

**REDUCCIÓN DE LAS FUNCIONES DE
COVARIANZA NO ESTACIONARIAS SOBRE
ESFERAS A TRAVÉS DE DEFORMACIONES**



POR

ENNER ANTONIO MENDOZA MARCHAN

**TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN ESTADÍSTICA**

MORENO BEVILACQUA

TUTOR DEL TRABAJO

EMILIO PORCU

CO-TUTOR DEL TRABAJO

**INSTITUTO DE ESTADÍSTICA UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
IDEUV**

VALPARAÍSO, CHILE

2017

Resumen Ejecutivo

En la actualidad existe la necesidad de construir modelos que sean capaces de capturar el comportamiento simultáneo de las componentes espaciales y temporales de los procesos ambientales (vientos, contaminantes del aire, contaminantes del suelo, pronóstico de meteorología, etc.), ya que si los consideramos por separado, hay una gran cantidad de información que se pierde. Una de las ciencias que aborda este tipo de tema es la denominada Geoestadística cuya finalidad es el análisis y predicción de fenómenos en espacio y/o tiempo.

La geoestadística ofrece una manera de describir la continuidad espacio y/o tiempo, que es un rasgo distintivo esencial de estos fenómenos ambientales, y proporciona adaptaciones de las técnicas clásicas de regresión para tomar ventajas de esta continuidad. Siempre más a menudo se observan conjuntos de datos globales, tomados a lo largo de toda la superficie terrestre. Esto implica que la métrica Euclidiana no es apta para describir la dependencia entre los datos. Esto se refleja, inevitablemente, en la métrica espacial y requiere un esfuerzo considerable para construir métricas adecuadas.

Como bien se conoce, en geoestadística los procedimientos de interpolación basados en kriging dependen de la elección de la función de covarianza asociada con el campo espacio-temporal. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo es de caracterizar las funciones de covarianza con métricas no necesariamente Euclidianas que dependen de geometrías alternativas que mejor puedan describir la dependencia entre los datos. Estos modelos pueden ser utilizados por los profesionales con el fin de analizar datos que tienen evolución en el espacio, el tiempo, o ambos. El enfoque se basa en la especificación de la función de covarianza subyacente para algún campo aleatorio débilmente estacionario o no estacionario y anisotrópico o isotrópico. Para abordar el problema, consideraremos los siguientes objetivos:

- (i) Construir funciones de covarianza que dependan de métricas no Euclidianas.
- (ii) Considerar deformaciones que permitan reducir una función de covarianza no estacionaria en la esfera a una estacionaria e isotrópica.

Para satisfacer nuestros objetivos, utilizaremos las siguientes metodologías:

- a) Funciones definidas positivas.
- b) Técnicas de deformaciones en las variedades.
- c) Problemas de reducibilidad y ecuaciones funcionales.
- d) Cálculo diferencial en varias variables.
- e) Ecuaciones diferenciales.

Una vez establecida la importancia de estudiar las componentes espaciales en la evolución de un proceso estocástico, vale la pena mencionar que el enfoque de la construcción de las funciones de covarianzas espacial es de suma importancia para los modelos espaciales, dependiendo del punto de vista del investigador, el área de trabajo y el fenómeno. Una dicotomía muy importante es entre modelos los determinísticos y modelos estocásticos. Por ejemplo, la predicción del clima tradicionalmente ha sido estudiado como un problema determinístico. Como señala [Gneiting \(2002a\)](#), para una predicción en un marco determinístico, es necesario conocer perfectamente el estado actual de la atmósfera y las leyes intrínsecas que influyen en la evolución de los siguientes estados. En el marco determinístico, los instrumentos son típicamente de predicción del clima basados en las ecuaciones diferenciales parciales, así como los modelos globales y de grande escala. Todos los modelos determinístico sufren de la incertidumbre de las mediciones y error de localización, como también las leyes físicas intrínsecas excepcionales de los fenómenos ambientales, característica que están presente tales como los contaminantes del aire, del suelo, del agua, pronóstico de meteorología, etc.

En la literatura actual podemos encontrar varias direcciones para la construcción de las funciones de covarianzas no separables. En las primeras contribuciones de [Kyriakidis & Journel \(1999\)](#) la atención se centra en la ampliación de los métodos espaciales o temporales a espacio-temporal. Estos enfoques de extensión pueden ser clasificado en dos categorías principales: uno considera una extensión pura de los modelos espaciales o temporales multivariantes, mientras que el otro se basa en un proceso espacio-temporal univariado. [Dimitrakopoulos & Luo \(1994\)](#) proponen algunos de los modelos geoméricamente anisotrópicos para el espacio-temporal. [Guttorp *et al.* \(1992\)](#) formularon algunas estructuras de covarianza separables, obtenidas con el producto tensorial espacial y una covarianza temporal.

Otro punto de vista se basa en el hecho de que la derivada puede capturar por completo la variabilidad temporal, con el fin de obtener un proceso aleatorio puramente espacial; ver, por ejemplo, [Sampson & Guttorp \(1992\)](#). Especialmente, [Cressie & Huang \(1999\)](#) propusieron un enfoque espectral para obtener las funciones de covarianzas espacio-temporal, y la obra de [Gneiting \(2002b\)](#) representan la generalización natural de este enfoque, que se obtiene usando las funciones completamente monótonas y funciones cuya primera derivada es completamente monótona. [Stein \(2005\)](#) hace hincapié en el enfoque espectral y en el hecho de que una densidad espectral espacio-temporal debe ser suficientemente suave lejos del origen. Por último, recientes trabajo sobre la esfera unitaria se han desarrollado: [Chen *et al.* \(2003\)](#), [Genton & Perrin \(2004\)](#), [Huang *et al.* \(2012\)](#), [Hitczenko & Stein \(2012\)](#), [Lang & Schwab \(2013\)](#), [Gneiting \(2013\)](#), [Møller *et al.* \(2016\)](#), [Guella *et al.* \(2016a,b\)](#), [Porcu *et al.* \(2016\)](#), [Porcu *et al.* \(2017\)](#), [Berg & Porcu \(2017\)](#).

En este trabajo, se logró formular innovaciones en las funciones de covarianza en el espacio, a partir del uso de deformaciones (difeomorfismos) a través de las formas bilineales en los espacios \mathbb{S}^{d-1} y \mathbb{R}^d . De igual manera, este método atendió las distancias asociadas en las variedades esféricas a través de los difeomorfismos y en el espacio Euclidiano.

Por consiguiente, de lo anterior, los principales aportes del trabajo son: la creación de una familia de funciones de covarianza a través de deformaciones entre espacios esféricos. Por otro lado, a partir de una deformación se encuentra otro difeomorfismo. Todos estos resultados se encuentran en el Apéndice [A](#). También, uno de los resultados importantes de condiciones suficiente para la recuperación de funciones de covarianzas no estacionarias.

Este trabajo abre vías de investigaciones al estudio de los procesos espaciales reducibles por deformación del espacio. Además de la aplicación de los métodos propuestos en casos concretos y su aplicación a problemas tales como la predicción de un fenómeno físico.

El trabajo está distribuido por capítulos de las siguientes formas: En el Capítulo 1, se presentan las bases teóricas de los procesos estocásticos espaciales. Además se exponen brevemente los conceptos de la geoestadística. En Capítulo 2, se detallan algunas métricas usadas para enfrentar el contenido que tiene que ver con espacios Euclidiano y no Euclidiano. Desde el punto de vista matemático, el problema se puede modelar adecuadamente con una métrica que depende directamente del espacio. En Capítulo 3, se hace un desarrollo breve del tema de las ecuaciones diferenciales y se abordan las propiedades generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias como son: existencia, unicidad, continuidad y las soluciones respecto a los datos iniciales o parámetros. En Capítulo 4, se considera el tema de difeomorfismos que es necesario conocer para el tema central del trabajo y algunos conceptos importantes relacionados con la variedad. En las otras secciones de este capítulo son desarrollos propios, como elementos de apoyo para entender el producto final del artículo, que se encuentra en el Apéndice A. En Capítulo 5, se expone conclusión y líneas de investigación futuras. En Apéndice A, se encuentra el artículo que respalda toda la investigación. Y finalmente en Apéndice B, esta el código y los algoritmos usados.

AGRADECIMIENTO

A mi director de tesis, el profesor Emilio Porcu, amigo y maestro por la confianza, la paciencia y la motivación permanente, que me ofreció durante los momentos difíciles del desarrollo de la tesis y haber dedicado parte de su valioso tiempo para asesorarme en el desarrollo del trabajo.

Al profesor Rachid Senoussi muy agradecido por su colaboración, por los consejos en relación con el tema y sus muy valiosas correcciones, que me ayudaron a tomar buen rumbo del trabajo.

Al profesor Moreno Bevilacqua por su apoyo y confianza brindada en todo momento. A mis compañeros y amigos Chilenos como son: Eduardo, Angelo y Alvaro, gracias por su apoyo y ayuda en lo momento que lo solicité, y sin olvidar al compañero Mexicano José Luis por su apoyo oportuno en los momentos más necesarios.

A la UNEXPO mi Universidad en donde trabajo en Venezuela y a la Universidad de Valparaíso por su gran respaldo con la beca para realizar mis estudios, y que creyeron en mí en todo momento. Les quedare por siempre agradecido por haberme dado esta invaluable oportunidad.

No me podría de olvidar de ellos, porque sin ellos no sería posible este camino que recorrí como es mi familia; mis hermanas: Yulmi, Yamileth y Antonehlla, a mi hermano Robert, a mis hijos Enner Gabriel y Enner Andrés, a mi esposa Yaneysa, y en especial a mi madre Gloria y mi padre José Antonio, que siempre estuvieron a mi lado apoyándome. No tengo palabras para agradecer por todo el inmenso apoyo.

A todos aquellos que de una u otra manera contribuyeron con su apoyo para que este trabajo fuese posible.

*Dedicado a
Mis hermanas: Yulmi, Yamileth y Antonehlla,
a mi hermano Robert,
a mis hijos Enner Gabriel y Enner Andrés
a mi esposa Yaneysa y en especial,
a mi madre Gloria y a mi padre José Antonio.*

Abstract

Versión en inglés

In this work, we study covariance functions on spheres, on the basis of the deformation approach. Specifically, we characterize the deformation $R(\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}))$, where R is a function on \mathbb{R} and Φ a diffeomorphism on \mathbb{S}^{d-1} .

Nonstationary random fields models on spheres play an important role in geostatistics, where phenomena are observed over planet Earth. Under regularity assumptions about the structure of covariance functions C on spheres, we provide sufficient conditions to the reducibility problem $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}))$, for a mapping $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and a bijection $\Phi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$.

Finally, we show through simulations how deformation occurs on spheres and what happens to the random field after the application of the deformation. The implementation of these algorithms has been used the R-project.

Versión en español

En este trabajo, estudiamos las funciones de covarianza en las esferas, sobre la base del enfoque de deformación. Específicamente, caracterizamos la deformación $R(\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}))$, donde R es una función en \mathbb{R} y Φ un difeomorfismo en \mathbb{S}^{d-1} .

Los modelos de campos aleatorios no estacionarios sobre esferas desempeñan un papel importante en la geoestadística, donde se observan fenómenos sobre el planeta Tierra. Bajo suposiciones sobre estructura de las funciones de covarianza C en esferas, proporcionamos condiciones suficientes para el problema de reducibilidad $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}))$ y $\Phi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ una función biyectiva.

Finalmente, mostramos a través de simulaciones cómo la deformación ocurre en las esferas y qué sucede al campo aleatorio después de aplicar la deformación. La implementación de estos algoritmos se ha utilizado el R-project.

Índice general

Agradecimiento	VI
Dedicatoria	VII
Índice general	VIII
Índice de tablas	XII
Índice de Figuras	XIII
1. Marco Teórico	1
1.1. Variables Regionalizadas	1
1.2. Proceso Estocástico Espacial	2
1.3. Variograma	4
1.4. Modelos Teóricos de Variograma	5
1.5. Nube de Variograma	6
1.6. Modelos Teóricos de Variograma	8
1.7. Covarianza	10
1.8. Geoestadística Espacio-Temporal	11
2. Métricas	14
2.1. La distancia	14
2.2. Espacios Normados	15
2.3. Diferenciabilidad	19
2.4. Formas Bilineales	21
2.5. Sistemas de Coordenadas	22

2.6. Métrica Riemanniana	24
3. Ecuaciones Diferenciales	26
3.1. Existencia y Unicidad de la E.D.O.	26
3.2. Ecuaciones autónomas	29
3.3. Sistemas lineales autónomos	30
4. Difeomorfismos	33
4.1. Variedades	33
4.2. Deformación en \mathbb{S}^{d-1}	35
4.3. Simulación	39
4.4. Aplicación del Teorema Principal	43
5. Conclusión y futuras líneas de investigación	46
Apéndice A	48
A. Artículo	48
A.1. Introduction and Statement of the Problem	50
A.1.1. Motivation and Statement of the Problem	52
A.2. Notation and Auxiliary Results	53
A.2.1. Basics on Differential Calculus on Spheres.	53
A.2.2. Choosing the Proper Bijection	54
A.2.3. Orthogonal and unitary matrices	56
A.3. Restatement of Problem 1 within the Space \mathcal{D}_ε	58
A.3.1. Extensions from C to C_ε	58
A.3.2. Restatement of the Problem within \mathcal{D}_ε	59
A.3.3. Recovering R and Φ from C or C_ε	62
A.3.4. Examples and Comments	64
A.4. Sufficient Conditions for Reducibility	67
A.5. Differential equations and flows preserving spheres	69
A.5.1. The case of inhomogeneous linear ODE	72
A.5.2. An example of ODE preserving norms	72

Apéndice B	75
B. Algoritmo	75
B.1. Deformación del círculo unitario	75
B.2. Deformación en la esfera unitaria	77
B.3. Campo aleatorio sobre círculo unitario	80
B.4. Campo aleatorio sobre esfera unitario	83

Índice de tablas

1.1. Familia de las funciones de Variograma.	8
--	---

Índice de figuras

1.1. Isotropía.	5
1.2. Variograma.	6
1.3. Variograma teórico.	8
1.4. Anisotropía.	9
1.5. Variograma y covarianza.	10
2.1. a) Polares ;b) Cilíndricas ;c) Esféricas, fuente: Christakos (2000).	23
2.2. Transformación de los sistemas de coordenadas, fuente: Christakos (2000).	23
2.3. Sistemas de coordenadas Gaussiano, fuente: Christakos (2000).	24
2.4. Sistemas de coordenadas geodésica, fuente: Christakos (2000).	24
3.1. Nodo estable; Nodo inestable; Nodo silla.	31
3.2. Nodo estelar estable; Nodo estelar inestable.	31
3.3. Nodo nodo de una tangente estable; Nodo de una tangente inestable.	32
3.4. órbita centro; foco estable; foco inestable.	32
4.1. Círculo y la deformación círculo.	37
4.2. Mallas.	39
4.3. Puntos sobre superficie original y deformada.	39
4.4. Superficie de la esfera original y la deformada.	40
4.5. Campo aleatorio sobre el círculo original y deformado.	41
4.6. Proyección del campo aleatorio original simulado y deformado simulado.	42
4.7. Malla y Proyección del campo aleatorio deformado simulado.	43
4.8. Campo aleatorio simulado sobre esfera original y deformado.	43
4.9. Campo aleatorio simulado sobre la esfera deformada usando malla 4.7.	44

Capítulo 1

Marco Teórico

En este capítulo se presentan algunos de los términos teóricos básicos de los procesos estocásticos espaciales, la gran mayoría tomado de las monografías de [Matheron \(1965\)](#), [Cressie \(1993\)](#) y [Chiles & Delfiner \(2009\)](#). Estas propiedades de la geoestadística son muy útiles para el desarrollo de la metodología propuesta. De modo que, se exponen brevemente los conceptos y los resultados más utilizados, con el punto de vista de dominar y extender los procesos espaciales y/o temporales de la geoestadística.

1.1. Variables Regionalizadas

La geoestadística es la aplicación de la Teoría de las Variables Regionalizadas a la estimación de los procesos o los fenómenos geológicos en el espacio ([Matheron, 1965](#)). Se llama variables regionalizadas a las variables que están distribuidas en el espacio de manera tal que presentan una estructura espacial de correlación. El modelamiento de las variables en diferentes sitios de una región espacial continua y que muestran algunas estructuras de correlación espacial fue desarrollado desde los años 70 por [Cressie \(1993\)](#).

Entre otras particularidades que se presentan en las variables regionalizadas son las características cualitativas, ligadas a la estructura del fenómeno natural y que deben necesariamente ser tomada en cuenta por la teoría de las variables regionalizadas. Las principales son: **la localización** no se toma los valores en cualquier lugar, sino en una región bien determinada por el espacio, pero a veces es necesario limitar el estudio de la variable a una porción de región, equivale a que la variable puede ser definida como

una función de un valor determinado. Pese a que, a menudo no habrá interés en los valores puntuales (determinísticos), sino en los valores medios de la variable al interior de un dominio pequeño. **Continuidad:** lo más normal es observar la continuidad en media cuadrática ($\lim_{t \rightarrow s} \mathbb{E}|Z(\mathbf{t}) - Z(\mathbf{s})|^2$) y finalmente puede suceder que la continuidad en media cuadrática no se verifique y **la anisotropía** puede existir una dirección privilegiada, a lo largo de la cual los valores se modifican lentamente, mientras que en otra dirección perpendicular a estos varían más rápido.

1.2. Proceso Estocástico Espacial

Un proceso estocástico espacial Z es una colección de variables aleatorias a valores reales $\{Z(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in \mathcal{D}\}$, definida en un espacio apropiado de probabilidad e indexado con respecto al conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. En el caso en que, $n = 2$, \mathcal{D} es un subconjunto del plano de dos dimensiones \mathbb{R}^2 , y este proceso estocástico es también conocido por el nombre de campo aleatorio. La geoestadística estudia los fenómenos en los que \mathbf{s} varía continuamente a lo largo de la región \mathcal{D} . Por otro lado, es posible observar que el proceso Z solamente en un conjunto finito de localizaciones espaciales, digamos $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n\}$ por lo que $Z = (Z(\mathbf{s}_i), i = 1, \dots, n)^\top$ es una realización parcial del proceso de referencia, es una variable aleatoria de n -dimensiones. Un proceso estocástico se define, y está caracterizado, si es posible especificar su función de distribución conjunta de la variable aleatoria n -dimensional:

$$F_{Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n)}(z_1, \dots, z_n) = Pr(Z(\mathbf{s}_1) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n) \leq z_n).$$

Esta función en la práctica es imposible de determinar y solo se puede esperar inferir con los momentos de la distribución de $Z(\mathbf{s})$. En consecuencia, la geoestadística aplicada resulta suficiente para estimar los momentos hasta de segundo orden.

Definición 1.2.1. *Sea $Z(\mathbf{s})$ un proceso estocástico espacial.*

- *El momento de primer orden μ se define como:*

$$\mu(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[Z(\mathbf{s})], \quad \mathbf{s} \in \mathcal{D}.$$

- Si $\mathbb{E}[Z^2(\mathbf{s})] < \infty \forall \mathbf{s}$, entonces se define la varianza como:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))^2], \quad \mathbf{s} \in \mathcal{D}.$$

- La covarianza:

$$C(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \text{Cov}[Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{r})] = \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))(Z(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}))],$$

para cualquier \mathbf{s} y \mathbf{r} .

Definición 1.2.2. (Estacionaridad)

- $Z(\mathbf{s})$ es **fuertemente estacionario**, si para cualquier conjunto de puntos $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ y $\mathbf{h} \in \mathcal{D}$ se cumple que:

$$F_{Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n)}(z_1, \dots, z_n) = F_{Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \dots, Z(\mathbf{s}_n + \mathbf{h})}(z_1, \dots, z_n), \quad (1.1)$$

es decir, si la función de distribución conjunta es invariante respecto a cualquier traslación del vector \mathbf{h} .

- $Z(\mathbf{s})$ es **débilmente estacionario** o **estacionario de segundo orden**, si

i) $\mu(\mathbf{s})$ es independiente de \mathbf{s} ,

ii) $C(\mathbf{s}, \mathbf{s} + \mathbf{h}) = \text{Cov}[Z(\mathbf{s}); Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = C(\mathbf{h})$ es independiente de \mathbf{s} , para cada $\mathbf{h} \in \mathcal{D}$.

Z fuertemente estacionario con $\mathbb{E}[Z(\mathbf{s})^2] < \infty$ implica que Z sea también débilmente estacionario, en efecto

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z(\mathbf{s}), Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] &= \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - \mu(\mathbf{s} + \mathbf{h}))] \\ &= \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))^2] \\ &= \mathbb{E}[Z^2(\mathbf{s})] - \mu^2(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

1.3. Variograma

Definición 1.3.1. (Variograma)

El variograma de $Z(\mathbf{s})$, se define como:

$$2\gamma(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \text{Var}[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s}')] = \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s}'))^2], \quad \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathcal{D}.$$

También, conocida como función de semivarianza. Además, el variograma es $2\gamma(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$, pero con frecuencia se usa el término variograma para designárselo a γ .

Observación 1. .

- Si Z es débilmente estacionario, entonces se puede demostrar que

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

- $\gamma(\mathbf{h}) = \tilde{\gamma}(|\mathbf{h}|)$ para una función $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Definición 1.3.2. Se dice que un proceso $Z(\mathbf{s})$ es intrínsecamente estacionario, si cumple:

1) $\mathbb{E}[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = 0, \quad \forall \mathbf{s}, \forall \mathbf{h}.$

2) $\text{Var}[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})] = \mathbb{E}[(Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}))^2] = 2\gamma(\mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$

Lo anterior se conoce como **Hipótesis Intrínseca**, indudable que un proceso aleatorio estacionario de segundo orden es siempre intrínseco, lo contrario no se cumple. La hipótesis intrínseca se considera como débilmente estacionaria.

Definición 1.3.3. Un proceso Z es isotrópico, si la dependencia espacial del proceso entre dos localizaciones arbitrarias depende solo de la distancia que existe entre ellas y no de su localización.

Definición 1.3.4. Un proceso Z es **homogéneo** si es intrínsecamente estacionario e isotrópico.

Cuando el proceso Z es homogéneo, entonces su variograma es una función que solo depende únicamente de la longitud de las localizaciones, es decir, que $\gamma(\mathbf{h}) = \tilde{\gamma}(h)$, con $h = |\mathbf{h}|$. En el caso que, el proceso Z sea intrínsecamente estacionario y anisotrópico, la dependencia entre $Z(\mathbf{s})$ y $Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})$ aparecería en el variograma como una función de la magnitud y de la dirección de \mathbf{h} , como resultado, el variograma no sería solo una función de la distancia entre las localizaciones. La anisotropía es causada por los efectos ocultos asociados a las mediciones de las variables en la región de estudio.

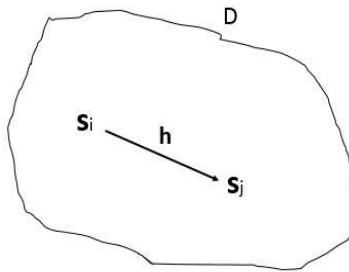


Figura 1.1: Isotropía.

En el caso que exista isotropía en Z , entonces tanto el variograma como covarianza son funciones de una variable real no negativa h , que representa la distancia entre las localizaciones correspondientes de la región en estudio:

$$\text{Var}[Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)] = 2\tilde{\gamma}(h), \quad h \geq 0$$

$$\text{Cov}[Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j)] = C(h), \quad h \geq 0$$

donde $h = |\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j|$.

1.4. Modelos Teóricos de Variograma

Usualmente, el variograma es creciente con la distancia, ya que en la mayoría de los procesos Z existen mayores similitudes en los valores observados en localizaciones cercanas, y la similitud disminuye al aumentar la distancia.

Las características del variograma:

- **Efecto Pepita:** se denota por τ^2 y representa una discontinuidad puntual del variograma en el origen. Puede ser debido a errores de medición en la variable o a la escala de la misma. En algunas ocasiones puede ser indicativo de que parte de la estructura espacial se concentra a distancias inferiores a las observadas.
- **Meseta:** es la cota superior del variograma. También puede definirse como el límite del variograma cuando la distancia h tiende a infinito. La meseta puede ser no finita, los variogramas que tienen meseta finita cumplen con la hipótesis de estacionariedad débil; mientras que cuando ocurre lo contrario, el variograma cumple solo con la hipótesis intrínseca. La meseta se denota por σ^2 , si el efecto pepita es cero ($\tau^2 = 0$). Cuando hay efecto pepita ($\tau^2 \neq 0$) se denota la meseta por $\tau^2 + \sigma^2$.
- **Rango:** es el términos generales corresponde a la distancia a partir de la cual dos observaciones son independientes. En general no existe una distancia finita para la cual dos observaciones sean independientes; por ello se llama rango efectivo a la distancia que el variograma alcanza el 95 % de la meseta.

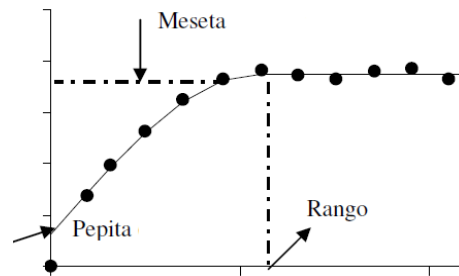


Figura 1.2: Variograma.

1.5. Nube de Variograma

En la práctica es imposible tener varios pares de observaciones a todas las posibles distancias h , de tal modo que, se hace una partición de la distancia en unos cuantos intervalos y se obtiene un valor numérico que estima el variograma para cada uno. A

este gráfico resultante se denomina nube de variograma propuesto por Matheron es:

$$2\widehat{\gamma}(h) = \frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} (Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j))^2, \quad (1.2)$$

donde $|N(h)|$ es el número de los pares $Z(\mathbf{s}_i)$ y $Z(\mathbf{s}_j)$ separados a una distancia $h = |\mathbf{h}|$. Ya que, $2\widehat{\gamma}$ es una media muestral, así, tiene todas las desventajas comúnmente asociadas a este tipo de estimador como es la no robustez.

Un estimador alternativo del variograma propuesto por: [Cressie & Hawkins \(1980\)](#), este estimador es robusto y se define como:

$$\widehat{\gamma}^*(h) = \frac{1}{2}(0,457 + 0,494/|N(h)|)^{-1} \left[\frac{1}{|N(h)|} \sum_{N(h)} (|Z(\mathbf{s}_i) - Z(\mathbf{s}_j)|)^{1/2} \right].$$

Algunas de las propiedades del variograma

- $\gamma(h) \geq 0$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(h)}{h^2} = 0$.
- $\gamma(h) = \sigma^2 - C(h)$.
- $\gamma(h) = \gamma(-h)$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = \tau^2 > 0$, efecto pepita.
- $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \sigma^2$ o ∞ .

Definición 1.5.1. *La función de variograma es condicionalmente definida negativa, es decir*

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \gamma(|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j|) \leq 0,$$

para cualquier número finito de localizaciones espaciales $\{\mathbf{s}_i : i = 1, \dots, n\}$ y números reales $\{a_i : i = 1, \dots, n\}$ que verifica $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

1.6. Modelos Teóricos de Variograma

A continuación se muestra una tabla esquemática de la forma que adoptan algunas de las familias estándar más utilizadas para variogramas, en términos de los tres parámetros característicos: meseta σ^2 ; efecto pepita τ^2 y rango (efectivo) c :

El término $h \in (0, +\infty)$ y la expresión $t_+ = \max\{t, 0\}$ con $t \in \mathbb{R}$

Familia	Expresión	Parámetros
Efecto pepita	$\gamma(h) = \tau^2$	
Exponencial potencia	$\gamma(h) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{h}{c}\right)^\alpha\right)\right)$	$c > 0; \alpha \in (0, 2]$
Esférico	$\gamma(h) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{c}\right) \left(1 - \frac{h}{c}\right)_+^2\right)$	$c > 0$
Matérn	$\gamma(h) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(1 - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{c}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{h}{c}\right)\right)$	$c > 0; \nu \in (0, \frac{1}{2}]$
Cauchy	$\gamma(h) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(1 - \left(1 + \left(\frac{h}{c}\right)^\alpha\right)^{-\beta/\alpha}\right)$	$c > 0; \beta > 0; \alpha \in (0, 1]$
Askey	$\gamma(h) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(1 - \left(1 - \frac{h}{c}\right)_+^\beta\right)$	$c > 0; \beta \geq 2$
Dagum	$\gamma(h) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(\left(\frac{h}{c}\right)^\beta / \left(1 + \frac{h}{c}\right)^\beta\right)^{\alpha/\beta}$	$c > 0; \beta \in (0, 1]; \alpha \in (0, \beta)$

Tabla 1.1: Familia de las funciones de Variograma.

La familia Matérn ([Matérn, 1986](#)) depende de un parámetro ν que regula la suavidad del proceso estocástico asociado. También contiene el caso particular de la familia Exponencial cuando $\nu = \frac{1}{2}$ y a los modelos Gaussianos cuando $\nu \rightarrow \infty$.

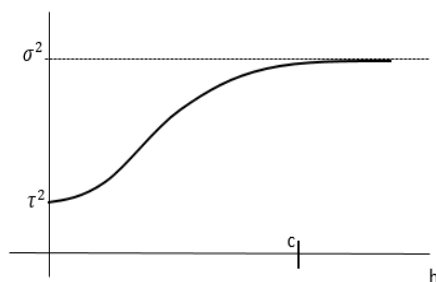


Figura 1.3: Variograma teórico.

Para comentar el variograma teórico (ver [Figura 1.3](#)), se observa que a menor distancia entre las localizaciones habrá mayor similitud entre las observaciones. Todos los modelos anteriormente mostrados en la [Tabla 1.1](#) son variogramas teóricos isotrópicos, es decir, la variabilidad espacial no depende de la dirección. En general, existen muchas situaciones en que la variación es anisotropía, en consecuencia, en cada dirección hay

un variograma diferente. La anisotropía en algunos casos puede ser corregida mediante una transformación lineal simple de las coordenadas de localizaciones. A este caso se le llama anisotropía geométrica. En la anisotropía geométrica, el gráfico direccional de los rangos forma una elipse, así que, el eje menor B del rango es la dirección de más rápida de variación y el eje mayor A es la dirección que variación lentamente como se muestra en Figura 1.4.

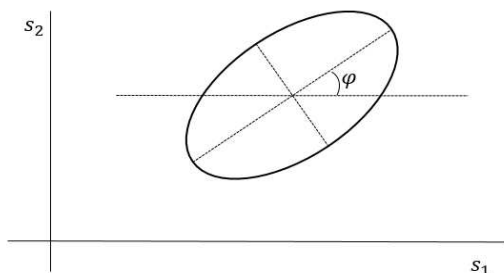


Figura 1.4: Anisotropía.

La transformación puede ser expresada de la siguiente forma:

$$T(\theta) = (A^2 \cos^2(\theta - \varphi) + B^2 \sin^2(\theta - \varphi))^{1/2}, \quad (1.3)$$

donde θ es ángulo de corrección para que sea isotrópico.

Ejemplo 1. Al reemplazar la transformación de la Ecuación (1.3) en la ecuación de variograma exponencial se tiene que:

$$\gamma(h, \theta) = \tau^2 + (\sigma^2 - \tau^2) \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{h}{T(\theta)} \right)^\alpha \right) \right).$$

La estimación de un modelo de variograma, se realiza en términos de sus parámetros a partir de las observaciones. Existen varios métodos para estimar los parámetros de la función variograma: máxima verosimilitud (Kitanidis & Vomvoris, 1983); máxima verosimilitud restringida; mínima norma cuadrática (Rao, 1972; Rao et al., 1979); mínimos cuadrados y mínimos cuadrados generalizados (Cressie, 1993).

Para escoger el mejor modelo de variograma que se ajusta a los datos, hay que tener en cuenta varios factores, como es siempre que sea posible mejorar el ajuste, uno de los factores es aumentar el número de los parámetros p , es decir, aumentando p hasta que

el modelo ajuste mejor a los datos, pero está claro que esto no es una buena respuesta, ya que se comprometer la parsimonia del modelo y el ajuste, y una de las maneras más usada para enfrentar esto, es utilizar el criterio de información de [Akaike \(1973\)](#) (AIC), el cual se elige el modelo con el menor AIC.

1.7. Covarianza

Para un proceso débilmente estacionario, se tiene

$$C(h) = \sigma^2 - \gamma(h) = \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) \right) - \gamma(h), \quad (1.4)$$

donde $h \in [0, \infty)$.

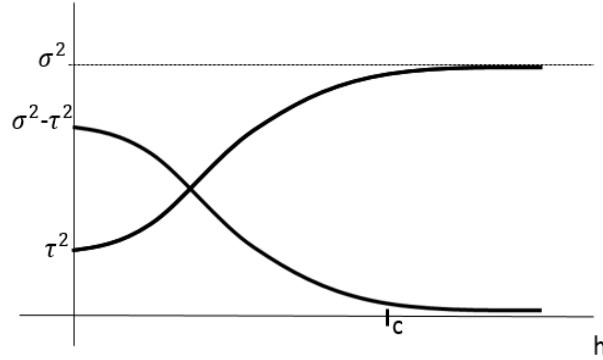


Figura 1.5: Variograma y covarianza.

Definición 1.7.1. Diremos que $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **definida positiva**, si se cumple para que $n \geq 2$, $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n\} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ y $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_i a_j C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) \geq 0.$$

Teorema 1.7.2. Sea $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- 1.- $C(\mathbf{s}, \mathbf{s}) > 0 \forall \mathbf{s} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.
- 2.- $C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = C(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1), \forall \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.
- 3.- $|C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^2 \leq C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1)C(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) \forall \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

3.- $|C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}) - C(\mathbf{s}_2, \mathbf{s})|^2 \leq C(\mathbf{s}, \mathbf{s}) [C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1) + C(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2) - 2C(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1)], \forall \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Observación 2. Si $C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = C(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, \mathbf{0})$, entonces las cuatro propiedades se cumple. Algunos autores usan la notación $C^0(\mathbf{h}) = C(\mathbf{h}, \mathbf{0}) = C(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2, \mathbf{0})$.

Teorema 1.7.3. Sean $C_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $C_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas positivas; $a \geq 0, b \geq 0$ y $a \neq b$. Sea $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) := aC_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) + bC_2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2),$$

entonces C es definida positiva.

Teorema 1.7.4. Sean $C_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $C_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas positivas. Sea $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$C(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) := C_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)C_2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2),$$

entonces C es definida positiva.

La correlación de un procesos estacionario isotrópico $Z(\mathbf{s})$ es:

$$\rho(\mathbf{h}) = \frac{C(\mathbf{h})}{C(0)} = \frac{C(\mathbf{h})}{\sigma^2}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5)$$

Teorema 1.7.5. Sean $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida positiva estacionaria y $C^0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $C^0(\mathbf{s}) := C(\mathbf{s}, \mathbf{0}), \forall \mathbf{s} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Si C^0 es continua en $\mathbf{0}$, entonces C^0 es uniformemente continua en todo \mathcal{D} .

1.8. Geoestadística Espacio-Temporal

Los procesos estocásticos en el espacio y tiempo se presentan de la siguiente manera:

$$\{Z(\mathbf{s}; t), \mathbf{s} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n; t \in I \subset \mathbb{R}\},$$

Para cada par de localizaciones $(\mathbf{s}_1; t_1), (\mathbf{s}_2; t_2) \in \mathcal{D} \times I$, donde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$, la covarianza entre las correspondientes variables aleatorias:

$$C((\mathbf{s}_1; t_1), (\mathbf{s}_2; t_2)) = \text{Cov}[Z(\mathbf{s}_1; t_1); Z(\mathbf{s}_2; t_2)].$$

La combinación lineal $\sum_{i=1}^n a_i Z(\mathbf{s}_i; t_i)$ define una variable aleatoria, y por lo tanto

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n a_i Z(\mathbf{s}_i; t_i) \right] = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j C((\mathbf{s}_i; t_i), (\mathbf{s}_j; t_j)) \geq 0.$$

Es frecuente asumir la estructura de covarianza estacionaria en el espacio y tiempo, así que

$$\text{Cov}(Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}; t + u), Z(\mathbf{s}; t)) = C(\mathbf{s}; u), \quad (\mathbf{s}; t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

depende sólo del espacio-tiempo. La función $C : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada función de covarianza del proceso.

Para hacer predicciones a partir de una única realización parcial de un proceso estocástico, es necesario asumir alguna hipótesis de regularidad. El proceso se suele descomponer en una parte no estocástica que recoge la variación a gran escala, y otra componente que recoge el comportamiento local, o variación a pequeña escala

$$Y(\mathbf{s}; t) = \mu(\mathbf{s}; t) + Z(\mathbf{s}; t), \quad \mathbf{s}, t \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}.$$

De este modo, el comportamiento global está determinado por $\mu(\mathbf{s}; t)$ (aunque sea desconocido) y se puede estimar mediante un modelo de regresión adecuado. Por su parte, sobre la variabilidad local se puede asumir la hipótesis de estacionariedad débil, o de segundo orden. A veces es posible asumir la hipótesis adicional de isotropía, que establece que la función de covarianza es también invariante ante rotaciones; es decir, que depende únicamente de la distancia que separa las localizaciones, independientemente de la dirección.

Una vez que se ha ajustado un modelo a los datos, interesa predecir en localizaciones no observadas, generalmente a los efectos de construir un mapa completo del fenómeno en la región de interés. Hay varios enfoques para este problema, pero el método de predicción espacial más ampliamente utilizado se conoce como Kriging. La mayoría de los métodos utilizan una media ponderada de los valores muestrales para generar la predicción; aquellas observaciones próximas a la localización de predicción tienen así un peso mayor que las más alejadas. El Kriging determina estos pesos basándose en la función de semivariograma. El semivariograma está dado por:

$$\gamma(\mathbf{h}; u) := \frac{1}{2} \text{Var}[Z(\mathbf{s} + \mathbf{h}; t - u) - Z(\mathbf{s}; -u)]; \forall \mathbf{s} \in \mathcal{D}, u \in I.$$

Además, se dice que el semivariograma es isotrópico si es también invariante ante rotaciones. Una función continua $C(\mathbf{h}; u)$; $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ es definida positiva si y sólo si se puede representar como

$$C(\mathbf{h}; u) := \int \int e^{i(\mathbf{h}^\top \boldsymbol{\omega} + u\tau)} dF(\boldsymbol{\omega}, \tau),$$

donde F es una medida positiva finita.

Un criterio importante de construcción de las funciones de covarianzas espacio-temporal, se basa en las funciones completamente monótonas, se pueden encontrar en [Gneiting \(2002b\)](#), sus resultados representan la generalización de [Cressie & Huang \(1999\)](#). El problema de la inversión de la transformada de Fourier en este enfoque es evitado, es un criterio de construcción directa, sin restricciones de integrabilidad. La función de covarianza de [Gneiting \(2002b\)](#)

$$C(\mathbf{h}, u) = \frac{1}{\psi(|u|^2)^{d/2}} \varphi\left(\frac{|\mathbf{h}|^2}{\psi(|u|^2)}\right), \quad (1.6)$$

donde φ es una función completamente monótona y ψ una función de Bernstein, con $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, $u \in \mathbb{R}$, $d = 1, 2, \dots$.

De lo mencionado anteriormente, se pueden considerar otras métricas no Euclidianas, como la distancia Riemanniana espacial:

$$|d\mathbf{s}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g_{ij} ds_i ds_j},$$

donde g_{ij} son coeficientes que por lo general dependen de la ubicación espacial. Cuando se considera $g_{ii} = 1$ y $g_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, se tiene la norma Euclidianas.

La distancia Riemanniana espacio-tiempo es dada por:

$$|d\mathbf{p}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g_{ij} ds_i ds_j + g_{00} dt^2 + 2dt \sum_{i=1}^d g_{0i} ds_i},$$

donde g_{ij} son funciones de la ubicación espacial y el tiempo.

Capítulo 2

Métricas

En este capítulo se detallan algunas métricas usadas para enfrentar el problema que tiene que ver con los espacios Euclidianos y no Euclidianos. Desde el punto de vista matemático, el problema se puede modelar adecuadamente con una métrica que depende directamente del espacio. La distancia que se usa en geoestadística depende de la región de estudio y sus variables físicas asociadas de forma natural. Las referencias consideradas para este capítulo fueron tomadas de los libros [Royden \(1988\)](#), [Christakos \(2000\)](#) y [Mathai *et al.* \(2012\)](#).

2.1. La distancia

Definición 2.1.1. *Un espacio métrico es un par (\mathbb{X}, d) , formado por un conjunto no vacío \mathbb{X} y una función $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ llamada función distancia o métrica de \mathbb{X} , tal que se cumplan las siguientes propiedades:*

- i.- $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$,*
- ii.- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,*
- iii.- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ (simetría),*
- iv.- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$ (desigualdad triangular).*

Los elementos que forman al conjunto \mathbb{X} son llamados puntos (vectores) de \mathbb{X} . Cuando no exista confusión se usa el término espacio métrico \mathbb{X} , sin hacer referencia a la función distancia al respecto, la cual generalmente es denotada con d .

A continuación, una breve lista de espacios métricos:

- \mathbb{R} es un espacio métrico vía la función distancia $d(x, y) := |x - y|$.
- \mathbb{R}^n es un espacio métrico vía la función distancia $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, donde x_i e y_i son la i -ésima coordenada de \mathbf{x} e \mathbf{y} respectivamente.
- Para cada $p \geq 1$, la función $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se define d por

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$$

es una distancia sobre \mathbb{R}^n .

- Para cualquier conjunto \mathbb{X} , definida por:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una función distancia sobre \mathbb{X} , llamada métrica discreta de \mathbb{X} . El par (\mathbb{X}, d) , formado por un conjunto no vacío \mathbb{X} y una métrica discreta es un espacio métrico discreto.

- Sea $\mathbf{C}[a, b]$ el conjunto de las funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R} , es un espacio métrico vía la función distancia definida por:

$$d_\infty(f, g) := \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

- Para cada $p \geq 1$, el conjunto $\mathbf{C}[a, b]$ es un espacio métrico vía la función distancia definida por:

$$d_p(f, g) := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt}.$$

2.2. Espacios Normados

En esta sección \mathbb{K} representa al conjunto \mathbb{R} o \mathbb{C} . Lo llamaremos \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{E} , donde los elementos de \mathbb{K} son escalares y los de \mathbb{E} son vectores. Usaremos letras griegas para designar a los escalares y letras negritas para designar a los vectores columna.

Definición 2.2.1. Una **norma** en un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{E} es una función $|\cdot| : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

- 1.- $|\mathbf{x}| \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$,
- 2.- $|\mathbf{x}| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$,
- 3.- $|\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ (homogeneidad),
- 4.- $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$ (propiedad triangular).

Definición 2.2.2. Un espacio normado es un \mathbb{K} -espacio vectorial \mathbb{E} , dotado de una norma.

Proposición 2.2.3. Si $|\cdot|$ es una norma en \mathbb{E} , entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, es una métrica que satisface:

- 1.- $d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (Invariancia por traslaciones).
- 2.- $d(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = |\lambda|d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (Homogeneidad).

Ejemplo 2. A continuación una breve lista de espacios normados más comunes:

a) La función valor absoluto en \mathbb{R} satisface la definición de espacio normado.

b) En \mathbb{R}^n , se define

$$|\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

satisface la definición de espacio normado.

c) En \mathbb{R}^n , se define

$$|\mathbf{x}|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

satisface la definición de espacio normado.

d) En \mathbb{R}^n , se define

$$|\mathbf{x}|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

satisface la definición de espacio normado.

Definición 2.2.4. Si \mathbb{E} es un espacio vectorial, entonces el **producto punto (producto interno)** es una función en $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ a \mathbb{R}^+ denotada por $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ que satisface:

- 1.- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} \geq 0$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$
- 2.- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$,
- 3.- $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}^\top \mathbf{x}}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$,
- 4.- $(\mathbf{y} + \mathbf{z})^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x} + \mathbf{z}^\top \mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{E}$,
- 5.- $(\lambda \mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}^\top \mathbf{y})$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

Un espacio vectorial, en el que tiene definido un producto punto es llamado **espacio con producto interno**.

Proposición 2.2.5.

- 1.- $\mathbf{x}^\top (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} + \mathbf{x}^\top \mathbf{z}$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{E}$,
- 2.- $\mathbf{x}^\top (\lambda \mathbf{y}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}^\top \mathbf{y})$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}$.

Ejemplo 3. Algunos espacios con producto interno:

- 1.- En \mathbb{R}^n , se define:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} := \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

donde \mathbf{x}^\top es el vector transpuesto de \mathbf{x} (vector fila).

- 2.- En \mathbb{C}^n , se define:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

donde \bar{y}_i es el conjugado de y_i .

- 3.- Sea $\mathbb{E} = \mathbf{C}_{\mathbb{K}}[a, b]$, se define:

$$f \cdot g := \int_a^b f(t) \bar{g}(t) dt,$$

donde \bar{g} es la función conjugado de g .

Teorema 2.2.6. Sea \mathbb{E} un espacio vectorial con producto interno $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$, entonces \mathbb{E} es un espacio normado con norma:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{E}.$$

Ejemplo 4. Se consideran algunas normas:

1.- Norma $L^p[a, b]$. Sea $\mathbb{E} = \mathbf{C}_{\mathbb{C}}[a, b]$ o $\mathbf{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ se define su norma como:

$$|f|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

donde $p \in \mathbb{R}^+$.

2.- Norma $L^\infty[a, b]$. Sea $\mathbb{E} = \mathbf{C}_{\mathbb{C}}[a, b]$ o $\mathbf{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ se define su norma como:

$$|f|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$$

3.- Norma ℓ^p en \mathbb{R}^n ,

$$|\mathbf{x}|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p},$$

donde $p \in \mathbb{R}^+$.

4.- Norma ℓ^∞ en \mathbb{R}^n ,

$$|\mathbf{x}|_\infty := \max\{|x_i| : i \in 1, \dots, n\}.$$

Observación 3. Se puede observar que de los ejemplos anteriores, existen diferentes normas para un mismo espacio vectorial.

Observación 4. Se debe tener en consideración, que la norma no implica producto interno. Para que suceda esto, se debe cumplir lo siguiente:

$$|\mathbf{u} + \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{w}|^2$$

es llamada regla del paralelogramo.

Teorema 2.2.7. (Cauchy-Bunyakovky-Schwarz)

Sea \mathbb{E} un espacio vectorial con producto interno, $|\cdot|$ proveniente de un producto interno. Entonces,

$$|\mathbf{x}^\top \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|, \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}.$$

Observación 5. Si $\mathbf{x} \neq 0$, entonces $|\mathbf{x}^\top \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}|$ si y sólo si $\mathbf{x} = a\mathbf{y}$, donde a es un escalar, i.e. \mathbf{x}, \mathbf{y} son paralelos.

2.3. Diferenciabilidad

En esta sección se presenta el concepto de diferenciabilidad de una función siendo una generalización para el cálculo en varias variables de la derivada de una función de una variable. En esencia las funciones diferenciables admiten derivadas en cualquier dirección y pueden aproximarse por una aplicación lineal.

Definición 2.3.1. *Se define el interior de $\text{int}(A)$ (A°) como la unión de todos los abiertos contenidos en A*

Definición 2.3.2. *Dada la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es dominio de f , definida al menos en un entorno de $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$, con $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, se dice que f es diferenciable en el punto \mathbf{x}_0 si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (que puede depender de \mathbf{x}_0) tal que se verifica:*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0.$$

También se puede expresar:

$$\lim_{|\mathbf{u}| \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{u})|}{|\mathbf{u}|} = 0.$$

Definición 2.3.3. *Dada la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es dominio de f , diferenciable en el punto $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$, se llama derivada, o diferencial de f en el punto \mathbf{x}_0 y se denota por $Df(\mathbf{x}_0)$, a la única aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que verifica la definición anterior.*

Definición 2.3.4. *Dada la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde A es dominio de f , el punto $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(A)$, Sea \mathbf{u} punto cualquiera en A . El vector $L_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^m$ se llama derivada parcial de f en \mathbf{x}_0 respecto a \mathbf{u} , si se verifica:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{t} \{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\} - L_{\mathbf{u}} \right| = 0$$

es equivalente a:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)\} = L_{\mathbf{u}}.$$

Observación 6. .

- La notación para $L_{\mathbf{u}}$ es $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$ o $\partial_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0)$
- La derivada parcial de f respecto a una variable, el caso de que la variable sea $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$, es decir, se encuentra un valor 1 en la posición i -ésima de vector de \mathbb{R}^n , se denota por: $\partial_i f$ o $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Teorema 2.3.5. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en el punto $\mathbf{c} \in A$ y sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, entonces la derivada parcial de f en \mathbf{c} respecto a \mathbf{u} existe y se denota por $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{c})$. Además,

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{c}) = Df(\mathbf{c})(\mathbf{u}). \quad (2.1)$$

Proposición 2.3.6. La matriz asociada a la aplicación lineal $Df(\mathbf{x}_0)$ respecto de las bases canónicas en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m es la matriz Jacobiana $J_f(\mathbf{x}_0)$ descrita por:

$$J_f(\mathbf{x}_0) = [\partial_{x_j} f_i]_{ij}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.3.7. (Regla de la cadena) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde A es dominio de f y $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ donde A es dominio de g . Suponga que f es diferenciable en el punto $\mathbf{c} \in A$ y g es diferenciable en $\mathbf{b} = f(\mathbf{c})$, entonces la compuesta $h = g \circ f$ es diferenciable en $\mathbf{c} \in A$ y

$$Dh(\mathbf{c}) = Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{c}). \quad (2.2)$$

De otra forma,

$$D(g \circ f)(\mathbf{c}) = Dg(f(\mathbf{c})) \circ Df(\mathbf{c}).$$

Ejemplo 5. Usando el Teorema 2.3.5, se tiene los siguientes ejemplos:

1.- Sean $n = m = s = 1$ y $u \in \mathbb{R}$, entonces

$$D_u(g \circ f)(c) = g'(f(c))f'(c)u.$$

2.- Sean $n > 1; m = s = 1$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, entonces la derivada de f en \mathbf{c} respecto a \mathbf{w} es

$$D_{\mathbf{w}}f(\mathbf{c}) = D_1f(\mathbf{c})w_1 + \cdots + D_nf(\mathbf{c})w_n, \text{ así}$$

$$D_{\mathbf{w}}(g \circ f)(c) = g'(b)D_{\mathbf{w}}f(\mathbf{c}) = g'(b)[D_1f(\mathbf{c})w_1 + \cdots + D_nf(\mathbf{c})w_n].$$

3.- Sean $m > 1; n = s = 1$ y $u \in \mathbb{R}$, entonces la derivada de f en $c \in \mathbb{R}$ respecto a u es $D_u f(c) = u f'(c) \in \mathbb{R}^m$ y la derivada de g en $\mathbf{b} = f(c)$ respecto $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ es $D_{\mathbf{w}} g(\mathbf{b}) = D_1 g(\mathbf{b}) w_1 + \cdots + D_m g(\mathbf{b}) w_m \in \mathbb{R}$, así

$$D_u(g \circ f)(c) = \{D_1 g(\mathbf{b}) f'_1(c) + \cdots + D_m g(\mathbf{b}) f'_m(c)\} u = u \{Dg(\mathbf{b})(f'(c))\}.$$

4.- Sean $n > 1; m > 1; s > 1$, entonces la derivada de f en \mathbf{c} respecto a \mathbf{w} es $D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{c})$ es matriz de orden $m \times n$ y la derivada de g en $\mathbf{b} = f(\mathbf{c})$ respecto $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ es $D_{\mathbf{w}} g(\mathbf{b})$ matriz de orden $s \times m$, así

$$D_{\mathbf{u}}(g \circ f)(\mathbf{c}) = Dg(f(\mathbf{c})) Df(\mathbf{c})(\mathbf{u}).$$

Observación 7. Podemos escribir la Ecuación (2.2) en termino de matriz Jacobiana

$$J_h(\mathbf{c}) = J_g(\mathbf{b}) J_f(\mathbf{c}). \quad (2.3)$$

2.4. Formas Bilineales

Definición 2.4.1. Una Forma bilineal es un función $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ la cual es lineal en cada componente:

$$\beta(a\mathbf{x} + b\mathbf{x}', \mathbf{y}) = a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b\beta(\mathbf{x}', \mathbf{y}),$$

$$\beta(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{y}') = a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}'),$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 6. .

1.- El producto interno $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido mediante la siguiente formula es una forma bilineal en \mathbb{R}^n :

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}.$$

2.- Sean φ y ψ funcionales lineales en un espacio vectorial \mathbb{E} , entonces la función $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y})$$

es una forma bilineal en \mathbb{E} . A esta función se llama producto tensorial de los funcionales φ, ψ y se denota a veces por: $\varphi \otimes \psi$.

3.- Sea A una matriz de orden n en \mathbb{R} , se define la forma bilineal de la siguiente forma:

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^\top A \mathbf{y}.$$

Si $A = \mathbf{I}_n$, entonces $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ es producto interno. Además, si A es simétrica, entonces β es simétrica.

Observación 8. Si $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un forma bilineal de la forma $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^\top A \mathbf{y}$, entonces

$$D\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\top A \mathbf{y} + \mathbf{x}^\top A \mathbf{v},$$

donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y A una matriz.

Proposición 2.4.2. Si $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable y $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})$, entonces la derivada de β se puede expresar

$$D\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\top J_\Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) + \Phi^\top(\mathbf{x})J_\Phi(\mathbf{y})\mathbf{v},$$

donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y J_Φ es la matriz jacobiana de Φ .

2.5. Sistemas de Coordenadas

Es natural preguntarse, si la utilización de distancia basada en Euclidiana y en no Euclidiana tiene algún efecto significativo o no. Dependerá claramente de cuán diferente sea la superficie al respecto, lo cual a su vez dependerá de la geometría del entorno. Los sistemas de coordenadas son marcos de referencias para las ubicaciones de los puntos en el espacio, y la distancia entre ellos. En esta sección señalaremos algunos sistemas de coordenadas que están asociado a una función distancia con el espacio.

El sistema euclidiano es uno de los más usados, esto se debe a la facilidad de los cálculos y que las coordenadas están distribuidas en una malla cuadrículada, sin embargo, existen otros sistemas de coordenadas como se muestra en la Figura 2.1.

La transformación de coordenadas proporciona una nueva coordenada, sin perder la información de la coordenada antigua.

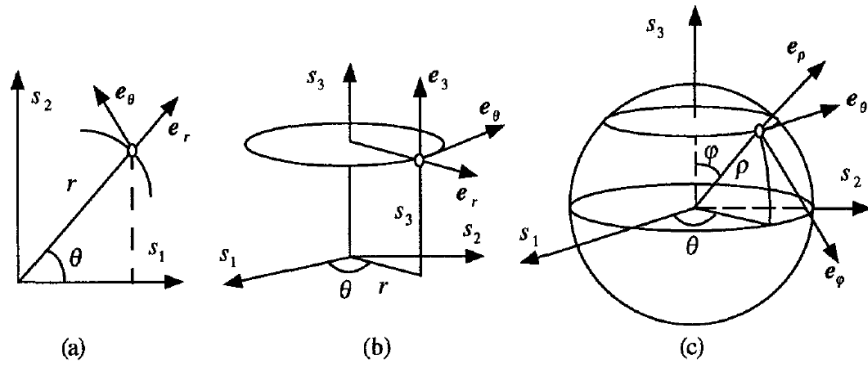


Figura 2.1: a) Polares ;b) Cilíndricas ;c) Esféricas, fuente: Christakos (2000).

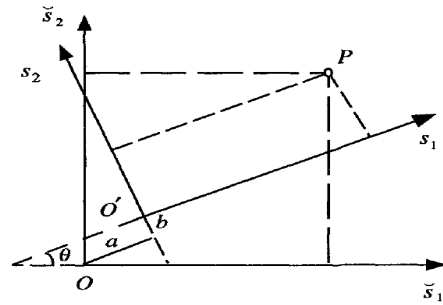


Figura 2.2: Transformación de los sistemas de coordenadas, fuente: Christakos (2000).

La geometría Euclidiana y los sistemas de coordenadas asociados ocurren algunas veces que no son apropiados en algunos espacio físico de estudio, esto por la razón que no consideran la naturaleza de las mediciones, ni la parte física subyacente asociada a las mediciones. Por ese motivo surge la necesidad de considerar otros tipos de sistemas llamados no Euclidiano, entre ellos está el sistema Gaussiano que se muestra en la Figura 2.3. El valor de una de las variables u_1 y u_2 , origina una curva en la superficie, de tal manera, que se crea dos curvas paramétricas en la superficie, de modo que solamente una curva de cada familia pasa por cada punto definido por el par (u_1, u_2) .

Otros de los sistemas más útiles es el sistema geodésico. Estos sistemas son usados cuando el espacio de trabajo es esférico o posee características esféricas. De acuerdo con este sistema, un punto P sobre una superficie se identifica de la siguiente forma: se define un origen O , luego el ángulo ϕ_P y la distancia $|OP|$ al punto P , como se muestra en Figura 2.4.

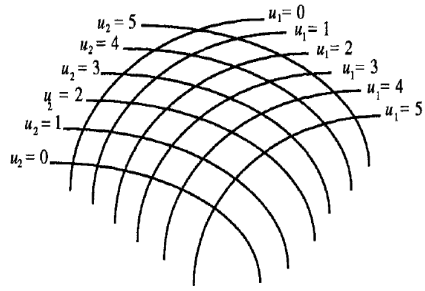


Figura 2.3: Sistemas de coordenadas Gaussiano, fuente: [Christakos \(2000\)](#).

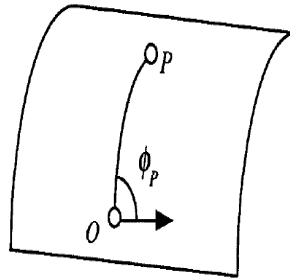


Figura 2.4: Sistemas de coordenadas geodésica, fuente: [Christakos \(2000\)](#).

2.6. Métrica Riemanniana

La primera persona en hablar de métricas no euclidianas fue Bernhard Riemann en el siglo XIX. Produciendo el nombre de métrica Riemanniana, que sería un caso especial y particular donde aparecen los dos tipos convencionales de geometría no Euclidianas tal como geometría elíptica y geometría hiperbólica, así como también la geometría Euclidianas. Todas estas geometrías se tratan sobre la misma base, al igual que una amplia gama de las geometrías con propiedades métricas que varían de punto a otro punto.

Definición 2.6.1. *La distancia Riemanniana espacial es definida por:*

$$|d\mathbf{s}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} ds_i ds_j}, \quad (2.4)$$

donde g_{ij} son coeficientes que por lo general dependen de la ubicación espacial.

Observación 9. *La matriz $g = [g_{ij}]_{ij}$ es llamada el tensor métrico.*

Ejemplo 7. .

- 1.- Si considera $g_{ii} = 1$ y $g_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, se tiene la norma euclidiana del sistema de coordenada cartesiana.
- 2.- Si considera $g_{11} = 1$, $g_{22} = s_1^2$ y $g_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, se tiene la norma euclidiana del sistema de coordenada polar en \mathbb{R}^2 .
- 3.- Si considera $g_{11} = 1$, $g_{22} = s_1^2$, $g_{33} = [s_1 \text{sen}(s_2)]^2$ y $g_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, se tiene la norma euclidiana del sistema de coordenada esférica en \mathbb{R}^3

En síntesis las coordenadas ortogonales de uso más común mencionadas en las observaciones anteriores. Se puede apreciar que las métricas euclidianas son casos especiales de la Ecuación (2.4), es decir, una métrica de la forma que tiene la Ecuación (2.4) será considerada euclidiana, si existe una transformación de las coordenadas tal que se pueda transformar a coordenadas cartesianas.

Ejemplo 8. *Un simple ejemplo para ilustrar la importancia de la métrica a emplear, tomado de referencia [Christakos \(2000\)](#)*

$$s_1 \frac{\partial X}{\partial s_2} - s_2 \frac{\partial X}{\partial s_1} = 0. \quad (2.5)$$

Las soluciones son:

- a) $X(s_1, s_2) = \check{X}[g(s_1, s_2)] = \check{X} \left(\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \right)$.
- b) $X(s_1, s_2) = \check{X}(s_1 s_2)$

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales

En matemáticas las ecuaciones diferenciales son muy utilizadas, en varios casos, para representar y explicar las leyes del universo; los modelos matemáticos empleados permiten percibir los cambios que implican numerosos fenómenos físicos. Dichos cambios solo pueden ser explicados por medio de ecuaciones que relacionan las cantidades que cambian, esto se denomina ecuaciones diferenciales (E.D.), en consecuencia, se dice que una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.) es una relación en donde aparecen derivadas o diferenciales de una variable, que se denomina variable dependiente, de este modo hay una función que depende de otra variable llamada variable independiente. En este capítulo, estudiaremos las propiedades generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias como son: existencia, unicidad, continuidad y las soluciones respecto a los datos iniciales o parámetros, la referencia se tomó de [Sotomayor \(1979\)](#).

3.1. Existencia y Unicidad de la E.D.O.

Las E.D.O. son identidades que vinculan una función y sus derivadas, y su gran objetivo es encontrar la solución (las soluciones) para el cual se cumple la ecuación. Emplearemos la notación compacta para la derivada $dy/dx = y'$, y $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, donde \mathbb{E} es un conjunto de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ una función continua, el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es no degenerado, se puede considerar el intervalo I como: abierto, cerrado, semiabierto, finito o infinito.

Definición 3.1.1. *Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación de la siguiente forma:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}), \quad (3.1)$$

donde el objetivo es encontrar la solución.

La solución (las soluciones) se deduce que podría ser una función (una familia de funciones) que satisface la Ecuación (3.1), es de esperar que en algunos casos no se puede encontrar la solución explícita, por la simple razón que se involucran antiderivadas, pero en ese caso, se hacen análisis cualitativo o se usan métodos numéricos.

Definición 3.1.2. *El problema de Cauchy para E.D.O. de primer orden tiene la forma siguiente:*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde el objetivo es encontrar la solución que pasa por el punto (t_0, \mathbf{x}_0) , además es única.

Algunos autores llaman el problema de Cauchy como problema de valor inicial (P.V.I.).

Definición 3.1.3. *Una función $\varphi : \mathbb{E} \rightarrow I$ diferenciable es solución de (3.1) en un intervalo I , si se cumplen las siguientes dos características:*

- 1.- $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset \Omega$,
- 2.- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.

Observación 10. *La Ecuación (3.1) es equivalente a:*

$$x'_j = f_j(t, x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

y la solución esta dada por:

$$\varphi'_j(t) = f_j(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad \text{para todo } t \in I. \quad (3.4)$$

Observación 11. *La gran mayoría de los casos las soluciones de las E.D.O. son imposibles de conocer de forma la explícita. En estos casos es posible realizar un estudio del comportamiento de las soluciones desconocidas desde dos enfoques:*

- *Cualitativo, esto implica construir el campo de direccional de las E.D.*

- *Cuantitativo, esto implica aplicar métodos numéricos para construir aproximadamente la solución del P.V.I.*

Lema 3.1.4. *Supongamos que $f \in \mathbf{C}[\Omega, \mathbb{E}]$. Resolver la Ecuación (3.2) es equivalente a resolver la ecuación integral siguiente:*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t f(s, \mathbf{x}(s)) ds, \quad t_0 \in I.$$

Las identidades anteriores es muy especial y útil. El resultado que presentaremos a continuación nos da la existencia y unicidad de la solución del P.V.I. en la Ecuación (3.2) bajo condiciones bastante generales.

Definición 3.1.5. *Sea $\Omega = J \times \mathcal{D}$ donde J es un intervalo de \mathbb{R} y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. La función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es globalmente Lipschitz, respecto a $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, uniformemente en $t \in J$, sobre Ω , si existe una constante $K > 0$, tal que*

$$|f(t, \mathbf{x}_1) - f(t, \mathbf{x}_2)| \leq K|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \quad \forall(t, \mathbf{x}_i) \in \Omega, i = 1, 2.$$

Definición 3.1.6. *Diremos que f es una función localmente Lipschitz sobre Ω , si para todo punto $\mathbf{p} \in \Omega$ existe un entorno $V_{\mathbf{p}}$ del punto \mathbf{p} , tal que la restricción de f a $V_{\mathbf{p}}$ es globalmente Lipschitz.*

Teorema 3.1.7. (Picard)

Sea $\Omega \subset I_a \times B_b$ donde $I_a = \{t : |t - t_0| \leq a\}$ y $B_b = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz y $|f| < M$, entonces para cualquier punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$, existe una única solución de la Ecuación (3.2) definida en $I_\alpha = \min\{a, b/M\}$.

Observemos que la condición de Lipschitz es suficiente para obtener la unicidad de las soluciones de (3.2), pero no es necesaria.

Es posible preguntarse: No siendo f localmente Lipschitz, ¿podría el P.V.I de la Ecuación (3.2) tener solución?. La respuesta a esta pregunta se tiene en el siguiente teorema:

Teorema 3.1.8. (Peano)

Si $f \in \mathbf{C}[\Omega, \mathbb{E}]$, entonces la Ecuación (3.2) posee al menos una solución.

3.2. Ecuaciones autónomas

Una E.D.O. que no depende de t , es decir, el campo vectorial es el mismo a lo largo de cada recta vertical, esta propiedad diferencial son llamadas ecuaciones diferenciales autónomas, en otras palabras la función depende solamente de una variable, en consecuencia, si se piensa en t como el tiempo, se puede decir que las ecuaciones diferenciales autónomas se gobiernan a sí misma y no por algún factor externo que depende del tiempo.

Definición 3.2.1. *Un campo vectorial de clase C^k , $1 \leq k \leq \infty$ en $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ es una función vectoriales $\mathbf{X} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$. El campo vectorial \mathbf{X} tiene asociado una ecuación diferenciable de la forma:*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (3.5)$$

La solución de la Ecuación (3.5) es $\varphi : \mathbf{I} \rightarrow \Delta$, donde \mathbf{I} es un intervalo de \mathbb{R} , y $\varphi(t, \mathbf{x})$ es llamada trayectoria de \mathbf{X} .

Ahora bien, si consideramos que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, se sigue la definición de ecuaciones diferenciales autónomas.

Definición 3.2.2. *Una ecuación diferencial autónomas tiene la forma siguiente:*

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

es decir, la función f no depende de t .

Una comparación directa de la Ecuación (3.1) y la Ecuación (3.6) es que simplemente una no posee la variable t .

Definición 3.2.3. *Al punto \mathbf{x}_0 tal que $f(\mathbf{x}_0) = 0$ se le llama un punto crítico*

El punto crítico es una solución única de la Ecuación (3.6), y es la solución llamada constante. La solución constante (solución estacionaria) de una ecuación diferencial es una solución de la forma $\varphi(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$ constante, es decir, las soluciones estacionarias son aquellas cuyas gráficas son rectas horizontales.

A veces una ecuación diferencial autónoma puede ser resuelta de forma explícita, con soluciones simples, esto se logra en gran parte porque las antiderivadas involucradas en la ecuación son explícita.

Observación 12. Si $\mathbf{x}(t)$ es una solución de la ecuación diferencial autónoma, entonces $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t+a)$ es una solución para cualquier número fijo a explicitas, es decir, se tienen las antiderivadas y en caso contrario sería no explicita

Teorema 3.2.4. Cada solución de la Ecuación (3.6), cuando $f(x) \in \mathbb{R}$ es constante, o estrictamente creciente, o estrictamente decreciente.

Teorema 3.2.5. Sea $f(a) = 0$ con $f(x) \in \mathbb{R}$, es decir, es un punto crítico de la Ecuación (3.6). Si $f'(a) < 0$, entonces $x(t) = a$ es asintóticamente estable. Si $f'(a) > 0$, entonces $x(t) = a$ es inestable.

Cada solución $\mathbf{x}(t)$ de la Ecuación (3.6) es una curva en el espacio $t\mathbf{x}$, pero también se puede ver como una curva en el plano \mathbf{x} (que llamaremos plano de fases) descrita paramétricamente en función de t . Esta segunda curva, a la que llamaremos órbita de la solución, es la proyección sobre el plano de fases. El objetivo es representar lo más aproximadamente posible el conjunto de órbitas de la Ecuación (3.6), es decir, el mapa de fases de la Ecuación (3.6).

Teorema 3.2.6. Por cada punto del plano de fases pasa una única órbita de la Ecuación (3.6). Si una órbita se corta a sí misma corresponde a una solución periódica y dicha órbita es una curva cerrada simple.

3.3. Sistemas lineales autónomos

Los mapas de las fases suministran la idea de la representación de sus órbitas cerca de un punto crítico. En esta sección se tratan los sistemas lineales autónomos y sus mapas de fases.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{3.7}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ y la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Los casos se clasifican según sus autovalores y la matriz A .

- 1.- Si $\det(A) \neq 0$, entonces el único punto crítico es $\mathbf{0}$ y el autovalor es $\lambda = 0$.

2.- Si autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son distintos asociados a la matriz A , entonces la solución viene dada por $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$, donde \mathbf{v}_i son los vectores propios asociados a los autovalores con $i = 1, 2$.

a) Si $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, entonces todas las soluciones tienden a $\mathbf{0}$. Todas las órbitas entran en el origen y el punto crítico se llama **nodo estable**.

b) Si $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, entonces se tiene la misma situación anterior que el origen $\mathbf{0}$ salvo que las trayectorias salen del origen $\mathbf{0}$ y el punto se llama **nodo inestable**.

c) Si $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, entonces la órbita adopta la forma hiperbólica y el punto crítico se llama **un punto silla**.

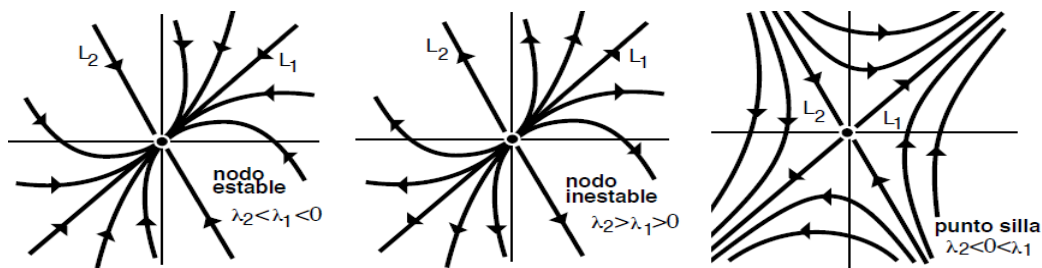


Figura 3.1: Nodo estable; Nodo inestable; Nodo silla.

3.- Si $\lambda_2 = \lambda_1$ y A es una matriz diagonal, entonces la solución es: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}$.

a) si $\lambda_2 = \lambda_1 < 0$ ($\lambda_2 = \lambda_1 > 0$), entonces nos acercamos (alejamos) a $\mathbf{0}$ según sea el caso y a este punto es llamado **nodo estelar estable** (**nodo estelar inestable**).

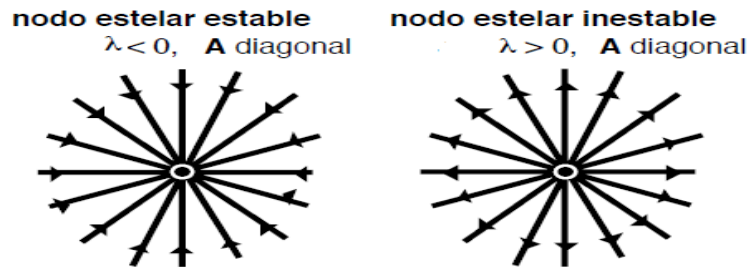


Figura 3.2: Nodo estelar estable; Nodo estelar inestable.

4.- Si $\lambda_2 = \lambda_1$ y A es una matriz no diagonal, entonces la solución general es $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{w} + (c_1t + c_2)\mathbf{v}]e^{\lambda_1 t}$, con \mathbf{v} es vector propio asociado a λ_1 .

a) Si $\lambda_1 < 0$ ($\lambda_2 > 0$), entonces la órbita se acerca (aleja) al punto crítico, y se llama **nodo de una tangente estable** (**nodo de una tangente inestable**).

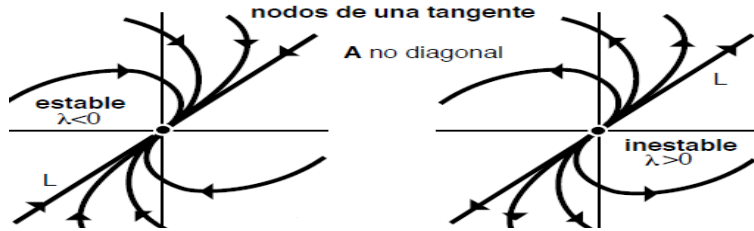


Figura 3.3: Nodo de una tangente estable; Nodo de una tangente inestable.

5.- Si los autovalores son complejos $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$, entonces la solución es $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos(p) + c_2 \sin(q) \\ c_3 \cos(p) + c_4 \sin(q) \end{pmatrix} e^{pt}$, donde c_i son constantes arbitrarias reales.

a) Si $p = 0$, entonces todas las soluciones son periódicas y las órbitas son curvas cerradas rodeando el origen, que se llama **órbita centro**.

b) Si $p < 0$, entonces las órbitas son cerradas en espiral hacia el origen y se llama **foco estable**.

c) Si $p > 0$, entonces las órbitas son espirales que se alejan del punto crítico y se llama **foco inestable**.

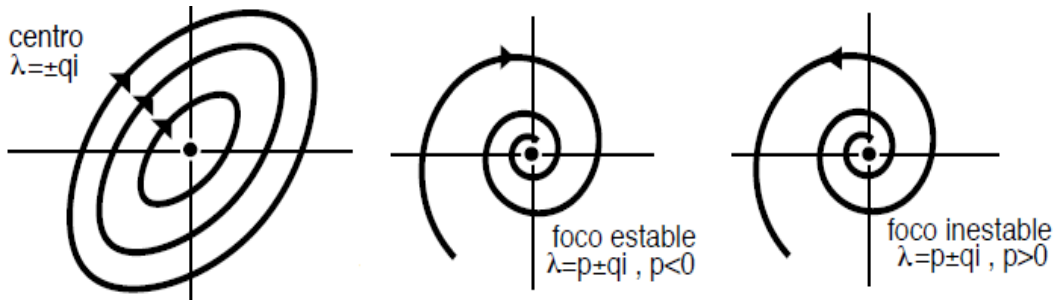


Figura 3.4: órbita centro; foco estable; foco inestable.

Capítulo 4

Difeomorfismos

En este capítulo, se examina el tema de difeomorfismo, para ello es necesario conocer algunos conceptos importantes relacionados con la variedad, la mayoría de los conceptos fueron tomados del libro [Lafontaine \(2012\)](#). Las otras secciones son desarrollos propios para el manuscrito, como elementos de apoyo para entender el producto final, que se ubica en el apéndice [A](#).

4.1. Variedades

Definición 4.1.1. *Un espacio topológico es un par $(\mathbb{X}, \mathcal{J})$, donde \mathbb{X} es un conjunto, y \mathcal{J} es una familia de subconjuntos de \mathbb{X} que verifica las siguientes condiciones:*

- 1) $\mathbb{X} \in \mathcal{J}$ y $\emptyset \in \mathcal{J}$.
- 2) Dada una familia $\{A_i \in \mathcal{J}, i \in I\}$ de elementos de \mathcal{J} , su unión $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{J}$.
- 3) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{J}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{J}$

Diremos que la familia \mathcal{J} es una topología sobre \mathbb{X} , y a sus elementos se llaman conjuntos abiertos de $(\mathbb{X}, \mathcal{J})$.

Definición 4.1.2. *Sean \mathbb{X}, \mathbb{Y} espacios topológicos, $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ una función. Entonces, f es un homeomorfismo si se cumple que:*

- f es una biyección.
- f es continua.

- f^{-1} es continua.

Definición 4.1.3. Un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables \mathbb{M} y \mathbb{N} es una aplicación biyectiva $F : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que F y F^{-1} son aplicaciones diferenciables. En tal caso, \mathbb{M} , \mathbb{N} se dicen variedades difeomorfas.

Definición 4.1.4. Sea \mathbb{M} un espacio topológico. Una estructura diferenciable sobre \mathbb{M} es una familia $D = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ verificando

- $\{U_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ es un recubrimiento por abiertos de \mathbb{M} .
- Existe un entero $d \geq 1$ tal que para todo $i \in \mathbf{I}$, ϕ es un homeomorfismo de U_i sobre un abierto de \mathbb{R}^d .
- Si $i, j \in \mathbf{I}$ cumplen $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la aplicación

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^d .

Observación 13. La familia D es maximal, en el sentido de que D contiene a todos los pares (U, ϕ) si cumple que:

- U es un abierto de M y ϕ un homeomorfismo sobre un abierto de \mathbb{R}^d .
- Para todo $i \in \mathbf{I}$ tal que $U \cap U_i \neq \emptyset$, $\phi \circ \phi_i^{-1}$ es un difeomorfismo.

Diremos que $\mathbb{M} \equiv (\mathbb{M}, D)$ es una variedad diferenciable de dimensión d . A cada par $(U, \phi) \in D$ se le llama entorno coordinado o carta de la variedad y a cada recubrimiento $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \mathbf{I}}$ de \mathbb{M} por cartas de D , atlas de \mathbb{M} .

Ejemplo 9. Presentamos un atlas sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$. Sean $i = 1, \dots, n$,

$$U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} | x_i > 0\},$$

$$U_i^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} | x_i < 0\}.$$

Claramente, U_i^+ , U_i^- son abiertos de \mathbb{S}^{n-1} , además $\mathbb{S}^{n-1} = \bigcup_{i=1}^n (U_i^+ \cup U_i^-)$.

4.2. Deformación en \mathbb{S}^{d-1}

Sea $\Phi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ un difeomorfismo, para ello se necesita la escoger un atlas (un conjunto carta), es decir, una biyección local entre \mathbb{S}^{d-1} y \mathbb{R}^d , en otra palabras, con esto podremos desarrollar los cálculos diferencial sobre \mathbb{S}^{d-1} vía al cálculos diferencial sobre \mathbb{R}^d . El propósito es desarrollar los cálculos sobre \mathbb{R}^d bajo una extensión de dicho conjunto el cual lo denotaremos por: $\mathcal{D}_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$.

Definición 4.2.1. Sean $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ donde \mathbb{V}, \mathbb{W} son espacios vectoriales y \mathbb{K} un cuerpo. Entonces f es homogénea de orden k (orden k) si cumple con:

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}.$$

Definición 4.2.2. Sea $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y un subconjunto $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{V}$, la restricción de f al conjunto \mathbb{D} es la función $f|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W}$, dada por:

$$f|_{\mathbb{D}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{D}$$

Observación 14. Las siguientes observaciones son importante:

- 1.- Sea Φ un difeomorfismo de orden 1, entonces $\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|\Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)$ es un difeomorfismo sobre \mathcal{D}_ε .
- 2.- $\varphi|_{\mathbb{S}^{d-1}} = \Phi$.
- 3.- $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}^d$.

Ejemplo 10. Si $d = 2$, se desarrolla un deformación en \mathbb{S} (el círculo en \mathbb{R}^2) que a continuación se expresa de siguiente manera. Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{S}$, sabemos que un parametrización del círculo unitario es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(2\pi t), \\ x_2(t) &= \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Considerando la función Beta de parámetros α y β , de la siguiente manera:

$$F_{\alpha, \beta}(t) = \frac{B(t, \alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)}, \quad t \in [0, 1].$$

Reemplazando en la Ecuación (4.1),

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(2\pi F_{\alpha,\beta}(t)), \\ y_2(t) &= \sin(2\pi F_{\alpha,\beta}(t)), \quad t \in [0, 1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por otro lado, sabemos que $t = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$, así

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\left(2\pi F_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)\right), \\ y_2 &= \sin\left(2\pi F_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)\right), \quad t \in [0, 1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por lo tanto, $\Phi(\mathbf{x}) = (y_1, y_2)^\top = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}))^\top$, equivalentemente

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\cos(2\pi F_{\alpha,\beta}(t\mathbf{x})), \sin(2\pi F_{\alpha,\beta}(t\mathbf{x})))^\top.$$

Además

$$\Phi^{-1}(\mathbf{y}) = (\cos(2\pi F_{\alpha,\beta}^{-1}(t\mathbf{y})), \sin(2\pi F_{\alpha,\beta}^{-1}(t\mathbf{y})))^\top,$$

donde $t\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ y $t\mathbf{y} = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$.

A continuación se presenta un figura, para detallar cómo funciona la deformación en el círculo de radio 1 (\mathbb{S}), este ejemplo ayuda a comprender como la expresión Φ es biyectiva entre los dos círculos, como se muestra en en la Figura 4.1, hay segmento de líneas que unen los nodos de las dos figuras. La Figura 4.1 está compuesta por un círculo de radio 1, además la deformación está caracterizada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 0,7 \cos(2\pi F_{0,5,0,5}(t)), \\ y_2(t) &= 0,15 + 0,7 \sin(2\pi F_{0,5,0,5}(t)). \end{aligned}$$

Con esta idea, sea hace el mismo desarrollo para el caso cuando las superficies son esferas, es decir, el conjunto está en \mathbb{S}^2 . Para esto se desarrolla el ejemplo siguiente.

Ejemplo 11. En este caso cuando $d = 3$, se desarrolla un deformación en \mathbb{S}^2 (la esfera en \mathbb{R}^3). Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{S}^2$, sabemos que un parametrización de la esfera unitario

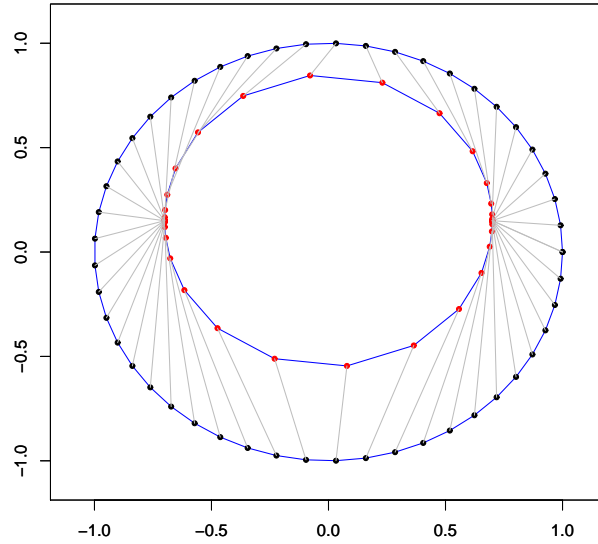


Figura 4.1: Círculo y la deformación círculo.

es:

$$\begin{aligned}
 x_1(t, s) &= \cos(2\pi t) \sin(2\pi s), \\
 x_2(t, s) &= \sin(2\pi t) \sin(2\pi s), \quad t \in [0, 1], s \in [0, 1], \\
 x_3(t, s) &= \cos(2\pi s).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Considerando la función Beta de parámetros α_1, β_1 y la función Beta de parámetros α_2, β_2 , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 F_{\alpha_1, \beta_1}(t) &= \frac{B(t, \alpha_1, \beta_1)}{B(\alpha_1, \beta_1)}, \quad t \in [0, 1]. \\
 F_{\alpha_2, \beta_2}(s) &= \frac{B(s, \alpha_2, \beta_2)}{B(\alpha_2, \beta_2)}, \quad s \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la Ecuación (4.4)

$$\begin{aligned}
 y_1(t, s) &= \cos(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}(t)) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s)), \\
 y_2(t, s) &= \sin(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}(t)) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s)), \quad t \in [0, 1], s \in [0, 1], \\
 y_3(t, s) &= \cos(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s)).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por otro lado, sabemos que $t = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ y $s = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\right)$, así

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}(t)) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s)), \\ y_2 &= \sin(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}(t)) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s)), \quad t \in [0, 1], s \in [0, 1], \\ y_3 &= \cos(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi(\mathbf{x}) = (y_1, y_2, y_3)^\top = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x}))^\top$, equivalentemente

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \left(\cos(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}(t\mathbf{x})) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s\mathbf{x})), \right. \\ &\quad \left. \sin(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}(t\mathbf{x})) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s\mathbf{x})), \cos(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}(s\mathbf{x})) \right)^\top, \end{aligned}$$

$$\text{donde } t\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \text{ y } s\mathbf{x} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\right).$$

Además

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\mathbf{y}) &= \left(\cos(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}^{-1}(t\mathbf{y})) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}^{-1}(s\mathbf{y})), \right. \\ &\quad \left. \sin(2\pi F_{\alpha_1, \beta_1}^{-1}(t\mathbf{y})) \sin(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}^{-1}(s\mathbf{y})), \cos(\pi F_{\alpha_2, \beta_2}^{-1}(s\mathbf{y})) \right)^\top, \end{aligned}$$

$$\text{donde } t\mathbf{y} = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \text{ y } s\mathbf{y} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{y_3}\right).$$

Semejante al procedimiento antes mencionado \mathbb{S} , pero esta vez, en la superficie esférica \mathbb{S}^2 de radio unitario, usando el desarrollo del Ejemplo 11, se obtiene las mallas mostradas en la Figura 4.2, que especifica la distribución de los nodos, tanto para la región original y la región deformada a través de la función beta. Los parámetros usado son $F_{3,2}(t)$ y $F_{2,2}(s)$ como resultado se apreciar en la Figura 4.2 como se transforman los nodos. Ahora bien, obtenida la malla usando las Ecuaciones (4.4) y (4.5), se construye la superficie de nodos que se muestra en la Figura 4.3, donde se puede prestar atención a como la superficie esférica tiene una deformación en el ecuador, pero ambas superficies están conectadas por la función Φ que es biyectiva. Además, se muestran las gráficas de las superficies original realizada por la Ecuación (4.4) y superficie deformada por la Ecuación (4.5) usando los parámetros de $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \beta_1 = 2, \beta_2$ (ver la Figura 4.4). Aunque no se nota mucha diferencia, existe una deformación específicamente en la distribución de los puntos Figura 4.3. Hay que observar que estas dos superficies están conectadas por una función Φ biyectiva, y por lo tanto son difeomorfas.

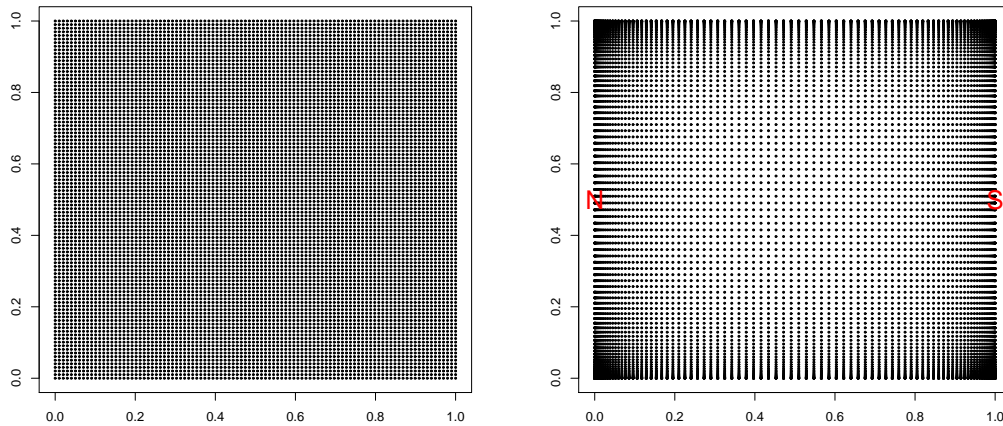


Figura 4.2: Mallas.

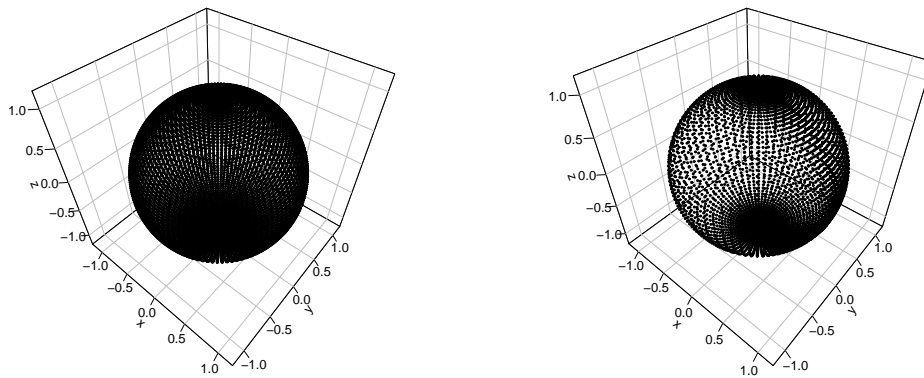


Figura 4.3: Puntos sobre superficie original y deformada.

4.3. Simulación

La simulación del campo aleatorio se realiza comúnmente en una malla de puntos sobre el dominio de interés. El proceso se reduce por tanto a generar cierto número de variables aleatorias conjuntamente distribuidas. Cuando la densidad de probabilidad conjunta de estas variables es Gaussiana se dice que el campo aleatorio es multi-Gaussiano y la distribución espacial de los valores simulados adquiere características propias de esta ley

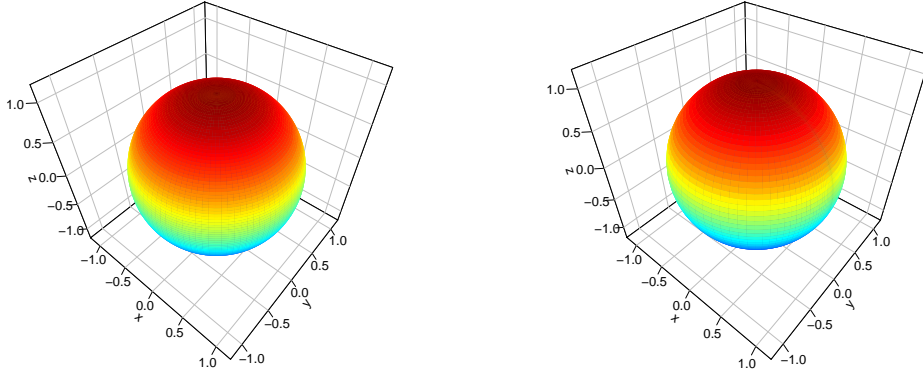


Figura 4.4: Superficie de la esfera original y la deformada.

de probabilidad. Entre ellas, destacan la simetría de la dependencia. Para esta sección simularemos campos aleatorios sobre el conjunto \mathbb{S}^{d-1} , para nuestro caso mostraremos ejemplos cuando $d = 2, 3$.

Algoritmo de simulación de un campo aleatorio sobre \mathbb{S} , considerando las ecuaciones desarrolladas en el Ejemplo 10.

1. Dado α, β parámetros de la función Beta.
2. Tomamos N puntos sobre $[0, 1]$; $t_i, i = 1, \dots, N$.
3. Calculamos $x^i = (x_1^i, x_2^i), i = 1, \dots, N$ usando Ecuación (4.1).
4. Calculamos $y^i = (y_1^i, y_2^i), i = 1, \dots, N$ usando Ecuación (4.2).
5. calculamos $dx_{ij} = |\theta x^i - \theta x^j| \text{ modulo } \pi; dy_{ij} = |\theta y^i - \theta y^j| \text{ modulo } \pi$.
6. Calculamos la representación de Schoenberg en la Ecuación (A.3) para $d = 2, Rx = R(dx_{ij})$ y $Ry = R(dy_{ij})$.
7. Se genera N^2 iid $Z_i \sim N(0, 1)$.
8. Método de Cholesky $Zx_i = \Gamma_x^{1/2} Z_i; Zy_i = \Gamma_y^{1/2} Z_i$.

9. Se toma muestra de orden N para Zx y Zy
10. Calculamos las covarianzas de Zx y Zy , se comparan.

En la siguiente Figura 4.5, se observa una trayectoria aleatorio simulada sobre el círculo unitario, también, se observar la trayectoria del campo aleatorio simulada sobre el círculo deformado.

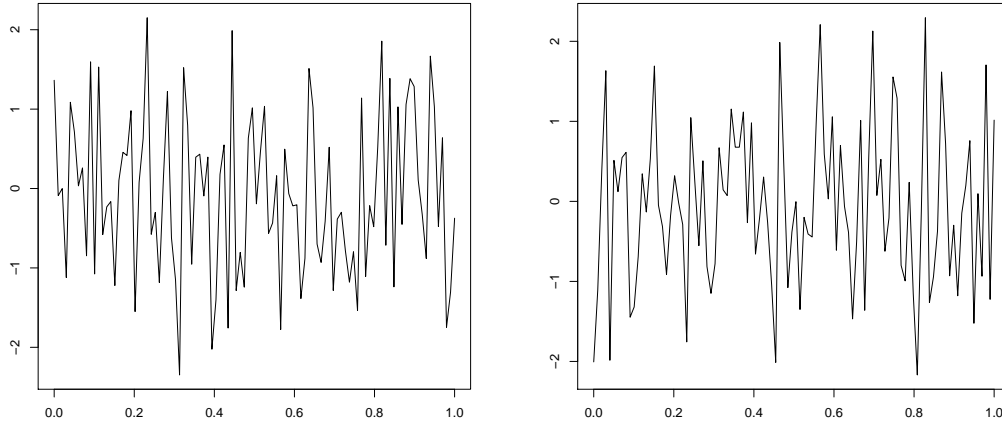


Figura 4.5: Campo aleatorio sobre el círculo original y deformado.

De la misma forma que se hizo para \mathbb{S} , se simuló un campo aleatorio sobre \mathbb{S}^2 , presentamos un algoritmo donde se usan la ecuaciones desarrolladas en Ejemplo 11.

1. Dado α_1, β_1 y α_2, β_2 los parámetros de la función Beta.
2. Tomamos N puntos sobre $[0, 1] \times [0, 1]$; $(t_i, s_i), i = 1, \dots, N$.
3. Calculamos $x^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i), i = 1, \dots, N$ usando Ecuación (4.4).
4. Calculamos $y^i = (y_1^i, y_2^i, y_3^i), i = 1, \dots, N$ usando Ecuación (4.5).
5. calculamos $dx_{ij} = (x^i)^\top x^j; dy_{ij} = (y^i)^\top x^j$.
6. Calculamos la representación de Schoenberg en la Ecuación (A.3) para $d = 3, Rx = R(dx_{ij})$ y $Ry = R(dy_{ij})$.

7. Se genera N^2 iid $Z_i \sim N(\mu, \Gamma)$, $\mu = (0, 0)^\top$ y $\Gamma = I_2$.

8. Método de Cholesky $Zx_i = \Gamma_x^{1/2} Z_i$; $Zy_i = \Gamma_y^{1/2} Z_i$.

9. Se toma muestra de orden N para Zx y Zy

10. Calculamos las covarianzas de Zx y Zy , se comparan.

En este caso, se realiza la simulación de un campo aleatorio sobre las superficie de la esfera original y la esfera deformada, teniendo como resultado las gráficas de proyecciones del campos aleatorios sobre $[0, 1] \times [0, 1]$ para cada caso, como se muestra en la Figura 4.6, Por otro lado, usando una transformación de malla, se obtiene la Figura

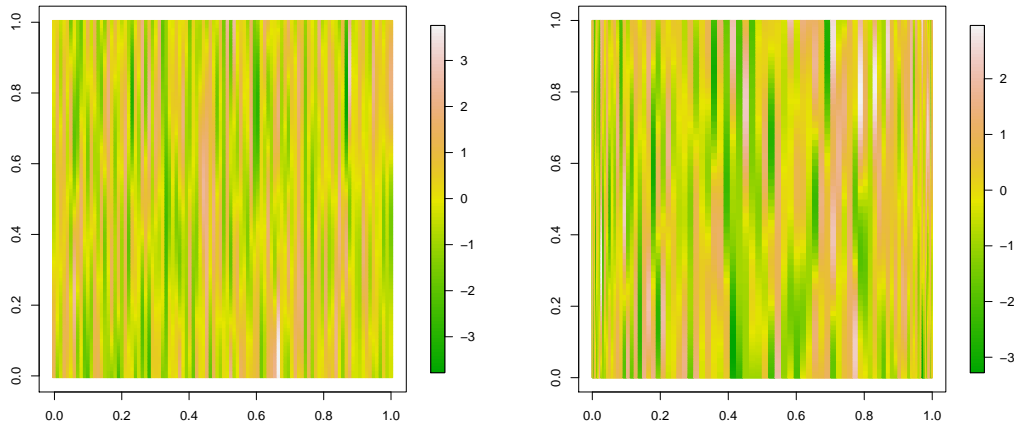


Figura 4.6: Proyección del campo aleatorio original simulado y deformado simulado.

4.7, donde se puede ver como las trayectorias de malla tiene alguna influencia en campo simulado. Para una apreciación de los campos aleatorios sobre la superficie esférica original y superficie esférica deformada, se tiene las Figuras 4.8 y 4.9, como se puede ver, los puntos tienen diferentes colores, es decir, la superficie es cambiante, propio de un campo aleatorio. Finalmente, los campos aleatorios mostrados en las gráficas son difeomorfos a través de una función Φ , relatada en este trabajo.

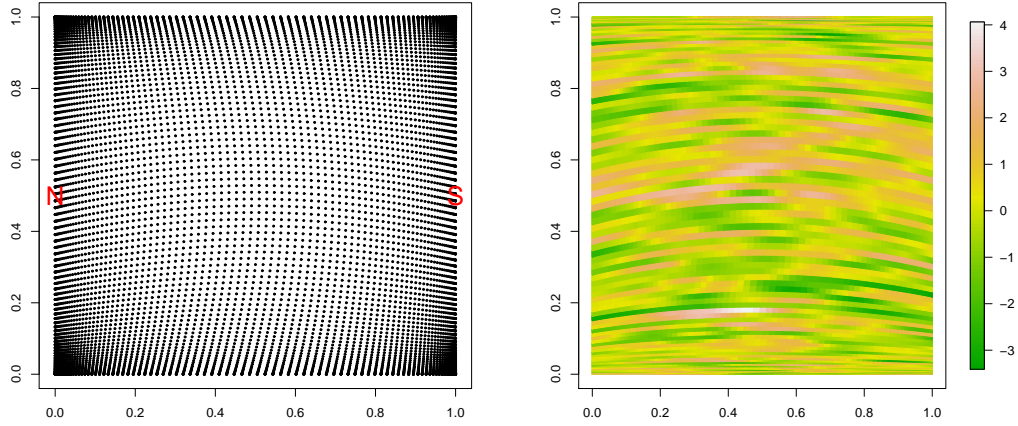


Figura 4.7: Malla y Proyección del campo aleatorio deformado simulado.

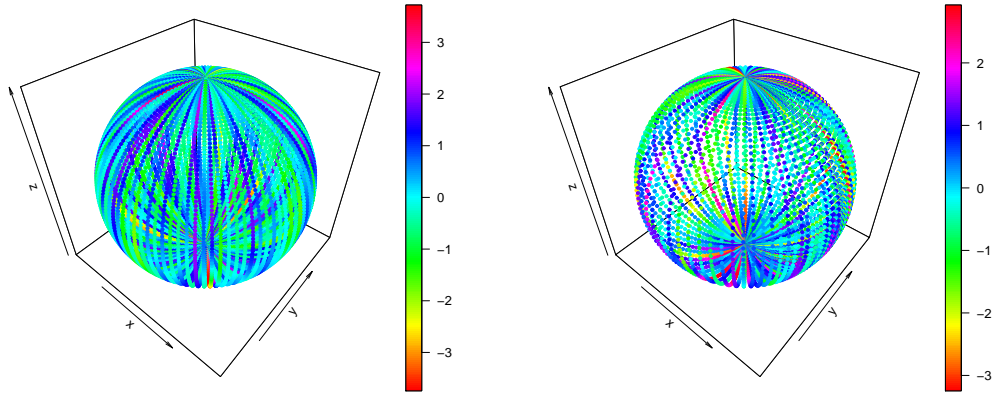


Figura 4.8: Campo aleatorio simulado sobre esfera original y deformado.

4.4. Aplicación del Teorema Principal

En esta sección daremos en detalle un ejemplo de como usar el Teorema [A.3.6](#), como se puede recuperar la función R a partir de una función de covarianza C_ε .

Ejemplo 12. Sea $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 + b$, con $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Phi^\top(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{x})| |\Phi(\mathbf{y})|}$, $a = \frac{d+1}{d}$, $b = -\frac{1}{d}$ y $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -c_2 \\ 0 & c_2 & c_1 \end{bmatrix}$, $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Recuperamos la función

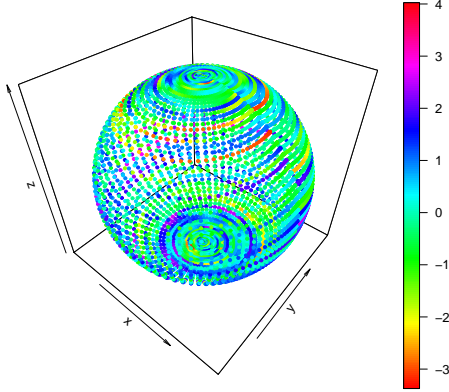


Figura 4.9: Campo aleatorio simulado sobre la esfera deformada usando malla 4.7.

$$R(u) = \frac{(d+1)u^2-1}{d} \quad y \quad \Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^2$, $\Gamma = \mathbf{I}_3$ y la Ecuación (A.18),

$$D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})D_{\mathbf{x}}(\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 2a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{1}{|\Phi(\mathbf{x})|}\frac{\Phi^{\top}(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|}\left(\mathbf{I}_3 - P_{\Phi(\mathbf{x})}\right)J_{\Phi(\mathbf{x})}.$$

De la misma forma,

$$D_{\mathbf{y}}C_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\Phi^{\top}(\mathbf{x})}{|\Phi(\mathbf{x})|}\frac{1}{|\Phi(\mathbf{y})|}\left(\mathbf{I}_3 - P_{\Phi(\mathbf{y})}\right)J_{\Phi(\mathbf{y})}.$$

Así, se tiene que

$$D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = 2a\frac{\phi_1(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|}\frac{\Phi^{\top}(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|}\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^{\top}\right)J_{\Phi(\mathbf{e}_1)}, \quad (4.6)$$

y

$$D_{\mathbf{y}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = 2a\frac{\phi_1(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|}\frac{\mathbf{e}_1^{\top}}{|\Phi(\mathbf{y})|}\left(\mathbf{I}_3 - \frac{\Phi(\mathbf{y})\Phi^{\top}(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})||\Phi(\mathbf{y})|}\right)J_{\Phi(\mathbf{y})}. \quad (4.7)$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} |D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma| &= 2a\frac{|\phi_1(\mathbf{y})|}{|\Phi(\mathbf{y})|}\frac{1}{|\Phi(\mathbf{y})|}|\Phi^{\top}(\mathbf{y})\left(\mathbf{I}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^{\top}\right)J_{\Phi(\mathbf{e}_1)}| \\ &= 2a\frac{|\phi_1(\mathbf{y})|}{|\Phi(\mathbf{y})|^2}\sqrt{|\Phi(\mathbf{y})|^2 - \phi_1^2(\mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

y de la ecuación (4.7)

$$\partial_{y_1}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = 2a\frac{\phi_1(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|^2}\frac{1}{|\Phi(\mathbf{y})|^2}\left(|\Phi(\mathbf{y})|^2 - \phi_1^2(\mathbf{y})\right). \quad (4.9)$$

Así, usando la Ecuación (4.8) y (4.9), obtenemos lo siguiente

$$\frac{\partial_{y_1} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|} = \pm \frac{\sqrt{|\Phi(\mathbf{y})|^2 - \phi_1^2(\mathbf{y})}}{|\Phi(\mathbf{y})|^2}.$$

Sabemos que, $\gamma_{\mathbf{y}}^\top(t) = (1 - t(1 - y_1), ty_2, ty_3)$ y $\gamma_{y_1}(t) = 1 - t(1 - y_1)$, como $|\mathbf{y}| = 1$, reemplazando en la ecuación (A.22), obtenemos que

$$\alpha(\mathbf{y}) = \pm \int_0^1 \frac{\sqrt{|\Phi(\gamma_{\mathbf{y}}(t))|^2 - \phi_1^2(\gamma_{\mathbf{y}}(t))}}{|\Phi(\gamma_{\mathbf{y}}(t))|^2} \frac{dt}{t},$$

con $|\gamma_{\mathbf{y}}(t)|^2 = (1 - t(1 - y_1))^2 + t^2(|\mathbf{y}|^2 - y_1^2) = \gamma_{y_1}^2(t) + t^2(|\mathbf{y}|^2 - y_1^2)$ y $|\Phi(\gamma_{\mathbf{y}}(t))| = |\gamma_{\mathbf{y}}(t)|^2$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{y}) &= \pm \int_0^1 \frac{t\sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}}{(1 - t(1 - y_1))^2 + t^2(|\mathbf{y}|^2 - y_1^2)} \frac{dt}{t} \\ &= \pm \int_0^1 \frac{A}{(1 - tB)^2 + t^2 A^2} dt, \end{aligned}$$

donde $A = \sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}$ y $B = 1 - y_1$, haciendo el cambio de variable

$v = \frac{A}{1 - tB}$ and $v' > 0$ con $t \in [0, 1]$. Por lo tanto,

$$\alpha(\mathbf{y}) = \pm \int_0^{A/(1-B)} \frac{dv}{1 + v^2} = \arctan\left(\frac{A}{1 - B}\right).$$

Usando identidades trigonométricas se tiene que: $\cos(\arctan(\frac{A}{1-B})) = \frac{1-B}{\sqrt{(1-B)^2 + A^2}} = \frac{y_1}{|\mathbf{y}|}$ implica y con la ecuación (A.15),

$$\phi_1(\mathbf{y}) = y_1.$$

Por otro lado, $j = 1, 2$, de la ecuación (4.6) y (4.8) implica

$$\frac{\partial_{x_j} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \mathbf{e}_j}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|} = \pm \frac{2a \frac{\phi_1(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|} \frac{\Phi^\top(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|} (1 - 0) J_{\Phi(\mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_j}{2a \frac{|\phi_1(\mathbf{y})|}{|\Phi(\mathbf{y})|^2} \sqrt{|\Phi(\mathbf{y})|^2 - \phi_1^2(\mathbf{y})}} = \pm \frac{y_1 y_j}{|y_1| \sqrt{1 - y_1^2}} = \pm \frac{y_j}{\sqrt{1 - y_1^2}}.$$

Usando la identidad trigonométrica se tiene que: $\sin\left(\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{1-B}}\right)\right) = A = \sqrt{1 - y_1^2}$, y la ecuación (A.16), entonces

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \pm \sqrt{1 - y_1^2} \frac{y_j}{\sqrt{1 - y_1^2}} = \pm y_j,$$

así que

$$\Phi(\mathbf{y}) = (y_1, \pm y_2, \pm y_3)^\top.$$

Por lo tanto, $R(u) = ay_1^2 + b = \frac{d+1}{d} u^2 - \frac{1}{d}$ y $\Phi(\mathbf{y}) = (y_1, \pm y_2, \pm y_3)^\top$.

Capítulo 5

Conclusión y futuras líneas de investigación

Se formuló innovaciones en las funciones de covarianza en espacio, a partir del uso de deformaciones difeomorfismos a través de las formas bilineales en los espacios \mathbb{S}^{d-1} y \mathbb{R}^d , de igual manera, este método atendió las distancias asociadas en las variedades esféricas a través de los difeomorfismos y en el espacio euclidiano.

Por consiguiente, los principales aportes del trabajo son: la creación de una familia de funciones de covarianza a través de deformación difeomorfiscas entre espacios esféricos espaciales. Por otro lado, a partir de una deformación difeomorfisca se encuentra otra deformación difeomorfisca, todos estos resultados se encuentran en el apéndice [A](#). También, uno de los resultados importantes es un teorema con condiciones suficiente para la recuperación de funciones de covarianza

Este trabajo abre interesantes vías de investigaciones al estudio de los procesos espaciales reducibles por deformación del espacio. Además de la aplicación de los métodos propuestos en casos concretos y su aplicación a problemas tales como la predicción de un fenómeno físico.

Construir los algoritmos para simular las propiedades de esta investigación, para así, confirmar las propiedades aportadas por la investigación.

Considerar la investigación, para conseguir la mejor información sobre la función de

covarianza, asimismo, realizar mapa de predicción en los fenómenos físicos, para valorar sus ventajas o desventajas con respecto a los métodos kriging espaciales.

Apéndice A

Artículo

The Reduction Problem for Nonstationary Covariance functions over Spheres: Deformation Approaches

Emilio Porcu¹, Enner Mendoza², Rachid Senoussi³ and Moreno Bevilacqua⁴

Abstract

The paper considers the Perrin and Senoussi (Perrin & Senoussi, 2000) reduction problem for nonstationary covariance functions over affine spaces to the $(d-1)$ -dimensional spheres embedded in the d -dimensional Euclidean space. Given a nonstationary covariance function C , we seek for a pair (R, Φ) , for $R : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ a correlation function and Φ a bijection on the $(d-1)$ -dimensional sphere, such that C can be reduced to a geodesically isotropic one.

The problem finds motivation in recent statistical literature devoted to the analysis of global phenomena, defined typically over the sphere of \mathbb{R}^3 . The application domains considered in the manuscript make the problem mathematically challenging. We show the uniqueness of the representation in the reduction problem. Then, we provide an

¹ School of Mathematics and Statistics, Newcastle University.

Chair of Spatial Analytics Methods, Newcastle University. Newcastle Upon Tyne, NE1 7RU.
& Department of Mathematics, Technical University Federico Santa Maria, Valparaiso, Chile.
email: georgepolya01@gmail.com

²Department of Statistics, University of Valparaiso, Valparaiso, Chile.

³Biostatistics and Spatial Processes (BioSP), INRA, Avignon, France.

⁴Department of Statistics, University of Valparaiso, Valparaiso, Chile.

inversion formula to recover the bijection Φ for a given C . We also give sufficient conditions for reducibility. Finally, a bridge between the reducibility problem and differential equations and flows preserving spheres is provided.

Keywords: Covariance function; Differential Equation; Great Circle; Nonstationarity; Reducibility Problem; Sphere.

A.1. Introduction and Statement of the Problem

Covariance functions are fundamental to geostatistical modeling. Their use has become ubiquitous in many branches of applied sciences. Recently, the advent of massive data sets distributed over the whole planet Earth has motivated several scientists for studying modeling strategies for random fields defined on the spherical shell of \mathbb{R}^3 representing our planet. The natural metric on the sphere is the geodesic or great circle distance, which defines an arc joining any pair of points located over the spherical shell. Gaussian random fields are completely specified through their first and second order moments, so that the covariance function becomes central for modeling purposes. The increasing interest in modeling stochastic processes over spheres or spheres cross time with an explicit covariance function is also reflected in works in areas as diverse as mathematical analysis, spatial geostatistics, space-time geostatistics and we refer the reader to the recent review by [Porcu *et al.* \(2017\)](#).

Let X be a non empty set. A mapping $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ is called positive definite if, for any N -dimensional collection $\{a_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{R}$ and points $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \subset X$, we have

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) a_j \geq 0.$$

A well known fact is that $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ is a positive definite function if and only if K is the covariance function of a Gaussian random field Z on X .

This paper consider two cases:

- (a) $X = \mathbb{S}^{d-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| = 1\}$, that is, the unit sphere of \mathbb{R}^d and where $|\cdot|$ is the Euclidean distance. Covariance functions on d -dimensional spheres are denoted C throughout. The covariance function $C : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ is called geodesically isotropic ([Porcu *et al.*, 2017](#)) if there exists a function $R : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\cos d_{\text{GC}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad (\text{A.1})$$

where $d_{\text{GC}} : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow [0, \pi]$ is the great circle distance, uniquely defined as $d_{\text{GC}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle)$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the dot product on \mathbb{R}^d . Since \mathbb{S}^{d-1} can be embedded into \mathbb{R}^d , we write (A.1) as

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\mathbf{x}^\top \mathbf{y}), \quad (\text{A.2})$$

where \top denotes the transpose operator.

Case (a) will be the core of the paper. Yet, the following case will be very useful for the results provided in the manuscript;

(b) Let $\varepsilon \geq 0$. We define the ε -extension of the spherical shell \mathbb{S}^{d-1} by $\mathcal{D}_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \geq \varepsilon\}$. For the remainder of the paper, we denote with C_ε the continuous mappings being positive definite on the product space $\mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon$. Note that $\varepsilon = 0$, yields the whole space $\mathcal{D}_0 = \mathbb{R}^d$.

We adapt the concept of geodesic isotropy to \mathcal{D}_ε by saying that there exists a mapping $R_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R_\varepsilon(\mathbf{x}^\top \mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

Characterization of covariance functions being geodesically isotropic has been available thanks to [Schoenberg \(1942\)](#). Recently, covariance functions became popular after the essays by [Gneiting \(2013\)](#) and [Berg & Porcu \(2017\)](#). Characterization of covariances of the type (A.1) has been proposed by [Pinkus \(2004\)](#) and the reader is referred to [Menegatto \(1994b\)](#) and [Guella & Menegatto \(2016\)](#) for deep results in this direction.

To illustrate our findings, we recall the main results characterizing isotropic positive definite kernels C on spheres. Let $d \geq 1$ be a positive integer. Then, $C : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ is positive definite and such that Equation (A.2) holds if and only if the function $R : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ admits the representation

$$R(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,d} \frac{C_n^{(d-1)/2}(u)}{C_n^{(d-1)/2}(1)}, \quad u \in [-1, +1], \quad (\text{A.3})$$

where C_n^λ is the ultraspherical or Gegenbauer polynomial of degree n , $C_n^\lambda(1) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)}$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_{n,d} = 1$. Additionally, $b_{n,d} \geq 0 \forall n = 0, 1, \dots$.

The coefficients $b_{n,d}$ are determined by:

$$b_{n,d} = \frac{2n+d-1}{\pi 2^{3-d}} \frac{(\Gamma(\frac{d-1}{2}))^2}{\Gamma(d-1)} \int_0^\pi C_n^{(d-1)/2}(\cos(\theta)) (\sin(\theta))^{d-1} R(\cos(\theta)) d\theta. \quad (\text{A.4})$$

More specifically, for $d = 1$, Equation (A.3) simplifies to

$$R(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,1} \cos(n \arccos(u)), \quad u \in [-1, +1], \quad (\text{A.5})$$

where

$$b_{0,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R(\cos(\theta)) d\theta \quad (\text{A.6})$$

$$b_{n,1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) R(\cos(\theta)) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

For $d = 2$, we have the representation

$$R(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,2} P_n(u), \quad u \in [-1, +1], \quad (\text{A.8})$$

where P_n is the Legendre polynomial of order $n \in \mathbb{N}_0$, and

$$b_{n,2} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi C_n^{1/2}(\cos(\theta)) \sin(\theta) R(\cos(\theta)) d\theta.$$

A.1.1. Motivation and Statement of the Problem

Recent applications regarding space or space-time data over the whole planet Earth have shown how global data typically exhibit nonstationarities over space, time, or both. This fact has been argued by several authors, and we refer the reader to [Castruccio & Guinness \(2017\)](#).

For random fields defined over small portions of the sphere and projected on the plane, the problem was noted by [Sampson & Guttorp \(1992\)](#), who suggested a very ingenious deformation approach: finding a pair (R, Φ) , with R being a stationary covariance and Φ a bijection, such that a nonstationary covariance can be transformed into a stationary one. Such a reducibility problem has inspired many mathematicians and solutions have been proposed by [Perrin & Senoussi \(1999\)](#), [Perrin & Senoussi \(2000\)](#) and [Genton & Perrin \(2004\)](#).

The paper proposes the following

Problem 1. *For a given a covariance function C on $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1}$, chase a pair (R, Φ) , with $R : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ and Φ a bijection on the sphere, such that*

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (\text{A.9})$$

Of course, when $\Phi = \mathbf{I}_d$, with \mathbf{I}_d being the identity mapping, then we come back to the geodesically isotropic case as discussed by [Schoenberg \(1938\)](#) and [Gneiting \(2013\)](#) amongst others, and described through Equation (A.1).

A collection of facts make Problem 1 difficult to solve. First, the set of positive definite functions on spheres is very large if no simplifying assumption is made. Another relevant fact is that differential calculus on manifolds, such as spheres, is somewhat intricate. We shall circumvent some of the difficulties by considering the analogue of Problem 1 for the case (b). Solutions found therein will support deeper findings for the case of main interest to this paper.

We also embark a different strategy, by considering ordinary differential equations (ODE throughout) related to flows over spheres across time, and seeking for solutions that are norm preserving.

A.2. Notation and Auxiliary Results

A.2.1. Basics on Differential Calculus on Spheres.

We start with some notations concerning matrix and differential calculus. Let d be a positive integer. For a $d \times d$ matrix Γ we denote its row vectors by $\Gamma_{j,\bullet}$ and column vectors $\Gamma_{\bullet,j}$, $j = 1, \dots, d$.

A vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^\top$ of \mathbb{R}^d is always assumed to be a column vector, whereas the differential (or gradient) $D_{\mathbf{x}}$ of a real valued function $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is assumed to be a row vector and defined by $D_{\mathbf{x}}F = (\partial_{x_1}F, \dots, \partial_{x_d}F)$. In particular, \mathbf{e}_j , $j = 1, \dots, d$ denotes the unit column vectors of a standard basis of \mathbb{R}^d .

Let $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)^\top$. The Jacobian matrix J_Φ of Φ is defined by

$$J_\Phi = [\partial_{x_j}\phi_i]_{i,j}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_d}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\phi_d}{\partial x_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

For sake of simplicity we make large use of the following notations related to diffeomorphisms $\Phi : \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{D}_\varepsilon$ and the corresponding inner product and projectors associated to images:

$$\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{x})||\Phi(\mathbf{y})|},$$

and

$$P_{\Phi(\mathbf{x})} = \frac{\Phi(\mathbf{x})\Phi^\top(\mathbf{x})}{|\Phi(\mathbf{x})||\Phi(\mathbf{x})|}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

When Φ is the identity function \mathbf{I}_d , we simply write $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ and $P_{\mathbf{x}}$ instead of $\beta_{\mathbf{I}_d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ and $P_{\mathbf{I}_d(\mathbf{x})}$, respectively. For a differentiable scalar function $K : \mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ the same row notations will hold for partial differentials:

$$D_{\mathbf{x}}K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\partial_{x_1}K, \dots, \partial_{x_d}K)(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad D_{\mathbf{y}}K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\partial_{y_1}K, \dots, \partial_{y_d}K)(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

so that

$$DK(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (D_{\mathbf{x}}K(\mathbf{x}, \mathbf{y}), D_{\mathbf{y}}K(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d.$$

Differentials are considered as linear forms, *e.g.*, for $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$,

$$DK(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := D_{\mathbf{x}}K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u} + D_{\mathbf{y}}K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{v}.$$

A.2.2. Choosing the Proper Bijection

Let $\Psi : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{S}^{d-1}$ be a bijective and continuously differentiable deformation (*i.e.*, a diffeomorphism) with Jacobian $J_\Psi(\mathbf{x})$ acting on the tangent space at point \mathbf{x} . It is a well known result that Ψ^{-1} is also a diffeomorphism, with a reciprocal Jacobian satisfying $J_{\Psi^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_\Psi(\mathbf{x}))^{-1} = J_\Psi^{-1}(\mathbf{x})$, where $\mathbf{x} = \Psi^{-1}(\mathbf{y})$.

There exist many ways of extending Ψ to simple domains of \mathbb{R}^d containing \mathbb{S}^{d-1} . In particular, we consider potential candidates for bijections Φ by extending the diffeomorphic mapping Ψ over \mathcal{D}_ε , for $\varepsilon > 0$ in the following way: for $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon$, we consider two candidates for bijections, Φ_0 and Φ_1 , defined as

$$\begin{aligned}\Phi_0(\mathbf{x}) &= \Psi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right), \\ \Phi_1(\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}|\Psi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right).\end{aligned}$$

Clearly, Φ_0 is well defined, but it is no longer bijective, since $\Phi_0(\lambda\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})$ for all $\lambda > \varepsilon$ and $|\mathbf{x}| = 1$. Φ_0 is called positively homogeneous of order 0 and it obeys the classical rules of differential calculus on \mathbb{R}^d . On the other hand, Φ_1 is positively homogeneous of order 1. Further, Φ_1 not only reduces to Ψ on \mathbb{S}^{d-1} , but also leaves all spheres invariant, and it is a diffeomorphism as soon as Ψ is.

The relation between these two potential extensions is made precise in the following. Let $\alpha \geq 0$. Then, a differentiable mapping $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is positively homogeneous of order α if $\Phi(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^\alpha\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

Lemma A.2.1. *Let $\alpha \geq 0$, and let $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ be differentiable and positively homogeneous of order α . Then, for $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon$,*

- 1.- $|\Phi_\alpha(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)| = 1$ if and only if $J_{\Phi_\alpha}^\top(\mathbf{x})\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^{2(1-\alpha)}$;
- 2.- In particular, $J_{\Phi_0}^\top(\mathbf{x})\Phi_0(\mathbf{x}) = 0$ and $J_{\Phi_1}^\top(\mathbf{x})\Phi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$;
- 3.- Moreover, if $\Phi_0 \equiv \Phi_1$ on \mathbb{S}^{d-1} , then for $\mathbf{x} \neq 0$

$$J_{\Phi_1}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|J_{\Phi_0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{|\mathbf{x}|}\Phi_0(\mathbf{x})\mathbf{x}^\top \quad \text{and} \quad J_{\Phi_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\left(J_{\Phi_1}(\mathbf{x}) + \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\Phi_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^\top\right).$$

Before providing a proof, some comments are in order. Lemma A.2.1 explains why caution is needed when differential calculus concerns manifolds, such as \mathbb{S}^{d-1} , and space transformations, since even for two transformations Φ_0 and Φ_1 that coincide on \mathbb{S}^{d-1} , their Jacobians not only differ, but for example $J_{\Phi_0}(\mathbf{x})$ is always singular on \mathbb{S}^{d-1} whereas

$J_{\Phi_1}(\mathbf{x})$ is not, provided the restriction over \mathbb{S}^{d-1} is a diffeomorphism. For this reason, and for the sequel, when referring to diffeomorphism extension we always mean Φ_1 and we use the abuse of notation Φ for Φ_1 whenever no confusion can arise. Also, for the remainder of the paper, we write ϕ_i , $i = 1, \dots, d$, for the components of $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_d)^\top$.

A formal proof of Lemma A.2.1 follows.

Proof. Let $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon$. Let Φ be a positively homogeneous function of order α . Thus, we have

$$|\Phi(\mathbf{x})| = |\Phi\left(|\mathbf{x}| \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)| = |\mathbf{x}|^\alpha |\Phi\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)|.$$

To prove Assertion 1., we call $\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \phi_i^2(\mathbf{x}) - (\sum_{i=1}^d x_i^2)^\alpha$ and we note that $\partial_{x_j} \rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d (2\partial_{x_j} \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x})) - 2\alpha x_j (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{\alpha-1}$. This in turn implies that, if $\Phi(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|) = 1$, then $|\Phi(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|^\alpha$. Thus, $\rho(\mathbf{x}) = 0$. Consequently, $\partial_{x_j} \rho(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, d$, and $J_\Phi^\top(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The sufficient part of the assertion is proved. To prove the necessary part, let $r \geq 0$ and define, for $\mathbf{u} = (r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$, the usual spherical coordinates $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, so that $|\mathbf{x}(\mathbf{u})| = r$; we have $x_1(\mathbf{u}) = r \cos(\theta_1), \dots, x_{d-1}(\mathbf{u}) = r \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \cdots \sin(\theta_{d-1})$. Then, consider the function $\tilde{\rho}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^d \phi_i^2(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$. The partial derivatives with respect to θ_j , $j = 1, \dots, d-1$, yield

$\partial_{\theta_j} \tilde{\rho}(\mathbf{u}) = 2 \sum_{l=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \partial_{x_l} \phi_i(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \phi_i(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \right) \partial_{\theta_j} x_l(\mathbf{u})$, which can be rewritten as

$$\sum_{i=1}^d \partial_{x_l} \phi_i(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \phi_i(\mathbf{x}(\mathbf{u})) = \alpha x_l(\mathbf{u}) r^{2(\alpha-1)},$$

since $\partial_{\theta_j} \tilde{\rho}(\mathbf{u}) = \sum_{l=1}^d 2\partial_{\theta_j} x_l(\mathbf{u}) \alpha x_l(\mathbf{u}) r^{2(\alpha-1)}$. Thus, we have that

$$\partial_{\theta_j} \left(\sum_{l=1}^d x_l^2(\mathbf{u}) \right) \alpha r^{2(\alpha-1)} = \partial_{\theta_j} (r^2) \alpha r^{2(\alpha-1)} = 0,$$

because r and θ_j are independent variables. Consequently, $\tilde{\rho}$ is independent of each θ_j . Thus, we can use to abuse of notation $\tilde{\rho}(\mathbf{u}) = \tilde{\rho}(r)$. Next, a similar calculus shows that $\partial_r \tilde{\rho}(\mathbf{u}) = \partial_r (r^2) \alpha r^{2(\alpha-1)} = \partial_r (r^{2\alpha})$ and this proves that $|\Phi(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|^\alpha$.

Assertion 2. can be easily proved on the basis of previous arguments.

As for Assertion 3., it is equivalent to prove that $\Phi_1(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| \Phi_0(\mathbf{x})$. By noticing that $D_{\mathbf{x}}(|\mathbf{x}|) = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, we get

$$\partial_{x_j} \phi_{1,i}(\mathbf{x}) = \frac{x_j}{|\mathbf{x}|} \phi_{0,i}(\mathbf{x}) + |\mathbf{x}| \partial_{x_j} \phi_{0,i}(\mathbf{x}).$$

The proof is complete.

Remark A.2.2. By the Euler property for positively homogeneous functions of order α , we have that $J_{\Phi_\alpha}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \alpha\Phi_\alpha(\mathbf{x})$. At the same time, norms are not always preserved when $\alpha = 1$.

A.2.3. Orthogonal and unitary matrices

Linear space deformations leaving spheres invariant are called orthogonal transformations. These also leave inner product invariant. A full characterization of orthogonal transformations can be only dealt within complex spaces. For that purpose, we recall that the adjoint of a complex matrix A is the conjugate transpose $A^* = \overline{A}^\top$.

A real-valued matrix O is orthogonal if $O^\top = O^{-1}$. A complex (or real) valued matrix A is unitary if $A^* = A^{-1}$. Apparently, any real-valued orthogonal matrix is unitary. Thus, the concept of real orthogonal matrices extends naturally to complex ones via the fundamental property that a unitary matrix A satisfies $(A\mathbf{x})^*A\mathbf{y} = \mathbf{x}^*A^*A\mathbf{y} = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$ for any $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^d$. The most known orthogonal matrices are rotation matrices. However, other types of orthogonal matrices exist. One example is provided below.

Example 1. Let $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$. A $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$ -reflection of \mathbb{R}^d through the hyperplane $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}} = \{\mathbf{x} : \beta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}) = 0\}$ being orthogonal to $\boldsymbol{\alpha}$, is a linear transformation of the type $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, that satisfies $A\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$ and that leaves invariant $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$, that is $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ if $\mathbf{x} \in \Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$.

An implication of the above is stated formally.

Corollary A.2.3. Let $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$. A $\Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$ -reflection is uniquely determined by the orthogonal matrix $A = (\mathbf{I}_d - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top)$.

Proof. Let $|\mathbf{x}| = 1$, the decomposition of \mathbf{x} into $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha + \gamma(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}$, with $\mathbf{x}_\alpha \in \Pi_{\boldsymbol{\alpha}}$ and $\boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} = \gamma(\mathbf{x})$, yields $A\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha - \gamma(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}$. Further,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{x}_\alpha - \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}_\alpha + \gamma(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} - 2\gamma(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} \\ &= \mathbf{x} - 2\boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x} - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{x} \\ &= (\mathbf{I}_d - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top)\mathbf{x}, \end{aligned}$$

implying that $A = \mathbf{I}_d - 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^\top$. Thus, $A^\top = A$ and $A^\top A = \mathbf{I}_d$. Therefore, A is orthogonal.

To fully characterize orthogonal matrices, we need to extend the notion of antisymmetry to complex spaces. A matrix B is called antihermitian if $B^* = -B$. Rephrased, an

antihermitian matrix B has the form:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1d} \\ -\bar{b}_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & b_{dd} \\ -\bar{b}_{1d} & \dots & -\bar{b}_{dd} & 0 \end{bmatrix}.$$

We also need to define the exponential matrix A of B , through the (actually finite) series:

$$A = e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

A useful fact is that B antisymmetric implies e^B orthogonal. This is due to the fact that $B^\top = -B$, so that $A^{-1} = e^{-B} = e^{B^\top} = (e^B)^\top = A$. However, the converse proposition is only true in the complex context. The following result will turn to be useful in the sequel.

Lemma A.2.4. *A complex valued matrix A is unitary if and only if there exists an antihermitian matrix B such that $A = e^B$.*

Proof. *The proof of the if part is analogous to the real case. Let B be antihermitian. If $A = e^B$, then $A^* = e^{B^*} = e^{-B} = A^{-1}$. To show the necessary part of the assertion, notice that any unitary matrix A is invertible and diagonalizable, so that $A = U\Lambda U^*$, with U unitary and $\Lambda = \text{diag}(\lambda_j)$ with $\lambda_j \bar{\lambda}_j = 1$, $j = 1, \dots, d$ (Gantmacher, 1960). The last equalities imply that Λ is also unitary. Invertibility implies that there exists possibly many matrices B such $A = e^B$. Thus, we only need prove that we can always choose a matrix B that is antihermitian. Among solutions B of equation $A = e^B$, we can choose $B = U \log(\Lambda) U^*$, where $\log(\Lambda) = \text{diag}(\log(\lambda_j))$. Now, we notice that $(\log(\Lambda))^* = -\log(\Lambda)$ because $\lambda_j \bar{\lambda}_j = 1$, for all j . Consequently, $B^* = -U \log(\Lambda) U^* = -B$.*

Lemma A.2.4 describes how the set of $d \times d$ unitary matrices is in bijection with $\mathbb{C}^{d(d-1)/2}$. Thus, $d(d-1)/2$ parameters are needed to uniquely define a unitary matrix. Actually, the same dimension property holds for a (real) orthogonal matrix A . If $A = e^B$ is real with B complex and antihermitian, the complex components b_{ij} of B are necessarily real or complex conjugates (Gantmacher, 1960).

A.3. Restatement of Problem 1 within the Space \mathcal{D}_ε

A.3.1. Extensions from C to C_ε

Let $C : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$ be positive definite. The function C can be used as building block to define positive definite functions over $\mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon$. One possibility is to define

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon,$$

which is clearly positive definite and coincides with C on \mathbb{S}^{d-1} . Actually, such an extension has a straightforward interpretation in terms of any underlying random field $Z = \{Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ with covariance function C . Define

$$Z_\varepsilon(\mathbf{x}) = Z\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

Then, direct inspections shows that Z_ε has covariance function C_ε . A wealth of other examples can be proposed. For instance, take a positive definite function $C_2(\cdot, \cdot)$ on \mathbb{R}_+ satisfying $C_2(r, r) = 1$, and define the multiplicative kernel $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right) C_2(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$. Such a model can be physically related to another extension of the underlying random field Z on \mathbb{S}^{d-1} by considering the product field

$$Z_\varepsilon(\mathbf{x}) := Z\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) Z_2(|\mathbf{x}|), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon,$$

where Z and Z_2 are Gaussian and mutually independent with Z_2 defined over \mathbb{R}_+ with covariance function C_2 . Actually, the first natural extension (*i.e.* constant on radii) is sufficient for our purpose. A technical lemma will support our findings.

Lemma A.3.1. *Let F be a differentiable scalar function on \mathcal{D}_ε . Then,*

$$F(\mathbf{x}) = F\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{if and only if} \quad D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0.$$

Proof. (\Rightarrow) *We first note that*

$$\partial_{x_j} \left(\frac{x_l}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \left(\delta_{jl} - \frac{x_j x_l}{|\mathbf{x}|^2}\right),$$

with δ_{jl} denoting the Kronecker delta. Thus, $D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}) = (1/|\mathbf{x}|)D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)(\mathbf{I}_d - P_{\mathbf{x}})$.

We thus get

$$(\mathbf{I}_d - P_{\mathbf{x}})\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

(\Leftarrow) *Consider the spherical coordinate system $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u}(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ and define the function $\tilde{F}(\mathbf{u}) = F(\mathbf{x}(\mathbf{u}))$. Differentiation with respect to the radius r gives $\partial_r x_l(\mathbf{u}) =$*

x_l/r . Thus, we get

$$\partial_r \tilde{F} = \sum_l F(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \partial_r x_l(\mathbf{u}) = \frac{1}{r} D_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \mathbf{x}(\mathbf{u}) = 0.$$

The last equality implies that F does not depend on the radius r .

Next result is a direct consequence of Lemma A.3.1. We do not provide a formal proof for obvious reasons.

Proposition A.3.2. *Let $C : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ be differentiable. Then,*

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon$$

if and only if

$$D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x} = 0 \quad \text{and} \quad D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y} = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

We are now in a position to properly tackle the initial problem in Equation (A.9) by working on \mathcal{D}_ε .

A.3.2. Restatement of the Problem within \mathcal{D}_ε

Problem 2 (Rephrasing of Problem 1). *Let $C_\varepsilon : \mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ be a differentiable covariance function that satisfies*

$$D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x} = 0 \quad \text{and} \quad D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y} = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

Chase a diffeomorphism Φ_ε on \mathcal{D}_ε satisfying

$$J_{\Phi_\varepsilon}(\mathbf{x}) \mathbf{x} = \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad J_{\Phi_\varepsilon}^\top(\mathbf{x}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon,$$

and a differentiable function R on $[-1, 1]$ such that

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon. \quad (\text{A.10})$$

Remark A.3.3. *Clearly a solution (R, Φ) to C in \mathbb{S}^{d-1} (Problem 1) exists if and only if a solution (R, Φ_ε) to C_ε exists in \mathcal{D}_ε (Problem 2) under assumptions on C_ε and Φ_ε . This is because, on the one hand Equation (A.10) reduces to Equation (A.9) when \mathbf{x}, \mathbf{y} are in \mathbb{S}^{d-1} and on the other hand we have*

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right) = R\left(\Phi^\top\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) \Phi\left(\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}\right)\right) = R\left(\frac{\Phi_\varepsilon^\top(\mathbf{x}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}\right) = R\left(\frac{\Phi_\varepsilon^\top(\mathbf{x}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{y})}{|\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})| |\Phi_\varepsilon(\mathbf{y})|}\right),$$

for any $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon$.

The following result will be largely used in the sequel.

Proposition A.3.4. *Let $\Phi : \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{D}_\varepsilon$ be differentiable. Then,*

$$D_{\mathbf{x}}\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\Phi(\mathbf{x})|} \frac{\Phi^\top(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|} \left(\mathbf{I}_d - P_{\Phi(\mathbf{x})} \right) J_\Phi(\mathbf{x}).$$

In particular, for Φ being the identity mapping, we have

$$D_{\mathbf{x}}\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\mathbf{y}^\top}{|\mathbf{y}|} \left(\mathbf{I}_d - P_{\mathbf{x}} \right). \quad (\text{A.11})$$

Proof. *Apply the chain rule for differentials to obtain*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{x}), \mathbf{v} = \Phi(\mathbf{y})) \mapsto (\mathbf{w} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|, \mathbf{z} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|) \mapsto \mathbf{w}^\top \mathbf{z}.$$

Uniqueness of the Representation (R, Φ)

We now turn to the problem of uniqueness in the representation (A.10). Provided such a pair (R, Φ) exists, is it unique? Apparently, the answer is not. In particular, if the pair (R, Φ) exists, then one can find infinitely many. To illustrate properly the concept, let us assume that (R, Φ) is a solution to (A.10). Then, any orthogonal matrix A will provide a new distinct solution $(R, A\Phi)$, since orthogonal matrices preserve norms and inner products. Consequently, if some uniqueness principle holds, it should be defined up to orthogonal transformations. Actually, this will be the case under mild regularity conditions. Next result states formally the type of uniqueness that can be achieved within Problem 2.

Theorem A.3.5. *Let $i = 1, 2$. Let Φ_i be positively homogeneous diffeomorphisms of order 1 on \mathcal{D}_ε preserving norms, and let R_i be continuously differentiable real-valued functions on \mathbb{R} that are not piecewise constant. If*

$$R_1(\beta_{\Phi_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = R_2(\beta_{\Phi_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon, \quad (\text{A.12})$$

then $R_1 \equiv R_2$ and $\Phi_2 = A\Phi_1$, for some orthogonal matrix A .

Proof. *Let $\Psi := \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$ and set $\mathbf{u} = \Phi_1(\mathbf{x})$ and $\mathbf{v} = \Phi_1(\mathbf{y})$. Then, Equation (A.12) is equivalent to:*

$$R_1(\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = R_2(\beta_\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

Differentiation with respect to \mathbf{u} then yields

$$R_1'(\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \mathbf{v}^\top (\mathbf{I}_d - P_{\mathbf{u}}) = R_2'(\beta_\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \Psi^\top(\mathbf{v}) (\mathbf{I}_d - P_{\Psi(\mathbf{u})}) J_\Psi(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

On the one hand, under the assumption that R_1 is not piecewise constant, for \mathbf{u} and \mathbf{v} arbitrary, we see that $R'_1(\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = 0$ if and only if $R'_2(\beta_\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = 0$. Consequently, for almost all \mathbf{u}, \mathbf{v} , we have

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{R'_1(\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}))}{R'_2(\beta_\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v}))} \neq 0.$$

On the other hand, we notice that Ψ is a positively homogeneous diffeomorphism of order 1 preserving norms, and that $J_\Psi(\mathbf{u})$ is invertible for any \mathbf{u} . Next, we notice that

$$(\mathbf{I}_d - P_{\Psi(\mathbf{u})})(\mathbf{I}_d - P_{\Psi(\mathbf{u})}) = (\mathbf{I}_d - P_{\Psi(\mathbf{u})}),$$

so that

$$\Psi^\top(\mathbf{v})(\mathbf{I}_d - P_{\Psi(\mathbf{u})}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v}^\top(\mathbf{I}_d - P_{\mathbf{u}})(J_\Psi(\mathbf{u}))^{-1}(\mathbf{I}_d - P_{\Psi(\mathbf{u})}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}_\varepsilon. \quad (\text{A.13})$$

Since $\Psi(\mathbf{u})$ is arbitrary, Equation (A.13) implies that a projection of $\Psi(\mathbf{v})$ onto any hyperplane of \mathbb{R}^d is a linear combination of \mathbf{v} . Thus, there exists a matrix Γ and a scalar function $\tilde{\alpha}$ such that

$$\Psi(\mathbf{v}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{v})\Gamma\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

By our assumptions, we have $\mathbf{v} = J_\Psi^\top(\mathbf{v})\Psi(\mathbf{v})$. Thus, $\mathbf{v} = J_\Psi^\top(\mathbf{v})\tilde{\alpha}(\mathbf{v})\Gamma\mathbf{v}$ for all \mathbf{v} . This is equivalent to $\tilde{\alpha}(\mathbf{v})J_\Psi^\top(\mathbf{v}) = \Gamma^{-1}$. On the other hand, the homogeneity of Ψ implies that

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{v})\Gamma\mathbf{v} = \Psi(\mathbf{v}) = J_\Psi(\mathbf{v})\mathbf{v} = \tilde{\alpha}^{-1}(\mathbf{v})(\Gamma^{-1})^\top\mathbf{v}, \quad (\text{A.14})$$

that is, $\tilde{\alpha}^2(\mathbf{v})\Gamma = (\Gamma^{-1})^\top$. Since Γ is constant, necessarily $\tilde{\alpha}^2(\mathbf{v})$ is constant and so is $\tilde{\alpha}(\mathbf{v}) \equiv \alpha_0$ by continuity. Now, by taking $A = \alpha_0\Gamma$, Equation (A.14) reduces to

$$\alpha_0\Gamma = ((\alpha_0\Gamma)^{-1})^\top,$$

i.e., $A = (A^{-1})^\top$, leading to the identity

$$\Psi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

with A being orthogonal.

Consequently, $\Phi_1^{-1}(\mathbf{v}) = \Phi_2^{-1}(A\mathbf{v})$, or equivalently $\Phi_2(\mathbf{y}) = A\Phi_1(\mathbf{y})$ for all $\mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon$. Uniqueness of R follows by noticing that $\beta_{\Phi_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \beta_{\Phi_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ in Equation (A.12).

A.3.3. Recovering R and Φ from C or C_ε

After having proved the uniqueness of the pair (R, Φ) for a reducible kernel C (up to orthogonal transformations), we now prove that, under mild identifiability hypotheses, we can recover the pair (R, Φ) from the reducible covariance function itself.

Theorem A.3.6. *Let R be a continuously differentiable and almost everywhere not piecewise constant function on $[-1, +1]$. Let Φ be a positively homogeneous of order 1 and norm preserving diffeomorphism on \mathcal{D}_ε such that*

$$C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

Then, for any invertible matrix Γ satisfying $\Gamma_{\bullet,1} = \Gamma_{1,\bullet} = \mathbf{e}_1$, the following is true:

1. there exists a unique solution Φ satisfying $\Phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ and $J_\Phi(\mathbf{e}_1) = \Gamma^{-1}$, determined by:

$$\Phi_1(\mathbf{y}) = |\mathbf{y}| \cos(\alpha(\mathbf{y})), \quad (\text{A.15})$$

$$\Phi_j(\mathbf{y}) = |\mathbf{y}| \sin(\alpha(\mathbf{y})) \frac{D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma_{\bullet,j}}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|}, \quad j = 2, \dots, d, \quad (\text{A.16})$$

where

$$\alpha(\mathbf{y}) = \left(\int_0^1 \frac{D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t)) \Gamma|} dt \right) (\mathbf{y} - \mathbf{e}_1), \quad (\text{A.17})$$

with

$$\gamma_{\mathbf{y}}(t) = (1-t)\mathbf{e}_1 + t\mathbf{y}, \quad t \in [0, 1]. \quad (\text{A.18})$$

2. R is also uniquely defined by $R(u) = C(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})$ for any $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$ with first coordinate $\Phi_1(\mathbf{y}) = u$.

Proof. To favor neater exposition, we have divided the proof into four steps.

Step a.- differentiation with respect to \mathbf{x} gives

$$D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R'(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \frac{1}{|\Phi(\mathbf{x})|} \frac{\Phi^\top(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|} (\mathbf{I}_d - P_{\Phi(\mathbf{x})}) J_\Phi(\mathbf{x}).$$

By symmetry, we get $D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, that is

$$D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R'(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \frac{1}{|\Phi(\mathbf{y})|} \frac{\Phi^\top(\mathbf{x})}{|\Phi(\mathbf{x})|} (\mathbf{I}_d - P_{\Phi(\mathbf{y})}) J_\Phi(\mathbf{y}).$$

As a consequence of Lemma A.3.1, we notice that $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ depends only on $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ and $\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$, since $D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{x} = D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y} = 0$. This is because Φ is positively homogeneous of order 1.

Since Φ is defined up to orthogonal transformations, we are allowed to set $\Phi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$. Moreover, the assumptions on Φ imply that $\mathbf{e}_1 = \Gamma^\top \mathbf{e}_1 = \Gamma^{-1} \mathbf{e}_1$ and therefore $\Gamma_{1,\bullet}^\top = \Gamma_{\bullet,1} = \mathbf{e}_1$. The same relation holds also for the first row and column of Γ^{-1} . Moreover, the projector $(\mathbf{I}_d - P_{\Phi(\mathbf{e}_1)})$ takes a simple form. More precisely,

$$\mathbf{I}_d - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^\top = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}_{d-1}^\top \\ \mathbf{0}_{d-1} & \mathbf{I}_{d-1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{d-1}^\top \\ \mathbf{0}_{d-1} & \Gamma_{d-1} \end{bmatrix}.$$

We thus obtain $\beta_\Phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = \frac{\Phi_1(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|}$ and therefore

$$D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma = R' \left(\frac{\Phi_1(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|} \right) \frac{1}{|\Phi(\mathbf{y})|} (0, \Phi_2(\mathbf{y}), \dots, \Phi_d(\mathbf{y})).$$

For simplicity, put $\theta_j(\mathbf{y}) = \frac{\Phi_j(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|}$, $j = 1, \dots, d$. Since R is almost everywhere not piecewise constant and continuously differentiable, we have that R' is continuous and does not vanish almost everywhere, so that the following relation holds (almost everywhere):

$$\theta_j(\mathbf{y}) = \frac{D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma_{\bullet,j}}{R'(\theta_1(\mathbf{y}))}, \quad j = 2, \dots, d.$$

Since $\sum_{j=1}^d \theta_j^2(\mathbf{y}) = 1$, we get

$$\left(R'(\theta_1(\mathbf{y})) \right)^2 \left(1 - \theta_1^2(\mathbf{y}) \right) = |D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|^2.$$

Thus, we have

$$R'(\theta_1(\mathbf{y})) = \pm \frac{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|}{\sqrt{1 - \theta_1^2(\mathbf{y})}}. \quad (\text{A.19})$$

b.- Identification of Φ . By continuity, one can remove the \pm sign in Equation (A.19). Thus, we get the following relation

$$\Phi_j(\mathbf{y}) = \frac{D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma_{\bullet,j}}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|} \sqrt{|\Phi(\mathbf{y})|^2 - \Phi_1^2(\mathbf{y})}. \quad (\text{A.20})$$

Since $|\Phi(\mathbf{y})| = |\mathbf{y}|^2$, if Φ_1 is known, the other components Φ_j are thus determined by the differentials of C_ε .

c.- Identification of Φ_1 .

Using Equation (A.19), we obtain

$$D_{\mathbf{y}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = R'(\theta_1(\mathbf{y})) D_{\mathbf{y}} \theta_1(\mathbf{y}) = \frac{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|}{\sqrt{1 - \theta_1^2(\mathbf{y})}} D_{\mathbf{y}} \theta_1(\mathbf{y}).$$

Now, for $H(\mathbf{y}) = \arccos(\theta_1(\mathbf{y}))$, we have

$$D_{\mathbf{y}} H(\mathbf{y}) = -\frac{D_{\mathbf{y}} \theta_1(\mathbf{y})}{\sqrt{1 - \theta_1^2(\mathbf{y})}}.$$

This implies that

$$D_{\mathbf{y}}H(\mathbf{y}) = -\frac{D_{\mathbf{y}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})}{|D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma|}.$$

We are now in position to determine H from C_{ε} by the usual scheme on differentials: Consider the segment $[\mathbf{e}_1, \mathbf{y}]$ in $\mathcal{D}_{\varepsilon}$ and the scalar function $h(t) = H(\gamma_{\mathbf{y}}(t))$, where $\gamma_{\mathbf{y}}(\cdot)$ has been defined in Equation (A.18). We have that h satisfies

$$h'(t) = D_{\mathbf{y}}H(\gamma_{\mathbf{y}}(t))\gamma'_{\mathbf{y}}(t) = D_{\mathbf{y}}H(\gamma_{\mathbf{y}}(t))(\mathbf{y} - \mathbf{e}_1) = -\frac{D_{\mathbf{y}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))}{|D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))\Gamma|}(\mathbf{y} - \mathbf{e}_1).$$

Therefore, direct inspection shows that

$$H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{e}_1) = h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t)dt = -\left(\int_0^1 \frac{D_{\mathbf{y}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))}{|D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))\Gamma|}dt\right)(\mathbf{y} - \mathbf{e}_1).$$

Since $\theta_1(\mathbf{e}_1) = 1$, $H(\mathbf{e}_1) = 0$ we get the solution

$$\theta_1(\mathbf{y}) = \cos\left(\left(\int_0^1 \frac{D_{\mathbf{y}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))}{|D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))\Gamma|}dt\right)(\mathbf{y} - \mathbf{e}_1)\right) = \cos(\alpha(\mathbf{y})).$$

Using the fact that $|\Phi(\mathbf{y})| = |\mathbf{y}|$, we have

$$\Phi_1(\mathbf{y}) = |\mathbf{y}| \cos(\alpha(\mathbf{y})). \quad (\text{A.21})$$

d.- Identification of R .

The correlation function R is easily identified by setting $R(u) = C(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})$ for any $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$ with new first coordinate $\Phi_1(\mathbf{y}) = u$. The proof is completed.

A.3.4. Examples and Comments

Remark A.3.7. If R is known and R' is almost everywhere non vanishing, R is locally monotonic. Thus, from the relation $C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = R(\theta_1(\mathbf{y}))$ where $\theta_1(\mathbf{y}) = \Phi_1(\mathbf{y})/|\Phi(\mathbf{y})|$, one can locally identify θ_1 i.e., $\theta_1(\mathbf{y}) = R^{-1}(C(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}))$. Starting the identification from $R(\Phi_1(\mathbf{e}_1)) = R(1) = 1$, by a continuity argument one can extend local identification to a global identification of Φ_1 on \mathbb{S}^{d-1} and thus to $\mathcal{D}_{\varepsilon}$. So the knowledge of R can spare the calculus of the integral (A.21).

Remark A.3.8. Equation (A.17) can be simplified by using positive homogeneity property of C_{ε} , and by substituting $(\gamma_{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{e}_1)/t$ with $\mathbf{y} - \mathbf{e}_1$ to get:

$$\alpha(\mathbf{y}) = -\int_0^1 \frac{\partial_{\mathbf{y}_1}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))}{|D_{\mathbf{x}}C_{\varepsilon}(\mathbf{e}_1, \gamma_{\mathbf{y}}(t))\Gamma|} \frac{dt}{t}. \quad (\text{A.22})$$

Remark A.3.9. Our assumption that R' is continuous and non vanishing almost everywhere is satisfied for many isotropic correlation functions (refer to Equation (A.3)). Here are a conterexample and many examples :

1. $R(u) \equiv 1$ i.e., $R'(u) \equiv 0$ does not satisfy our assumption. Of course, any deformation Φ of \mathbb{S}^{d-1} is a solution for $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \equiv 1$ on \mathbb{S}^{d-1} .
2. $R(u) = u$ gives $R'(u) \equiv 1$ and $R^{-1}(u) = u$.
3. $R(u) = b_{2,d} \frac{C_2^{(d-1)/2}(u)}{C_2^{(d-1)/2}(1)} = \frac{(d+1)u^2-1}{d}$ (see Equation (A.3)) yields $R'(u) = \frac{2(d+1)}{d}u$ having a zero only for $u = 0$. By continuity, we can determine which of the branch of $R^{-1}(u) = \pm \sqrt{\frac{du+1}{d+1}}$ is adapted for inversion.
4. In any case, any truncation of order N in representation (A.3): $R(u) = \sum_{n=0}^N b_{n,d} \frac{C_n^{(d-1)/2}(u)}{C_n^{(d-1)/2}(1)}$ satisfies our assumption. This is because R is a polynomial of degree N and thus R' has at most $N - 1$ distinct zeroes by the fundamental theorem of algebra. So R is locally invertible.

Example 2. in \mathbb{S}^{d-1} . From $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a(\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^2 + b$, where $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}$, $a = \frac{d+1}{d}$ and $b = -\frac{1}{d}$. We recover $R(u) = \frac{(d+1)u^2-1}{d}$ and $\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.

Let $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\Gamma = \mathbf{I}_d$ and Equation (A.18),

$D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})D_{\mathbf{x}}(\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 2a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{\mathbf{y}^\top}{|\mathbf{y}|}\left(\mathbf{I}_d - \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^\top}{|\mathbf{x}|}\right)$. Similarly,

$$D_{\mathbf{y}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2a\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})\frac{\mathbf{x}^\top}{|\mathbf{x}|}\frac{1}{|\mathbf{y}|}\left(\mathbf{I}_d - \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^\top}{|\mathbf{y}|}\right),$$

so that

$$D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = 2a\frac{y_1}{|\mathbf{y}|}\frac{\mathbf{y}^\top}{|\mathbf{y}|}\left(\mathbf{I}_d - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\top\right) = 2a\frac{y_1}{|\mathbf{y}|}\left(\frac{\mathbf{y}^\top}{|\mathbf{y}|} - \frac{y_1}{|\mathbf{y}|}\mathbf{e}_1^\top\right), \quad (\text{A.23})$$

and

$$D_{\mathbf{y}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2a\frac{y_1}{|\mathbf{y}|}\frac{1}{|\mathbf{y}|}\left(\mathbf{e}_1^\top - \frac{y_1}{|\mathbf{y}|}\frac{\mathbf{y}^\top}{|\mathbf{y}|}\right). \quad (\text{A.24})$$

Further,

$$\begin{aligned} |D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma| &= 2a\frac{|y_1|}{|\mathbf{y}|^2}|(\mathbf{y}^\top - y_1\mathbf{e}_1^\top)\mathbf{I}_d| \\ &= 2a\frac{|y_1|}{|\mathbf{y}|^2}\sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

and

$$\partial_{y_1} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) = 2a \frac{y_1}{|\mathbf{y}|^2} \frac{1}{|\mathbf{y}|^2} (|\mathbf{y}|^2 - y_1^2). \quad (\text{A.26})$$

So, using Equation (A.25) and (A.26), we obtain

$$\frac{\partial_{y_1} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|} = \pm \frac{\sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}}{|\mathbf{y}|^2}.$$

We know that, $\gamma_{\mathbf{y}}^\top(t) = (1 - t(1 - y_1), ty_2, \dots, ty_d)$ and $\gamma_{y_1}(t) = 1 - t(1 - y_1)$, so if $|\mathbf{y}| = 1$, by replacing in Equation (A.22), we obtain

$$\alpha(\mathbf{y}) = \pm \int_0^1 \frac{\sqrt{|\gamma_{\mathbf{y}}(t)|^2 - \gamma_{y_1}^2(t)}}{|\gamma_{\mathbf{y}}(t)|^2} \frac{dt}{t},$$

with $|\gamma_{\mathbf{y}}(t)|^2 = (1 - t(1 - y_1))^2 + t^2(|\mathbf{y}|^2 - y_1^2) = \gamma_{y_1}^2(t) + t^2(|\mathbf{y}|^2 - y_1^2)$. Thus,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{y}) &= \pm \int_0^1 \frac{t \sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}}{(1 - t(1 - y_1))^2 + t^2(|\mathbf{y}|^2 - y_1^2)} \frac{dt}{t} \\ &= \pm \int_0^1 \frac{A}{(1 - tB)^2 + t^2 A^2} dt, \end{aligned}$$

where $A = \sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}$ and $B = 1 - y_1$, we make the change of variable $v = \frac{A}{1 - tB}$ and $v' > 0$ with $t \in [0, 1]$. Therefore,

$$\alpha(\mathbf{y}) = \pm \int_0^{A/(1-B)} \frac{dv}{1 + v^2} = \arctan \left(\frac{A}{1 - B} \right).$$

The identity $\cos(\arctan(\frac{A}{1-B})) = \frac{1-B}{\sqrt{(1-B)^2 + A^2}} = \frac{y_1}{|\mathbf{y}|}$ implies, in concert with Equation (A.15), that

$$\phi_1(\mathbf{y}) = y_1.$$

On the other hand, Equation (A.23) and (A.25) imply

$$\frac{\partial_{x_j} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})}{|D_{\mathbf{x}} C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \Gamma|} = \pm \frac{2a \frac{y_1}{|\mathbf{y}|} \frac{y_j}{|\mathbf{y}|} (1 - 0)}{2a \frac{|y_1|}{|\mathbf{y}|^2} \sqrt{|\mathbf{y}|^2 - y_1^2}} = \pm \frac{y_j}{\sqrt{1 - y_1^2}}.$$

The identity $\sin\left(\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{1-B}}\right)\right) = A = \sqrt{1 - y_1^2}$, using Equation (A.16), implies

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \sqrt{1 - y_1^2} \frac{y_j}{\sqrt{1 - y_1^2}} = y_j.$$

Therefore $R(u) = ay_1^2 + b = \frac{d+1}{d}u^2 - \frac{1}{d}$ and $\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.

A.4. Sufficient Conditions for Reducibility

Given a covariance function C on \mathbb{S}^{d-1} , one may ask for sufficient conditions on C to be reducible to isotropy. To use classical differential calculus on \mathbb{R}^d we extend C into C_ε acting on domain \mathcal{D}_ε .

If C is regular and smooth, sufficient conditions should be expressed in terms of C and/or its differentials. Starting with a positive definite functions C on \mathbb{S}^{d-1} , we seek for a set of sufficient conditions for C to be reducible to isotropy, via a space deformation.

Theorem A.4.1. *Let $C_\varepsilon : \mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$, C_ε be a continuously differentiable function such that the following assumptions hold:*

$$H1- D_{\mathbf{y}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

$$H2- D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x} \equiv 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

$$H3- D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ is non vanishing and continuous, for almost all } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{D}_\varepsilon.$$

$$H4- \text{ there exists a continuous function } \eta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ such that,}$$

$$|\mathbf{x}||\mathbf{y}| D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \Phi^\top(\mathbf{y}) (\mathbf{I}_d - P_{\Phi(\mathbf{x})}) J_\Phi(\mathbf{x}), \quad (\text{A.27})$$

where Φ is defined through the C_ε diferentiable by Equation (A.15)-(A.18).

Then, $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + k$ with $R(t) = \int_0^t \eta(s)ds$ and $k \in \mathbb{R}$ is some constant.

Proof. *Again we divide the proof into four steps to favor a neater exposition.*

1.- *H1 implies that C_ε is symmetric. This is because*

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \int_0^1 D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\gamma_{\mathbf{y}}(t), \mathbf{x})\gamma'_{\mathbf{y}}(t)dt \\ &= \int_0^1 D_{\mathbf{y}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \gamma_{\mathbf{y}}(t))\gamma'_{\mathbf{y}}(t)dt = C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

where $\gamma_{\mathbf{y}}$ is defined at Equation (A.18) and $\gamma'_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y} - \mathbf{e}_1$, $t \in [0, 1]$.

2.- *H2 implies, in concert with Proposition A.3.2, that C_ε is positively homogeneous of order 0 with respect to \mathbf{x} and \mathbf{y} . Thus it is entirely defined by its values on \mathbb{S}^{d-1} .*

3.- *From Equation (A.15)-(A.18), and in virtue of assumption H3, the functions $\alpha(\mathbf{y})$ and $\Phi_j(\mathbf{y})$, $j = 1, \dots, d$ are well defined.*

Next, observe that $\alpha(\cdot)$ is positively homogeneous of order 0. In fact, C_ε is homogeneous of order 0, the differentials $D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon$ and $D_{\mathbf{y}}C_\varepsilon$ are positively homogeneous of order 1. The integral as a ratio of these differentials is then positively homogeneous of order 0, and so is the corresponding integral $\alpha(\cdot)$ in Equation (A.22). This means that Φ is positively homogeneous of order 1.

Observe also that $D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y}) \neq 0$ implies that $D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma \neq 0$ and since $D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma_{\bullet,1} = 0$, we have $|D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma|^2 = \sum_{j \geq 2} (D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma_{\bullet,j})^2$. Consequently, $|\Phi(\mathbf{y})|^2 = |\mathbf{y}|^2 (\cos^2(\alpha(\mathbf{y})) + \sin^2(\alpha(\mathbf{y}))) = |\mathbf{y}|^2$. In other words, the transformation Φ preserves norms. Consequently, Equation (A.27) can be written as follow:

$$D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \frac{1}{|\Phi(\mathbf{x})|} \frac{\Phi^\top(\mathbf{y})}{|\Phi(\mathbf{y})|} (\mathbf{I}_d - P_{\Phi(\mathbf{x})}) J_\Phi(\mathbf{x}).$$

According to Proposition A.3.4, the last equation can be written as

$$D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) D_{\mathbf{x}}\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

4.- By symmetry, we also have $D_{\mathbf{y}}C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) D_{\mathbf{y}}\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. If we set $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, the last equations summarize into

$$D_{\mathbf{w}}C_\varepsilon(\mathbf{w}) = \eta(\beta_\Phi(\mathbf{w})) D_{\mathbf{w}}\beta_\Phi(\mathbf{w}). \quad (\text{A.28})$$

Let $R(t) = \int_0^t \eta(s) ds$ be a primitive of η . Choose a point \mathbf{w}_0 of $\mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon$ (e.g., $\mathbf{w}_0 = \mathbf{e}_1$). Then, for any $\mathbf{w} \in \mathcal{D}_\varepsilon \times \mathcal{D}_\varepsilon$, consider the curve $\gamma_{\mathbf{w}}(t) = (1-t)\mathbf{w}_0 + t\mathbf{w}$, $\gamma'_{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0$, $t \in [0, 1]$.

Next, let us define $c(t) = C_\varepsilon(\gamma_{\mathbf{w}}(t))$ and $p(t) = R(\beta_\Phi(\gamma_{\mathbf{w}}(t)))$. We have

$$c'(t) = D_{\mathbf{w}}C_\varepsilon(\gamma_{\mathbf{w}}(t))\gamma'_{\mathbf{w}}(t) \text{ and } p'(t) = \eta(\beta_\Phi(\gamma_{\mathbf{w}}(t))) D_{\mathbf{w}}\beta_\Phi(\gamma_{\mathbf{w}}(t))\gamma'_{\mathbf{w}}(t).$$

By Equation (A.28), we therefore get

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(\mathbf{w}) - C_\varepsilon(\mathbf{w}_0) &= \int_0^1 c'(s) ds = \int_0^1 \eta(\beta_\Phi(\gamma_{\mathbf{w}}(s))) D_{\mathbf{w}}\beta_\Phi(\gamma_{\mathbf{w}}(s))\gamma'_{\mathbf{w}}(s) ds \\ &= \int_0^1 p'(s) ds = p(1) - p(0) = R(\beta_\Phi(\mathbf{w})) - R(\beta_\Phi(\mathbf{w}_0)), \end{aligned}$$

that is $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = R(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + [C_\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - R(\beta_\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))] = R(\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) + k$.

Remark A.4.2. For C_ε to be a covariance function, the additional assumption that R is positive definite is needed. Similarly for C_ε to be a correlation function, we moreover need that $C_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \equiv 1$.

Remark A.4.3. For Theorem A.4.1, we have not required Φ to be bijective, i.e., $J_\Phi(\mathbf{x})$ almost everywhere invertible. This has a cost, which is the assumption of the existence of a function η in H_4 and not the direct exhibition of one function defined from C_ε .

Remark A.4.4. We did not investigate for a sharper set of assumptions concerning C . For example $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 1$ which is reducible to isotropy via any diffeomorphism Φ is not handled by our result since $D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon \equiv 0$. More sophisticated examples of cases of reducibility to isotropy that are not supported by our theorem might be obtained.

Remark A.4.5. It is worth noticing that the expression of β_Φ for \mathbf{x} and $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^{d-1}$, takes the form:

$$\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos(\alpha(\mathbf{x})) \cos(\alpha(\mathbf{y})) + \sin(\alpha(\mathbf{x})) \sin(\alpha(\mathbf{y})) \frac{D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{x})\Gamma}{|D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{x})\Gamma|} \frac{\left(D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma\right)^\top}{|D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})\Gamma|}.$$

For d a positive integer with $d > 1$, this is actually the Viete formula called “spherical law of cosines” in spherical trigonometry in \mathbb{S}^2 . Indeed, one may always consider that the points \mathbf{e}_1 , $\Phi(\mathbf{x})$ and $\Phi(\mathbf{y})$ of \mathbb{S}^{d-1} actually lie in a manifold equivalent to \mathbb{S}^2 . Viete law implies that $\beta_\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ the cosine of the angle between $\Phi(\mathbf{x})$ and $\Phi(\mathbf{y})$ is expressed via the cosine and sine of the angles $\alpha(\mathbf{x})$ between \mathbf{e}_1 and $\Phi(\mathbf{x})$ and $\alpha(\mathbf{y})$ between \mathbf{e}_1 and \mathbf{y} and the cosine of the angle between the unit vectors $\tau(\mathbf{x})$ and $\tau(\mathbf{y})$ stemming at $\mathbf{e}_1 = \Phi(\mathbf{e}_1)$ and tangent to the great circles in \mathbb{S}^2 leading respectively to $\Phi(\mathbf{x})$ and $\Phi(\mathbf{y})$ with $\tau(\mathbf{x}) = \frac{D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{x})\Gamma}{|D_{\mathbf{x}}C_\varepsilon(\mathbf{e}_1, \mathbf{x})\Gamma|}$.

A.5. Differential equations and flows preserving spheres

We have already proved the following necessary and sufficient condition for a diffeomorphism Φ to preserve norms:

$$|\Phi(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}| \Leftrightarrow J_\Phi^\top(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

We are now in a position to exhibit illustrative and useful examples of such diffeomorphisms (space flows) occurring via dynamical systems leaded by differential equations. We start by considering autonomous systems in a domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

We assume that classical Lipschitzian assumptions hold to ensure existence of a unique solution, denoted $\Phi(t, \mathbf{x})$, in some time interval $[0, \tau]$ such that $\Phi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$. In accordance with our previous notations, we write $\Phi^\top(t, \mathbf{x}) = (\phi_1, \dots, \phi_d)(t, \mathbf{x})$ and $F^\top(\mathbf{x}) = (F_1, \dots, F_d)(\mathbf{x})$ for the remainder of this section.

Proposition A.5.1. . *The following assertions are true:*

1. $\Phi(t, \mathbf{x})$ preserves norms of \mathbf{x} if and only if $\mathbf{x}^\top F(\mathbf{x}) = 0$, for all $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $t \in [0, \tau]$.
2. Additionally, if F is differentiable, then $J_F^\top(\mathbf{x})\mathbf{x} = -F(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$.
3. For any fixed $t \in [0, \tau]$, $\Phi(t, \mathbf{x})$ is positively homogeneous of order 1 in \mathbf{x} if and only if F is positively homogeneous of order 1.

Proof. 1. (\Rightarrow) We have

$$\begin{aligned}
|\Phi(t, \mathbf{x})|^2 &= |\mathbf{x}|^2 \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^d \partial_t \phi_i^2(t, \mathbf{x}) &= 0 \\
\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^d \phi_i(t, \mathbf{x}) \partial_t \phi_i(t, \mathbf{x}) &= 0 \\
\Rightarrow 2 \sum_{i=1}^d \phi_i(t, \mathbf{x}) F_i(\Phi(t, \mathbf{x})) &= 0 \\
\Rightarrow \Phi^\top(t, \mathbf{x}) F(\Phi(t, \mathbf{x})) &= 0,
\end{aligned}$$

so that F satisfies $\mathbf{x}^\top F(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

(\Leftarrow) We now assume that

$$\mathbf{x}^\top F(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}.$$

This implies that

$$\partial_t |\Phi(t, \mathbf{x})|^2 = 2\Phi^\top(t, \mathbf{x}) F(\Phi(t, \mathbf{x})) = 0.$$

Consequently, $|\Phi(t, \mathbf{x})| = |\Phi(0, \mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$.

2.- If additionally differentiability of F is assumed, then $\mathbf{x}^\top F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d x_j F_j(\mathbf{x}) = 0$, and so we get for all $i = 1, \dots, d$,

$$\partial_{x_i} \left(\sum_{j=1}^d x_j F_j(\mathbf{x}) \right) = \sum_{j=1}^d (\delta_{ij} F_j(\mathbf{x}) + x_j \partial_{x_i} F_j(\mathbf{x})) = 0$$

meaning that $F_i(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^d x_j \partial_{x_i} F_j(\mathbf{x})$, i.e., $F(\mathbf{x}) = -J_F^\top(\mathbf{x})\mathbf{x}$.

3. - (\Rightarrow) Let $t \in [0, \tau]$ be fixed. If $\Phi(t, \mathbf{x})$ is positively homogeneous of order 1 with respect to \mathbf{x} , that is $\Phi(t, \lambda\mathbf{x}) = \lambda\Phi(t, \mathbf{x})$, then

$$\partial_t \Phi(t, \lambda\mathbf{x}) = F(\Phi(t, \lambda\mathbf{x})) = \lambda \partial_t \Phi(t, \mathbf{x}) = \lambda F(\Phi(t, \mathbf{x})).$$

We can now fix $t = 0$ to obtain $F(\Phi(0, \lambda\mathbf{x})) = F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\Phi(0, \mathbf{x})) = \lambda F(\mathbf{x})$.

(\Leftarrow) Conversely, assume that $F(\lambda\mathbf{x}) = \lambda F(\mathbf{x})$. Then, define $\mathbf{y}(t) = \lambda\Phi(t, \mathbf{x})$. Thus, $\mathbf{y}(0) = \lambda\mathbf{x}$. We now notice that

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \lambda \partial_t \Phi(t, \mathbf{x}) = F(\Phi(t, \mathbf{x})) = F(\lambda\Phi(t, \mathbf{x})) = F(\mathbf{y}(t)),$$

and apparently $\mathbf{y}(t)$ is unique the solution of the ODE when starting from $\lambda\mathbf{x}$. Rephrased, we have that $\lambda\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \lambda\mathbf{x})$. The proof is complete.

Remark A.5.2. The Jacobian of $\Phi(t, \mathbf{x})$ with respect to \mathbf{x} is defined as

$$J(t) = J_{\Phi(t, \cdot)}(\mathbf{x}) = [\partial_{x_j} \phi_i(t, \mathbf{x})]_{i,j}.$$

It can be namely shown that, for every fixed \mathbf{x} , J obeys the linear matrix differential equation:

$$\frac{dJ}{dt} = \tilde{A}(t)J,$$

with $\tilde{A}(t) = J_F(\Phi(t, \mathbf{x}))$.

Remark A.5.3. It should be noticed that reciprocal of flows are also flows, leaded by the opposite vector field $-F$, preserving norms as well. In other words, $\Phi^{-1}(t, \mathbf{x})$ is a solution of

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= -F(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{x}. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Remark A.5.4. Differential equations as those in Equation (A.29) allow to define nice families of spatio-temporal covariance structures over $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ as well as over $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ through the flows they originate. To see it, consider a covariance function $C_0(\cdot, \cdot)$ on \mathbb{R}^d or \mathbb{S}^{d-1} . Then, define

$$C((\mathbf{x}, s), (\mathbf{y}, t)) = C_0(\Phi(t, \mathbf{x}), \Phi(s, \mathbf{y})), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

with X being either \mathbb{S}^{d-1} or \mathbb{R}^d . Alternatively, one can defined

$$C((\mathbf{x}, s), (\mathbf{y}, t)) = C_0(\Phi^{-1}(t, \mathbf{x}), \Phi^{-1}(s, \mathbf{y})).$$

Both structures result in valid space-time covariance functions.

A.5.1. The case of inhomogeneous linear ODE

Let us consider the ordinary differential equation

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{b}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}, \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

where $\mathbf{c}(t)$, $t \geq 0$, is a vector-valued function, and $\mathbf{b}(t)$ is a family of continuous and commuting matrices, so that $\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}(s)\mathbf{b}(t)$ for all nonnegative t, s . The commuting property allows to define, with no ambiguity, the matrix-valued mapping

$$A(t) = e^{B(t)}, \quad t \geq 0,$$

where $B(t) = \int_0^t \mathbf{b}(u)du$.

The solution of the ODE (A.30) can be written as

$$\mathbf{x}(s, \mathbf{x}) = e^{B(s)}\mathbf{x} + e^{B(s)} \int_0^s e^{-B(u)}\mathbf{c}(u)du.$$

It can be considered as a family of affine diffeomorphisms

$$\varphi_s(\mathbf{x}) = A(s)\mathbf{x} + \theta(s),$$

which is due to the fact that

$$J_{\mathbf{x}}^{\top} \varphi_s(\mathbf{x}) = (A(s))^{\top} \equiv e^{B^{\top}(s)}.$$

Norm preservation, that is $|\mathbf{x}(s, \mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$ requires that

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{x}}^{\top} \varphi_s(\mathbf{x}) \varphi_s(\mathbf{x}) &= e^{B^{\top}(s)}(e^{B(s)}\mathbf{x} + \theta(s)) \\ &= e^{B^{\top}(s)+B(s)}\mathbf{x} + e^{B^{\top}(s)}\theta(s) = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Therefore, $\theta(s) \equiv 0$, *i.e.* $\mathbf{c}(t) \equiv 0$ and $e^{B^{\top}(s)+B(s)} \equiv \mathbf{I}_d$, $\forall s$, that is $B^{\top}(s) = -B(s)$ and then $e^{B(t)} = A(t)$ is orthogonal.

A.5.2. An example of ODE preserving norms

A rotation matrix A is an orthogonal transformation with $\det(A) = 1$. We consider the following ODE:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \begin{pmatrix} x_1x_3 \\ x_2x_3 \\ -x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} = F(\mathbf{x}), & \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\top} \\ \mathbf{x}(0) &= (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^{\top}. \end{cases}$$

We seek for the related solution. Apparently, $\mathbf{x}^\top F(\mathbf{x}) = 0$. Let $u = x_1 + x_2$, $v = x_1^2 + x_2^2$ and $w = x_3$. Then,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = uw \\ \frac{dv}{dt} = 2wu \\ \frac{dw}{dt} = -v, \end{cases}$$

which implies that

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \exp\left(\int_0^t w(s)ds\right) \quad \text{and} \\ v(t) &= v_0 \exp\left(2\int_0^t w(s)ds\right). \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\int_0^t w(s)ds \quad (\theta(0) = 0) \\ \Rightarrow \theta'(t) &= -w(t) \\ \Rightarrow \theta''(t) &= -w'(t) = v(t) \\ \text{i.e } \theta''(t) &= v_0 \exp(-2\theta(t)). \end{aligned} \tag{A.31}$$

To solve the ODE, we let $\theta(t) = \log(\lambda(t))$, $\theta'(t) = \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}$ and $\theta'' = \frac{\lambda''\lambda - \lambda'^2}{\lambda^2}$, so that $\theta'' = v_0 \exp(\log(\lambda^{-2})) = \frac{v_0}{\lambda^2}$ by Equation (A.31). Thus,

$$\lambda''\lambda - \lambda'^2 = v_0. \tag{A.32}$$

Let

$$\lambda(t) = i\sqrt{v_0} \cos(t + \alpha).$$

The solution of Equation (A.32) with initial conditions $\lambda(0) = i\sqrt{v_0} \cos(\alpha)$ and $\lambda'(0) = -i\sqrt{v_0} \sin(\alpha)$.

Now, $\theta(t) = \log(\lambda(t)) = \log(i\sqrt{v_0}) + \log(\cos(t + \alpha)) \Rightarrow \theta'(t) = -\tan(t + \alpha)$. Thus, $w(t) = \tan(t + \alpha)$ and $\theta(t) = \log(\cos(t + \alpha))$ $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Otherwise, the solution will be complex valued.

Finally, $u(t) = u_0 \cos(t)$, $v(t) = v_0 \cos^2(t)$ and $w(t) = \tan(t + \alpha)$; $x_1 = \frac{1}{2}(u \pm \sqrt{2v - u^2})$, $x_2 = \frac{1}{2}(u \mp \sqrt{2v - u^2})$ and $x_3 = w$.

Since $2v - u^2 = (2v_0 - u_0^2) \cos^2(t)$, $x_1 = \frac{1}{2}(u_0 \pm \sqrt{2v_0 - u_0^2}) \cos(t)$, $x_2 = \frac{1}{2}(u_0 \mp \sqrt{2v_0 - u_0^2}) \cos(t)$ and $x_3 = \tan(t + \alpha)$. u_0, v_0 and α determined by initial condition

$$u_0 = x_1^0 + x_2^0, v_0 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2, \alpha = \arctan(x_3^0) \text{ and } 2v_0 - u_0^2 = (x_1^0 - x_2^0)^2.$$

For example,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1^0 \cos(t) \\x_2(t) &= x_2^0 \cos(t) \\x_3(t) &= \tan(t + \arctan(x_3^0)).\end{aligned}$$

That is, we have the transformation

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y} = \Phi(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos(t) \\ x_2 \cos(t) \\ \tan(t + \arctan(x_3)) \end{pmatrix}.$$

Apéndice B

Algoritmo

B.1. Deformación del círculo unitario

```
##### Case of Circle #####

rm(list = ls())
graphics.off()

# natural parameterisation
N <- 50
tt <- seq(0, 1, length.out = N)
# original points
cost <- cos(2*pi*tt)
sint <- sin(2*pi*tt)

# the circle
plot(cost, sint, type='l', col="black", xlim=c(-1.5, 1.5), ylim=c(-1.5,
1.5) )

plot(cost, sint, type='p', col="blue", pch=20, xlim=c(-1.5, 1.5), ylim=c
(-1.5, 1.5) )

#deformation \Phi via a parameter change by a Beta distribution on [0,
1]
#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; b1 <- 3 ;
# a1 <- 1 ; b1 <- 1 ; 1 # case of no coordinate changes
# a1 <- 5 ; b1 <- 5 ;
# a1 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ;
# a1 <- 3 ; b1 <- 1
a1 <- 10 ; b1 <- 10;

### Example 1 of densification at 2 poles by a "double beta "

##### calculo de phi #####
J <- 2*(1:(N/2))
ttJ <- tt[J]
phit1 <- pbeta(ttJ, a1, b1, ncp = 0) ;
phit <- c(phit1/2, (1+ phit1)/2)
```

```

plot(tt , phit , type="l")

##### images of original points transform
cosphid <- 0.7*cos(2*pi*phit)
sinphid <- 0.15+0.7*sin(2*pi*phit)

plot(cost , sint , ylab = " ",xlab = " ", type='l', col="blue", xlim=c
      (-1.1, 1.1), ylim=c(-1.1, 1.1) )

points(cost ,sint , type='p', col="black", pch=20)

par(new=TRUE)
plot(cosphid , sinphid , ylab = " ",xlab = " ", type='l', col="blue", xlim=
      c(-1.1, 1.1), ylim=c(-1.1, 1.1) )

points(cosphid ,sinphid , type='p', col="red", pch=20)

# view the bijection : from bluepoints to images red points
vx<-as.vector(t(cost))
vy<-as.vector(t(sint))
vdx<-as.vector(t(cosphid))
vdy<-as.vector(t(sinphid))

segments(vx,vy,vdx, vdy, col="grey")
#####

### Ejemplo 2, usando angulo

##### angle #####
ang <- atan2(sint , cost)/(2*pi)

#deformation \Phi via a parameter change by a Beta distribution on [0, 1]
#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; b1 <- 3 ;
# a1 <- 1 ; b1 <- 1 ; # case of no coordinate changes
a1 <- 5 ;b1 <- 5 ;
# a1 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ;
# a1 <- 3 ; b1 <- 1
# a1 <- 10 ; b1 <- 10;

##### calculo de phi #####

phit1 <- pbeta(sign(ang)*ang, a1, b1, ncp = 0)
phit<-c(phit1 [1:(N/2)],(1-phit1 [(N/2+1):N])) ## correccion de transf
plot(tt , phit , type="l")

##### images of original points transform
cosphid <- cos(2*pi*phit)
sinphid <- sin(2*pi*phit)

plot(cost , sint , type='l', col="blue", xlim=c(-1.5, 1.5), ylim=c(-1.5,
1.5) )

points(cost ,sint , type='p', col="black", pch=20)

```

```

points(cosphid, sinphid, type='p', col="red", pch=20)

# view the bijection : from bluepoints to images red points
vx<-as.vector(t(cost))
vy<-as.vector(t(sint))
vdx<-as.vector(t(cosphid))
vdy<-as.vector(t(sinphid))

segments(vx,vy,vdx, vdy, col="grey")

```

B.2. Deformación en la esfera unitaria

```

##### Ejemplo de una deformacion en s^{2}

library(plot3D)
library(Matrix)
library(stats)
library(MASS)
library(base)
##### ejemplo de una deformacion en s^{2}
rm(list = ls())
graphics.off()

#####
#I- Sampling point on S^2 via usual pararmeterization on squares

# natural parameterization via the square [0,1[x[01]
N <- 24 #32 # para notar lo que ocurre se recomienda N pequeño
N2 <- N^2
tt <- seq(0, 1, length.out = N)
xt <- seq(0, 1, length.out = N)
xs <- seq(0, 1, length.out = N)
xts <- mesh(xt,xs)
plot(xts$x, xts$y, type="p",pch=20, cex=0.5 )

# original points representation on the sphere
x1 <- cos(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x2 <- sin(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x3 <- cos(pi*xts$y)

### grafica de puntos de la superficie #####
dev.new()
#par(mfrow = c(2, 2))
scatter3D( x1, x2, x3, phi = 45, bty = "b2",
          pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed", xlim=c(-1.2, 1.2),
          ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black" )

#####
dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 0, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 90, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2) )

```

```

#####
# II- Space deformation via a square re-parameterization
#####

#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
# a1 <- 1 ; a2 <- 1 ; b1 <- 1 ; b2 <- 1 # case of no
  coordinate changes

# a1 <- 5 ; a2 <- 5 ; b1 <- 5 ; b2 <- 5
  a1 <- 0.3 ; a2 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3

#deformation of [0,1[x[0,1]
u <- pbeta( xts$x, a1, a2, ncp = 0)
v <- pbeta( xts$y, b1, b2, ncp = 0)
dim(u)
plot(tt, u[,N/2], type="l")

# # EXAMPLE 1 of transformation with independent coordinate change
#
# w1 <- u
# w2 <- v
#
# plot(w1, w2, type="p", pch=20, cex=0.5 )
# # view north and south poles
# points(0,0.5, pch="N", col="red",cex=2)
# points(1,0.5, pch="S", col="red",cex=2)
#
#
# EXAMPLE2 of square transformation with intermingled coordinates

w1 <- (0.5-u)^2*v^2 +(1-(0.5-u)^2)*v
w2 <- (0.5-v)^2*u^2 +(1-(0.5-v)^2)*u

plot(w1,w2, type="p", pch=20, cex=0.5 )
# view north and south poles
points(0,0.5, pch="N", col="red",cex=2)
points(1,0.5, pch="S", col="red",cex=2)

# images of points on the sphere : Choose example 1 or example 2, then :

y1 <- cos(2*pi*w2)*sin(pi*w1)
y2 <- sin(2*pi*w2)*sin(pi*w1)
y3 <- cos(pi*w1)

##### grafica de puntos de la superficie
dev.new()
#par(mfrow = c(2, 2))
scatter3D( y1, y2, y3, phi =10, bty = "b2",
           pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed",xlim=c(-1.2, 1.2),
           ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black" )

##### origen
dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,

```

```

        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 90, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2)      )

##### transf
dev.new()
surf3D( y1, y2, y3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2)      )

#####
### EXAMPLE 3 Angles   $\text{artg}(x_2, x_1)/2\pi$  and  $\text{artg}(x_1^2 + x_2^2)^{0.5}, x_3$ 
) / pi
#####

ang1<-atan2( x2,  x1)/(2*pi)          ### theta angle
ang2<-atan2(( x1^2+ x2^2)^{0.5}, x3)/pi ##### phi angle

##### calculo de phit #####
phit1 <- pbeta(sign(ang1)*ang1, a1, a2, ncp = 0)
phit<-rbind(phit1 [1:(N/2) ],(1 - phit1 [(N/2+1):N,] ) ) ## correccion de
transf

##### calculo de phis #####
phis <- pbeta(ang2, b1, b2, ncp = 0)/pbeta(max(ang2), b1, b2, ncp = 0)

#####
plot(phit ,phis , type="p", pch=20, cex=0.5 )
# view north and south poles
points(0,0.5, pch="N", col="red ",cex=2)
points(1,0.5, pch="S", col="red ",cex=2)

##### transformacion datos #####
yy=0
ya1 <- cos(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya2 <- sin(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya3 <- cos(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))

#graphics.off()
##### transformada por los angulos #####
dev.new()
#par(mfrow = c(2, 2))
scatter3D( ya1, ya2, ya3, phi =10, bty = "b2",
          pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed",xlim=c(-1.2, 1.2)
          ,
          ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black"      )

dev.new()
surf3D( ya1, ya2, ya3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2)      )

```

```
#####EXAMPLE2 of square transformation with intermingled
coordinates
dev.new()
#par(mfrow = c(2, 2))
scatter3D( y1, y2, y3, phi =10, bty = "b2",
           pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed",xlim=c(-1.2, 1.2)
           ,
           ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black"      )

dev.new()
surf3D( y1, y2, y3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2)      )
#####
```

B.3. Campo aleatorio sobre círculo unitario

```
#####
# I Random field SIMULATIONS ON CIRCLE #
#####

library(plot3D)
library(Matrix)
library(stats)
library(MASS)
library(base)
set.seed(19908)

##### Examples of deformation on  $S^1$ 
rm(list = ls())
graphics.off()

N <- 100 #32 # considering that N is even
N2 <- N^2
tt <- seq(0, 1, length.out = N)

# original points
x1 <- cos(2*pi*tt)
x2 <- sin(2*pi*tt)

#deformation \Phi via a parameter change by a Beta distribution on [0, 1]
#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; b1 <- 3 ;
# a1 <- 1 ; b1 <- 1 ; 1 # case of no coordinate changes
# a1 <- 5 ; b1 <- 5 ;
#a1 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ;
#a1 <- 3 ; b1 <- 1
a1 <- 10 ; b1 <- 10;

### Example 1 of densification at 2 poles by a "double beta "
##### calculo de phi #####
J <- 2*(1:(N/2))
ttJ <- tt[J]
```

```

phit1 <- pbeta(ttJ, a1, b1, ncp = 0) ;
phit <- c(phit1/2, (1+ phit1)/2)

##### images of transform points #####
c1<- 0.7 ; c2 <- 0.15

y1 <- c1*cos(2*pi*phit)
y2 <- c2+c1*sin(2*pi*phit)

# Covariance function on S^1 via the 4 first legendre Polynomials

Cv <- function(d, B){
  # Schonberg representation on cicle
  # d : distances
  # B : parameters for the covariance defined
  # B1: nugget effect
  return( B[1] + B[2]*cos(d) + B[3]*cos(2*d)+ B[4]*cos(3*d) )
}

## Function matrix of distances module pi
Dv <- function(v){
  # v : vector
  dvij <- as.matrix(dist(v,diag = TRUE, upper = TRUE))
  dvij[which(dvij > pi ,arr.ind =TRUE)]<-2*pi-dvij[which(dvij > pi ,arr.ind
    =TRUE)]
  return( dvij )
}

##### angle of defomation #####
ang <- atan2(y2,y1)
ang[which(ang < 0 ,arr.ind =TRUE)]<-pi-ang[which(ang < 0 ,arr.ind =TRUE)]
angY <- ang

##### vector theta #####
thai <- 2*pi*tt

##### Distance X #####
dXij<-Dv(thai)

##### Distance Y #####
dYij<- Dv(angY)

##### bn,1 #####
B <- c(0.1, 0.3, 0.3, 0.3) # example of parameterization with nugget
  effect
# B <- c(0 , 0.3, 0.3, 0.4)

# Covariance matrix for original points
##### R(dXij)=(GammaX)_{i,j} #####
rdX<-Cv(dXij ,B)
#rdX

# Covariance matrix for deformation points
##### R(dYij)=(GammaY)_{i,j} #####
rdY<-Cv(dYij ,B)

```

```

#rdY

##### simulation of iid gaussian vector #####
##### gaussian vector Z #####
mu = rep(0,N)
I<-diag(1,N)
Z<-mvrnorm(n=N2, mu, I)

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVDX <- svd(rdX)
#str(SVDX)
length(which(SVDX$d<0)) ##### saber si es positive definite

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVDY <- svd(rdY)
#str(SVDX)
length(which(SVDY$d<0)) ##### saber si es positive definite

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
structure
ZX <- t((SVDX$u %*% diag(sqrt(SVDX$d)) %*% SVDX$v) %*% (Z))

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
structure
ZY <- t((SVDY$u %*% diag(sqrt(SVDY$d)) %*% SVDY$v) %*% (Z))

#####
var(Z)[1,1:8]
cov(ZX)[1,1:8]
rdX[1,1:8]

cov(ZY)[1,1:8]
rdY[1,1:8]

##### Original figure , deformation figure #####
dev.new()
plot(x1,x2, type='l', xlab="x", ylab="y", xlim = c(-1.05,1.05), ylim = c
(-1.05,1.05) )
dev.new()
plot(y1,y2, type='l', xlab="x", ylab="y", xlim = c(-1.05,1.05), ylim = c
(-1.05,1.05) )

##### Original and deformation figure #####
dev.new()
plot(x1,x2, type='l', xlab="x", ylab="y", xlim = c(-1.05,1.05), ylim = c
(-1.05,1.05) )
par(new=TRUE)
plot(y1,y2, type='l', main= title(" Original and Deformation"), axes =
FALSE, xlab="x", ylab="y", xlim = c(-1.05,1.05), ylim = c(-1.05,1.05) )

##### Original figure and deformation points
#####
dev.new()
plot(x1, x2, type='p', xlab="x", ylab="y", xlim = c(-1.05,1.05), ylim = c
(-1.05,1.05) )

```

```

points(y1,y2, type='p', pch=20)

##### Simulation of the first trajectory of the ZX and ZY fields
#####
Jk <- sample(seq(1,N2), N) # sample
dev.new()
plot(tt,ZX[Jk,1], type='l', xlab="t",ylab="Z(t)")
dev.new()
plot(tt,ZY[Jk,1], type='l', xlab="t",ylab="Z(phi(t))" )

##### A sample of the Representation of random field paths #####

# xtk$y :represent the position k paths
xt <- seq(0, 1, length.out = N)
xk <- seq(0, 1, length.out = N)
xtk <- mesh(xt,xk)

# A: Representation of the initial random field on [0,1]x[0,1]
dev.new()
scatter3D( xtk$x, xtk$y, ZX[Jk,], type = ".",pch=20, phi = 40, xlab="k",
          ylab="t",zlab="ZX", colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
          lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
          (-0.1, 1.1),
          ylim=c(-0.1, 1.1) )

# B: Representation of the random field on [0,1] after parameter changes:
# (y1,y2) -> phit=artg(y2/y1) and keeping the same 'trajectory':
# since Z_Phi(x) = Z(y)

#xtk$y : represent the position k paths
ytk <- mesh(phit,xk)
dev.new()
scatter3D(ytk$x, ytk$y, ZY[Jk,], type = "p",pch=20, phi = 40, xlab="k",
          ylab="t",zlab="ZY", colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
          lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 0, xlim=c(-0.1,
          1.1),
          ylim=c(-0.1, 1.1) )
##### End of example 1#####

```

B.4. Campo aleatorio sobre esfera unitario

```

#####
# III Random field SIMULATIONS ON SPHERE #
#####

library(plot3D)
library(Matrix)
library(stats)
library(MASS)
#set.seed(19908)

##### Example of deformation on S^{2} #####
rm(list = ls())
graphics.off()
#####
#I- Sampling point on S^2 via usual parameterization on squares

```

```

# natural parameterization via the square [0,1[x[01]
N <- 100 # considering that N is even
N2 <- N^2
tt <- seq(0, 1, length.out = N)
xt <- seq(0, 1, length.out = N)
xs <- seq(0, 1, length.out = N)
xts <- mesh(xt,xs)

# original points representation on the sphere
x1 <- cos(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x2 <- sin(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x3 <- cos(pi*xts$y)

dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 45, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 90, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2))

#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
# a1 <- 1 ; a2 <- 1 ; b1 <- 1 ; b2 <- 1 # case of no
coordinate changes
# a1 <- 5 ; a2 <- 5 ; b1 <- 5 ; b2 <- 5
# a1 <- 0.3 ; a2 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
# a1 <- 3 ; a2 <- 2 ; b1 <- 2 ; b2 <- 2
a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 3 ; b2 <- 3
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 2 ; b2 <- 2

##### compute phit and phis #####
phit <- pbeta( xts$x, a1, a2, ncp = 0)
phis <- pbeta( xts$y, b1, b2, ncp = 0)

##### oginial grid #####
dev.new()
plot(xts$x, xts$y,xlab = " ",ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )

##### defomation grid #####
dev.new()
plot(phit,phis,xlab = " ",ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )

##### tranformacion datos #####
yy=0 ## value
ya1 <- cos(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya2 <- sin(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya3 <- cos(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))

##### surfece #####
dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2) )

dev.new()

```

```

surf3D( ya1, ya2, ya3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2)      )
##### scatter plot #####
dev.new()
scatter3D( x1, x2, x3, phi = 45, bty = "b2",
          pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed", xlim=c(-1.2, 1.2),
          ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black"      )
dev.new()
scatter3D( ya1, ya2, ya3, phi = 45, bty = "b2",
          pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed", xlim=c(-1.2, 1.2),
          ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black"      )

# Covariance function on S^2 via the 4 first legendre Polynomials
Cv <- function(d, B){
  # d : the cosine of inter-points angular distances
  # B : parameters for the covariance defined
  # B1: nugget effect
  return( B[1] + B[2]*d + B[3]*(3*d^2-1)/2+ B[4]*(5*d^3- 3*d)/2  )
}

##### compute covariance #####
rd <- function(mx,N){
  cax<- matrix(0, nrow = N, ncol = N) # matriz de ceros
  for (k in 1:(N-1)){
    flx<-length(mx[1,])
    a1x<-mx[seq(1,flx,by=N)]
    cax[k,(k:N)]<-a1x
    cax[(k:N),k]<-a1x
    mx<-as.matrix(mx[-(1:(1+N)),-(1:(1+N))])
  }
  cax[N,N]<-mx # matriz
  covX<-cax ## covariance matrix
  return(covX)
}

##### simulation of iid gaussian vector N(0,G) #####
##### gaussian vector Z #####
mu = rep(0,N)
I<-diag(1,N)
Z<-mvrnorm(n=N2,mu,I)

B <- c(0.1, 0.3, 0.3, 0.3) # example of parameterization with nugget
effect
# B <- c(0 , 0.3, 0.3, 0.4)

### original coordinates #####
X <- cbind(as.vector(x1) , as.vector(x2) , as.vector(x3) )

### matrix of cosines of angular inter distances #####
dX <- X%*%(X)

##### Covariance matrix for original points #####
GammaX <- as.matrix( Cv(dX,B), N, N)

```

```

rdX <- rd(GammaX,N) #### covariance matrix X

#### computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVD <- svd(rdX)

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
  structure
ZX <- t((SVD$u %*% diag(sqrt(SVD$d)) %*% SVD$v) %*% t(Z))

##### deformation datos
#####
Ya <- cbind(as.vector(ya1) , as.vector(ya2) , as.vector(ya3) )

#### matrix of cosines of angular inter distances #####
dYa <- Ya%*%t(Ya)

##### Covariance matrix
GammaYa <- as.matrix( Cv(dYa,B) , N, N)

rdYa <- rd(GammaYa,N) #### covariance matrix transform "Ya"

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVDYa <- svd(rdYa)

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
  structure
ZYa <- t((SVDYa$u %*% diag(sqrt(SVDYa$d)) %*% SVDYa$v) %*% t(Z))

##### Comparing covariates #####
cZX<-cov(ZX)
cZX[1:10,1]
rdX[1:10,1]

cZYa<-cov(ZYa)
cZYa[1:10,1]
rdYa[1:10,1]

##### A sample of the simulated random field on grid #####
library(spam)
library(grid)
library(maps)
library(fields)

# A: Representation of the initial random field on [0,1[x[0,1]
dev.new()
image.plot(xts$x, xts$y,ZX[J,],xlab=" ",ylab=" ")#,col=terrain.colors(M))

# B: Representation of the random field on [0,1[x[0,1] after parameter
  changes:
# (x1,x2,x3) -> (phit,phis) and keeping the same 'trajectory':
# since Z_Phi(x) = Z(y)

dev.new()
image.plot(phit, phis, ZYa[J,],xlab=" ",ylab=" ",col=terrain.colors(100))

##### projection region #####

```

```

dev.new()
plot(phis, phis, type="p", xlab=" ", ylab=" ", pch=20, cex=0.5 )
# # view north and south poles
points(0,1/2, pch="N", col="red", cex=2)
points(1,1/2, pch="S", col="red", cex=2)

dev.new()
scatter3D(x1,x2,x3, colvar=ZX[J,], clim=c(min(ZX[J,]),max(ZX[J,])), pch=20,
         cex=0.8,col=rainbow(200))

dev.new()
scatter3D(ya1,ya2,ya3, colvar=ZYa[J,], clim=c(min(ZYa[J,]),max(ZYa[J,])),
         pch=20,cex=0.8,col=rainbow(200))

##### End example 1 #####

# Example 2 #####

library(plot3D)
library(Matrix)
library(stats)
library(MASS)
set.seed(19908)

##### Example of deformation on  $S^2$  #####
rm(list = ls())
graphics.off()
#####
#II- Sampling point on  $S^2$  via usual parameterization on squares

# natural parameterization via the square [0,1[x[01]
N <- 100 #32 # considering that N is even
N2 <- N^2
tt <- seq(0, 1, length.out = N)
xt <- seq(0, 1, length.out = N)
xs <- seq(0, 1, length.out = N)
xts <- mesh(xt,xs)

# original points representation on the sphere
x1 <- cos(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x2 <- sin(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x3 <- cos(pi*xts$y)

dev.new()
surf3D(x1, x2, x3, phi = 45, colkey = FALSE, bty = "b2", add=FALSE,
       lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 90, xlim=c
       (-1.2, 1.2),
       ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2))

#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
# a1 <- 1 ; a2 <- 1 ; b1 <- 1 ; b2 <- 1 # case of no
coordinate changes

# a1 <- 5 ; a2 <- 5 ; b1 <- 5 ; b2 <- 5

```

```

# a1 <- 0.3 ; a2 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
# a1 <- 3 ; a2 <- 2 ; b1 <- 2 ; b2 <- 2
  a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 3 ; b2 <- 3
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 2 ; b2 <- 2

##### compute phit and phis #####
phit <- pbeta( xts$x, a1, a2, ncp = 0)
phis <- pbeta( xts$y, b1, b2, ncp = 0)

##### grid #####
dev.new()
plot(xts$x, xts$y, xlab = " ", ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )

##### square transformation with intermingled coordinates #####

u<-phit
v<-phis
w1 <- (0.5-u)^2*v^2 +(1-(0.5-u)^2)*v
w2 <- (0.5-v)^2*u^2 +(1-(0.5-v)^2)*u
dev.new()
plot(w1, w2, xlab = " ", ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )
# view north and south poles
points(0,1/2, pch="N", col="red", cex=2)
points(1,1/2, pch="S", col="red", cex=2)
phit<-w1
phis<-w2

##### tranformation datos #####
yy=0 ## value
ya1 <- cos(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya2 <- sin(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya3 <- cos(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))

#####
dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2", add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2) )

dev.new()
surf3D( ya1, ya2, ya3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2", add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2) )

dev.new()
scatter3D(ya1, ya2, ya3, phi = 45, bty = "b2",
          pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed", xlim=c(-1.2, 1.2),
          ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black" )

# Covariance function on S^2 via the 4 first legendre Polynomials
Cv <- function(d, B){
  # d : the cosine of inter-points angular distances
  # B : parameters for the covariance defined
  # B1: nugget effect

```

```

    return( B[1] + B[2]*d + B[3]*(3*d^2-1)/2+ B[4]*(5*d^3- 3*d)/2 )
}

#####
##### compute covariance #####
rd <- function(mx,N){
  cax<- matrix(0, nrow = N, ncol = N) # matriz de ceros
  for (k in 1:(N-1)){
    flx<-length(mx[1,])
    a1x<-mx[seq(1,flx,by=N)]
    cax[k,(k:N)]<-a1x
    cax[(k:N),k]<-a1x
    mx<-as.matrix(mx[-(1:(1+N)),-(1:(1+N))])
  }
  cax[N,N]<-mx # matriz
  covX<-cax ## covariance matrix
  return(covX)
}
##### simulation of iid gaussian vector N(0,G) #####
##### gaussian vector Z #####
mu = rep(0,N)
I<-diag(1,N)
Z<-mvrnorm(n=N2,mu,I)

B <- c(0.1, 0.3, 0.3, 0.3) # example of parameterization with nugget
effect
# B <- c(0 , 0.3, 0.3, 0.4)

#### original coordinates
X <- cbind(as.vector(x1) , as.vector(x2) , as.vector(x3) )

#matrix of cosines of angular inter distances
dX <- X%*%(X)

# Covariance matrix for original points
GammaX <- as.matrix( Cv(dX,B), N, N)

rdX <- rd(GammaX,N) #### covariance matrix X

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVD <- svd(rdX)

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
structure
ZX <- t((SVD$u %*% diag(sqrt(SVD$d)) %*% SVD$v) %*% t(Z))

#####
Ya <- cbind(as.vector(ya1) , as.vector(ya2) , as.vector(ya3) )

#matrix of cosines of angular inter distances
dYa <- Ya%*%(Ya)

# Covariance matrix
GammaYa <- as.matrix( Cv(dYa,B), N, N)

```

```

rdYa <- rd(GammaYa,N) #### covariance matrix transform "Ya"

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVDYa <- svd(rdYa)

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
  structure
ZYa <- t((SVDYa$u %*% diag(sqrt(SVDYa$d)) %*% SVDYa$v) %*% t(Z))

#####
##### Comparing covariates #####
cZX<-cov(ZX)
cZX[1:10,1]
rdX[1:10,1]

cZYa<-cov(ZYa)
cZYa[1:10,1]
rdYa[1:10,1]

#####
##### A sample of the simulated random field on the mesh #####
library(spam)
library(grid)
library(fields)

J <- sample(seq(1,N2), N)
# A: Representation of the initial random field on [0,2*pi[x[O,pi]
dev.new()
image.plot(xts$x, xts$y,ZX[J,],xlab=" ",ylab=" ",col=terrain.colors(100))

# B: Representation of the random field on [0,1[x[O,1] after parameter
  changes:
# (x1,x2,x3) -> (phit,phis) keeping the same 'trajectory':
# since Z_Phi(x) = Z(y)

dev.new()
image.plot(phit,phis, ZYa[J,],xlab=" ",ylab=" ",col=terrain.colors(100))

##### region proyeccion #####
dev.new()
plot(phit,phis, type="p",xlab=" ",ylab=" ",pch=20,cex=0.5)
# # view north and south poles
points(0,1/2, pch="N", col="red",cex=2)
points(1,1/2, pch="S", col="red",cex=2)

dev.new()
scatter3D(x1,x2,x3,colvar=ZX[J,],clim=c(min(ZX[J,]),max(ZX[J,])),pch=20,
  cex=0.8,col=rainbow(200))
dev.new()
scatter3D(ya1,ya2,ya3,colvar=ZYa[J,],clim=c(min(ZYa[J,]),max(ZYa[J,])),
  pch=20,cex=0.8,col=rainbow(200))

##### End exapmle 2 #####

# Example 3 #####

```

```

library(plot3D)
library(Matrix)
library(stats)
library(MASS)
set.seed(19908)

rm(list = ls())
graphics.off()
#####
# III Sampling point on S^2 via usual parameterization on squares
# and using Angles artg(x2,x1)/2*pi and artg((x1^2+x2^2)^{0.5},x3)/
pi

# natural parameterization via the square [0,1[x[01]
N <- 100 #32 # considering that N is even
N2 <- N^2
tt <- seq(0, 1, length.out = N)
xt <- seq(0, 1, length.out = N)
xs <- seq(0, 1, length.out = N)
xts <- mesh(xt,xs)

# original points representation on the sphere
x1 <- cos(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x2 <- sin(2*pi*xts$x)*sin(pi*xts$y)
x3 <- cos(pi*xts$y)

dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 45, colkey = FALSE, bty = "b2",add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 90, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2))

dev.new()
scatter3D( x1, x2, x3, phi = 45, bty = "b2",
           pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed", xlim=c(-1.2, 1.2),
           ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black" )

#examples of parameter values for square deformation
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
# a1 <- 1 ; a2 <- 1 ; b1 <- 1 ; b2 <- 1 # case of no
coordinate changes
# a1 <- 5 ; a2 <- 5 ; b1 <- 5 ; b2 <- 5
# a1 <- 0.3 ; a2 <- 0.3 ; b1 <- 0.3 ; b2 <- 0.3
a1 <- 3 ; a2 <- 2 ; b1 <- 2 ; b2 <- 2
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 3 ; b2 <- 3
# a1 <- 3 ; a2 <- 3 ; b1 <- 2 ; b2 <- 2

#####
# Angles artg(x2,x1)/2*pi and artg((x1^2+x2^2)^{0.5},x3)/pi
ang1<-atan2( x2, x1)/(2*pi) ##### theta angle
ang2<-atan2(( x1^2+ x2^2)^{0.5}, x3)/pi ##### phi angle

##### theta angle correction
ang1[which(ang1 < 0,arr.ind =TRUE)]<-1+ang1[which(ang1 < 0,arr.ind =TRUE)]
|

```

```

##### compute phit and phis #####
phit <- pbeta(ang1, a1, a2, ncp = 0)
phis <- pbeta(ang2, b1, b2, ncp = 0)##/pbeta(max(ang2), b1, b2, ncp = 0)

##### grid #####
dev.new()
plot(xts$x, xts$y, xlab = " ", ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )

dev.new()
plot(phit, phis, xlab = " ", ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )

##### square transformation with intermingled coordinates

#u<-phit
#v<-phis
#w1 <- (0.5-u)^2*v^2 +(1-(0.5-u)^2)*v
#w2 <- (0.5-v)^2*u^2 +(1-(0.5-v)^2)*u
#dev.new()
#plot(w1, w2, xlab = " ", ylab = " ", type="p", pch=20, cex=0.5 )
# view north and south poles
#points(0,1/2, pch="N", col="red", cex=2)
#points(1,1/2, pch="S", col="red", cex=2)
#phit<-w1
#phis<-w2

##### tranformation datos #####
yy=0 ## value
ya1 <- cos(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya2 <- sin(2*pi*phit)*sin(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))
ya3 <- cos(pi*(yy*phit+(1-yy)*phis))

##### figures #####
dev.new()
surf3D( x1, x2, x3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2", add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2) )

dev.new()
surf3D( ya1, ya2, ya3, phi = 40, colkey = FALSE, bty = "b2", add=FALSE,
        lighting = FALSE, ticktype = "detailed", ltheta = 20, xlim=c
        (-1.2, 1.2),
        ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2) )

dev.new()
#par(mfrow = c(2, 2))
scatter3D( ya1, ya2, ya3, phi = 45, bty = "b2",
          pch = 20, cex = 0.5, ticktype = "detailed", xlim=c(-1.2, 1.2),
          ylim=c(-1.2, 1.2), zlim=c(-1.2, 1.2), col="black" )

# Covariance function on S^2 via the 4 first legendre Polynomials
Cv <- function(d, B){
  # d : the cosine of inter-points angular distances
  # B : parameters for the covariance defined

```

```

# B1: nugget effect
return( B[1] + B[2]*d + B[3]*(3*d^2-1)/2+ B[4]*(5*d^3- 3*d)/2 )
}

##### compute covariance #####
rd <- function(mx,N){
  cax<- matrix(0, nrow = N, ncol = N) # matriz de ceros
  for (k in 1:(N-1)){
    flx<-length(mx[1,])
    alx<-mx[seq(1,flx,by=N)]
    cax[k,(k:N)]<-alx
    cax[(k:N),k]<-alx
    mx<-as.matrix(mx[-(1:(1+N)),-(1:(1+N))])
  }
  cax[N,N]<-mx # matriz
  covX<-cax ## covariance matrix
  return(covX)
}

##### simulation of iid gaussian vector N(0,G)
#####
##### gaussian vector Z #####
mu = rep(0,N)
I<-diag(1,N)
Z<-mvrnorm(n=N2,mu,I)

B <- c(0.1, 0.3, 0.3, 0.3) # example of parameterization with nugget
effect
# B <- c(0 , 0.3, 0.3, 0.4)

### original coordinates
X <- cbind(as.vector(x1) , as.vector(x2) , as.vector(x3) )

#matrix of cosines of angular inter distances
dX <- X%*%t(X)

# Covariance matrix for original points
GammaX <- as.matrix( Cv(dX,B), N, N)

rdX <- rd(GammaX,N) ### covariance matrix X

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVD <- svd(rdX)

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
structure
ZX <- t((SVD$u %*% diag(sqrt(SVD$d)) %*% SVD$v) %*% t(Z))

##### transformada angles
#####
Ya <- cbind(as.vector(ya1) , as.vector(ya2) , as.vector(ya3) )

#matrix of cosines of angular inter distances
dYa <- Ya%*%t(Ya)

# Covariance matrix

```

```

GammaYa <- as.matrix( Cv(dYa,B), N, N)

rdYa <- rd(GammaYa,N) ##### covariance matrix transform "Ya"

#computing GammaX^{1/2} by singular value decomposition procedure
SVDYa <- svd(rdYa)

# transforming the indpt gaussian Z into a field with CV covariance
structure
ZYa <- t((SVDYa$u %*% diag(sqrt(SVDYa$d)) %*% SVDYa$v) %*% t(Z))

##### Comparing covariates #####
cZX<-cov(ZX)
cZX[1:10,1]
rdX[1:10,1]

cZYa<-cov(ZYa)
cZYa[1:10,1]
rdYa[1:10,1]

##### A sample of the simulated random field on grid #####
library(spam)
library(grid)
library(fields)

J <- sample(seq(1,N2), N)
# A: Representation of the initial random field on [0,1[x[O,1]
dev.new()
image.plot(xts$x, xts$y,ZX[J,],xlab=" ",ylab=" ",col=terrain.colors(100))

# B: Representation of the random field on [0,1[x[O,1] after parameter
changes:
# (x1,x2,x3) -> (phit,phis) keeping the same 'trajectory':
# since Z_Phi(x) = Z(y)

dev.new()
image.plot(phit, phis, ZYa[J,],xlab=" ",ylab=" ",col=terrain.colors(100))

##### projection region
#####
dev.new()
plot(phit, phis, type="p",xlab=" ",ylab=" ", pch=20, cex=0.5 )
# # view north and south poles
points(0,1/2, pch="N", col="red",cex=2)
points(1,1/2, pch="S", col="red",cex=2)

dev.new()
scatter3D(x1,x2,x3,colvar=ZX[J,],clim=c(min(ZX[J,]),max(ZX[J,])),pch=20,
cex=0.8,col=rainbow(200))

dev.new()
scatter3D(ya1,ya2,ya3,colvar=ZYa[J,],clim=c(min(ZYa[J,]),max(ZYa[J,])),
pch=20,cex=0.8,col=rainbow(200))

##### End example 3#####

```

Bibliografía

- AKAIKE, H. (1973). Maximum likelihood identification of gaussian autoregressive moving average models. *Biometrika* **60**(2), 255–265.
- BERG, C. & PORCU, E. (2017). From schoenberg coefficients to schoenberg functions. *Constructive Approximation* **45**(2), 217–241.
- CASTRUCCIO, S. & GUINNESS, J. (2017). An evolutionary spectrum approach to incorporate large-scale geographical descriptors on global processes. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)* **66**(2), 329–344.
- CHEN, D., MENEGATTO, V. A. & SUN, X. (2003). A necessary and sufficient condition for strictly positive definite functions on spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society* **131**, 2733–2740.
- CHILES, J.-P. & DELFINER, P. (2009). *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*, vol. 497. John Wiley & Sons.
- CHRISTAKOS, G. (2000). *Modern spatiotemporal geostatistics*, vol. 6. Oxford University Press.
- CRESSIE, N. & HAWKINS, D. M. (1980). Robust estimation of the variogram: I. *Journal of the International Association for Mathematical Geology* **12**(2), 115–125.
- CRESSIE, N. & HUANG, H.-C. (1999). Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions. *Journal of the American Statistical Association* **94**(448), 1330–1339.
- CRESSIE, N. A. (1993). Spatial prediction and kriging. *Statistics for Spatial Data, Revised Edition*, 105–209.

- DIMITRAKOPOULOS, R. & LUO, X. (1994). Spatiotemporal modeling: covariances and ordinary kriging systems. *Geostatistics for the next century. Kluwer, Dordrecht* , 88–93.
- GANTMACHER, F. R. (1960). *Theory of Matrices. 2V*. Chelsea publishing company.
- GENTON, M. G. & PERRIN, O. (2004). On a time deformation reducing nonstationary stochastic processes to local stationarity. *Journal of Applied Probability* **41**(1), 236–249.
- GNEITING, T. (2002a). Nonseparable, stationary covariance functions for space–time data. *Journal of the American Statistical Association* **97**(458), 590–600.
- GNEITING, T. (2002b). Nonseparable, stationary covariance functions for space–time data. *Journal of the American Statistical Association* **97**(458), 590–600.
- GNEITING, T. (2013). Strictly and non-strictly positive definite functions on spheres. *Bernoulli* **19**(4), 1327–1349.
- GUELLA, J. & MENEGATTO, V. (2016). Strictly positive definite kernels on a product of spheres. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **435**(1), 286–301.
- GUELLA, J. C., MENEGATTO, V. A. & PERON, A. P. (2016a). An extension of a theorem of schoenberg to products of spheres. *Banach Journal of Mathematical Analysis* **10**(4), 671–685.
- GUELLA, J. C., MENEGATTO, V. A. & PERON, A. P. (2016b). Strictly positive definite kernels on a product of spheres II. *SIGMA* **12**(103).
- GUTTORP, P., SAMPSON, P. & NEWMAN, K. (1992). Nonparametric estimation of spatial covariance with application to monitoring network evaluation. *Statistics in the environmental and earth sciences* , 39–51.
- HITCZENKO, M. & STEIN, M. L. (2012). Some theory for anisotropic processes on the sphere. *Statistical Methodology* **9**(1), 211–227.
- HUANG, C., ZHANG, H. & ROBESON, S. M. (2012). A simplified representation of the covariance structure of axially symmetric processes on the sphere. *Statistics & Probability Letters* **82**(7), 1346–1351.

- KITANIDIS, P. K. & VOMVORIS, E. G. (1983). A geostatistical approach to the inverse problem in groundwater modeling (steady state) and one-dimensional simulations. *Water resources research* **19**(3), 677–690.
- KYRIAKIDIS, P. C. & JOURNEL, A. G. (1999). Geostatistical space–time models: a review. *Mathematical geology* **31**(6), 651–684.
- LAFONTAINE, J. (2012). *Introduction aux variétés différentielles*. EDP sciences.
- LANG, A. & SCHWAB, C. (2013). Isotropic gaussian random fields on the sphere: regularity, fast simulation and stochastic partial differential equations. *Annals of Applied Probability* **25**(6), 3047–3094.
- MATÉRN, B. (1986). Spatial variation, volume 36 of lecture notes in statistics.
- MATHAI, A. M., PROVOST, S. B. & HAYAKAWA, T. (2012). *Bilinear forms and zonal polynomials*, vol. 102. Springer Science & Business Media.
- MATHERON, G. (1965). *Les variables régionalisées et leur estimation*. Masson et Cie.
- MENEGATTO, V. A. (1994b). Strictly positive definite kernels on the Hilbert sphere. *Applicable Analysis* **55**(1-2), 91–101.
- MØLLER, J., NIELSEN, M., PORCU, E. & RUBAK, E. (2016). Determinantal point process models on the sphere. *Bernoulli* To appear. Available at arXiv:1607.03675 .
- PERRIN, O. & SENOUSI, R. (1999). Reducing non-stationary stochastic processes to stationarity by a time deformation. *Statistics & Probability Letters* **43**(4), 393–397.
- PERRIN, O. & SENOUSI, R. (2000). Reducing non-stationary random fields to stationarity and isotropy using a space deformation. *Statistics & probability letters* **48**(1), 23–32.
- PINKUS, A. (2004). Strictly hermitian positive definite functions. *Journal d'Analyse Mathématique* **94**(1), 293–318.
- PORCU, E., ALEGRÍA, A. & FURRER, R. (2017). Modeling temporally evolving and spatially globally dependent data. *arXiv preprint arXiv:1706.09233* .
- PORCU, E., BEVILACQUA, M. & GENTON, M. G. (2016). Spatio-temporal covariance and cross-covariance functions of the great circle distance on a sphere. *Journal of the American Statistical Association* **11**, 888–898.

- RAO, C. R. (1972). Estimation of variance and covariance components in linear models. *Journal of the American Statistical Association* **67**(337), 112–115.
- RAO, D., KEATS, B., LALOUEL, J., MORTON, N. & YEE, S. (1979). A maximum likelihood map of chromosome 1. *American journal of human genetics* **31**(6), 680.
- ROYDEN, H. L. (1988). Real analysis, third.
- SAMPSON, P. D. & GUTTORP, P. (1992). Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. *Journal of the American Statistical Association* **87**(417), 108–119.
- SCHOENBERG, I. J. (1938). Metric spaces and positive definite functions. *Transactions of the American Mathematical Society* **44**(3), 522–536.
- SCHOENBERG, I. J. (1942). Positive definite functions on spheres. *Duke Math. Journal* **9**, 96–108.
- SOTOMAYOR, J. (1979). *Li, cões de equa, cões diferenciais ordinárias*, vol. 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.
- STEIN, M. L. (2005). Space–time covariance functions. *Journal of the American Statistical Association* **100**(469), 310–321.