



Facultad de Ciencias
Instituto de Estadística

Propuesta educativa para docentes de enseñanza media para facilitar la enseñanza de la probabilidad condicional

Trabajo de tesis para optar al grado de Magíster en Estadística

Realizado por:

Cristopher Arriaza Sepúlveda

Bajo la supervisión del profesor:

Dr. Carlos Felipe Henríquez Roldán

Valparaíso, marzo de 2025

Índice

Glosario	4
Resumen	6
Capítulo 1	8
Introducción.....	8
Capítulo 2	13
Marco conceptual	13
2.1 <i>Fundamentación Teórica</i>	13
2.2 <i>Planes y programas de estudio</i>	16
2.3 <i>Conductismo y teoría cognitiva</i>	19
2.4 Bases Curriculares sobre el eje temático de la Estadística.....	20
2.5 <i>Bibliografía Que Promueve y Utiliza MINEDUC</i>	22
2.5.1 <i>Recursos Digitales</i>	22
2.5.2 <i>Textos escolares</i>	24
2.5.3 <i>Texto Savia, editorial SM</i>	29
2.5.4 <i>Planes y programas de estudio</i>	31
2.5.5 <i>Análisis de la bibliografía propuesta por los programas de estudio</i>	33
Capítulo 3	34
Metodología.....	34
Situación 1.....	39
Formalización	40
Situación 2.....	42
Formalización	43
Ejemplos:.....	44
Probabilidades en las que opera el principio aditivo y multiplicativo de manera simultánea.....	45
Ejemplo 1:	48
Probabilidad condicional.....	52
Independencia estadística.....	53
Ejemplo 1 (continuación):	54
Ejercicios de desafío tipo PAES.....	61
Soluciones	75

Bosquejo de planificación didáctica.....	76
Conclusión.....	91
Referencias.....	93

Glosario

B

Buena onda

Frase coloquial para describir una actitud positiva, amigable, relajada y agradable de una persona o situación. 11

D

DEMRE

Es el acrónimo de Departamento de Evaluación,

Medición y Registro Educacional. Es una unidad

dependiente de la Universidad de Chile, encargada

de la administración de procesos de evaluación

educativa, como la Prueba de Selección Universitaria (PSU) (hoy reemplazada

por la Prueba de Acceso a la Educación Superior o

PAES en 2022). 59, 60, 61, 62

E

Educación parvularia

Etapa educativa que abarca los primeros años de vida de los niños, generalmente desde el nacimiento hasta los 6 años. 18

G

GeoGebra

herramienta de software matemática interactiva que combina varias ramas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría, el cálculo y la estadística, en una sola plataforma. 23, 31, 32, 33, 71

M

Método Montessori

Es un enfoque educativo desarrollado por la doctora María Montessori a principios del siglo XX. 8, 13

Método Singapur

Es un enfoque de enseñanza de las matemáticas que se originó en Singapur en la década de 1980. 8

MINEDUC

Es el acrónimo de Ministerio de Educación. Es el organismo gubernamental encargado de la formulación, implementación y supervisión de las políticas educativas en el país. 2, 4, 6, 8, 13, 17, 18, 20, 24, 25, 28, 29, 30, 33, 40, 71, 73

M

Mini test

Es una prueba breve y generalmente sencilla, diseñada para evaluar los conocimientos o habilidades de una persona sobre un tema específico en un corto período de tiempo. 30

P

PAES

Es el acrónimo de Prueba de Acceso a la Educación Superior. Es el examen nacional que los estudiantes de enseñanza media deben rendir para acceder a la educación superior. 2, 4, 8, 9, 17, 27, 30, 52, 72

Play group

Grupo de niños pequeños que se reúnen, generalmente bajo la supervisión de

adultos, para jugar y socializar en un ambiente organizado. 13

R

RAE

Es el acrónimo de Real Academia Española. Es una institución cultural cuya misión principal es velar por la correcta utilización y el desarrollo del idioma español. 6

S

SM

Es una editorial española que se dedica a la publicación de libros y materiales educativos, especialmente enfocados en

el ámbito escolar, desde la educación infantil hasta la educación superior. 2, 26, 62, 73

T

Textos Savia

Es una serie de materiales educativos que forman parte de una propuesta pedagógica utilizada principalmente en el ámbito escolar. 26

Y

Youtuber

Persona que crea y publica contenido en la plataforma YouTube, generalmente en forma de videos. 23

Resumen

Con más de 10 años de experiencia como profesor en la enseñanza de la matemática he hallado que, el aprendizaje resulta ser significativo cuando el estudiante le da un sentido a lo que estudia y lo que aprende, por esto es relevante que los estudiantes logren una conexión entre lo aprendido y su vida cotidiana. Hay docentes que omiten la instancia de entregar al estudiante la significancia de lo que estudia por diversas situaciones; tales como, el tiempo de planificación para abordar los contenidos, problemas que se pueden presentar durante el año en cuanto a feriados, aniversarios en los establecimientos, semanas religiosas, entre otras. Incluso, el conocimiento y la formación que tenga el docente encargado de la temática influirá en el aprendizaje de los estudiantes.

Un estudio mediante entrevistas personales entre profesores de matemática permitió establecer que uno de los temas de estadística que más les complica enseñar es la probabilidad, en general, y específicamente la probabilidad condicional.

Este trabajo, está enfocado en una propuesta educativa para los docentes que les facilite la forma de enseñar la probabilidad condicional a los estudiantes de enseñanza media, promoviendo el desarrollo de habilidades matemáticas y de razonamiento lógico que les permita aplicar este concepto de manera efectiva en contextos cotidianos y académicos. Proponiendo estrategias didácticas para los docentes al enseñar la probabilidad condicional, conservando la mirada que se le da al enfoque de la PAES¹, dejando en menor importancia a los típicos ejemplos que trabajan generalmente los docentes con juegos de azar para ejemplificar el concepto de la probabilidad, la

¹ Acrónimo que significa: Prueba de acceso a la educación superior.

regla de Laplace y la probabilidad condicional en que se suele apoyar por los textos del estudiante que entrega el MINEDUC².

² Acrónimo que significa: Ministerio de Educación de Chile.

Capítulo 1

Introducción

El conductismo predominó en las escuelas y la educación a través del tiempo se ha ido desarrollando y evolucionando a favor de las personas, en especial de los estudiantes y las nuevas generaciones en que los establecimientos reformulan sus propósitos institucionales y/o van redefiniendo sus proyectos educativos destacándolos en los escritos de sus misiones y visiones, encajando al estudiante como el centro y protagonista de su aprendizaje.

Congacha (2016) menciona que la estadística se estructuró como disciplina científica en el siglo XIX, pero ya se conocía y utilizaba en la antigüedad. En el antiguo Israel, la Biblia da referencias en el libro de los números, desde el primer capítulo, especifica en Números 1:1, donde se registra el censo y la organización de las tribus. Además, la narrativa sobre el pueblo de Israel se extiende a lo largo de todo el libro, abarcando temas de censo peregrinación y organización, pero los capítulos 1-4 y 26 son especialmente relevantes por los censos y detalles poblacionales de Israel en el desierto. Ya en la época del Imperio Romano se aplicaban censos poblacionales y de bienes a los pueblos sometidos al imperio con objeto de aplicar el régimen de impuestos. Durante los mil años siguientes a la caída del imperio Romano, en el siglo IX se realizaron en Francia algunos censos parciales de siervos, aunque estas acciones permanecieron casi olvidadas durante la Edad Media, durante los XV, XVI y XVII se hicieron grandes contribuciones al método científico capaz de aplicarse a los datos económicos. Para el año 1532 empezaron a registrarse en Inglaterra las defunciones debido al temor que Enrique VII tenía por la peste, publicándose estadísticas semanales de los decesos. Y fue John Graunt quien, en el año 1662, usó documentos conocidos los

boletines de mortalidad para hacer un análisis estadístico pionero sobre la mortalidad en Londres, incluyendo predicciones relacionadas con el número de personas que morirían de varias enfermedades. Graunt accedió a estos registros semanales que contenían datos sobre las muertes por causa y sexo en las parroquias de Londres y a partir de ellos creó la primera tabla de mortalidad.

La Real Academia Española (RAE) define la estadística como la rama de la matemática que utiliza grandes conjuntos de datos numéricos para obtener inferencias basadas en el cálculo de probabilidades. Definición que ha sido moldeada frente a cada perspectiva de los autores. Stuart (1954) indica que es una ciencia que recolecta, clasifica y presenta hechos sobre una valoración numérica, en donde se explica, describe y compara fenómenos. Spiegel (1972) define que la estadística, estudia y comprende diferentes métodos científicos donde recolecta información para organizar y analizar datos y finalmente concluye y toma las decisiones pertinentes basándose en los análisis realizados. Canavos (1988), añade que la ciencia estadística, tiene virtualmente, un alcance ilimitado de aplicaciones en un espectro tan amplio de disciplinas que van desde las ciencias y la ingeniería hasta las leyes y la medicina.

Desde el Ministerio de Educación (MINEDUC) en sus bases curriculares del año 2009, en el eje de estadística, señala la necesidad de que todos y todas las estudiantes deben aprender a realizar análisis, inferencias y obtener información a partir de datos estadísticos. Se espera formar alumnos críticos y alumnas críticas para utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos.

A Horacio Mann (1837), se le atribuye el comentario relacionado con la educación *el maestro que intenta enseñar sin inspirar en el alumno el deseo de aprender está tratando de forjar un hierro*

frío. Siendo secretario de educación de Massachusetts, es tal vez, el tiempo en que su cita pudo generar un gran impacto al entender que al estudiante se le debe motivar y no solo transmitir conocimientos. Citas que también van dándole un sentido más potente al mirar que la educación está cambiando y evolucionando.

El activista y educador mexicano Ignacio Estrada señaló: *“si un niño no puede aprender de la manera en que le enseñamos, tal vez debemos enseñarle de la manera en que aprender”*. Aunque no existe registro preciso de la fecha en que fue pronunciada esta cita, su contenido permite reflexionar críticamente sobre la labor docente y el rol de la enseñanza en los procesos educativos contemporáneos. Más allá de la simple transmisión de conocimientos, enseñar implica generar aprendizajes con sentido y significado para el estudiante, ajustando las estrategias pedagógicas a sus formas de aprender y a las demandas de la sociedad actual.

En este escenario, la educación ha experimentado transformaciones significativas. El desarrollo tecnológico y el acceso masivo a la información han modificado la manera en que los estudiantes interactúan con el conocimiento, lo que exige a los docentes replantear sus métodos de enseñanza para responder a estas nuevas realidades. Esta adaptación implica diseñar experiencias de aprendizaje que sean pertinentes, contextualizadas y capaces de promover una comprensión profunda de los contenidos, de modo que el aprendizaje significativo no se limite al cierre de un ciclo escolar, sino que se evidencia en cada etapa del proceso educativo.

Un ejemplo en esta evolución se aprecia al comparar los programas de estudio de comienzos de los años 2000 con los vigentes en el período 2023 – 2024. Se observan diferencias sustantivas tanto en los enfoques transversales como en el tratamiento disciplinar. En el caso de la probabilidad condicional, por ejemplo, los textos escolares antiguos tendían a abordarla desde situaciones

abstractas, como lanzamientos de dados o juegos de azar. En cambio, los programas actuales priorizan contextos reales y significativos, favoreciendo la revolución de problemas cercanos a la experiencia cotidiana del estudiante. Esta transmisión refleja una enseñanza orientada no solo a la adquisición de contenidos, sino también a dotar al aprendizaje de relevancia y aplicabilidad práctica.

De esta manera, la enseñanza en el siglo XXI se concibe como un proceso dinámico y flexible, centrado en el estudiante y en la construcción de significados. Los docentes, por tanto, enfrentan el desafío de articular metodologías innovadoras que potencien la comprensión y la autonomía, respondiendo a la pregunta fundamental que guía el aprendizaje actual: ¿Para qué aprender?

Este trabajo plantea estudiar una propuesta educativa para los docentes que les facilite la enseñanza de la probabilidad condicional a los estudiantes de enseñanza media, promoviendo el desarrollo de habilidades matemáticas y de razonamiento lógico que les permita aplicar este concepto de manera efectiva en contextos cotidianos y académicos. Esto bajo ciertos objetivos específicos como proponer estrategias didácticas para los docentes al enseñar la probabilidad condicional, conservando la mirada que se le da al enfoque de la PAES, una evaluación externa que realiza el Ministerio de Educación para el ingreso a las universidades y que se van adhiriendo más establecimientos educacionales con la misma meta de incrementar el porcentaje de estudiantes que logren ingresar a la universidad, identificando los conceptos fundamentales de la probabilidad condicional y explorando las metodologías pedagógicas actuales utilizadas en los establecimientos educacionales en Chile.

Con base a lo anterior, en los siguientes capítulos se expondrá el análisis de los programas de estudio en un marco conceptual y cómo se ha ido transformando la educación desde una

perspectiva conductista a una educación cognoscitivista y crítica, para luego analizar la bibliografía que promueve y utiliza MINEDUC y finalmente presentar la propuesta educativa para los docentes y sea un apoyo en sus tiempos destinados para las planificaciones, revisiones de guías, revisiones de pruebas, entre otros. También en el tema de perspectiva de la estadística, tratando lo más posible evitar el uso excesivo de problemas poco contextualizados como el uso de juegos de azar, siendo éste un recurso poco convencional para el estudiante cuando está estudiando el concepto de probabilidad. Llegando a cuestionarse si los juegos de azar realmente servirán o no para la vida cotidiana.

Luego de presentar los conceptos contextualizados en problemas cotidianos se volverá a presentar problemas tipo PAES donde se da mayor importancia a problemas con juegos de azar con el enfoque para la prueba de competencia matemática 2 que lo darán los estudiantes que quieran estudiar una carrera con enfoque matemático como son las ingenierías y arquitectura, por dar algunos ejemplos.

Capítulo 2

Marco conceptual

2.1 Fundamentación Teórica

La educación ha experimentado una constante evolución a lo largo de los distintos períodos escolares, influida en gran medida por las orientaciones y enfoques pedagógicos implementados por cada administración ministerial, que ha impreso su sello particular en los planes y programas de estudio. Esta transformación también se ha reflejado en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático, las cuales han variado progresivamente, transitando desde enfoques basados en el aprendizaje conductual, centrados en la repetición y la respuesta correcta, hacia modelos que promueven el aprendizaje significativo, donde el énfasis se sitúa en la comprensión, la aplicación contextualizada y la construcción activa del conocimiento por parte del estudiante.

Tabla 1. Creada para comparación de las habilidades del pensamiento matemático entre séptimo básico a tercero medio.

HABILIDADES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO				
7° básico	8° básico	1° medio	2° medio	3° medio
Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel.	Resolver problemas en contextos diversos y significativos.	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos.	Aproximar números mediante variados métodos.	Resolver problemas con un campo numérico más amplio.

Fuente: Programa de estudio de tercer año medio, actualización 2009

La tabla evidencia una progresión gradual en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático a lo largo de la trayectoria escolar, pasando desde la resolución de problemas en contextos diversos y significativos en los niveles de 7° y 8° básico, hacia habilidades de análisis, aproximación y resolución en contextos más amplios y complejos en la enseñanza media.

Mientras que en la educación básica el énfasis está puesto en aplicar contenidos en situaciones contextualizadas, en la educación media se avanza hacia la reflexión sobre estrategias de resolución, la utilización de diversos métodos numéricos y la ampliación del campo de acción matemático, lo que sugiere una transición desde un enfoque más procedimental y conductual hacia uno más analítico y significativo.

Este cambio refleja la intención curricular de promover un pensamiento matemático progresivamente más autónomo, crítico y contextualizado, coherente con los enfoques pedagógicos actuales centrados en el aprendizaje significativo.

El problema subyace si el estudiante está receptivo a recibir información nueva, si se encontrará a gusto o temeroso a enfrentarse a estos tipos de cambios en la forma de recibir contenidos matemáticos de la forma tradicional (escuchando las definiciones, trabajando con ejemplos y ejercicios) o formando grupos de trabajos, teniendo que ser el líder o ser partícipe con los demás compañeros.

La progresión de habilidades presentada en la tabla anterior refleja cómo el currículo busca que los estudiantes avancen desde la resolución de problemas en contextos significativos hacia formas de pensamiento matemático más complejas y autónomas. No obstante, este desarrollo no ocurre en un vacío. Está profundamente influido por las experiencias previas y por los procesos de aprendizaje adquiridos en etapas anteriores.

Desde una perspectiva conductista, autores como Pavlov (1927) y Watson (1913) demostraron cómo ciertos comportamientos pueden condicionarse a través de estímulos y respuestas repetidas. Pavlov, mediante sus experimentos con animales, evidenció que un estímulo inicialmente neutro puede generar una respuesta condicionada tras su asociación reiterada con un estímulo incondicionado. Watson, por su parte, trasladó estos principios al comportamiento humano, mostrando cómo experiencias tempranas pueden generar respuestas emocionales duraderas frente a determinados estímulos.

En el contexto escolar, estas teorías ayudan a comprender cómo experiencias negativas reiteradas, por ejemplo, conflictos con compañeros, prácticas docentes poco inclusivas o dificultades sostenidas en matemáticas, pueden condicionar actitudes posteriores hacia el aprendizaje. Un estudiante que en etapas previas ha enfrentado situaciones de rechazo o frustración podría desarrollar respuestas emocionales que actúan como barreras frente a nuevos contenidos o actividades, incluso si el entorno actual es distinto.

Así, un alumno que ha tenido experiencias negativas con docentes de matemáticas podría transferir esa percepción a los profesores siguientes, dificultando su apertura hacia nuevas formas de aprendizaje. De igual manera, experiencias grupales adversas pueden generar resistencia a trabajar colaborativamente, limitando el desarrollo de habilidades que el currículo espera fortalecer progresivamente.

2.2 Planes y programas de estudio

A lo largo de las últimas décadas, los docentes han debido adaptar su enseñanza a las transformaciones curriculares y a las características de las nuevas generaciones de estudiantes, quienes presentan un interés más activo por el conocimiento y demandan mayores desafíos para aprender. Esta evolución se aprecia claramente en el tratamiento de los contenidos, particularmente en áreas como la probabilidad condicional.

En programas antiguos, el enfoque estaba principalmente orientado a la aplicación mecánica de procedimientos en situaciones sencillas, privilegiando la ejercitación y la repetición como medios para alcanzar los objetivos de aprendizaje. En cambio, los programas actuales plantean la probabilidad condicional desde una perspectiva más analítica y contextualizada, promoviendo que los estudiantes tomen decisiones informadas en escenarios de incertidumbre y desarrollen habilidades de razonamiento estadístico más complejas. Esta transformación refleja un cambio pedagógico significativo: de una enseñanza centrada en procedimientos aislados, a una que busca formar competencias integrales, incorporando dimensiones cognitivas, actitudinales y transversales.

Frente a esta misma línea de enseñanza, los métodos que se han utilizado para abordar un contenido han ido cambiando, ya que las nuevas generaciones se han puesto más exigentes en la entrega de ello. Así se ha visto al entrar al aula e interactuar con los estudiantes, ya que, en su aprender, quieren y necesitan entender el porqué de las cosas y si ello le genera algún impacto en su vida o su quehacer diario.

Si se tuviera en una mano, una guía de trabajo escolar aplicada en los años 2000 y en la otra mano una guía aplicada en este presente año, se podrá notar claramente las diferencias entre ellas. Una de ellas netamente basada en una enseñanza conductista, teniendo como protagonismo al docente y las guías enfocada a ejercicios matemáticos repetitivos. Mientras que la otra guía actualizada a estos tiempos puede poseer diferentes enfoques dependiendo del tipo de establecimiento y el nivel educativo, como el trabajo que se realiza en *play group*, método Montessori, constructivista, entre otros, y que son los nuevos perfiles que se buscan en un docente para enseñar.

Como menciona Shirky (2010), la sociedad se encuentra en la educación 3.0 lo que en inglés se menciona como learning 3.0 donde las tecnologías y la comunicación (TIC), ya están insertadas en nuestra vida y educación, haciendo un contraste entre el 1.0 donde el estudiante recibía de forma pasiva la información de un profesor que luego se consideró la educación 2.0 que incorporaba un feedback por parte del alumno al profesor y actualmente el protagonismo y el elemento clave para el aprendizaje se encuentra en las tecnologías y el buen uso de ella.

Como menciona Moll (2011), los valores que fundamenta esta dinámica de la educación 3.0:

- Integral
- Interdisciplinaria
- Impulsora de habilidades cognitivas
- Palanca de una inteligencia colectiva
- Promotora del aprendizaje informal colaborativo
- Accesible y sostenible

Al hacer un contraste en lo que se ha vivido dentro de las aulas en esta nueva era, la enseñanza se ha ido enfocando cada vez más en el uso de las tecnologías, actualizándose cada año los programas de estudio. Haber vivido una pandemia en tiempos tecnológicos fue un gran sustento para sobrevivir a ello.

Los medios que se utilizaron para comunicarse entre docente y estudiante fueron bastante asertivos en cada establecimiento, haciendo uso de las plataformas de Google Classroom por ejemplo, donde esta plataforma creada por Google lanzada en el año 2014 estaba diseñada para integrarse con Google drive, docs, meet, entre otras. Logrando una interacción para exponer la clase en vivo y en directo, dejarlas grabadas, recibir tareas de los estudiantes, realizar evaluaciones con el formulario de Google y retroalimentarlas. Como otras plataformas existentes desde el año 2017 como Microsoft Teams. Herramienta diseñada para el uso colaborativo, permitiendo la interacción en tiempo real como las videollamadas, el chat, las reuniones virtuales, entrega de documentos, entre otras muchas de sus funciones, lo que hizo potenciar aún más el uso de estas tecnologías que al darse cuenta con las fechas de lanzamientos, dan cuentas que la tecnología siempre estuvo pero que nunca fueron necesarias utilizarlas, lo que se demuestra finalmente que, los programas de estudios y los docentes son sujetos de constante actualización y adaptación a la era y la realidad en la que se vive.

2.3 Conductismo y teoría cognitiva

Al observar hacia atrás con la experiencia en aula, las antiguas generaciones tenían un aprendizaje muy distinto a lo que se observa actualmente en los establecimientos. Como menciona Arancibia V. (1997), desde los años 70' adquiere gran fuerza el paradigma del diseño instruccional, el cual, al ir teniendo éxito al lograr sus objetivos, creó la necesidad de considerar las demandas de entrenamiento más intensamente las fuerzas armadas en el período de la Segunda Guerra Mundial. Este diseño instruccional se desarrolló de manera tal que, en 1980, los diseñadores instruccionales se ocupaban de planificar todo el sistema escolar, lo que incluía desde los objetivos instruccionales, las evaluaciones de los programas, los costos de la instrucción y los análisis de tareas objetivos operacionales.

Además, como menciona Skinner (1938), en su trabajo, llevó el análisis operante del comportamiento humano, siendo una herramienta eficaz para la disminución de problemas individuales de aprendizaje. Al estar tan arraigado el conductismo, comenzó a tener críticas y cuestionamientos por parte de la psicología cognitiva. Ya que, los cognitivistas mencionaban que el conductismo no consideraba la importancia de los eventos internos como, por ejemplo, la resolución de problemas. Asimismo, destacó la importancia de fenómenos como la memoria, el razonamiento, la percepción, la resolución de problemas, la metacognición y la creatividad como funciones mentales que permiten el aprendizaje.

En otro apartado de su manual de psicología educacional, como menciona Arancibia V. (1997), las nuevas teorías del aprendizaje han puesto de relieve la participación activa del sujeto centrándose, por lo mismo, en lo que hacen los sujetos cuando aprenden, es decir, cómo manejan y transforman la información recibida y sobre todo, cómo la relacionan con las experiencias anteriormente

incorporadas y que el aprendizaje y la conducta ocurren gracias a un proceso de organización y reorganización cognitiva del campo perceptual, proceso en el cual el individuo juega un rol activo, en donde los sujetos en el momento en que van procesando los estímulos van agregando algo a su simple percepción, organizándola para finalmente percibir una unidad o totalidad, surgiendo de allí diversas teorías que hicieron importantes aportes a la psicología de la educación.

2.4 Bases Curriculares sobre el eje temático de la Estadística

La estadística y la probabilidad son considerados como un eje temático en la educación, quedando en la posición cuarta luego de haber pasado por las unidades de número, álgebra y geometría. Generalmente, es presentado en este orden en los establecimientos educacionales en Chile. Desde este punto es importante analizar la visión que entrega MINEDUC respecto a este eje temático en las bases curriculares de 7° a 2° medio del año 2015.

Se espera que los alumnos lleguen a ser estudiantes críticos y que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones. Que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos.

El enfoque que hacen en este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos en las medidas que permitan comparar características de poblaciones y en la realización, la simulación y el estudio de experimentos aleatorios sencillos para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos.

Dentro de cada eje se pueden desarrollar habilidades que se interrelacionan y juegan un papel fundamental en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos y en la aplicación de conocimientos en contextos diversos que son “Representar”, “Modelar”, “Argumentar” y “Resolver problemas” de los cuales tanto en la preparación de las clases y elaboración del material para trabajar en ella deben estar siempre considerados, habiendo un aumento en la complejidad de éstos a medida que se vaya obteniendo un dominio en un contenido o tema en particular. Que, a fines de cuenta, estas 4 habilidades serán consideradas en la evaluación PAES para el acceso a la educación superior una vez finalizado el proceso educativo con los IV° medios. Y, un conjunto de actitudes que las bases curriculares de matemática promueven y que derivan de los objetivos de la Ley General de Educación y de los Objetivos de Aprendizajes Transversales, tales como demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas; Trabajar en equipo de forma responsable; Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación, entre otras.

2.5 Bibliografía Que Promueve y Utiliza MINEDUC

2.5.1 Recursos Digitales.

MINEDUC desde su página currículum nacional (MINEDUC, https://www.curriculumnacional.cl/#menu_aprendo_en_linea, s.f.), cuenta con una serie de recursos digitales para aprender, que están presente de manera visualizada mediante videos de YouTube como lo son “Aprendo TV” hasta libros que se encuentran de manera digital

- “Aprendo TV” que toma desde la educación inicial hasta 6° básico, recordando que estos tipos de recursos fueron generados mediante la necesidad de educar bajo en condición de pandemia saliendo al aire en la tv abierta y que actualmente se encuentran bajo enlace directo a YouTube. Los contenidos interdisciplinarios relacionados con matemática, tales como las fracciones, ecuaciones, volumen de cuerpos geométricos, transformaciones isométricas, tablas y gráficos entre otros.
- “Aprendo FM” considerando los niveles desde 7° básico hasta 4° medio los contenidos de ciencias, educación física, historia, lenguaje, matemática y orientación. Divididos en subcategorías 7° y 8° básico; 1° y 2° medio; 3° y 4° medio. Audios que abordan conceptos y definiciones de manera interactiva y ejemplos cotidianos.
- Infografías como “Aprendo en mi territorio”, “Aprendo de Flora y Fauna”, “Aprendo a programar”, “Aprendo jugando”, “leo y sumo primero”
- “Aprendo en línea”, dividido en 3 subcategorías: Estudiante, que tiene las opciones desde educación parvularia hasta 4° medio. Al ingresar en la sección de la unidad 4 en matemática

de 1° medio, considera la nube de puntos, gráficos “xy”, la regla aditiva y multiplicativa de probabilidades. De aquella sección se desprende el texto del estudiante y el cuaderno del estudiante que entrega MINEDUC en formato presencial. Archivo que no se encuentra completo y que solo considera un fragmento de muestra como lo menciona la página.

- “Biblioteca digital escolar” cuenta con libros y cuentos que para tener acceso a ello se debe ingresar el RUT que pertenezca a la comunidad escolar en establecimientos subvencionados, municipales, dependientes de servicios locales de educación y administración delegada. Que solo cuenta con 2 libros de estadística “Así se miente con estadísticas” y “los gráficos”.
- “Arma tu evaluación” que cuenta con un banco de ítems y un buscador para seleccionar el nivel, asignatura y eje temático y que al buscar en I° medio solo cuenta con 7 preguntas de alternativas de las cuales 3 de ellas están relacionados con datos, monedas y fichas. El resto están relacionados con la nube de puntos. Para la sección de actividades evaluativas formativas, son actividades evaluativas formativas de 1° a 8° básico y que están alineadas con el decreto N°67/2018 y la priorización curricular 2023 – 2025.
- Finalmente, la sección “otras temáticas” como “lengua y cultura de los pueblos originarios ancestrales”, Aprendizaje basado en proyectos”, “educación financiera”, “ambiental”, por mencionar algunas.

2.5.2 Textos escolares

Se ubican en la sección de recursos digitales. Estos textos escolares de la editorial Santillana han sido modificados de acuerdo con las adecuaciones curriculares de noviembre del 2016. Como se menciona en el texto del estudiante de I° medio, (MINEDUC, Texto del estudiante de I° medio (2024), hace referencia a los deportes en especial al fútbol donde mencionan las asistencias, goles, porcentaje de posesión, etc. Dejando preguntas abiertas tales como, “¿cuál es la probabilidad de marcar un gol en los últimos dos minutos de un partido?”, “has escuchado hablar de estadísticas en deporte? ¿en qué contextos? Lo que hace afirmar que mediante el avance de la unidad se podrá abordar de manera explícita, situaciones que están relacionados con el deporte, específicamente con el fútbol.

Las primeras actividades de la lección 10 comienza con el recordatorio de operatorias combinadas con fracciones, calcular medidas de tendencia central y de posición para datos no agrupados y probabilidades con el uso de bolitas y monedas, haciendo una pequeña mención sobre las definiciones de media, moda, mediana y cuartiles.

Comienza la lección 10 sobre el análisis de poblaciones con preguntas relacionadas con la cantidad de toques que da una pelota de tenis en el suelo durante un partido al observar una imagen de ello. Llevando al estudiante a la comprensión de una representación de una nube de puntos. Las actividades que lo siguen es el registro de distribuciones y análisis de la nube de puntos, definiendo finalmente la “nube de puntos” y haciendo una pequeña mención al concepto de “tendencia lineal”.

Con los siguientes ejemplos se definen las correlaciones que se pueden dar cuando los datos en la nube de puntos están relacionados de manera positiva, negativa o nula, argumentar a partir de

afirmaciones como por ejemplo “una mayor estatura no garantiza un mejor desempeño” en los tiros libres en el básquetbol. Construcción de tablas de doble entrada, definición y análisis de ello.

Las actividades propuestas están relacionadas con representar puntos como nube, argumentar sobre situaciones de horas de estudio, análisis de tabla de doble entrada, modelar situaciones pasando de tablas con valores a un registro gráfico, análisis de diversas nubes de puntos.

Como actividad “proyecto” se propone una investigación grupal sobre un estudio que les permitan reconocer la relación entre dos variables que sean de su interés y que puedan ser representadas con una nube de puntos, planteando hipótesis, encuestas y la construcción de tablas y gráficos de dispersión. Como una de las propuestas a investigar están los goles anotados por cada jugador vs cantidad de minutos jugados.

El punto siguiente es la comparación de dos poblaciones que lo hacen con sueldos, gastos mensuales, IMC en hombres y mujeres, calificación en rendimientos entre sucursales.

Con la lección 11 “reglas de la probabilidad” se motiva al estudiante con la pregunta “¿Se puede calcular la probabilidad de clasificar al mundial de fútbol?” para ello se reflexiona sobre la probabilidad mayor para algunos equipos y otros no, cómo poder calcular la probabilidad de dicho evento, al incrementar el número de juegos, ¿aumentaría la probabilidad de clasificar?

Comenzando la lección la unión e intersección de eventos y la definición de conjunto y diagrama de Venn. Con ejemplos de gustos en encuestas, lanzamiento de un dado para luego la definición de espacio muestral, evento unión e intersección.

Los ejemplos y ejercicios que se proponen se relacionan con la edad y género en tablas de doble entrada, números en conjuntos y representarlos en un diagrama de Venn, lanzamientos de monedas

y situaciones como grupo de estudiantes y sus idiomas, probabilidades que sean de un sexo en particular

Como actividad “proyecto” se propone representar algún tema en un diagrama de Venn como por ejemplo hábitos alimenticios, núcleo familiar, asignaturas favoritas, proponiendo preguntas y confeccionando encuestas.

Para la regla aditiva de la probabilidad, se propone la situación de 3 competidores y los lugares en que pueden llegar a la meta. Proponen como primer ejemplo la tómbola con bolitas de colores, obtención de cartas en un naipe inglés y la definición de eventos y la probabilidad de la unión.

Para los siguientes ejemplos utilizan lanzamientos de monedas y la representación por diagrama de árbol.

Las actividades propuestas están enfocadas en la utilización de naipes, letras en una tómbola, el tipo de calefacción, el peso en personas y las redes sociales mediante encuestas.

Para la regla multiplicativa se utilizan los juegos de azar como naipes y monedas, para definir luego eventos independientes y su regla multiplicativa.

Los ejemplos se relacionan con situaciones cotidianas como porcentaje de accidentes, concursos, lanzamientos, combinaciones en trayectos, extracción de bolitas y cambios en los colores de semáforos, definiendo la probabilidad condicional según el texto del estudiante como:

Definición según el texto escolar de matemática 3° medio del año 2018:

Si se tienen dos sucesos, A y B , donde $P(B) \neq 0$, entonces la probabilidad condicional de que A suceda dado que B ha ocurrido, se puede calcular por la siguiente fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ con } P(B) \neq 0 .$$

La sección de síntesis que comprende los eventos unión e intersección, la regla aditiva y multiplicativa con sus fórmulas respectivas, se plantea la pregunta: “¿Cómo puedes calcular la probabilidad que tiene tu equipo favorito de clasificar?”

Finalmente, en las actividades de síntesis en la sección “¿Cómo vas?” los problemas se relacionan con elección de asignaturas, abonos en plantas, extracción de bolitas, naipes y nombres de personas, elección de personas, lanzamiento de monedas, combinando situaciones que llueva y pase la micro, que asista a un concierto y vaya al cine.

Entre el glosario y el solucionario, el texto del estudiante cuenta con bibliografía y webgrafía relacionados con matemática cuenta con link de GeoGebra, Youtuber, homotecia interactiva, instituto nacional de estadística, mathway, profesor en línea, sociedad chilena de educación matemática, sociedad de matemática de chile, superprofe y Eduteka que en su tema de estadística, lección probabilidad y deporte, muestra un bosquejo de la lección con la pregunta inicial para los estudiantes ¿cuántos de ustedes practican deporte? mencionando los objetivos, el aporte del docente, la práctica guiada sobre el deporte a investigar para que encuentren la relación entre el deporte y la probabilidad, buscando información sobre las posibilidades de ganarle a un determinado jugador o equipo.

Desde la lección 2 de la Unidad 1 del texto de 3° medio (Toma de decisiones con probabilidades condicionales), se vuelve a retomar este concepto mediante el recordatorio del uso del diagrama de árbol para la interpretación y el cálculo de probabilidades. Con ello, se hace la conexión del diagrama, centrándose en problemas contextualizados como inscripciones de hombres y mujeres en deporte de skate y de bicicleta (haciendo uso de tablas de doble entrada); elección de personas

con su respectiva nacionalidad al visitar a la Tirana; Personas que trabajaron o no trabajaron antes de la realización del Censo 2017 según el área geográfica.

Como menciona el programa de estudio de primero medio, MINEDUC, Programa de estudio Primer año medio (2016), señala que el estudiante desarrolla las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas, dejando de priorizar la nube de puntos, las tablas de doble entrada y la tabla de Galton en las repeticiones de experimentos aleatorios.

Como menciona el programa de estudio de segundo medio Programa de estudio Segundo año medio (2016), señala que el estudiante utilizará permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas, dejando de priorizar la comprensión de variables aleatorias finita y el rol de la probabilidad en la sociedad.

Para tercero y cuarto medio, como se menciona en su base curricular, MINEDUC (2019), en sus bases curriculares de tercero y cuarto medio, como propósito formativo, desarrollar la capacidad de análisis, estudio y resolución para favorecer el tránsito al mundo laboral y profesional y promover su contribución a la comunidad local, nacional y global. Así entonces, el estudiante de tercero medio en la unidad de estadística y probabilidad. Como se menciona en el programa de estudio, MINEDUC (2020), en su programa de estudio, tercer año medio, tendrá la capacidad de tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales, teniendo el primer vacío de poder representar diversas situaciones en tablas de doble entrada, teniendo la obligación el docente de

explicarlo de manera no detallada para que el estudiante lo utilice para resolver problemas en los tiempos establecidos.

Finalmente, el estudiante de primero medio año 2024 logrará adquirir una sólida base en estadística debido a los tiempos destinados a la 4° unidad de estadística y probabilidad, considerándose la nube de puntos y su correlación lineal. La tabla de doble entrada y las reglas de la probabilidad, armando el aprendizaje mediante el uso de la unión e intersección de eventos, la regla aditiva y multiplicativa de la probabilidad en eventos independientes y la definición de la probabilidad condicional mediante problemas contextualizados, manteniendo un porcentaje casi equitativo entre problemas contextualizados y con juegos azar.

2.5.3 Texto Savia, editorial SM

A diferencia del texto escolar que entrega gratuitamente el Ministerio de Educación a los establecimientos educaciones tanto públicos como privados que están reconocidos o acreditados por el sistema educativo, estos textos Savia lo utilizan solo algunos establecimientos tanto públicos como privados dependiendo de cada sostenedor, ya que, se debe pagar para poder adquirirlos.

Siguiendo la línea de la probabilidad condicional, como se señala en el texto de tercero medio de la editorial SM, Barrera R. (2019) tiene por objeto en la construcción y el desarrollo de conceptos, habilidades y actitudes que permitan insertar en forma armónica y activa a las diversas comunidades a la que se pertenece, aceptando desafíos y compromisos tendientes a hacerlas cada vez mejor. A su vez, está diseñado a la orientación en la profundización, el desarrollo del conocimiento, razonamiento y pensamiento matemático. Mediante distintas actividades propuestas.

Se estructura en cuatro bloques que recogen la propuesta de contenidos y habilidades de las nuevas bases curriculares del Ministerio de Educación que son números, álgebra y funciones, geometría, estadística y probabilidad.

Los temas están secuenciados didácticamente para favorecer y construir los aprendizajes. Al finalizar cada bloque, se encuentra una sección de actividades complementarias para reforzar los aprendizajes. Se encuentra también, un resumen de los contenidos importantes trabajados durante el bloque. En las páginas finales de cada bloque, se encontrarán preguntas de selección múltiple para evaluar el aprendizaje y finalmente, los recursos de apoyos pedagógicos mediante algunos códigos QR.

Para el bloque 4, el tema 3 de probabilidad condicionada, se introduce el tema mediante experimentos aleatorios con lanzamientos de monedas, definiendo el concepto y dejando algunas preguntas abiertas para el desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar. Se arma el concepto de probabilidad condicional mediante el desarrollo de ejercicios y problemas relacionados con el concepto de espacio muestral, sucesos y sus operaciones (definiéndolos) y la probabilidad de un suceso, concentrado mayormente por ejercicios y problemas relacionados con los juegos de azar.

Este texto está más abierto al desarrollo de las cuatro habilidades que se potencia en el estudiante que son las de representar, modelar, resolver problemas y argumentar y comunicar. A su vez, son consideradas para las pruebas externas a los establecimientos como es la PAES, por ejemplo.

Sin embargo, sería interesante considerar más propuestas reales a los problemas, contextualizando la probabilidad condicional desde un inicio al tema, para que el estudiante comprenda el por qué lo va a estudiar y con qué fin lo va a aprender. Luego de ese pensamiento crítico, lo finalice con

una serie de ejercicios y problemas menos contextualizados con una estructura de PAES considerando que este sea el horizonte que el alumno y el establecimiento requiera.

2.5.4 Planes y programas de estudio

Los planes y programas de estudio cuentan con sugerencias de actividades. Al analizar la unidad 4 de estadística y probabilidad, como señala el programa de estudio de primero medio, MINEDUC (2016). El objetivo de aprendizaje 12 señala el registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos, estas actividades propuestas se relacionan con huellas en el suelo en donde los alumnos deben pensar en otras situaciones similares que puedan ser representadas por la nube de puntos. Otras actividades propuestas se relacionan con escalas apreciativas mediante encuestas, marcas en el suelo que dejan diversos lanzamientos, conjeturas mediante el diagrama en una nube de puntos con observación al docente donde puede hacer uso de tecnologías empleando programas de libre acceso que realizan gráficos (siendo la opción tradicional el software de uso común Excel, como se menciona en el programa), tipos de presión sanguínea en pacientes, masa vs estatura, calificaciones, lanzamiento de dos dados. Y el objetivo de aprendizaje 13 que señala el comparar poblaciones mediante la confección de gráficos “xy” para dos atributos de muestras, de manera concreta y pictórica, utilizando nubes de puntos en dos colores y separando la nube por medio de una recta trazada de manera intuitiva. Las actividades propuestas se relacionan con el índice de masa corporal, argumentando y representando en una nube de puntos trazando una línea que separa ambas distribuciones, distancias desde la casa al colegio mediante encuestas, analizando nubes de puntos con doble información, edades y la calidad de fumador o no fumador, pulso cardiaco en diversas edades entre hombres y mujeres, encuestas sobre rendimiento máximo de 100 m y salto largo, clientes y las ventas del día.

De la bibliografía para él o la docente que propone el programa de estudio de primero medio, MINEDUC (2016), se encuentran diversos textos que solo tienen versión de pago, otros que son descargables y disponibles en la WEB, que se detallan y organizan a continuación en una tabla:

Textos disponibles para la enseñanza	Disponibilidad de pago
Reflexiones teóricas para la educación matemática	Versión de pago
Enseñar matemáticas	Versión de pago
Estadística y probabilidades: Buscando un orden para el azar. Material del estudiante. Unidad estadística y probabilidades	Versión de pago
Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria	Texto completo no disponible en la web
Las matemáticas, perejil de todas las salsas	Versión de pago
Desarrollo del pensamiento matemático	Descargable
La matemática: Creación y descubrimiento	Texto completo no disponible en la web, versión de pago
La matemática aplicada a la vida cotidiana	Versión de pago
Azar y probabilidad	Descargable
101 actividades para implementar los objetos fundamentales transversales	No aparece
Introducción a la estadística	Disponible, pero no descargable
Contenidos básicos de estadística y probabilidad	Versión de pago

Fuente: Elaboración propia

2.5.5 Análisis de la bibliografía propuesta por los programas de estudio

Muchos de estos textos, presentan algún grado de dificultad para la obtención de ellos, ya que, algunos poseen versión de pagos. Entonces los docentes, que tienen generalmente un tiempo limitado para sus horas de planificación, le agregan esta nueva variable para obtener estos textos no descargables, con la decisión final de seguir invirtiendo tiempo para el acceso a estos documentos u olvidar estos textos propuestos, limitando así, conseguir nuevas metodologías planteadas para sus clases.

Al considerar el libro descargable: Desarrollo del pensamiento matemático por el autor Ricardo Cantoral, propuesto por el programa de estudio de primero medio, MINEDUC (2016). Su primera parte propone un pensamiento matemático y enseñanza de la matemática, enfocado en que si no se logra saber la forma en que funciona el pensamiento matemático de los alumnos, no se podrá, desde la enseñanza, ayudarles en su aprendizaje. Cantoral (2003) menciona que, en la enseñanza usual, estos hechos del pensamiento matemático y sobre las formas en que se concibe al conocimiento matemático y a su construcción, suelen ser desconocidos tanto por los profesores como por los diseñadores de currículos o los autores de libros de texto, de manera que se corre con frecuencia el riesgo de perder un enorme espectro de posibilidades para enriquecer la acción didáctica.

Capítulo 3

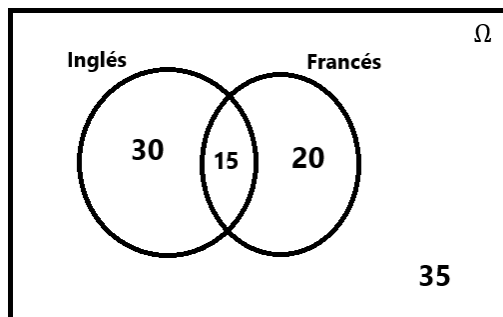
Metodología

El uso abusivo de los ejemplos y ejercicios relacionados con los juegos de azar condiciona al estudiante a no darle un verdadero significado a lo que está estudiando y aprendiendo. Si bien estas actividades, orientan un poco al uso de los juegos de azar mientras se va formando el concepto de probabilidad condicional. Se proponen actividades con problemas contextualizados para que el estudiante aprenda el verdadero significado de la condicionalidad en situaciones reales de la vida. Ya que, una vez, que el estudiante haya comprendido el verdadero significado y lo haya integrado a sus conocimientos, entonces allí podrá aplicarlo a ejercicios y problemas que proponga el MINEDUC y también en la preparación de la PAES, en la que los estudiantes que se preparan para ingresar a la universidad tienen que enfrentar esta prueba estandarizada.

Al final de la propuesta de actividades se realizará un mini test con preguntas tipo PAES con sus respectivas soluciones para que los profesores dispongan de este material complementario para sus clases.

Lo primero que se abordará será el concepto de la probabilidad condicional, para lo cual, se requieren las definiciones de eventos estadísticamente dependientes e independientes mediante una situación que represente el significado. De esta forma, el estudiante podrá descubrir el significado de la probabilidad condicional, por sí mismo, al plantearse situaciones motivadas en ejemplos más cercanos a ellos y no con juegos de azar. Los docentes podrán utilizar esta propuesta en sus clases mediante situaciones cotidianas, la formulación del concepto, la definición y finalmente ejemplos.

Haciendo comprender al estudiante que el espacio muestral se puede reducir de acuerdo alguna condición, como, por ejemplo, De un grupo de 100 estudiantes, 30 de ellos hablan inglés, 20 hablan francés, 15 hablan ambos idiomas y 35 estudiantes no hablan ninguno de los dos. Se puede apoyar con el diagrama de Venn para una mejor visualización:



Fuente: Elaboración propia

Si se quisiera preguntar por la probabilidad de seleccionar a un estudiante que hable inglés, basta con dividir $\frac{45}{100}$. Suponga que usted sabe que, el estudiante habla francés, ¿cuál es la probabilidad

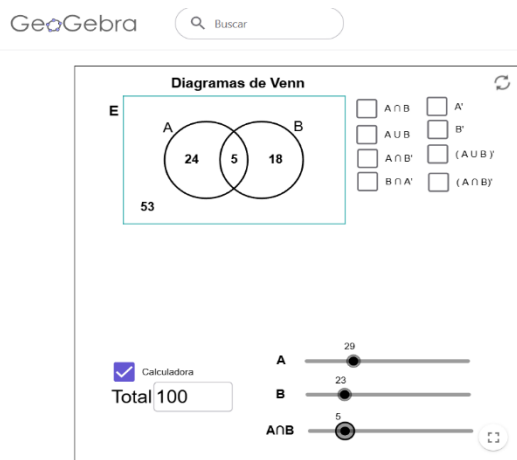
de que además hable inglés? La fracción quedaría expresada de la forma: $\frac{\frac{15}{35}}{\frac{100}{100}}$, simplificando los

100, la fracción queda expresada como $\frac{15}{35}$. Reduciendo o restringiendo de este modo, el espacio muestral dada una condición. Entonces, del grupo de 100 estudiantes, la probabilidad de que un estudiante hable inglés sabiendo que habla francés es de $\frac{15}{35}$. En términos de decimales, la probabilidad será de un 0.429, aproximadamente.

Se sugiere escanear el código QR que se muestra a continuación para redireccionar al software de GeoGebra que es una herramienta interactiva y educativa que utilizan generalmente los docentes

de matemática para el apoyo de los contenidos de álgebra, geometría y otros contenidos matemáticos que aplican en sus clases, facilitando el aprendizaje y enseñanza.

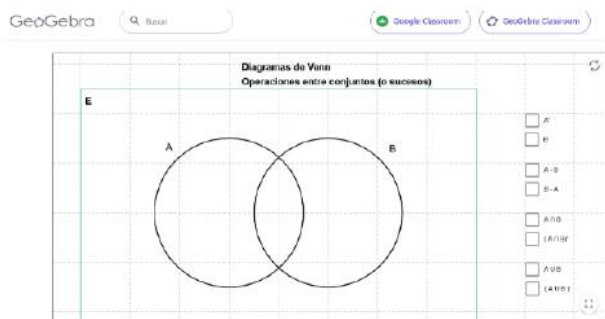
Con esta sencilla interacción con los datos en el diagrama de Venn que creó *matematicaula* en GeoGebra para un apoyo pedagógico tanto para el docente como al estudiante o siguiendo el siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/m/UPTcEmRU>. Se puede cambiar el espacio muestral y los conjuntos al número a convenir, notándose que de forma automática se ajustan los datos restantes; además, al momento de presionar el cuadro del suceso intersección, unión o diferencia, automáticamente se marcan en el mismo diagrama.



Fuente: GeoGebra del autor *Matematicaula*

El docente y los estudiantes se pueden apoyar mediante el software de GeoGebra para que puedan incursionar las operatorias que se pueden aplicar dentro de la teoría de conjuntos. Manteniendo la relación visual en el diagrama de Venn que vaya ocurriendo a medida que se vaya manipulando

tanto la unión, la intersección, la diferencia de los conjuntos, entre otras. Siguiendo el siguiente enlace o mediante el escaneo del código QR que actualmente este método que se utiliza en el celular se está utilizando de manera común tanto en los medios de comunicación; mientras se da una noticia en los canales de televisión, comerciales, letreros en las calles, en las cartas de menú en los restaurantes, incluso en la utilización de los recursos didácticos de los textos del estudiante y la aplicación de guías que utilizan o crean los docentes en sus clases según lo que ellos mencionan y a modo de experiencia personal. Potenciando la tecnología, favoreciendo el uso de las TIC en clases y la reducción del tiempo en encontrar la información en internet: <https://www.geogebra.org/m/y9njxdgv>.



Fuente: GeoGebra del autor Ricardo García Mesa

Para la utilización de la condicionalidad, también se puede utilizar la herramienta GeoGebra que se muestran dos cuadrados de distintos colores que representan el diagrama de Venn al ingresar los datos que crearon de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se pueden ingresar los datos presentados en el ejemplo anterior y en los posteriores, siguiendo el enlace o escaneo del código QR:

http://prepa8.unam.mx/academia/colegios/matematicas/paginacolmate/applets/eyp/Applets_Geogebra/probacondi.html.

Página del Colegio de Matemáticas
Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 8

PLANTEAMIENTO

Se expone el concepto de probabilidad condicional.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad condicional es la probabilidad de que un evento dado ocurra dado que otro evento ocurre. El operador de la probabilidad condicional es el signo |.

Ejemplo.
El experimento es extraer aleatoriamente dos canicas de una caja que contiene cinco canicas blancas y cinco canicas verdes.

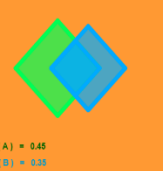
$P(A)$ = (la primera canica es blanca)
 $P(B)$ = (la segunda canica es blanca)
 $P(B|A)$ = (la segunda canica es blanca dado que la primera canica es blanca)
 $P(A|B)$ = (la primera canica es blanca dado que la segunda canica es blanca)

Al extraer la primera canica, hay en la caja cinco canicas blancas de un total de diez, por lo que la probabilidad es:
 $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

Al extraer la segunda canica hay en la caja cuatro canicas blancas de un total de nueve, por lo que la probabilidad condicional de que ocurra B dado que ha ocurrido A es:

Probabilidad Condicional

PROBABILIDAD CONDICIONAL



PROBABILIDAD DE QUE OCURRA A = 0.45

PROBABILIDAD DE QUE OCURRA B = 0.35

PROBABILIDAD DE QUE OCURRA A Y B SIMULTANEAMENTE = 0.15

Probabilidad de que ocurra A si ha ocurrido B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{0.15}{0.35} = 0.43$$

$P(A) = 0.45$
 $P(B) = 0.35$
 $P(A \cap B) = 0.15$



Fuente: Universidad Nacional Autónoma de México

La forma de abordar este concepto es crucial para que el estudiante comprenda sin mayores dificultades las probabilidades condicionales; ya que, todos los docentes tienen su forma propia de entregar el contenido a los estudiantes, apoyándose también del texto escolar que entrega MINEDUC, por ejemplo, de los libros Santillana y las páginas WEB. Así, lo mencionaron varios profesores de matemática que enseñan tanto en colegios municipales, particulares subvencionados y particulares pagados en la cual, su estilo de enseñanza se basa familiarizando el uso de vocabulario, el lenguaje de conjuntos, los conectores “dado que” para luego aplicar tanto la definición como la fórmula.

Entonces, abordar el concepto de probabilidad condicional se puede ajustar a la siguiente propuesta:

Situación 1

En un Stand de juegos se entrega un premio a quien logre obtener cara y un número mayor que 4 al lanzar conjuntamente una moneda y un dado.

a) Construye el espacio muestral de este juego, identifica los casos favorables y finalmente determina la probabilidad de ganarlo.

b) Lee la siguiente definición:

❖ Si el resultado de un evento **no afecta** la probabilidad de que ocurra el segundo evento, quiere decir, que los dos eventos son **eventos estadísticamente independientes**.

❖ Si el resultado de un evento **afecta** la probabilidad de que ocurra el segundo evento, quiere decir, que los dos eventos son **eventos estadísticamente dependientes**.

Ahora responde:

Los eventos obtener cara en la moneda y un número mayor que 4 en el dado: ¿Son independientes o dependientes?

c) Si calcula las probabilidades de cada evento por separado y lo multiplica, ¿se obtiene el mismo resultado obtenido en la letra a)?

Formalización

A y B son **EVENTOS INDEPENDIENTES**, si la **probabilidad** de que ambos **eventos** ocurran es el **producto** de las **probabilidades** de los **eventos** individuales.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad , \quad \text{Def. 1}$$

Ejemplos

- ❖ En una caja vienen 10 Tablet dentro de las cuales 4 vienen defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que, al sacar una de ellas y luego volviendo a colocarla en la caja, ambas hayan sido las defectuosas?

- ❖ Se tiene una ruleta circular con cuatro sectores congruentes numerados del 1 al 6. Si se gira 3 veces la ruleta ¿Cuál es la probabilidad de obtener las tres veces un 6?

- ❖ Si se lanzan dos dados balanceados, ¿cuál es la probabilidad de que el primero sea un número par y el segundo sea un múltiplo de tres?

- ❖ Un estudiante que practica futbol tiene una probabilidad de 0,2 de fallar un tiro penal. Si efectúa dos lanzamientos penales, ¿cuál es la probabilidad que anote dos goles? Considerando que cada tiro es independiente del otro

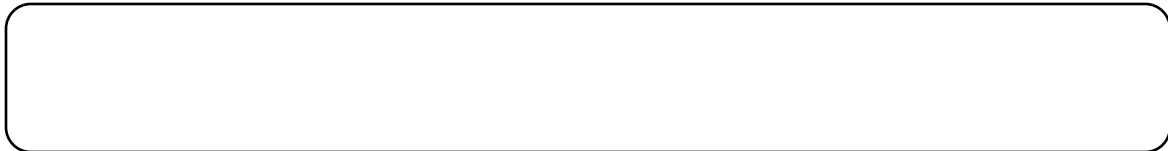
Situación 2

Una tómbola contiene 2 bolitas azules, 3 rojas (todas de igual tamaño y masa). El juego consiste en (sin mirar) sacar una bolita, dejarla en la mesa y luego sacar otra bolita. Gana el jugador que logre obtener dos bolitas de color rojo.

a) Construye el espacio muestral de este juego, identifica los casos favorables y finalmente determina la probabilidad de ganarlo.



b) Los sucesos anteriores ¿son independientes? Justifica tu respuesta.



c) Si calculas la probabilidad del primer evento (sacar una bolita roja), y la del segundo evento (sacar una bolita roja dado que previamente se sacó una roja) y las multiplicas ¿Obtienes el mismo resultado obtenido en la letra a)? Comenta estos resultados con tu compañero de puesto



Formalización

Si A y B son **EVENTOS ESTADÍSTICAMENTE DEPENDIENTES**, entonces:

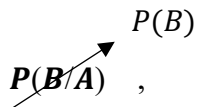
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) , P(A / B) \neq P(A), \text{ con } P(A) \neq 0 .$$

Observaciones

- ❖ $P(B/A)$: Se lee "la probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A"

- ❖ $P(B/A)$: Se conoce como probabilidad condicionada (la ocurrencia del evento B queda condicionada luego de que ha ocurrido el evento A)

- ❖ Para el caso de los **eventos independientes** la componente $P(B/A) = P(B)$, ya que la ocurrencia del evento B no se ve afectada con la ocurrencia del evento A. Por lo que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) ,$$


Obteniéndose la fórmula de probabilidad para la ocurrencia de eventos independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) ,$$

Ejemplos:

- ❖ En un curso de 40 estudiantes 10 de ellos tienen un promedio sobre 6,5. Si se seleccionan dos estudiantes uno después del otro, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean los que tienen promedio sobre 6,5?

- ❖ En un frasco se tienen cinco dulces de sabor naranja y siete de sabor a menta, todos de igual peso y tamaño. Si Isabel se venda los ojos, extrae un dulce y luego lo devuelve al frasco, después extrae un segundo dulce, pero esta vez se lo come y, finalmente, extrae un tercer dulce, ¿cuál es la probabilidad de que el primer dulce sea de menta, el segundo de naranja y el tercero también ser de naranja? (Dejar expresado como operación)

Probabilidades en las que opera el principio aditivo y multiplicativo de manera simultánea



Existen variadas situaciones en donde el análisis de probabilidad involucra **diversas opciones (principio aditivo) y simultaneidad de eventos (principio multiplicativo)**, por tanto, resulta fundamental la comprensión de ambas situaciones para efectuar el planteamiento respectivo, de manera adecuada.

Considere algunos ejemplos:

- ❖ Se tienen tres grupos de estudiantes, A, B y C. En el grupo A hay 3 hombres y 9 mujeres, en el grupo B hay 4 hombres y 8 mujeres, mientras que en el grupo C hay 8 hombres y 4 mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante de cada grupo, entonces ¿cuál es la probabilidad de que las tres personas **sean mujeres**?

- ❖ La probabilidad de que un hombre acierte en el blanco en un polígono de tiro es 0,4 y para una mujer es 0,6. ¿Cuál es la probabilidad que al menos uno de ellos acierte en el blanco, después de haber hecho un tiro cada uno?

- ❖ Se tiene 1 caja que contiene 6 fichas rojas y 4 blancas y una bolsa con 8 fichas rojas y dos blancas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una ficha de la caja y en caso contrario se saca de la bolsa. Al realizar el experimento una vez, ¿cuál es la probabilidad que se extraiga una ficha blanca?

Canavos (1988) define la probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, como el cociente de la probabilidad conjunta de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B; de esta manera se tiene:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B) > 0 \quad .$$

De la relación anterior, la $P(A \cap B)$ se puede escribir como un producto, lo que da como resultado la regla de multiplicación de probabilidades como se menciona en **Def. 1**

En otras palabras, una situación se condiciona cuando la posibilidad de que ocurra un evento o suceso se suele escribir, “dado que” ya se sabe que ha ocurrido otro suceso. Desde el punto de vista educacional, es importante contextualizar a la vida cotidiana el concepto para que el estudiante comprenda qué está estudiando, por qué estudiarlo y sobre todo para el estudiante, es saber ¿para qué me sirve este concepto en la vida cotidiana? El problema es que en la etapa educativa tanto en los textos escolares que entrega en Chile MINEDUC a los colegios se “abusa” de problemas relacionados con los juegos de azar, condicionando al estudiante que las probabilidades solo se dan en ese mundo privatizándolo del verdadero sentido del cálculo.

Por ello, se quiere hablar de probabilidades condicionales a partir de un ejemplo contextualizándolo con un problema basado en una situación más cercana a ellos. La idea es entregar a los docentes, una propuesta de trabajo para abordarlo desde el concepto de la regla multiplicativa de la probabilidad para eventos dependientes e independientes hasta llegar al concepto de probabilidad condicional. Logrando en el estudiante una autonomía guiada con propuestas de actividades y marcar en él un aprendizaje significativo.

Ejemplo 1:

Denote por,

X = la cantidad de hermanos que tiene un estudiante. E,

Y = la cantidad de hermanas que tiene un estudiante.

La unidad de estudio es el estudiante.

Suponga que la persona encargada de los registros de los estudiantes que han egresado de un establecimiento educacional ha logrado construir una tabla para la totalidad de los estudiantes egresados para los cuales logró determinar la proporción de estudiantes clasificados según la cantidad de hermanos y la cantidad de hermanas que tenían el año de su egreso. De los registros históricos calculó las proporciones, que bajo ciertos supuestos. Se podrían decir que estas proporciones representa el comportamiento probabilístico conjunto de las dos variables aleatorias X e Y . Así, los posibles valores de la variable aleatoria X , x , son 0, 1, 2, 3 o 4. Mientras que, los posibles valores de la variable aleatoria Y , y , son 0, 1, 2 o 3. De esta forma, la $p_{X,Y}(1,3) = 0,0395$, se puede interpretar como: de cada 1000 egresados del establecimiento educacional, se esperaría que aproximadamente 40 de ellos (39,5 de 1000) hayan tenido un hermano hombre y tres hermanas mujeres. Así, a partir de esta función de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias discretas, X e Y , se puede introducir, destacar y motivar varios conceptos asociados a estas probabilidades conjuntas: probabilidades marginales, probabilidades condicionales, independencia de variables aleatorias, valores esperados, varianza, covarianza y correlación.

		Cantidad de hermanas, y				
$p_{X,Y}(x, y)$		0	1	2	3	Total
Cantidad de hermanos, x	0	0,0732	0,0931	0,1029	0,0885	0,3577
	1	0,0345	0,0184	0,0089	0,0395	0,1013
	2	0,0922	0,0092	0,0369	0,0000	0,1383
	3	0,2102	0,0873	0,0241	0,0004	0,3220
	4	0,0775	0,0032	0,0000	0,0000	0,0807
Total		0,4876	0,2112	0,1728	0,1284	1,0000

Tabla 1: función de probabilidad conjunta de la cantidad de hermanos y la cantidad de hermanas para los estudiantes egresados de un establecimiento educacional. (Fuente: datos ficticios).

Note que, $p_{X,Y}(x, y) = P(\{X = x\}, \{Y = y\}) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ representa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome uno de sus cinco valores x (0, 1, 2, 3, 4, 5) y la variable aleatoria Y tome uno de sus cuatro valores y (0, 1, 2, 3). En otras palabras, representa la probabilidad de que dos eventos $\{X = x\}$ y $\{Y = y\}$ ocurran simultáneamente. Lo que se suele escribir como $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$, o bien si consideran dos eventos A y B , de manera tal que:

$A = \{X = x\}$ y $B = \{Y = y\}$, se puede escribir de una manera más tradicional,

$$p_{X,Y}(x, y) = P(A \cap B).$$

Así, podría ser de interés calcular, por ejemplo, las siguientes probabilidades: $P(A)$, $P(B)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$ o $P(A \cup B)$. En términos de las variables aleatorias X e Y estas probabilidades

se pueden escribir como: $P(\{X = x\})$, $P(\{Y = y\})$, $P(\{X = x\}/\{Y = y\})$, $P(\{Y = y\}/\{X = x\})$ o $P(\{X = x\} \cup \{Y = y\})$, respectivamente.

En general, al introducir estos conceptos a través de un problema más cercano a los estudiantes puede ser más fácil de comprender lo que se quiere motivar y calcular, en vez de trabajar con juegos de azar (dados, ruletas, naipes, etc.). En efecto, si se lanzan dos dados, uno blanco y uno rojo, ¿cuál es la probabilidad de que el dado rojo arroje un 5 si el dado blanco arroja un número par? Sin embargo, en nuestro ejemplo, podríamos preguntar, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante que haya egresado del establecimiento educacional tenga al menos dos hermanas si se sabe que no tiene hermanos? Los problemas basados en juegos de azar se basan en condiciones que facilitan los cálculos de las probabilidades, equiprobabilidad (igual probabilidad para los resultados individuales), e independencia estadística (un resultado no altera la probabilidad de que ocurra otro).

Algunos resultados conocidos para el cálculo de probabilidades de eventos relacionados a un experimento donde se presta atención a un espacio muestral específico, que se denotará por Ω .

- i. $P(A) \geq 0$, para todo $A \subseteq \Omega$
- ii. $P(\Omega) = 1$
- iii. Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes de Ω , entonces
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Cabe destacar que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si es que estos eventos no pueden ocurrir simultáneamente; es decir, $A \cap B = \Phi$. Por ejemplo, una persona puede tener 0, 1, 2, 3 o más vacunas contra el COVID, pero no puede tener simultáneamente 1 y 2 vacunas contra el COVID. Sin embargo, una persona puede estar vacunada contra el COVID y la influenza, este par de eventos no son mutuamente excluyentes, pues podrían ocurrir simultáneamente.

Esta forma puede ser de utilidad para estudiantes de enseñanza secundaria y estudiantes de pregrado que no necesariamente requieren los conceptos teóricos que dan soporte a estos resultados probabilísticos.

A partir de estos resultados, se pueden plantear como propiedades:

- a. $P(A^c) = 1 - P(A)$, $A \subseteq \Omega$
- b. $P(\Phi) = 0$
- c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, A y B eventos de Ω (es decir, $A \subseteq \Omega$ y $B \subseteq \Omega$) que no necesariamente son mutuamente excluyentes.

Un par de definiciones que se contextualizará luego son: la de probabilidad condicional, el de eventos independientes y la relación entre estas definiciones.

Probabilidad condicional

Para dos eventos A y B de Ω , se define la probabilidad del evento A condicionada a la ocurrencia del evento B , se denota como $P(A/B)$, de la siguiente manera:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ si } P(B) \neq 0 .$$

A partir de esta definición, se puede decir que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ si } P(A) \neq 0 .$$

Estas probabilidades, no se podrán calcular (quedan indefinidas) si la $P(B)$ y $P(A)$, respectivamente, son iguales a cero. Estas probabilidades son útiles para comprender intuitivamente el concepto de independencia estadística que directamente desde la definición no es intuitiva porque la definición sirve incluso cuando la $P(A) = 0$, la $P(B) = 0$ o ambas probabilidades son iguales a cero.

Independencia estadística

Se dice que dos eventos A y B de Ω , son independientes o mutuamente independientes, si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) .$$

Esta definición, de independencia estadística, como se mencionó anteriormente, no es intuitiva. Sin embargo, con las probabilidades condicionales se puede comprender de manera intuitiva el concepto de independencia estadística -considerando eso sí, la limitante que debe excluirse el que las probabilidades de los eventos que estén en el denominador sean iguales a cero. En efecto, si los eventos A y B son estadísticamente independientes, la $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, por ende, la $P(A/B) = P(A)$, si la $P(B)$ es diferente a cero. Así, la ocurrencia o no ocurrencia del evento B , no afecta la probabilidad de ocurrencia del evento A . Algo análogo ocurre cuando se observa el efecto de la ocurrencia o no ocurrencia de A sobre la $P(B/A)$, si son estadísticamente independientes y la $P(A)$ difiere de cero, $P(B/A)$ sería igual a la $P(B)$. Este es un elemento clave para comprender el que dos eventos, A y B , sean independientes. Al reforzar la idea, la ocurrencia o no ocurrencia de uno de los eventos no altera la probabilidad de ocurrencia del otro. Para chequear que dos eventos A y B sean independientes habrá que chequear si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, lo que permitiría chequear si dos eventos son independientes, incluso cuando uno, otro o ambos tengan probabilidad cero de ocurrencia. Note que si una de las probabilidades, la $P(A)$ o la $P(B)$, es igual a cero, o ambas son iguales a cero. La única forma que los eventos A y B sean independientes es que la $P(A \cap B) = 0$. No necesariamente, los eventos A y B deben ser mutuamente excluyentes para que sean mutuamente independientes. Estos son dos conceptos que suelen no quedar claros o bien confundirse entre sí.

Mutuamente excluyentes significa que no pueden ocurrir simultáneamente; es decir, $A \cap B = \Phi$. Mutuamente independencia significa que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro. Dos familiares consanguíneos, si uno tiene una enfermedad hereditaria, es factible que el otro también la tenga por ende la probabilidad de que uno de los parientes tenga la enfermedad en estudio se vería afectada cuando el otro la tiene. Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, la única forma que sean independientes que la $P(A) = 0$ o la $P(B) = 0$ o ambas sean iguales a cero.

Ejemplo 1 (continuación):

En término de las variables aleatorias descritas en el Ejemplo 1, se puede estar interesados en el cálculo de las siguientes probabilidades.

- a. $P(\{X = x\})$. Esta probabilidad se denomina probabilidad marginal -pues se encuentra en uno de los márgenes de la Tabla 1, específicamente, es la última columna de esta tabla, y se puede calcular para cada uno de los posibles valores de la variable aleatoria X , $x = 0, 1, 2, 3$ y 4 . Se suele denotar por $p_X(x)$. Note que:

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^3 p_{X,Y}(x, y) = p_{X,Y}(x, 0) + p_{X,Y}(x, 1) + p_{X,Y}(x, 2) + p_{X,Y}(x, 3)$$

Así,

x	:	0	1	2	3	4	Total
$P(\{X = x\})$:	0,3577	0,1013	0,1383	0,3220	0,080	1,0000

Tabla 2: Probabilidad marginal de la cantidad de hermanos (x).

Se podrá, por ejemplo, interpretar la $p_X(3) = P(\{X = 3\}) = 0,3220$ de la siguiente manera, de cada 100 estudiantes egresados de este establecimiento educacional se esperaría que 32 tengan tres hermanos. Note que, esta probabilidad marginal no considera la cantidad de hermanas, solo la cantidad de hermanos.

- b. $P(\{Y = y\}) = p_Y(y)$. Esta probabilidad se denomina la probabilidad marginal de la variable aleatoria Y , que en el ejemplo 1 representa a la cantidad de hermanas y se puede calcular para cada valor de Y , $y = 0, 1, 2$ y 3 .

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^4 p_{X,Y}(x, y) = p_{X,Y}(0, y) + p_{X,Y}(1, y) + p_{X,Y}(2, y) + p_{X,Y}(3, y) + p_{X,Y}(4, y)$$

Así,

y	: 0	1	2	3	Total
$P(\{y = y\})$: 0,4876	0,2112	0,1728	0,1284	1,0000

Tabla 3: Probabilidad marginal de la cantidad de hermanas (y).

Análogamente, $p_Y(1) = P(\{y = 1\}) = 0,2112$, se puede interpretar de la siguiente manera, de cada 100 estudiantes egresados del establecimiento, se esperaría que 21 al momento de egresar tendría 1 hermanas. Esta distribución de probabilidad marginal de la cantidad de hermanas es la parte de abajo de la tabla 1, no considera la cantidad de hermanos.

c. $P(\{X = x\}/\{Y = y\})$. Esta es una de las probabilidades condicionales que se introducen en (la otra, a continuación). Se denota por $p_{X/Y=y}(x) = P(\{X = x\}/\{Y = y\})$. Note que, estas probabilidades no se pueden denotar como la correspondiente marginal, $p_X(x)$, ya que, si bien son funciones de los valores de x , se debe incluir el “ $X/Y = y$ ”. Numéricamente podrían ser iguales, pero conceptualmente son diferentes. Estas probabilidades (condicionales) dependerán del particular valor y que se especifique ($y = 0, 1, 2$ o 3) sobre el cual se está condicionando. Se tendrán cuatro funciones de probabilidades, una para cada valor de Y .

x	: 0	1	2	3	4	Total
$p_{X/Y=0}(x)$: 0.1501	0.0708	0.1891	0.4311	0.1589	1.0000
$p_{X/Y=1}(x)$: 0.4408	0.0871	0.0436	0.4134	0.0152	1.0000
$p_{X/Y=2}(x)$: 0.5955	0.0515	0.2135	0.1395	0.0000	1.0000
$p_{X/Y=3}(x)$: 0.6893	0.3076	0.0000	0.0031	0.0000	1.0000

Tabla 4: Probabilidades condicionales de la cantidad de hermanos (x) para cada valor fijo de cantidad de hermanas (y)

Note que cada una de estas funciones de probabilidad condicional suman uno. Esto quiere decir que estas probabilidades son para la cantidad de hermanos (x) entre los estudiantes egresados del establecimiento que se sabe no tienen hermanas ($y = 0$); entre los que tienen una hermana ($y = 1$); entre los que tienen dos hermanas ($y = 2$) y entre los que tienen tres hermanas ($y = 3$). ¿Cómo se interpretan estas probabilidades? Por ejemplo,

$p_{X/Y=0}(3) = 0.4311$, se dirá que, de cada 100 estudiantes que se sabe no tienen hermanas ($y = 0$) se esperaría que aproximadamente 43 tengan tres hermanos ($x = 3$).

d. $P(\{Y = y\}/\{X = x\})$. Esta probabilidad que está condicionada para cada valor de x ($= 0, 1, 2, 3$ y 4), la cantidad de hermanos proporciona el comportamiento probabilístico para la cantidad de hermanas y ($= 0, 1, 2$ y 3). Se denotará por $p_{Y/X=x}(y)$. Así, $p_{Y/X=x}(y) = P(\{Y = y\}/\{X = x\}) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$. Aún cuando, estrictamente, sobre todo para aquellos que se están introduciendo en esta temática, $P(\{Y = y\}/\{X = x\}) = P(\{Y = y\} \cap \{X = x\}) / P(\{X = x\})$. El numerador, está dado por: $P(\{Y = y\} \cap \{X = x\}) = p_{Y,X}(y, x)$. En realidad, se dispone en la tabla 1, la $p_{X,Y}(x, y)$ y no la $p_{Y,X}(y, x)$. Sin embargo, por la propiedad de conmutatividad, $B \cap A = A \cap B$, así es que se debe ser cuidadoso en encontrar las probabilidades requeridas desde la tabla 1.

y :	0	1	2	3	Total
$p_{Y/X=0}(y)$:	0,2046	0,2603	0,2877	0,2474	1,0000
$p_{Y/X=1}(y)$:	0,3406	0,1816	0,0879	0,3899	1,0000
$p_{Y/X=2}(y)$:	0,6667	0,0665	0,2668	0,0000	1,0000
$p_{Y/X=3}(y)$:	0,6528	0,2711	0,0748	0,0012	1,0000
$p_{Y/X=4}(y)$:	0,9603	0,0397	0,0000	0,0000	1,0000

Tabla 4: Probabilidades condicionales de la cantidad de hermanas (y) para cada valor fijo de cantidad de hermanos (x)

Si bien la tabla 4 tiene prácticamente la misma disposición que la tabla 3. Los resultados presentados en la tabla 4, se deben leer como probabilidades de tener la cantidad de hermanas y ($= 0, 1, 2, \text{ y } 3$), para valores fijos de la cantidad de hermanos ($x = 0, 1, 2, 3 \text{ y } 4$). Así, por ejemplo, $p_{Y/X=1}(0) = 0,3406$, se puede interpretar como: de cada 100 estudiantes egresados del establecimiento que se sabe tienen un hermano ($x = 1$), se esperaría que aproximadamente 34 de estos estudiantes no tuviese hermanas ($y = 0$).

- e. $P\{X = x\} \cup P\{Y = y\}$. Esta probabilidad, se obtiene directamente desde la tabla 1, que incluye las probabilidades conjuntas ($p_{X,Y}(x, y)$) y las probabilidades marginales ($p_X(x)$ y $p_Y(y)$). Estas marginales, están además en la tabla 2 y 3, respectivamente.

Así, $P(\{X = x\} \cup \{Y = y\}) = P(\{X = x\}) + P(\{Y = y\}) - P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$. Lo que en términos de las funciones de probabilidad descritas en las tablas 1, 2 y 3. $P(\{X = x\} \cup \{Y = y\}) = p_X(x) + p_Y(y) - p_{X,Y}(x, y)$. A modo de ejemplo, ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante egresado tenga un hermano o una hermana? Esto se entiende como: $P(\{X = 1\} \cup \{Y = 1\}) = p_X(1) + p_Y(1) - p_{X,Y}(1,1) = 0,1013 + 0,2112 - 0,0184 = 0,2941$.

- f. $P(\{X + Y = w\})$. Esta probabilidad requiere comprender lo que se entiende por una función de dos variables aleatorias, la suma en este caso de las variables aleatorias X e Y , que representaría a la cantidad total de hermanos, en términos genérico, sin considerar el sexo. Los posibles valores de esta nueva variable aleatoria, denotados por w son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. El $w = 0$, se obtiene cuando $x = 0$ e $y = 0$; el $w = 1$, cuando $x = 0$ e $y = 1$ o $x = 1$ e $y = 0$; y así sucesivamente, $w = 7$, se obtiene cuando $x = 4$ e $y = 3$. De esta

forma se puede denotar por $W = X + Y$ y así calcular las probabilidades $P(W = w) = p_W(w)$ de la siguiente manera:

w	:	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
$p_W(w)$:	0.0732	0.1276	0.2135	0.3168	0.2412	0.0273	0.0004	0,0000	1,0000

Tabla 5: Probabilidad de la variable $W = X + Y$.

Un detalle importante de las probabilidades conjuntas y las probabilidades marginales que se debe tener en cuenta cuando se realizan análisis estadísticos es que, disponiendo de las probabilidades conjuntas se pueden obtener las probabilidades marginales. Sin embargo, el solo hecho de disponer las probabilidades marginales -en general- no es suficiente para obtener la conjunta. La excepción se produce cuando los eventos o las variables son mutuamente independientes debido a que la probabilidad conjunta se obtiene multiplicando las marginales; es decir, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ para dos eventos A y B de Ω o bien, para las variables aleatorias X y Y , $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$, para todo par (x, y) . En la tabla 1, hay tres probabilidades iguales a cero ($p_{X,Y}(2,3)$); $p_{X,Y}(4,2)$ y $p_{X,Y}(4,3)$) las probabilidades marginales involucradas no son iguales a cero por ende las variables aleatorias son estadísticamente dependientes. Específicamente,

$p_{X,Y}(2,3) \neq p_X(2) \cdot p_Y(3)$. Es decir, 0 que es la $p_{X,Y}(2,3)$ es diferente al producto entre $0,1383 \cdot 0,1284$, que son el producto de las probabilidades marginales $p_X(2)$ y $p_Y(3)$, respectivamente.

Todas estas funciones discretas de probabilidades (también llamadas funciones de masa de probabilidades): la conjunta $p_{X,Y}(x,y)$; las dos marginales, $p_X(x)$ y $p_Y(y)$; las cuatro condicionales en $Y = y$, $p_{X/Y=y}(x)$; las cinco condicionales en $X = x$, $p_{Y/X=x}(y)$ y la de la suma de las variables aleatorias $W = X + Y$, $p_W(w) = p_{X+Y}(w)$ se pueden presentar gráficamente, no distinguiendo un particular modelo de probabilidad de los existentes en la estadística. Además, a cada uno de estos modelos se le pueden calcular, valores esperados, medianas, modas, desviaciones estándar e incluso se puede a partir del modelo conjunto X y Y , calcular alguna medida de asociación,

$\text{Corr}(X \text{ y } Y)$, para lo que se requiere el valor esperado de XY para obtener primero la covarianza entre X y Y , para por último calcular la Correlación entre X y Y .

Finalmente, los ejercicios propuestos de preparación y adaptación a la PAES son los siguientes:

Ejercicios de desafío tipo PAES

1. En una bolsa hay nueve fichas numeradas del 1 al 9. Si se extraen dos fichas una tras otra sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 números pares?

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{5}{18}$

C) $\frac{1}{36}$

D) $\frac{5}{9}$

E) $\frac{1}{3}$

2. En una bolsa hay n tarjetas, todas de igual forma y tamaño, de las cuales a son rojas y b son azules. Si se extraen dos tarjetas al azar, una tras otra y sin reposición, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la probabilidad de extraer primero una tarjeta roja y luego una azul?

A) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n}$

B) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b-1}{n}$

C) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$

D) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b-a}{n-1}$

E) $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1}$

3. Paulina tiene un 80% de probabilidad de aprobar un ramo, Tamara tiene un 70% de probabilidad de aprobar el mismo ramo. ¿Cuál es la probabilidad que ambas reprobren el ramo?

- A) 6%
- B) 20%
- C) 21%
- D) 25%
- E) 30%

4. Un alumno responde un examen en que las preguntas tienen tres opciones (A, B y C) y solo una de ellas es la correcta. Si contesta dos preguntas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que solo una de ellas esté correcta? Considerando que cada pregunta es independiente de la otra

- A) $\frac{2}{9}$
- B) $\frac{1}{3}$
- C) $\frac{4}{9}$
- D) $\frac{1}{2}$
- E) $\frac{5}{9}$

5. En una caja hay 5 bolitas blancas y 4 verdes. Si se sacan dos bolitas sin reposición, ¿Cuál es la probabilidad de que una sea verde y la otra blanca?

A) $\frac{5}{8}$

B) $\frac{5}{9}$

C) $\frac{4}{9}$

D) $\frac{8}{9}$

E) $\frac{40}{81}$

6. La probabilidad de que Susana resuelva un problema es $\frac{3}{5}$, y la probabilidad de que lo resuelva Pablo es $\frac{2}{3}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que no lo resuelva Pablo es $\frac{1}{3}$

II) La probabilidad de que no lo resuelva ninguno de los dos es $\frac{19}{15}$

III) La probabilidad de que lo resuelva Pablo y no lo resuelva Susana es $\frac{4}{15}$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y II

E) Solo I y III

7. Se tiene una moneda cargada cuya probabilidad de que salga cara es 0,6. Si se lanza esta moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que una vez salga cara y el otro sello?

A) 0,16

B) 0,24

C) 0,25

D) 0,36

E) 0,48

8. Una bolsa A tiene en su interior 2 bolitas rojas y 5 azules y una bolsa B tiene 5 bolitas rojas y 2 azules. Si se escoge una de estas bolsas al azar y se extrae de su interior una bolita, ¿cuál es la probabilidad de que la bolita sea roja y se haya extraído de la bolsa A?

A) $\frac{1}{7}$

B) $\frac{2}{7}$

C) $\frac{1}{49}$

D) $\frac{2}{49}$

E) $\frac{1}{14}$

9. Una prueba consta de 6 preguntas con 3 alternativas cada una y sólo una alternativa correcta. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que conteste toda la prueba correctamente?

A) $\frac{1}{729}$

B) $\frac{1}{243}$

C) $\frac{1}{81}$

D) $\frac{1}{27}$

E) $\frac{1}{6}$

10. En una prueba de cinco preguntas de verdadero o falso, si se contestan todas las preguntas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres estén correctas y dos incorrectas?

A) $\frac{1}{10}$

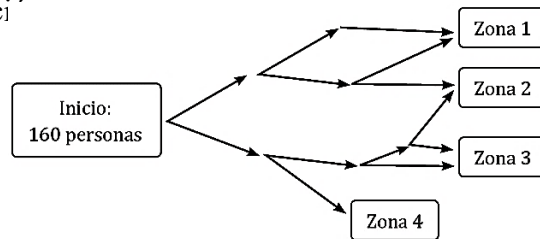
B) $\frac{5}{32}$

C) $\frac{10}{32}$

D) $\frac{5}{10}$

E) $\frac{20}{32}$

11. Un grupo de 160 personas partirán desde un mismo punto y llegarán hasta alguna de las zonas que se muestran a continuación:



En cada bifurcación la mitad de los que llegan se va hacia un lado y la otra mitad hacia el otro. Después de que todos lleguen al final, ¿cuál es la probabilidad que una persona se encuentre en la zona 2?

A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{3}{16}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{2}$

12. Mensualmente algunos de los automóviles producidos en la planta ATOM presentan convertidores catalíticos defectuosos. De acuerdo con la información entregada en la tabla adjunta, ¿cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que un automóvil producido en estos tres meses sea defectuoso?

	Total de unidades producidas	Convertidores catalíticos defectuosos
Enero	569	15
Febrero	508	18
Marzo	547	16

- A) 0,01
- B) 0,02
- C) 0,03
- D) 0,04
- E) 0,05

Los siguientes problemas fueron extraídos directamente de la página oficial del DEMRE³ (<https://demre.cl/publicaciones/listado-2026>) donde fueron publicadas oficialmente todas las pruebas rendidas para las admisiones a la universidad desde el año 2005 al 2026, al abordar el concepto de la probabilidad condicional. Y servirán como apoyo al docente para continuar la misma línea de trabajo si el establecimiento está enfocado en los resultados PAES

Para cada problema se colocará como título DEMRE y el año de la prueba que se extrajo la pregunta.

DEMRE (2017)

13. Un colegio ofrece a sus alumnos varias actividades culturales, entre ellas teatro y danza. El 10% de los estudiantes del colegio participa en danza, el 8% participa en teatro y el 4% de los estudiantes del colegio participa en danza y teatro. Si se escoge al azar un estudiante del colegio, ¿cuál es la probabilidad de que este participe en teatro si se sabe que participa en danza?

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

³ Acrónimo que significa: Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional

DEMRE (2018)

14. En la tabla adjunta se muestran los resultados de una encuesta realizada a 60 personas, sobre la preferencia de mermeladas, clasificadas en no dietética y dietética. Al seleccionar a uno de estos encuestados al azar, la probabilidad de que este prefiera una mermelada no dietética, sabiendo que es mujer, es

	Mermelada	
	No dietética	Dietética
Mujer	6	24
Hombre	18	12

A) $0,0\bar{3}$

B) $0,1\bar{6}$

C) 0,2

D) 0,25

E) $0, \bar{3}$

DEMRE (2019)

15. Se tienen dos llaveros: P con 4 llaves y Q con 2 llaves. En cada llavero solo hay una llave que abre la puerta de una bodega. Cada llavero tiene la misma probabilidad de ser elegido y cada llave de ese llavero es equiprobable de ser elegida. Si se escoge un llavero al azar y de él se escoge al azar una llave, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la llave abra la bodega es $\frac{8}{3}$

II) La probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave no abra la bodega es $\frac{1}{2}$

III) La probabilidad de que el llavero escogido sea P y que la llave abra la bodega es la mitad de la probabilidad de que el llavero escogido sea Q y que la llave abra la bodega.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) Solo II y III

DEMRE (2019)

16. En una población el 52% son hombres de los cuales el 12% es zurdo y el 15% de las mujeres también lo es. Si se eligiera al azar una persona entre las personas zurdas de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea hombre?

A) $\frac{52}{100} \cdot \frac{12}{100}$

B) $\frac{12}{52}$

C) $\frac{12}{15}$

D) $\frac{12}{52} \cdot \frac{33}{48}$

E) $\frac{12 \cdot 52}{12 \cdot 52 + 15 \cdot 48}$

DEMRE (2020)

17. Se hace una encuesta a un grupo de personas y se les consulta si consumen azúcar o si consumen miel. Los resultados obtenidos se resumen en la tabla adjunta.

	Azúcar	Miel
Hombres	25	9
Mujeres	10	18

Si del grupo se elige una persona al azar, resultando que es hombre y ninguno de los encuestados consume ambos productos, ¿cuál es la probabilidad de que consuma miel?

A) $\frac{27}{34}$

B) $\frac{27}{62}$

C) $\frac{34}{62}$

D) $\frac{9}{34}$

E) $\frac{9}{62}$

DEMRE (2021)

18. Dos cursos de un colegio realizan una fiesta para reunir fondos para un viaje de estudios. Se reparten dos tipos de entradas, las del tipo P y las del tipo Q. En la tabla adjunta se muestra la distribución de la venta de entradas para el segundo A y el segundo B.

Tipo de entradas	Cursos	
	Segundo A	Segundo B
P	15	10
Q	25	30

Si se selecciona a una persona al azar de estos dos cursos y se sabe que tiene una entrada del tipo Q, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante del segundo B?

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{6}{11}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{8}{11}$

E) $\frac{1}{30}$

DEMRE (2023)

19. Considera las tiendas A, B y C dedicadas a la venta de relojes. Si un cliente compra un reloj en una de estas tres tiendas, la probabilidad de que compre en A es 0,2 ; en B es 0,3 y en C es 0,5. Se sabe que la probabilidad de que cualquier reloj que se venda en las tiendas A, B y C tenga fallas es 0,3; 0,5 y 0,6; respectivamente.

Si Teresa compra un reloj que no tiene fallas, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya comprado en la tienda A?

A) $0,2 \cdot 0,7$

B) $0,2 \cdot 0,3$

C) $\frac{0,2 \cdot 0,3}{0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4}$

D) $\frac{0,2 \cdot 0,7}{0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4}$

DEMRE (2023)

20. De un grupo de 100 personas, 40 de ellas son fumadores. Un % 20 de los fumadores no presenta una enfermedad respiratoria. Al seleccionar una persona al azar del grupo total, la probabilidad de que presente una enfermedad respiratoria es 0,35.

Al seleccionar una persona al azar del grupo total, ¿cuál es la probabilidad de que no fume dado que no tiene una enfermedad respiratoria?

A) $\frac{57}{65}$

B) $\frac{45}{60}$

C) $\frac{57}{60}$

D) $\frac{45}{65}$

Soluciones

1. A	5. B	9. A	13. B	17. D
2. E	6. E	10. C	14. C	18. B
3. A	7. E	11. B	15. D	19. D
4. C	8. A	12. C	16. E	20. A

Bosquejo de planificación didáctica

El siguiente formato de planificación, está contemplada como planificación por unidad trabajada y elaborada por el colegio San Pedro Nolasco de Vitacura (región Metropolitana) en donde se trabajó en ese lugar en los años 2023 – 2024.

Para fines prácticos, se rellenará el siguiente formato de acuerdo con la línea investigativa de la probabilidad condicional, manteniendo, el formato proporcionado por el establecimiento tanto para la planificación como guía de estudio para el estudiante, el tipo de fuente en la escritura, tamaños, subrayados y el programa de estudio del año 2020 del Ministerio de Educación. Extrayendo ejemplos y ejercicios del texto Savia de la editorial española SM de tercero medio y algunos problemas sacados de las pruebas elaboradas por DEMRE para la elaboración de la guía N°3 de acuerdo con el formato de planificación por elaboración propia, en la que, la clase N°4 correspondería a la resolución de problemas cotidianos o científicos que involucran la aplicación de la probabilidad condicional.

PLANIFICACIÓN POR UNIDAD

ASIGNATURA	MATEMÁTICA	NIVEL	IIIº MEDIO
NOMBRE UNIDAD	I: El uso de datos estadísticos y de modelos probabilísticos para la toma de decisiones	FECHA INICIO Y TÉRMINO	Del 18 de marzo al 24 de mayo
DOCENTE(S)	CRISTOPHER ARRIAZA	CANTIDAD HORAS	10 semanas (40 horas aprox.)

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE (MINEDUC)			
<p>OA 2. Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificando la población que está sobre o bajo el percentil. • Representándolas con 			
CONOCIMIENTOS CONCEPTUALES		CONOCIMIENTOS PROCEDIMENTALES	CONOCIMIENTOS ACTITUDINALES
<ul style="list-style-type: none"> • Probabilidad condicional • Variable aleatoria discreta • Función de probabilidad • Distribuciones de probabilidad 		<ul style="list-style-type: none"> • Tomar decisiones fundamentadas en evidencias estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico (OA c) • Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados (OA d) 	<ul style="list-style-type: none"> • Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros. • Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.
VOCABULARIO DE LA UNIDAD		PLAN DE EVALUACIÓN	MATERIALES
<ul style="list-style-type: none"> • Principio combinatorio • Evento compuesto • Probabilidad condicional • Unión e Intersección • Variable aleatoria • Función de probabilidad • Distribución de probabilidad 		<p>Evaluación Formativa:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Guías • Taller grupal • Actividad interactiva <p>Evaluación Sumativa:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Prueba N°1 	<ul style="list-style-type: none"> • Guías teórico – práctico • PPT • Prueba
SESIONES		METAS DE DESEMPEÑO (Indicadores de Evaluación)	INSUMO Y ACTIVIDAD VINCULADA
Nº	FECHA		
1	Semana 3		
1		Elaborar árboles de probabilidad de experimentos sin reposición	Guía teórico práctico N°1
2	Semana 4	Representar tablas de frecuencias de dos características para determinar las probabilidades condicionales	Guía teórico práctico N°2
3	Semana 1	Representar tablas de frecuencias de dos características para determinar las probabilidades condicionales	Guía teórico práctico N°2
4	Semana 2	Resolver problemas cotidianos o científicos que involucren la aplicación de la probabilidad condicional	Guía teórico práctico N°3
5	Semana 3	Resolver problemas cotidianos o científicos que involucren la aplicación de la probabilidad condicional	Guía teórico práctico N°3

Guía de Ejercicios N°3

PROBLEMAS CON PROBABILIDAD CONDICIONAL

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha: _____

ACTIVACIÓN

Situación 1

En un curso de 40 estudiantes, 25 practican vóleybol, de los cuales 15 son mujeres. Si se selecciona a un estudiante y se sabe que practica vóleybol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Paso 1: Definir los sucesos

A:

B:

Paso 2: Determinar las probabilidades $P(A \cap B)$

Paso 3: Determinar la probabilidad de $P(B)$ que corresponde a la probabilidad de seleccionar a un estudiante que practique vóleibol

Paso 4: Finalmente, la probabilidad pedida corresponde al cociente entre $P(A \cap B)$ y $P(B)$

Paso 5: Respuesta al problema

FORMALIZACIÓN

Recordemos que la probabilidad condicionada $P(A/B)$ es la probabilidad de que ocurra un suceso

A dado que ocurrió otro suceso B y se calcula mediante la siguiente expresión: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$,

con $P(B) \neq 0$.

Considere el experimento “lanzar dos dados de seis caras” y los sucesos A: “obtener una suma de puntos superior a cuatro” y B: “obtener ocho puntos”

a) ¿Qué significa $P(A/B)$ y $P(B/A)$?

b) Determine los valores de $P(A/B)$ y $P(B/A)$

HAZLO TU

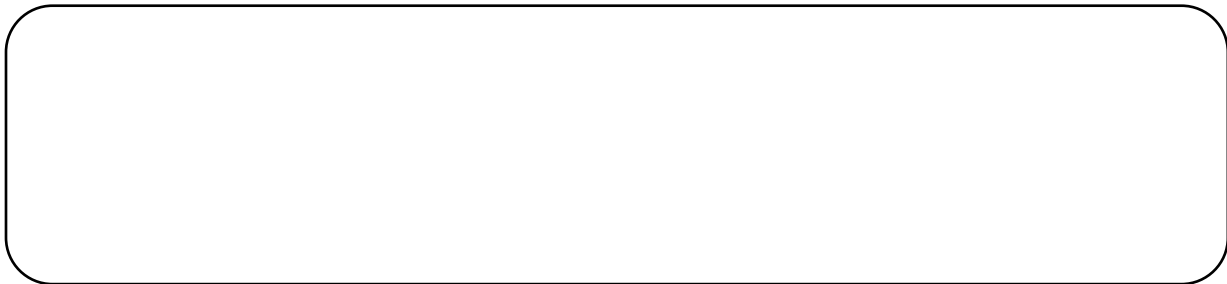
Resuelve los siguientes problemas considerando los pasos del problema anterior

1. En un supermercado, la probabilidad de que una persona haya comprado un bebestible es $\frac{4}{7}$ y de que haya comprado un snack es de $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar una persona que compró un bebestible, ésta haya comprado también un snack?

2. Una urna contiene 28 fichas numeradas del 1 al 28. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha con un valor mayor que 10 sabiendo que la ficha es múltiplo de 4?



3. En una baraja inglesa, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar una carta no numérica si se sabe que la carta es de pica o de trébol?



4. En una localidad, el 35% de las personas tiene hijos, el 25% es casado, el 15% tiene hijos y es casado, y el 20% es casado, pero no tiene hijos. Si se selecciona aleatoriamente una persona:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté casado dado que la persona seleccionada tenga hijos?



b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga hijos dado que la persona seleccionada está casada?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga hijos dado que no está casada?

5. En un pueblo se ha registrado la distribución de personas mayores de edad de acuerdo con su sexo y situación laboral en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres
Activo	50	55
Cesante	15	25

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar a una persona activa, ésta sea una mujer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar a un hombre, éste se encuentre cesante?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar a una activa, sea hombre?

6. La cantidad de estudiantes de tres cursos (A, B y C) que participan de los talleres de Literatura y Ciencias se registra en la siguiente tabla:

	A	B	C	Total
Literatura	12	8	6	26
Ciencias	18	7	19	44
Total	30	15	25	70

a) Represente mediante un diagrama de árbol la tabla anterior

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger aleatoriamente a un estudiante, pertenezca al curso B dado que asiste al taller de Literatura?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger aleatoriamente a un estudiante, asista al taller de Ciencias, dado que pertenece al curso A?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger aleatoriamente a un estudiante que asiste al taller de Ciencias, éste no pertenezca al curso A?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger a un estudiante que no pertenece al curso B, éste no asista al taller de Literatura?

7. La distribución de hombres y mujeres, fumadores y no fumadores de un pueblo se muestra en la siguiente tabla:

	Hombres	Mujeres
Fumadores	65	30
No fumadores	35	70

a) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a una persona al azar que sea mujer sabiendo que se ha elegido a alguien que fuma?

b) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar a una persona que no fuma sabiendo que se ha elegido a un hombre?

8. De 100 estudiantes, 42 cursan Literatura, 68 Geografía, 52 Filosofía, 25 Literatura y Filosofía, 20 Literatura y Geografía. Además 8 de ellos cursaron Filosofía, pero no Literatura ni Geografía y 10 cursaron las tres asignaturas. Si se selecciona a un estudiante al azar, determina:

a) La probabilidad de que una persona inscrita en geografía curse las tres asignaturas

b) La cantidad de personas que no cursaron ninguna de las tres asignaturas

PREGUNTAS DE CIERRE

1. ¿En cuáles problemas utilizarías tabla de contingencia?, ¿en cuál diagrama de árbol?

2. ¿En qué situaciones puedes tomar decisiones a partir de la probabilidad condicionada?

EJERCICIOS DE DESAFÍO

1. Una bolsa A tiene en su interior 2 bolitas rojas y 5 azules y una bolsa B tiene 5 bolitas rojas y 2 azules. Si se escoge una de estas bolsas al azar y se extrae de su interior una bolita, ¿cuál es la probabilidad de que la bolita sea roja y se haya extraído de la bolsa A?

A) $\frac{1}{7}$

B) $\frac{2}{7}$

C) $\frac{1}{49}$

D) $\frac{2}{49}$

E) $\frac{1}{14}$

2. Considera las tiendas A, B y C dedicadas a la venta de relojes. Si un cliente compra un reloj en una de estas tres tiendas, la probabilidad de que compre en A es 0,2; en B es 0,3 y en C es 0,5. Se sabe que la probabilidad de que cualquier reloj que se venda en las tiendas A, B y C tenga fallas es 0,3; 0,5 y 0,6 respectivamente.

Si Teresa compra un reloj que no tiene fallas, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya comprado en la tienda A?

A) $0,2 \cdot 0,7$

B) $0,2 \cdot 0,3$

C) $\frac{0,2 \cdot 0,3}{0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4}$

D) $\frac{0,2 \cdot 0,7}{0,2 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,4}$

3. Se hace una encuesta a un grupo de personas y se les consulta si consumen azúcar o si consumen miel. Los resultados obtenidos se resumen en la tabla adjunta.

Si del grupo se elige una persona al azar, resultando que es hombre y ninguno de los encuestados consume ambos productos, ¿cuál es la probabilidad de que consuma miel?

A) $\frac{27}{34}$

B) $\frac{27}{62}$

C) $\frac{34}{62}$

D) $\frac{9}{34}$

E) $\frac{9}{62}$

4. Dos cursos de un colegio realizan una fiesta para reunir fondos para un viaje de estudios. Se reparten dos tipos de entradas, las del tipo P y las del tipo Q. En la tabla adjunta se muestra la distribución de la venta de entradas para el segundo A y el segundo B.

Si se selecciona a una persona al azar de estos dos cursos y se sabe que tiene una entrada del tipo Q, ¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante del segundo B?

A) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{6}{11}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{8}{11}$

E) $\frac{1}{30}$

CLAVES

1. A	2. D	3. D	4. B
------	------	------	------

Conclusión

Este trabajo tuvo como propósito no solo ofrecer una mirada crítica a las evaluaciones externas, sino también proponer una estrategia pedagógica para docentes de enseñanza media que aborden la probabilidad condicional desde un enfoque más significativo y contextualizado. La propuesta busca que los estudiantes otorguen sentido a los conceptos matemáticos, aplicándolos en situaciones reales como la toma de decisiones en seguros, medicina o pronósticos meteorológicos, entre otros ámbitos cotidianos,

Aunque no fue posible aplicar la propuesta en un curso específico debido a limitaciones de tiempo y planificación docente, los profesores consultados valoraron positivamente su carácter innovador, destacando el alejamiento de ejercicios rutinarios basados en azar, como lanzamientos o extracciones, que, en muchos casos, carecen de relevancia para los estudiantes. Esta apreciación evidencia la necesidad de material pedagógico contextualizado, que permita conectar los contenidos con la experiencia de los alumnos y favorezca aprendizajes duraderos.

En este sentido, resulta fundamental que los docentes cuenten con tiempo y recursos para seleccionar, diseñar y adaptar actividades según la realidad de sus aulas, considerando además el potencial de herramientas tecnológicas como GeoGebra, que facilitan la representación visual e interactiva de conceptos abstractos. Si bien existen numerosos recursos disponibles en plataformas oficiales y en la web, su dispersión y acceso limitado dificultan su uso sistemático en la práctica diaria.

Mirando hacia el futuro, esta propuesta se enmarca en una transformación educativa más amplia. Como planteaba Shirky (2010), la educación 3.0 representó un cambio hacia entornos

colaborativos y centrados en el estudiante, impulsados por la web y la participación activa. Hoy, sin embargo, nos encontramos avanzando hacia una educación 5.0, donde la inteligencia artificial, la personalización del aprendizaje y la integración de tecnologías redefinen el rol del docente y del estudiante. En este nuevo escenario, las estrategias pedagógicas deben ser flexibles, significativas y tecnológicamente pertinentes, permitiendo que el estudiante asuma un rol protagónico en la construcción de su conocimiento.

Finalmente, este trabajo queda abierto a futuras investigaciones y aplicaciones en diversos contextos educativos, con el fin de seguir perfeccionando esta propuesta y adaptarla a las realidades de cada establecimiento. De este modo, se busca contribuir tanto al quehacer docente en contextos donde el tiempo y los recursos son limitados, como al fortalecimiento de aprendizajes significativos y pertinentes para los estudiantes, en sintonía con los desafíos de la educación actual y futura.

Referencias

- Canavos, G. C. (1988). *Introduction to the Practice of Statistics*. Estados Unidos, editorial McGraw-Hill /Interamericana de México, S.A. de C.V.
- Congacha, J. W. (2016). *Estadística aplicada a la educación*. Riobamba-Ecuador, editorial académica española
- Gabriel, C. N. (2013). *El cambio en el razonamiento bayesiano de estudiantes universitarios durante un semestre académico*. vol. 17, 150 – 153.
- MINEDUC. (2000). *Programa de estudio, Tercer año medio, Unidad 4*. Chile.
- MINEDUC. (2009). *programa de estudio 3° medio. Unidad de currículum y evaluación*. Chile.
- MINEDUC. (2016). *Programa de estudio Primer año medio*. Chile.
- MINEDUC. (2016). *Programa de estudio, Segundo año medio*. Chile.
- MINEDUC. (2019). *Bases curriculares de tercero y cuarto medio*. Chile.
- MINEDUC. (2020). *Programa de estudio, tercer año medio*. Chile.
- MINEDUC. (2024). *Texto del estudiante de I° medio*. Chile, editorial Santillana.
- MINEDUC. (s.f.). https://www.curriculumnacional.cl/#menu_aprendo_en_linea. Obtenido de curriculum nacional.
- Moll, S. (2011). *La educación 3.0: Una nueva cultura para aprender*. España, editorial Graó.
- Pavlov, I. (1927). *Conditioned Reflexes*. Inglaterra, editorial Oxford University Press.

Shirky, C. (2010). *Cognitive Surplus: How Technology Makes Consumers into Collaborators*. Estados Unidos, editorial Penguin Press.

Skinner. (1938). *The Behavior of Organisms*. Estados Unidos, editorial Appleton-Century-Crofts

Spiegel, M. R. (1972). *Theory and problems of statistics*. Estados Unidos, editorial McGraw-Hill

Stuart, M. G. (1954). *The advanced theory of statistics. Primera edición*. Reino Unido, editorial Macmillan.

Arancibia V. (1997). *Manual de psicología educacional*. Chile, editorial edicionesuc.

Watson, J. B. (1913). *Psychology as the Behaviorist Views It*.

Barrera R. (2019). *Texto Savia tercero medio*. Chile: Editorial SM.

Cantoral R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, editorial trillas.