidad de unidades defectuosas en el lote dividido por el total de unidades que conforman el lote) con $0 < p < 1$.

El funcionamiento del plan de MA doble al igual que el simple, también está dado por la curva CO. Esta curva del MA doble es un poco más complicada que la curva CO para un MA simple. La Figura 1.5 (tomada desde Montgomery, 1991, página 323) describe la curva CO de tipo B para el MA doble. Un plan de MA de este tipo tiene una CO primaria que da la probabilidad de aceptación en función de la fracción defectuosa del lote. También existen curvas CO suplementarias que muestran la probabilidad de aceptación y de rechazo en la primera muestra.

P_a denota la probabilidad de aceptación en las muestras combinadas y P'_a y P''_a la probabilidad de aceptación en la primera y segunda muestra, respectivamente, donde

$$P_a = P'_a + P''_a.$$

La curva CO para los MAs múltiple y secuencial es una extensión de la curva CO del MA doble y los procedimientos para el cálculo de estas curvas se pueden encontrar en Duncan (1996) y Montgomery (1991), respectivamente.

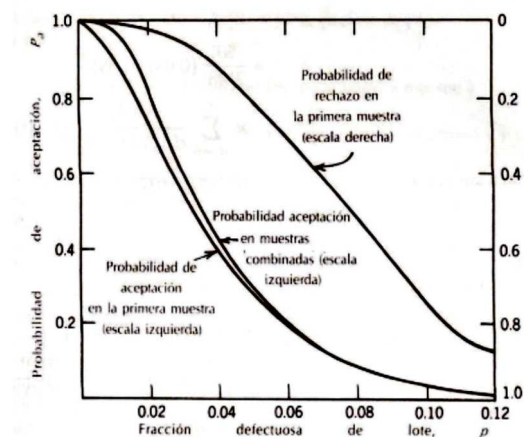


Figura 1.5: curvas CO para el plan de MA doble.

1.8.1 Norma militar estándar 105D

La norma MIL STD 105D es el resultado de un estudio llevado a cabo por el grupo de trabajo americano-británico-canadiense que trató de establecer un patrón común para los tres países. Esta norma fue publicada por el gobierno de Estados Unidos en 1963. La MIL STD 105D es el sistema de MA por atributos de mayor uso en el mundo actualmente. Esta norma proporciona tres tipos de MA: simple, doble y múltiple. Para cada tipo de plan de MA existen 3 inspecciones:

- (i) Normal: que se utiliza al inicio de la actividad de inspección.
- (ii) Estricta: que se establece cuando el historial de la calidad del proveedor se ha deteriorado.
- (iii) Reducida: que se establece cuando el historial reciente de la calidad del proveedor ha sido excepcionalmente buena. El tamaño muestral que se utiliza en una inspección reducida generalmente es menor que en el de una normal.

El punto principal de la norma MIL STD 105D es el nivel de calidad aceptable (NCA). Cuando se emplea la norma para planes de porcentajes defectuosos, los NCA varían de 0,1% a 10%.

El tamaño muestral que se utiliza en la norma MIL STD 105D se determina mediante el tamaño del lote y la selección de un nivel de inspección. Existen tres niveles de inspección. El nivel II se considera normal. El nivel I necesita alrededor de la mitad del grado de inspección que el II. El nivel III requiere casi el doble de inspección que el nivel II. La decisión acerca de cuál nivel se debe utilizar, se basa en el tipo de producto que se trate.

Para un NCA específico, un nivel de inspección y un tamaño muestral dado, la norma MIL STD 105D proporciona un proceso de MA normal que se utiliza cuando el proveedor

genera productos que tengan un NCA. Esta norma también ofrece un procedimiento para cambiar el nivel de inspección cada vez que haya un cambio de calidad del proveedor. Existen tablas para encontrar el tamaño de muestra mínimo necesario para cada tipo de plan de muestro (simple, doble y múltiple); ver Montgomery (1991, páginas 339-350).

1.9 Muestreos por atributos basados en pruebas de vida

Cuando se quiere conocer el tiempo de vida útil de una entidad (es decir, el tiempo de falla o el tiempo que deja de funcionar satisfactoriamente), es muy común terminar la prueba de vida en un tiempo prefijado, es decir, se puede trunca esta prueba, ya que se podría requerir de mucho tiempo de espera hasta que todas las entidades fallen cuando la vida útil de éstas es alta. El objetivo es encontrar el menor tamaño de muestra para asegurar la vida media especificada. Para ello se fija el riesgo del consumidor y/o productor, el criterio de aceptación c y la razón t/μ_0 , donde μ_0 es la vida media que se desea especificar y t representa el tiempo que dura el experimento de vida. La prueba se puede terminar cuando existan $(c + 1)$ fallas o en el tiempo t , lo que ocurra primero. Para encontrar los tamaños muestrales se supone que el tamaño del lote es suficientemente grande y que la falla de un artículo durante la prueba se produce de forma independiente, de modo que se hace uso de la distribución binomial.

En un MAPV, si la vida media o algún percentil de la vida de los productos es mayor que un valor especificado, entonces el lote de productos es aceptado. De lo contrario, el lote es rechazado. Para elaborar un plan de MAPV es necesario caracterizar la distribución que modela los tiempos de vida.

Para los MAPVs, también están presente los planes antes mencionados (simple y doble) y además se encuentran los planes de MAPVs por grupos y económico confiable que se describen a continuación

1.9.1 Plan de muestreo de aceptación por grupos

A menudo, cuando se diseña un plan de MA se coloca sólo un elemento a prueba. Sin embargo, en la práctica se escogen múltiples elementos a la vez. Esto se hace porque el tiempo de prueba y el costo puede ser minimizado al probar elementos al mismo tiempo. Es por esto que tales tipos de planes son de utilidad. Para desarrollar este tipo de plan de MAPV, se debe especificar:

- (i) Número de grupos (g).
- (ii) Número de elementos r .
- (ii) Criterio de aceptación (c).
- (iii) La razón de t/μ_0 .

Se extrae una muestra de tamaño n , donde $n = r \times g$. Se distribuyen r elementos a cada uno de los grupos. El lote es aceptado si la cantidad de artículos defectuosos en todos los grupos no es mayor que c durante un tiempo pre-asignado t , de lo contrario se rechaza.

1.9.2 Plan de muestreo de aceptación económico confiable

Este tipo de MAPV se utiliza para encontrar la razón t/μ_0 o también el tiempo mínimo para cierto tamaño de muestra. Este tipo de plan, basado en una prueba de vida truncada, consiste de especificar:

- (i) Tamaño de la muestra (n).
- (ii) Criterio de aceptación (c).
- (iii) La razón de t/μ_0 .

Se puede probar la hipótesis nula $H_0: \mu > \mu_0$ y su hipótesis alternativa $H_1: \mu < \mu_0$. Si la hipótesis alternativa es rechazada sobre la base del tiempo de vida de algunos artículos puestos a prueba, se rechaza la hipótesis de que la vida media real es menor que la vida media especificada y se acepta la hipótesis nula. Alternativamente, se acepta el producto presentado durante el tiempo de experimento t . Se detiene el proceso si en el tiempo t se registran más fallas que c . El procedimiento para encontrar la razón t/μ_0 se mostrará en el Capítulo 2.

1.9.3 Planes basados en uno y dos puntos de la curva CO

Dentro de los planes por atributos aplicados a tiempos de vida, existen los planes basados en uno y dos puntos de la curva CO. Para los planes basados en un punto de la curva, se encuentran los de tipo simple, doble, por grupos y económico confiable. Para los basados en dos puntos, están los de tipo simple, doble y por grupos. Los planes basados en uno y dos puntos de la curva CO se muestran a continuación.

(i) Planes basados en un punto de la curva CO

Cuando se habla de planes basados en un punto de la curva CO, se está interesado en el riesgo del consumidor. A menudo este riesgo se expresa por el nivel de confianza del consumidor. Si el nivel de confianza es $1 - \beta$, entonces la probabilidad de riesgo del consumidor es β . Para obtener el tamaño de muestra mínimo, para asegurar la vida media especificada, se debe determinar

- (a) Riesgo del consumidor.
- (b) Criterio de aceptación.
- (c) La razón t/μ_0 .

Existen tablas diseñadas para encontrar los tamaños de muestra mínimos para diferentes valores de t/μ_0 . Basándose en la distribución BS generalizada, López (2006) presentó estas tablas.

La decisión de aceptar el lote ocurre si durante el período de prueba, denotado por t , la cantidad de fallas no excede un valor c . Si más de c unidades fallaron durante el período de prueba, tiene sentido detener el experimento y en este caso se puede optar por el rechazo del lote.

(ii) **Planes basados en dos puntos de la curva CO**

Si el plan de MAPV está basado en dos puntos, al igual que en el plan de MAPV anterior (basado en un punto) se fija el RC (β) y además el RP (α). Es por esto que se llama plan de MAPV basado en dos puntos. El productor desea que la probabilidad de rechazo debe ser menor que la especificada y a su vez el consumidor requiere que la probabilidad de aceptación del lote debe ser menor que el riesgo especificado con anterioridad. Para encontrar el tamaño de muestra necesario para tomar la decisión de rechazar o no el lote se debe especificar:

- (i) Riesgo del consumidor.
- (ii) Riesgo del productor.
- (iii) Criterio de aceptación.
- (iv) La razón t/μ_0 .

Aquí, la decisión de aceptar el lote ocurre también si la cantidad de fallas en un período t no sobrepasa el valor c , de lo contrario se rechaza.

PLANES DE MUESTREOS DE ACEPTACIÓN BASADOS EN LA DISTRIBUCIÓN BS

En este capítulo se presenta una breve caracterización de la distribución BS y de los métodos para elaborar los distintos tipos de planes de MAPVs, en donde estos tiempos siguen una distribución BS.

2.1 Introducción

Altamente motivados por el problema de vibración en aviones comerciales que producía fatiga en los materiales, Birnbaum & Saunders (1969a) desarrollaron un modelo probabilístico de dos parámetros ingenioso que describe los tiempos de vida de unidades expuestas a cargas cíclicas bajo estrés que producen fatiga. Ellos demostraron que su distribución está relacionada a la distribución normal. La distribución BS describe el tiempo de falla que transcurre hasta que cierta clase de daño acumulado excede un umbral de resistencia máximo provocando la ruptura del material.

2.2 Distribución Birnbaum-Saunders

La distribución BS se define en términos de la distribución normal estándar a través de la variable aleatoria (v.a.).

$$T = \lambda \left[\frac{\gamma}{2} Z + \sqrt{\left\{ \frac{\gamma}{2} Z \right\}^2 + 1} \right]^2, \quad (2.1)$$

donde $Z \sim N(0, 1)$, $\gamma > 0$ y $\lambda > 0$. Esto es denotado por $T \sim BS(\gamma, \lambda)$, con γ siendo el parámetro de forma y λ es el parámetro de escala. Así, si $T \sim BS(\gamma, \lambda)$, entonces

$$Z = \frac{1}{\gamma} \left[\sqrt{\frac{T}{\lambda}} - \sqrt{\frac{\lambda}{T}} \right] \sim N(0, 1). \quad (2.2)$$

La función de densidad de probabilidad de una v.a. $T \sim BS(\gamma, \lambda)$ está dada por

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{t}{\lambda} + \frac{\lambda}{t} - 2 \right] \right) \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \lambda]}{2\gamma\sqrt{\lambda}}, \quad t > 0, \gamma > 0, \lambda > 0. \quad (2.3)$$

La función de distribución acumulativa (fda) de T está dada por

$$F_T(t) = \Phi \left(\frac{1}{\gamma} \left[\sqrt{\frac{t}{\lambda}} - \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right] \right), \quad (2.4)$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la fda de $Z \sim N(0, 1)$. La función cuantil de T está dada por

$$t(p) = F_T^{-1}(p) = \lambda \left[\frac{\gamma z_p}{2} + \sqrt{\left\{ \frac{\gamma z_p}{2} \right\}^2 + 1} \right]^2, \quad 0 < p < 1,$$

donde z_p es el percentil p -ésimo de $Z \sim N(0, 1)$.

La media, la varianza y los coeficientes de variación (CV), sesgo (CS) y curtosis (CC) de T son, respectivamente,

$$\mu = E[T] = \lambda \left[1 + \frac{\gamma^2}{2} \right], \quad (2.5)$$

$$\sigma^2 = V[T] = \frac{\lambda^2}{4} [5\gamma^4 + 4\gamma^2], \quad (2.6)$$

$$CV = \frac{\sqrt{5\gamma^4 + 4\gamma^2}}{\gamma^2 + 2}, \quad CS = \frac{44\gamma^3 + 24\gamma}{[\sqrt{5\gamma^2 + 4}]^3} \quad \text{y} \quad CC = 3 + \frac{558\gamma^4 + 240\gamma^2}{[5\gamma^2 + 4]^2}. \quad (2.7)$$

2.3 Planes basados en un punto de la curva CO

Para desarrollar los planes de MAPV usando la distribución BS se debe ocupar su fda dada en la Ecuación (2.4). Se utiliza también el primer momento de la distribución dada en la Ecuación (2.5). Si se especifica $\mu = \mu_0$, entonces $\mu_0 = \lambda_0 [1 + \gamma^2/2]$ con el parámetro de

forma γ dado y λ_0 parámetro de escala especificado. La fda en la Ecuación (2.4) puede escribirse como

$$F(t; \lambda_0) = \Phi \left(\frac{1}{\gamma} \left[\sqrt{\frac{t}{\lambda_0}} - \sqrt{\frac{\lambda_0}{t}} \right] \right). \quad (2.8)$$

2.3.1 Plan de muestreo de aceptación simple

Tsai & Wu (2005) propusieron el siguiente plan de MAPV:

Paso 1: Tomar la primera muestra de tamaño n de un lote y poner a prueba por t unidades de tiempo.

Paso 2: Seleccionar el valor de c .

Paso 3: El lote se acepta si durante el período máximo de prueba t , la cantidad de fallas no supera c , de lo contrario se rechaza.

Para un lote de tamaño infinito y fijando el RC que no puede exceder $1 - P^*$, el tamaño de muestra mínimo viene dado por

$$\sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \leq 1 - P^*, \quad (2.9)$$

donde $p = F_T(t; \lambda_0)$ corresponde a la probabilidad de encontrar una falla durante el período de prueba t . La Ecuación (2.8) muestra que $F_T(t; \lambda_0)$ depende únicamente del cociente $t/\lambda_0 = t/\mu_0[1 + \gamma^2/2]$ y el experimento sólo tiene que especificar la razón t/λ_0 , esto es porque λ_0 es un parámetro de escala.

Sea $\lambda^* = t/\lambda$. Desde la Ecuación (2.4) se puede demostrar que la $F_T(t)$ es una función creciente en λ^* , ya que derivando de $F_T(t)$ con respecto a λ^* , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda^*} F(t; \lambda) &= \frac{d}{d\lambda^*} \Phi \left(\frac{1}{\gamma} \left[\sqrt{\lambda^*} - \sqrt{\frac{1}{\lambda^*}} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\gamma\lambda^*} \phi \left(\frac{1}{\gamma} \left[\sqrt{\lambda^*} - \sqrt{\frac{1}{\lambda^*}} \right] \right) \left[\sqrt{\lambda^*} + \sqrt{\frac{1}{\lambda^*}} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

De esto se deduce que $F_T(t; \lambda) \leq F_T(t; \lambda_0)$ lo cual es equivalente a $\lambda \geq \lambda_0$ y $\mu \geq \mu_0$. Esto demuestra que si el número de fallas observadas en el tiempo t es menor o igual a c , entonces se puede afirmar que $\mu \geq \mu_0$ con probabilidad P^* .

La curva CO del plan de MAPV ($n, c, t/\mu_0$) da la probabilidad de aceptar un lote y viene dada por

$$L(p) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad (2.10)$$

donde $p = F_T(t; \mu_0)$.

2.3.2 Plan de muestreo de aceptación doble

Aslam (2010) propuso el siguiente plan de MAPV:

Paso 1: Tomar la primera muestra de tamaño n_1 de un lote y poner a prueba por t unidades de tiempo.

Paso 2: Aceptar el lote si hay c_1 o un menor número de fallas. Rechazar el lote y poner fin a la prueba tan pronto como se observe $(c_2 + 1)$ fallas. Si el número de fallas se encuentra entre c_1 y c_2 , tomar la segunda muestra de tamaño n_2 del lote y poner a prueba durante otras t unidades de tiempo.

Paso 3: Aceptar el lote si el número total de fallas de la primera y segunda muestra no es mayor que c_2 . De lo contrario, terminar la prueba y rechazar el lote.

El plan de MAPV doble se caracteriza por cuatro parámetros (n_1, n_2, c_1, c_2) . El plan de MAPV simple es un caso especial del plan de MAPV doble cuando $c_1 = c_2$. Aslam (2010) propuso que el tiempo de prueba es conveniente especificarlo como un múltiplo de la vida media especificada, como por ejemplo, $t = b \times \mu_0$. Si p_0 denota la probabilidad de falla cuando $\mu = \mu_0$, entonces la Ecuación (2.8) puede reescribirse como

$$p_0 = \Phi \left(\frac{1}{\gamma} \left[\left\{ b \left(1 + \frac{\gamma^2}{2} \right) \right\}^{1/2} - \left\{ \frac{1}{b(1 + \gamma^2/2)} \right\}^{1/2} \right] \right). \quad (2.11)$$

La probabilidad de aceptación del lote para el plan de MAPV doble viene dada por

$$L(p) = \sum_{i=0}^{c_1} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} + \sum_{x=c_1+1}^{c_2} \binom{n_1}{x} p^x (1-p)^{n_1-x} \left[\sum_{i=0}^{c_2-x} \binom{n_2}{i} p^i (1-p)^{n_2-i} \right]. \quad (2.12)$$

El primer término de la Ecuación (2.12) representa la probabilidad de aceptación de la primera muestra y el segundo la probabilidad de aceptación de la segunda muestra. El número promedio de la muestra está dado por

$$\text{ASN}(p) = n_1 P_1 + (n_1 + n_2)(1 - P_1) = n_1 + n_2(1 - P_1), \quad (2.13)$$

donde P_1 es la probabilidad de que la decisión fue tomada por la primera muestra y está dada por

$$P_1 = 1 - \sum_{i=c_1+1}^{c_2} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i}.$$

Los parámetros para el plan de MAPV doble serán determinados por la solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \text{ASN}(p_0) \\ &\text{sujeto a} && L(p_0) \leq \beta \\ &&& 1 \leq n_2 \leq n_1 \\ &&& n_1, n_2 \text{ enteros,} \end{aligned}$$

donde p_0 está dada en la Ecuación (2.11). La segunda restricción se especifica porque no se desea que el tamaño de la segunda muestra sea mayor que el de la primera muestra.

2.3.3 Plan de muestreo de aceptación por grupos

Rao (2009) propuso el siguiente plan de MAPV por grupos:

Paso 1: Seleccionar el número de grupos predefinidos y asignar r elementos a cada grupo para que el tamaño de la muestra de un lote sea $n = g \times r$.

Paso 2: Seleccionar el número de aceptación c ($\leq r$) para un grupo y el tiempo de prueba t .

Paso 3: Realizar la prueba para los g grupos simultáneamente y registrar el número de fallas para cada grupo.

Paso 4: Aceptar el lote si no más de c fallas ocurren en todos los grupos. De lo contrario se rechaza el lote.

El plan de MAPV por grupos se caracteriza por dos parámetros, c y g . La probabilidad de aceptación de un lote (dada por la curva CO) para el plan de MAPV por grupos está dada por

$$L(p) = \left[\sum_{i=0}^c \binom{r}{i} p^i (1-p)^{r-i} \right]^g, \quad (2.14)$$

donde p es la probabilidad de falla de un producto dada en la Ecuación (2.8). Los valores de c y g se pueden determinar utilizando la desigualdad:

$$L(p) \leq \beta. \quad (2.15)$$

El ASN para este caso es $n = g \times r$.

2.3.4 Plan de muestreo de aceptación económico confiable

Aslam & Kantam (2008) propusieron el siguiente plan de MAPV:

Paso 1: Poner a prueba n elementos y se fija el tiempo de experimento t .

Paso 2: Fijar el valor de c .

Paso 3: Rechazar el lote tan pronto como se observen $(c + 1)$ fallas antes del tiempo t y aceptar el lote si el número de fallas antes de t es a lo más c . En este caso, la probabilidad de aceptación del lote viene dada por:

$$L(p) = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

donde p es la probabilidad de falla de un producto dada en la Ecuación (2.8).

Para encontrar los tamaños de muestra mínimos se debe cumplir la siguiente desigualdad, donde se debe fijar el RC, que no debe exceder $1 - P^*$; es decir,

$$\sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \leq 1 - P^*.$$

Se puede encontrar la razón t/μ_0 satisfaciendo la desigualdad:

$$\sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq P^*,$$

donde p está dada en la Ecuación (2.8).

2.4 Planes basados en dos puntos de la curva CO

Para desarrollar los planes de MAPVs se deben ocupar las mismas ecuaciones mencionadas en la Sección (2.3).

2.4.1 Plan de muestreo de aceptación simple

Para determinar el tamaño de muestra y la decisión de aceptar el lote es de la misma forma que se realizó en el plan de MAPV basado en un punto. Se considera la misma probabilidad de aceptación dada en la Ecuación (2.10). Si $t = b \times \mu_0$, la probabilidad de falla dada en la Ecuación (2.8) puede reescribirse como

$$p = \Phi \left(\frac{1}{\gamma} \left\{ \left[\frac{b(1 + \gamma^2/2)}{\mu/\mu_0} \right]^{1/2} - \left[\frac{\mu/\mu_0}{b(1 + \gamma^2/2)} \right]^{1/2} \right\} \right). \quad (2.16)$$

Entonces, para encontrar los parámetros n y c , se deben cumplir simultáneamente las desigualdades:

$$P_a(p|\mu/\mu_0 = r_1) \leq \beta \quad (2.17)$$

y

$$P_a(p|\mu/\mu_0 = r_2) \geq 1 - \alpha, \quad (2.18)$$

donde r_1 es la relación media del RC y r_2 es la relación media del RP.

Dado que p_1 es la probabilidad de falla correspondiente a la relación media de r_1 y p_2 la probabilidad de falla correspondiente a la relación media de r_2 . Entonces, las desigualdades en Ecuación (2.17) y (2.18) pueden escribirse

$$L(p_1) = \left[\sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \right] \leq \beta \quad (2.19)$$

y

$$L(p_2) = \left[\sum_{i=0}^c \binom{n}{i} p_2^i (1-p_2)^{n-i} \right] \geq 1 - \alpha \quad (2.20)$$

2.4.2 Plan de muestreo de aceptación doble

Los pasos para determinar el tamaño de muestra y decidir la aceptación o rechazo del lote en este plan son los mismos mencionados para el plan de MAPV doble basado en un punto. Se considera también la misma probabilidad de aceptación dada en la Ecuación (2.12). Aquí también la probabilidad de falla esta dada por la Ecuación (2.16).

Para encontrar los parámetros del plan (n_1, n_2, c_1, c_2) utilizando el RC y RP se deben cumplir simultáneamente las desigualdades:

$$P_a(p|\mu/\mu_0 = r_1) \leq \beta \quad (2.21)$$

y

$$P_a(p|\mu/\mu_0 = r_2) \geq 1 - \alpha. \quad (2.22)$$

Entonces, las desigualdades dadas en la Ecuación (2.21) y (2.22) pueden escribirse como

$$L(p_1) = \sum_{i=0}^{c_1} \binom{n_1}{i} p_1^i (1-p_1)^{n_1-i} + \sum_{x=c_1+1}^{c_2} \binom{n_1}{x} p_1^x (1-p_1)^{n_1-x} \left[\sum_{i=0}^{c_2-x} \binom{n_2}{i} p_1^i (1-p_1)^{n_2-i} \right] \leq \beta \quad (2.23)$$

y

$$L(p_2) \sum_{i=0}^{c_1} \binom{n_1}{i} p_2^i (1-p_2)^{n_1-i} + \sum_{x=c_1+1}^{c_2} \binom{n_1}{x} p_2^x (1-p_2)^{n_1-x} \left[\sum_{i=0}^{c_2-x} \binom{n_2}{i} p_2^i (1-p_2)^{n_2-i} \right] \geq 1 - \alpha. \quad (2.24)$$

Cabe notar que pueden haber múltiples soluciones que cumplan las Ecuaciones (2.23) y (2.24), por lo que se propone elegir una de éstas para reducir al máximo el ASN dada en (2.13). Por lo tanto, los parámetros para el plan de MAPV doble serán determinados por la solución del siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \text{ASN}(p_1) \\ &\text{sujeto a} && L(p_1) \leq \beta \\ &&& L(p_2) \geq 1 - \alpha \\ &&& 1 \leq n_2 \leq n_1 \\ &&& n_1, n_2 \text{ enteros.} \end{aligned}$$

El ASN se puede evaluar en p_1 o p_2 . Aslam et al. (2010) sugirieron la evaluación del ASN en la que sea mayor.

2.4.3 Plan de muestreo de aceptación por grupos

Los pasos para la toma de muestra y la decisión de aceptar o rechazar un lote en este plan son los mismos mencionados para el plan de MAPV por grupos basado en un punto. Se

considera la misma probabilidad de aceptación dada en la Ecuación (2.14). Aquí también la probabilidad de falla esta dada por la Ecuación (2.16).

Para este plan, los parámetros se pueden determinar bajo el enfoque de dos puntos. Por lo tanto, los valores de c y g se pueden determinar utilizando las desigualdades:

$$P_a(p|\mu/\mu_0 = r_1) \leq \beta \quad (2.25)$$

y

$$P_a(p|\mu/\mu_0 = r_2) \geq 1 - \alpha. \quad (2.26)$$

Entonces, las desigualdades dadas en la Ecuación (2.25) y (2.26) pueden escribirse como

$$L(p_1) = \left[\sum_{i=0}^c \binom{r}{i} p_1^i (1 - p_1)^{r-i} \right]^g \leq \beta \quad (2.27)$$

y

$$L(p_2) = \left[\sum_{i=0}^c \binom{r}{i} p_2^i (1 - p_2)^{r-i} \right]^g \geq 1 - \alpha \quad (2.28)$$

El ASN es también para este caso $n = g \times r$. En el siguiente capítulo se muestra como se aplican los planes de MAPV vistos basados en uno y dos puntos de la CO mediante ejemplos.

IMPLEMENTACIÓN, SIMULACIÓN Y APLICACIÓN

En este capítulo se muestra la implementación para los planes de MAPV vistos en el Capítulo 2 mediante el software R-project. Esta implementación se encuentra en el paquete `bsASP`. Se muestra también un estudio de simulación y se revisan los códigos implementados a través de ejemplos para una empresa transnacional.

3.1 Estudio de simulación

Primero se realizó un estudio de simulación para analizar las probabilidades de aceptación para el plan de MAPV simple y doble, los resultados se observan en las Tablas 3.1 y 3.2, respectivamente. Para el caso del plan de MAPV simple se consideró $n = 10, 30, 100$, $t/\mu_0 = 0.3, 0.5, 1.0$, $c = 0, 1, 2$ y $\gamma = 0.2, 0.5, 1.0$. Para el caso del plan de MAPV doble se consideró $(n_1, n_2) = (10, 8); (30, 28); (60, 58)$, $t/\mu_0 = 0.3, 0.5, 1.0$, $(c_1, c_2) = (0, 1); (0, 2); (1, 2)$ y $\gamma = 0.2, 0.5, 1.0$.

Se realizó otro estudio para analizar los riesgos del productor para el caso del MAPV simple. Aquí se consideró $n = 10, 30, 100$, $t/\mu_0 = 0.3, 0.5, 1.0$, $c = 0, 1, 2$ y $\gamma = 0.5$. Los resultados se observan en la Tabla 3.3.

Por último se realizó un estudio de simulación para analizar los tamaños muestrales para el MAPV simple para el caso de la distribución Gaussiana inversa y BS. Aquí se consideró $P^* = 0.75, 0.95, 0.99$, $t/\mu_0 = 0.3, 0.5$, $c = 0, 1, 2$ y $\gamma = 0.5, 1.0$. Los resultados se pueden observar en la Tabla 3.4.

En las Tablas 3.1 y 3.2 se observa que a medida que el n y (n_1, n_2) aumentan,

respectivamente, las probabilidades de aceptación disminuyen, esto ocurre para las tres razones $t/\mu_0 = 0.3, 0.5, 1.0$, es decir, mientras más grande sea n y (n_1, n_2) para el plan MAPV simple y doble, respectivamente, menor será la probabilidad de aceptar el lote.

Para el caso del criterio de aceptación, se observa que a medida que éste aumenta, mayor son las probabilidades de aceptación, es decir, mientras más grande sea c y (c_1, c_2) el lote tendrá una mayor probabilidad de ser aceptado.

También se ve que a medida que aumenta el parámetro de forma γ las probabilidades de aceptación disminuyen, lo mismo ocurre cuando las razones aumentan. Entonces, cuanto más grande sea γ y t/μ_0 para cualquier tamaño muestral, menor será la probabilidad de aceptar el lote, esto ocurre para el plan MAPV simple y doble.

Para el caso del MAPV simple y doble, las probabilidades de aceptación se comportan de la misma forma (aumentan o disminuyen) para cuando $n; (n_1, n_2), c; (c_1, c_2), t/\mu_0$ y γ aumentan.

Desde la Tabla 3.3 se ve que mientras más grande sea el n para cada valor de t/μ_0 , mayor será el RP, es decir, a medida que el n aumente también aumentará el RP.

Para el caso del criterio de aceptación, se observa que a medida que éste aumenta, menor es el RP, es decir, mientras más grande sea c , el productor tendrá una menor probabilidad de riesgo.

Por último, se observa que a medida que aumenta la razón t/μ_0 el RP aumenta. Entonces, cuanto más grande sea t/μ_0 para cualquier tamaño muestral, mayor será el RP.

En la Tabla 3.4, considerando las distribuciones Gaussiana inversa y BS, se obtuvo que para cada valor de t/μ_0 el n disminuye a medida que aumenta γ .

Se puede ver que a medida que aumenta t/μ_0 el n disminuye, esto es para el caso de las dos distribuciones. Por lo tanto, se tendrá un tamaño de muestra más pequeño a medida que aumente la razón t/μ_0 .

También se observa que para el caso del nivel de confianza P^* y el criterio de aceptación c , mientras más grande sean éstos, mayor será el tamaño de muestra.

Contrastando este análisis entre la distribución Gaussiana inversa y BS, se observa que para los distintos $P^*, c, t/\mu_0$ y γ el tamaño muestral que se requiere es siempre menor para la distribución BS.

3.2 Aplicación

El paquete **bsASP** se revisará mediante ejemplos para una empresa transnacional. Ésta es una de las empresas electrónicas más grande del mundo. Es líder mundial en diferentes ámbitos de electricidad, uno de ellos es la iluminación. Para mantener su liderazgo se preocupan de la calidad de sus productos y es por esto que uno de los métodos que han adoptado es el MA, específicamente para las ampollitas de electricidad.

A continuación se muestran los distintos tipos de planes de MAPVs que utiliza la empresa para verificar sus lotes de ampollitas. Los valores de μ_0 y γ para cada ejemplo

fueron especificados en base a datos históricos de la empresa.

3.2.1 Planes basados en un punto de la curva CO

3.2.1.1 Plan de muestreo de aceptación simple

La empresa está interesada en realizar un plan de MAPV simple para asegurar la vida media que es de al menos 1000 horas, con una confianza $P^* = 0.75$ para las ampollitas eléctricas cuyos tiempos de falla siguen una distribución BS con parámetro $\gamma = 0.5$ y debe detener la prueba en $t=300$ horas. Para calcular el tamaño de muestra mínimo se debe utilizar el comando `nSinglebs()`, donde se debe especificar P^* , c , t/μ_0 y γ . Entonces, para un número de aceptación $c = 2$, el tamaño de muestra para los correspondientes valores de $P^* = 0.75$, $c = 2$, $t/\mu_0 = 0.3$ y $\gamma = 0.5$ es el siguiente:

```
> nSinglebs(0.75, 2, 0.3, 0.5)
[1] 347
```

Por lo tanto, se tienen que poner a prueba 347 unidades. La empresa puede afirmar que la vida media es mayor o igual a 1000 horas con un nivel de confianza de 0.75 si hay 2 ó menos fallas en 347 unidades que se observan durante 300 horas.

3.2.1.2 Plan de muestreo de aceptación doble

La empresa está interesada en comparar dos planes de MAPV doble en términos de tamaños de muestras requeridos, utilizando el número promedio de muestra. Se supone que la vida útil de las ampollitas eléctricas sigue una distribución BS con parámetro de forma 1 y la vida media especificada es de 1000 horas. Se quiere detener la prueba en 500 horas (es decir, $b = 0.5$). Se sabe que el RC es de 10% cuando la vida media real es de 1000 horas. Los planes de MAPV a comparar son los siguientes:

1. $\beta = 0.1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, $\gamma = 1$ y $b = 0.5$
2. $\beta = 0.1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $n_1 = 11$, $n_2 = 3$, $\gamma = 1$ y $b = 0.5$

Para calcular el ASN se debe utilizar el comando `ASNbs()` donde se debe especificar β , c_1 , c_2 , n_1 , n_2 , γ y b . Entonces, para los 2 planes de MAPV se tiene lo siguiente:

```
> ASNbs(0.10, 0, 1, 10, 5, 1, 0.5)
[1] 10.23818
> ASNbs(0.10, 0, 1, 11, 3, 1, 0.5)
[1] 11.09645
```

Por lo tanto, al comparar los resultados se puede ver que el ASN del primer plan de MAPV es menor que el del segundo plan, es decir, es más conveniente utilizar el primero. Por lo tanto, se deben poner a prueba 10 ampollitas en un tiempo de 500 horas. Se acepta el lote si hay 0 fallas. Si falla 1 ampollita, se debe poner a prueba durante 500 horas la segunda muestra de tamaño 5. Se acepta el lote si no existen fallas en la segunda muestra (es decir, se observa una falla en las dos muestras).

3.2.1.3 Plan de muestreo de aceptación por grupos

La empresa está interesada en realizar un plan de MAPV por grupos, utilizando cuatro ampollitas para cada grupo, asegurando la vida media que es de al menos 1000 horas, con una confianza $P^* = 0.75$. La vida útil de una ampollita sigue una distribución BS con parámetro de forma $\gamma = 1.0$. Se detendrá la prueba en $t = 700$ horas. Para calcular el número de grupos se debe utilizar el comando `nGroupbs()`, donde se debe especificar P^* , c , t/μ_0 , r y γ . Entonces para un número de aceptación $c = 2$, el tamaño de muestra para los correspondientes valores de $P^* = 0.75$, $c = 2$, $r = 4$, $t/\mu_0 = 0.7$ y $\gamma = 1.0$ es el siguiente:

```
> nGroupbs(0.75, 2, 4, 0.7, 1.0)
[1] 4
```

Por lo tanto, se debe tomar una muestra aleatoria de tamaño $16 = (4 \times 4)$, destinar 4 ampollitas a cada uno de estos 4 grupos y realizar el experimento en 700 horas. Se rechaza el lote si hay más de 2 fallas observadas en los 4 grupos.

3.2.1.4 Plan de muestreo de aceptación económico confiable

La empresa quiere saber si el tiempo de 153 horas cumple las condiciones para desarrollar el siguiente plan de MAPV. Se desea asegurar la vida media que es de al menos 1000 horas, con una confianza $P^* = 0.95$ para 6 ampollitas cuyos tiempos de vida siguen una distribución BS con parámetro $\gamma = 1$ y un criterio de aceptación $c = 2$. Para saber si el tiempo de 153 horas cumple con las especificaciones, se utiliza el comando `EcReliabbs()`, donde se debe especificar P^* , t/μ_0 , c , n y γ . Entonces, para $P^* = 0.95$, $t/\mu_0 = 153/1000 = 0.153$, $c = 2$, $n = 6$ y $\gamma = 1$ el resultado es el siguiente:

```
> EcReliabbs(0.95, 0.153, 2, 6, 1)
[1] "the constraint is satisfied"
```

Por lo tanto, el tiempo $t = 153$ cumple con la restricción de este plan de MAPV, es decir, se deben poner a prueba 6 ampollitas en un tiempo de 153 horas y la empresa puede afirmar que la vida media es mayor o igual a 1000 horas si hay 2 ó menos fallas en las 6 unidades que se observan durante 153 horas.

3.2.2 Planes basados en dos puntos de la curva CO

3.2.2.1 Plan de muestreo de aceptación simple

La empresa está interesada en establecer un plan de MAPV simple considerando el RC y RP. La vida útil de una ampollita sigue una distribución BS con parámetro de forma $\gamma = 1.5$. Se quiere detener la prueba en $t = 100$ horas. Se supone que el RC es de 25% cuando la vida media especificada es de $\mu_0 = 1000$ horas y el RP es de 5% cuando la verdadera vida media es de 2000 horas. Para calcular el tamaño de muestra mínimo se debe utilizar el comando `nSingle2bs()`, donde se debe especificar β , α , c , r_1 , r_2 , γ y b . Entonces, para un número de aceptación $c = 2$, el tamaño de muestra para los correspondientes valores de $\beta = 0.25$, $\alpha = 0.05$, $c = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $\gamma = 1.5$ y $b = 0.1$ es el siguiente:

```
> nSingle2bs(0.25, 0.05, 2, 1, 2, 1.5, 0.1)
[1] 30
```

Por lo tanto, se tienen que poner a prueba 30 ampollitas. La empresa puede afirmar que la vida media es mayor o igual a 1000 horas si hay 2 ó menos fallas en las 30 ampollitas que se observan durante 100 horas.

3.2.2.2 Plan de muestreo de aceptación doble

La empresa está interesada en comparar dos planes de MAPV doble en términos de tamaños de muestras requeridos, utilizando el ASN. Se supone que la vida útil de las ampollitas siguen una distribución BS con parámetro de forma 1 y la vida media especificada es de 1000 horas. Se quiere detener la prueba en 500 horas. Se sabe que el RC es de 10% cuando la vida media real es de 1000, mientras que el RP es del 5% cuando la vida media real es de 4000. Los planes de MAPV a comparar son los siguientes:

1. $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.05$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, $\gamma = 1$ y $b = 0.5$
2. $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.05$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 4$, $n_1 = 7$, $n_2 = 3$, $\gamma = 1$ y $b = 0.5$

Para calcular el ASN se debe utilizar el comando `ASN2bs()`, donde se debe especificar β , α , c_1 , c_2 , r_1 , r_2 , n_1 , n_2 , γ y b . Entonces, para los 2 planes de MAPV se tiene lo siguiente:

```
> ASN2bs(0.10, 0.05, 0, 1, 1, 4, 6, 4, 1, 0.5)
[1] 6.806564
> ASN2bs(0.10, 0.05, 0, 1, 1, 4, 7, 3, 1, 0.5)
[1] 7.433034
```

Por lo tanto, al comparar los resultados se puede ver que el ASN del primer plan de MAPV es menor que el del segundo plan, es decir, es más conveniente utilizar el primero. Por lo tanto, se deben poner a prueba 6 ampolletas en un tiempo de 500 horas. Se acepta el lote si hay 0 fallas. Si falla 1 ampolleta, se debe poner a prueba durante 500 horas la segunda muestra de tamaño 4. Se acepta el lote si no existen fallas en la segunda muestra (es decir, se observa una falla en las dos muestras).

3.2.2.3 Plan de muestreo de aceptación por grupos

La empresa está interesada en realizar un plan de MAPV por grupos utilizando cinco ampolletas para cada grupo y tomar una decisión sobre los lotes presentados. La vida útil de una ampolleta sigue una distribución BS con parámetro de forma $\gamma = 1.5$. Se quiere detener la prueba en $t = 100$ horas. Se supone que el RC es de 25% cuando la vida media especificada es de $\mu_0 = 1000$ horas y el RP es de 5% cuando la verdadera vida media es de 2000 horas. Para calcular el número de grupos se debe utilizar el comando `nGroup2bs()`, donde se tiene que especificar β , α , c , r_1 , r_2 , r , γ y b . Entonces, para un número de aceptación $c = 2$, el tamaño de muestra para los correspondientes valores de $\beta = 0.25$, $\alpha = 0.05$, $c = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r = 5$, $\gamma = 1.5$ y $b = 0.1$ es el siguiente:

```
> nGroup2bs(0.25, 0.05, 2, 1, 2, 5, 1.5, 0.1)
[1] 82
```

Por lo tanto, la empresa debe tomar una muestra aleatoria de tamaño $410 = (82 * 5)$, destinar 5 ampolletas a cada uno de estos 82 grupos y realizar el experimento en 100 horas. Se rechaza el lote si hay más de 2 fallas observadas en los 82 grupos.

Tabla 3.1: probabilidades de aceptación para el plan de MAPV simple.

Razón		$t/\mu_0 = 0.3$		
	c	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$
$n = 10$	0	1.0000	0.8927	0.0994
	1	1.0000	0.9946	0.3576
	2	1.0000	0.9998	0.6592
$n = 30$	0	1.0000	0.7115	0.0010
	1	1.0000	0.9551	0.0086
	2	1.0000	0.9954	0.0375
$n = 100$	0	1.0000	0.3216	9.4286e-11
	1	1.0000	0.6885	2.5426e-09
	2	1.0000	0.8957	2.5426e-09
Razón		$t/\mu_0 = 0.5$		
	c	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$
$n = 10$	0	0.9967	0.2733	0.0076
	1	1.0000	0.6518	0.0552
	2	1.0000	0.8877	0.1902
$n = 30$	0	0.9910	0.0204	4.3276e-07
	1	1.0000	0.1052	8.6088e-06
	2	1.0000	0.2755	8.3269e-05
$n = 100$	0	0.9703	2.3209e-06	6.1302e-22
	1	0.9996	3.4471e-05	3.9219e-20
	2	1.0000	0.0003	1.2427e-18
Razón		$t/\mu_0 = 1.0$		
	c	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$
$n = 10$	0	0.0004	0.0001	2.1602e-05
	1	0.0055	0.0019	0.0004
	2	0.0320	0.0138	0.0041
$n = 30$	0	7.9192e-11	1.9162e-12	1.008e-14
	1	2.8618e-09	8.5733e-11	5.9307e-13
	2	5.0119e-08	1.8577e-09	1.6890e-11
$n = 100$	0	2.1327e-34	8.7397e-40	2.2125e-47
	1	2.5193e-32	1.2830e-37	4.2875e-45
	2	1.4734e-30	9.3249e-36	4.1133e-43

Tabla 3.2: probabilidades de aceptación para el plan de MAPV doble.

Razón	$t/\mu_0 = 0.3$			
	c_1, c_2	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$
$n_1 = 10, n_2 = 8$	0,1	1.0000	0.9858	0.1401
	0,2	1.0000	0.9990	0.2723
	1,2	1.0000	0.9994	0.4051
$n_1 = 30, n_2 = 28$	0,1	1.0000	0.8888	0.0010
	0,2	1.0000	0.9747	0.0011
	1,2	1.0000	0.9844	0.0087
$n_1 = 60, n_2 = 58$	0,1	1.0000	0.6857	9.6534e-07
	0,2	1.0000	0.8649	9.6586e-07
	1,2	1.0000	0.9132	1.6005e-05
Razón	$t/\mu_0 = 0.5$			
	c_1, c_2	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$
$n_1 = 10, n_2 = 8$	0,1	1.000	0.4073	0.0085
	0,2	1.000	0.6395	0.0161
	1,2	1.000	0.7354	0.0579
$n_1 = 30, n_2 = 28$	0,1	0.9999	0.0226	4.3276e-07
	0,2	1.000	0.0358	4.3302e-07
	1,2	1.000	0.1097	8.6089e-06
$n_1 = 60, n_2 = 58$	0,1	0.9995	0.0004	1.8728e-13
	0,2	1.0000	0.0004	1.8728e-13
	1,2	1.0000	0.0039	7.2637e-12
Razón	$t/\mu_0 = 1.0$			
	c_1, c_2	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 1.0$
$n_1 = 10, n_2 = 8$	0,1	0.0004	0.0001	2.1679e-05
	0,2	0.0006	0.0002	2.3537e-05
	1,2	0.0055	0.0019	0.0004
$n_1 = 30, n_2 = 28$	0,1	7.9192e-11	1.9162e-12	1.0080e-14
	0,2	7.9192e-11	1.9162e-12	1.0080e-14
	1,2	2.8618e-09	8.5733e-11	5.9307e-13
$n_1 = 60, n_2 = 58$	0,1	6.2713e-21	3.6720e-24	1.0161e-28
	0,2	6.2713e-21	3.6720e-24	1.0161e-28
	1,2	4.4699e-19	3.2490e-22	1.1855e-26

Tabla 3.3: riesgo del productor para MAPV simple.

Razón	c	$t/\mu_0 = 0.3$	$t/\mu_0 = 0.5$	$t/\mu_0 = 1.0$
$n = 10$	0	0.1073	0.7267	0.9999
	1	0.0054	0.3482	0.9981
	2	0.0002	0.1123	0.9862
$n = 30$	0	0.2885	0.9796	1.000
	1	0.0449	0.8948	1.000
	2	0.0046	0.7245	1.000
$n = 100$	0	0.6784	1.0000	1.000
	1	0.3115	0.9999	1.000
	2	0.1043	0.9997	1.000

Tabla 3.4: tamaños muestrales para la distribución Gaussiana Inversa y BS.

Distribución	Gaussiana inversa		Birnbaum-Saunders		
Razón	c	$t/\mu_0 = 0.3$			
		$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$
$P^* = 0.75$	0	165	8	123	7
	1	321	16	238	13
	2	468	23	347	19
$P^* = 0.95$	0	357	17	265	13
	1	565	27	419	22
	2	750	36	556	29
$P^* = 0.99$	0	548	26	406	20
	1	791	38	586	30
	2	1001	48	742	38
Razón	c	$t/\mu_0 = 0.5$			
		$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1.0$
$P^* = 0.75$	0	12	4	11	3
	1	24	7	22	7
	2	35	10	32	10
$P^* = 0.95$	0	26	7	24	7
	1	41	11	38	11
	2	55	15	50	14
$P^* = 0.99$	0	39	11	36	10
	1	57	16	52	15
	2	73	20	66	19

CONCLUSIONES

Un área dentro de la estadística que ha ido cobrando importancia rápidamente a través del tiempo para lograr obtener un producto con patrones de calidad óptima, ha sido precisamente el “control de calidad”. Una herramienta importante para garantizar la calidad óptima es el MA, el cual puede ser aplicado a tiempos de vida. Para modelar estos tiempos se utiliza la distribución Birnbaum-Saunders, debido a su aplicación ampliamente utilizada para analizar tiempos de falla asociados a la fatiga de materiales. Por esta razón, esta distribución es conocida también como la distribución de vida de la fatiga. En este trabajo se presentaron aspectos generales del MA y sus diferentes tipos, los que fueron necesarios para poder aplicar el MAPV. Se presentaron algunas propiedades de la distribución BS. Conocer las propiedades de esta distribución resultó sumamente útil para desarrollar un plan de MA simple considerando el riesgo del productor y del consumidor y un plan de MA por grupos considerando el RC. Además se presentaron los planes ya desarrollados de MA simple, doble, por grupos y económico confiable, todos estos basados en tiempos de vida, considerando RP y RC. También se hicieron tres estudios de simulación. El primero para analizar como se comportan las probabilidades de aceptación para el plan de MAPV simple y doble en diferentes casos, el segundo para analizar como se comporta el RC para el plan de MAPV simple en diferentes casos y el tercero para comparar los tamaños muestrales desde una distribución Gaussiana inversa y BS. Cumpliendo al objetivo principal de este trabajo de titulación se logró implementar computacionalmente los resultados obtenidos a través del software R-Project, cuyo paquete se llama **bsASP**, principalmente este paquete entrega los tamaños de muestra para desarrollar los distintos planes de MAPV presentados en el Capítulo 2. Para ilustrar los códigos implementados se realizó una aplicación, mediante ejemplos basados en una empresa transnacional, para cada tipo de plan de MAPV, detallando los pasos a seguir para el uso del paquete presentado. El paquete **bsASP** es el primer acercamiento a la implementación de los planes de MAPV basados en la distribución BS en el paquete computacional estadístico R-project, el cual puede servir como base para una implementación más completa de estos planes.

ANEXO: PAQUETE BSASP

El siguiente código corresponde a la implementación computacional en R-project de los planes de MAPV desarrollados en el Capítulo 2.

```
##-----  
##Plan de muestreo de aceptación simple basado en un punto  
##Obs:ratio=t/mu_0.  
##-----  
##-----  
##Cálculo de n:  
##-----  
  
nSinglebs <- function(P, c, ratio, gamma){  
  s <- ratio*(1+(gamma^2/2))  
  a <- ((1 / gamma) * (s^(1 / 2) - s^(-1 / 2)))  
  cdf <- pnorm(a, 0, 1)  
  c <- c  
  p <- cdf  
  Q <- (1 - P)  
  enes <- vector("numeric")  
  n <- 1  
  cont <- 0  
  value <- 0  
  total <- 100  
  while(total >= Q){  
    suma <- 0  
    for(x in 0:c){  
      value <- dbinom(x, n, p)  
      suma <- (suma + value)  
    }  
  }  
}
```

Muestreos de aceptación para la distribución Birnbaum-Saunders

```
        total      <- suma
        cont       <- (cont + 1)
        enes[cont] <- n
        n          <- (n + 1)
    }
return(max(enes)) }

##-----
##Plan de muestreo de aceptación simple basado en dos puntos.
##Obs: ratio=t/mu_0.
##-----
##-----
##Cálculo de n:
##-----

nSingle2bs <- function(beta, alpha, c, r1, r2, gamma, b){
  s1 <- (b/r1)*(1+(gamma^2/2))
  a1 <- ((1 / gamma) * (s1^(1 / 2) - s1^(-1 / 2)))
  cdf1 <- pnorm(a1, 0, 1)
  s2 <- (b/r2)*(1+(gamma^2/2))
  a2 <- ((1 / gamma) * (s2^(1 / 2) - s2^(-1 / 2)))
  cdf2 <- pnorm(a2, 0, 1)
  r1 <- r1
  r2 <- r2
  b <- b
  c <- c
  p1 <- cdf1
  p2 <- cdf2
  Q1 <- beta
  Q2 <- alpha
  ns1 <- vector("numeric")
  ns2 <- vector("numeric")
  n1 <- 1
  n2 <- 1
  value1 <- 0
  value2 <- 0
  j <- 1
  k <- 1
  for(x in 0:c){
    n1<- x
```

```

    repeat{
      n1<-(n1+1)
      value1 <- pbinom(x, n1, p1, lower.tail = TRUE,log.p = FALSE)
      if (value1<=Q1) break
    }
    ns1[j]=n1
    j= j + 1
  }
X<- max(ns1)
for(y in 0:c){
  n2<-y repeat{
    n2<- (n2 + 1)
    value2<-pbinom(y, n2, p2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
    if (value2>=Q2) break
  }
  ns2[k]=n2
  k = k + 1
}
Y<- max(ns2)
w<- max(X,Y)
return(w)
}

```

```

##-----
##Plan de muestreo de aceptación doble basado en un punto
##-----

```

```

##-----
##Cálculo de ASN:
##-----

```

```

ASNbs <- function(beta, c1, c2, n1, n2, gamma, b){
  s <- b*(1+(gamma^2/2))
  a <- ((1 / gamma) * (s^(1 / 2) - s^(-1 / 2)))
  cdf <- pnorm(a, 0, 1)
  g <- gamma
  c1 <- c1
  c2 <- c2
  p <- cdf
  Q1 <- beta
  total1 <- 100
  value <- 0
}

```

```

suma1 <- 0
suma2 <- 0
suma3 <- 0
suma <- 0
aux <- 0
for(x in 0:c1){
  value1 <- dbinom(x, n1, p)
  suma1 <- (suma1 + value1)
}

for(y in c1+1:c2){
  value2 <- dbinom(y, n1, p)

  for(z in 0:c2-y){
    value3 <- dbinom(z, n2, p)
    suma3 <- (suma3 + value3)

  }
  aux <- value2 * suma3
  suma3 <- 0
  suma <- suma + aux

}

total1 <- suma+ suma1

if(total1 <= Q1){
  suma4 <- 0
  for(w in (c1+1):c2){
    value <- dbinom(w, n1, p)
    suma4 <- value + suma4
  } P1 <-(1 - suma4)
ASN <- n1 * P1 + (n1 + n2) * (1 - P1)
return(ASN)
}
stop("the constraint is not satisfied") }

##-----
##Plan de muestreo de aceptación doble basado en dos puntos
##-----

```



```

##-----
##Cálculo de ASN:
##-----
ASN2bs <- function(beta, alpha, c1, c2, r1, r2, n1, n2, gamma, b){
  s1 <- (b/r1)*(1+(gamma^2/2))
  a1 <- ((1 / gamma) * (s1^(1 / 2) - s1^(-1 / 2)))
  cdf1 <- pnorm(a1, 0, 1)
  s2 <- (b/r2)*(1+(gamma^2/2))
  a2 <- ((1 / gamma) * (s2^(1 / 2) - s2^(-1 / 2)))
  cdf2 <- pnorm(a2, 0, 1)
  g <- gamma
  c1 <- c1
  c2 <- c2
  p1 <- cdf1
  p2 <- cdf2
  Q1 <- beta
  Q2 <- (1 - alpha)
  cont <- 0
  value <- 0
  total1 <- 100
  total2 <- 100
  suma1 <- 0
  suma2 <- 0
  suma3 <- 0
  suma <- 0
  aux <- 0
  for(x in 0:c1){
    value1 <- dbinom(x, n1, p1)
    suma1 <- (suma1 + value1)
  }

  for(y in c1+1:c2){
    value2 <- dbinom(y, n1, p1)

    for(z in 0:c2-y){

      value3 <- dbinom(z, n2, p1)

      suma3 <- (suma3 + value3)
    }
  }
}

```

```

    aux <- value2 * suma3
    suma3 <- 0
    suma <- suma + aux
  }

  total1 <- suma +suma1
  suma1 <- 0
  suma2 <- 0
  suma3 <- 0
  suma <- 0
  aux <- 0
  for(x in 0:c1){
    value1 <- dbinom(x, n1, p2)
    suma1 <- (suma1 + value1)
  }

  for(y in c1+1:c2){
    value2 <- dbinom(y, n1, p2)

    for(z in 0:c2-y){
      value3 <- dbinom(z, n2, p2)
      suma3 <- (suma3 + value3)
    }
    aux <- value2 * suma3
    suma3 <- 0
    suma <- suma + aux
  }
  total2 <- suma +suma1

if(total1 <= Q1 && total2 >= Q2){
  suma4 <- 0
  for(w in (c1+1):c2){
    value <-dbinom(w, n1, p1)
    suma4 <- value + suma4
  }
  P1 <- (1 - suma4)
  ASN2 <- n1 * P1 + (n1 + n2) * (1 - P1)
  return(ASN2)
}
stop("the constraint is not satisfied") }

```

```
##-----  
##Plan de muestreo de aceptación por grupos basado en un punto  
##-----  
  
##-----  
##Cálculo de g:  
##-----  
nGroupbs <- function(P, c, r, ratio, gamma){  
  s <- ratio*(1+(gamma^2/2))  
  a <- ((1 / gamma) * (s^(1 / 2) - s^(-1 / 2)))  
  cdf <- pnorm(a, 0, 1)  
  r <- r  
  c <- c  
  p <- cdf  
  Q <- (1 - P)  
  ges <- vector("numeric")  
  g <- 1  
  cont <- 0  
  value <- 0  
  total <- 100  
  j <- 1  
  for(x in 0:c){  
    g<- x  
    repeat{  
      g <- (g + 1)  
      value <- pbinom(x, r, p, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)^(g)  
      if (value<=Q) break  
    }  
    ges[j]=g j = j + 1  
  }  
  return(max(ges))  
}
```

```

##-----
##Plan de muestreo de aceptación por grupos basado en dos puntos
##-----
##-----
## Cálculo de g:
##-----

nGroup2bs <- function(beta, alpha, c, r1, r2, r, gamma, b){
  s1  <- (b/r1)*(1+(gamma^2/2))
  a1  <- ((1 / gamma) * (s1^(1 / 2) - s1^(-1 / 2)))
  cdf1 <- pnorm(a1, 0, 1)
  s2  <- (b/r2)*(1+(gamma^2/2))
  a2  <- ((1 / gamma) * (s2^(1 / 2) - s2^(-1 / 2)))
  cdf2 <- pnorm(a2, 0, 1)

  r1  <- r1
  r2  <- r2
  b    <- b
  r    <- r
  c    <- c
  p1   <- cdf1
  p2   <- cdf2
  Q1   <- beta
  Q2   <- alpha
  gs1  <- vector("numeric")
  gs2  <- vector("numeric")
  g1   <- 1
  g2   <- 1
  value1 <- 0
  value2 <- 0
  j    <- 1
  k    <- 1
  for(x in 0:c){
    g1<- x
  repeat{
    g1  <-(g1+1)
    value1 <- pbinom(x, r, p1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)^(g1)
    if (value1<=Q1)
      break }
    gs1[j]=g1
    j= j + 1 }
  }

```

```
X<- max(gs1)
for(y in 0:c){
  g2 <-y
  repeat{
    g2 <- (g2 + 1)
    value2<- pbinom(y, r, p2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)^(g2)
    if (value2>=Q2) break
  }
  gs2[k]=g2
  k = k + 1 }
Y<- max(gs2)
w<- max(X,Y)
return(w)
}
```

```
##-----
##Plan de muestreo de aceptación económico confiable
##-----
```

```
EcReliabbs<-function(P, ratio, c, n, gamma){
  s <- ratio
  a <- ((1 / gamma) * (s^(1 / 2) - s^(-1 / 2)))
  cdf <- pnorm(a, 0, 1)
  c <- c
  p <- cdf
  Q <- P
  for(x in 0:c){
    total <-pbinom(x, n, p) }
    if(total>= Q){
print("the constraint is satisfied") }
else print("the constraint is not satisfied")
}
```

BIBLIOGRAFÍA

- Aslam, M., Kantam, R. (2008) Economic reliability acceptance sampling based on truncated life tests in the Birnbaum-Saunders distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, 24, 269-276.
- Aslam, M. (2009) *Acceptance Sampling Plans for Some Continuous Distributions*. Tesis de doctorado en estadística aplicada del National College of Business Administration & Economics. Lahore, Pakistan.
- Aslam, M. (2010) A double sampling plan for a reliability demonstration test. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 9, 295-309.
- Aslam, M., Kundu, D., Ahmad, M. (2009a) Time truncated acceptance sampling plan for generalized exponential distribution. Accepted in *Journal of Applied Statistics*(UK).
- Aslam, M., Jun, C., Ahmad, M. (2009b) New acceptance sampling plans based on life tests for Birnbaum-Saunders distributions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 00, 1-10.
- Aslam, M., Jun, C., Ahmad, M. (2010) Design of a time-truncated double sampling plan for a general life distribution. *Journal of Applied Statistics*, 37:8, 1369-1379.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., López, J. (2007) Acceptance sampling plans from truncated life tests from generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 36, 643-656.
- Baklizi, A. (2003) Acceptance sampling based on truncated life tests in the Pareto distribution of the second kind. *Advances and Applications in Statistics*, 3, 33-48.
- Baklizi, A., El Masri, A. (2004) Acceptance sampling based on truncated life tests in the Birnbaum-Saunders model. *Risk Analysis*, 24, 1453-1457.

- Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C. (1969a) A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, 6, 319-327.
- Collins, R.D., Jr. (1974) Statistically and Economically Based Attribute Acceptance Sampling Models With Inspection Errors, Doctoral Thesis, Polytechnic University, Virginia.
- Desmond, A. (1985) Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics*, 13, 171-183.
- Duncan, A.J. (1996) *Control de Calidad y Estadística Industrial*. Homewood, México.
- Epstein, B. (1954) Truncated life tests in the exponential case. *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 555-564.
- Goode, H.P., Kao, J.H.K. (1961) Sampling plans based on the Weibull distribution. In Proceeding of the Seventh National Symposium on Reliability and Quality Control (24-40). Philadelphia.
- Gupta, S.S. (1962) Life test sampling plans for normal and lognormal distributions. *Technometrics*, 4, 151-175.
- Guthrie, D., Jr., Johns, M. V., Jr. (1959) Bayes' acceptance sampling procedures for large lots. *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 896-925
- Kantam, R.R.L., Rosaiah, K. (1998) Half logistic distribution in acceptance sampling based on life tests. *IAPQR Transactions*, 23, 117-125.
- Kantam, R.R.L., Rosaiah, K., Rao, G.S. (2001) Acceptance sampling based on life tests: log-logistic models. *Journal of Applied Statistics*, 28, 121-128.
- López, J. (2006) *Muestreo de Aceptación por Atributos en Pruebas de Vida Utilizando el Modelo Birnbaum-Saunders Generalizado*. Tesis de Ingeniería en Estadística de la Universidad de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
- Montgomery, D. (1991) *Control Estadístico de la Calidad*. Wiley, New York.
- Rosaiah, K., Kantam, R.R.L. (2005) Acceptance sampling based on the inverse Rayleigh distribution. *Economic Quality Control*, 20, 277-286.
- Rosaiah, K., Kantam, R.R.L., Santosh Kumar, Ch. (2006) Reliability of test plans for exponentiated log-logistic distribution. *Economic Quality Control*, 21, 165-175.
- Schilling, E., Neubauer, D. (2009) *Acceptance Sampling In Quality Control*. Taylor & Francis, USA.

- Srinivasa Rao, G. (2009) A group acceptance sampling plans for lifetimes following a generalized exponential distribution. *Economic Quality Control*, 24, 75-85.
- Stephens, K. S. (2001) *The Handbook of Applied Acceptance Sampling: Plans, Procedures and Principles*. Milwaukee, USA: ASQ Quality Press.
- Tsai, T.-R., Wu, S.-J. (2005) Acceptance sampling plans for Birnbaum-Saunders distribution under truncated life tests. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 12, 507-519.
- Tsai, T.-R., Wu, S.-J. (2006) Acceptance sampling based on truncated life tests for generalized Rayleigh distribution. *Journal of Applied Statistics*, 33, 595-600.
- Wall, M., Elshennawy, A. (1989) Economically-based acceptance sampling plans. *Computational and Industrial Engineering*, 17, 340-346.